

Material C3 – PTDM

1. INCERTITUDINEA DE MĂSURARE - INTRODUCERE

Incertitudinea de măsurare reprezintă un concept important, asociat dispersiei valorilor pe care le putem atribui în mod rezonabil unui măsurand. De reținut că valoarea măsurată x se poate modifica în funcție de condiții externe, chiar mijlocul nostru de măsurare este supus îmbătrânirii, uzurii, erorilor de zero, liniarității, erorilor de histerezis sau lipsei calibrării. Procesul de măsurare sau metoda prin care lucrăm pot fi supuse fie erorilor aleatorii, fie erorilor sistematice (despre care vom discuta ulterior). Totodată, pot apărea greșeli de citire a rezultatelor sau erori cauzate de necunoașterea influenței condițiilor de mediu asupra sistemului de măsurare. În fine, operatorul poate să nu prezinte consistență în execuția procedurilor aferente. Toate aceste chestiuni, dar și altele, conduc la concluzia că niciodată nu putem avea încredere totală în valoarea măsurată x . Intervalul de incertitudine, prin dispersia valorilor măsurate și analiza statistică, însumează toți acești factori. Cu alte cuvinte, *incertitudinea de măsurare reprezintă un cumul de factori care definesc limitele de acceptanță ale valorilor măsurate*.

Intervalul de încredere (sau *de incertitudine*) se întinde simetric în jurul valorii măsurate, x , de la *limita inferioară de încredere* (L_i) până la *limita superioară de încredere* (L_s). După cum precizam în cadrul C1, semnificația intervalului de încredere este că valoarea adevărată a măsurandului se află, cu o anumită probabilitate ($P \in [0 \div 1]$), în acest interval: $L_i \leq X_a \leq L_s$. Această probabilitate exprimată în procente ($P \cdot 100 [\%]$) se numește *nivel de încredere*. Cu cât intervalul de încredere este mai larg, cu atât este mai mare și probabilitatea ca valoarea adevărată a măsurandului să se afle în acest interval, respectiv nivelul de încredere este mai mare. Însă, lărgirea intervalului de încredere înseamnă implicit creșterea incertitudinii asupra rezultatului măsurării, pentru că, *incertitudinea corespunde jumătății intervalului de încredere*. După cum precizam, în practică inginerească, *intervalul de încredere* este deseori numit *interval de incertitudine*. Iar limitele L_i și L_s se mai numesc și *limite de incertitudine*.

Incertitudinea de măsurare standard se clasifică în două tipuri: *incertitudinea de tip A* și *incertitudinea de tip B*. Cele două categorii sunt clasificate în funcție de metoda de lucru pe care o abordăm pentru evaluarea rezultatelor noastre.

Incertitudinea de tip A (și care este des întâlnită în context industrial) se determină pe baza analizei unui set de date prin intermediul unor metode statistice. Această analiză presupune existența unui set de date, obținute în condiții aparent similare, suficient de consistent încât să putem aprecia cu o rezoluție satisfăcătoare caracteristicile sistemului nostru de măsurare. Cu alte cuvinte, utilizăm termenul de *incertitudine de tip A* când evaluăm un set de zeci (sau chiar sute) de valori măsurate în aceleași condiții de lucru. Cu ajutorul *incertitudinii de tip A*, vom caracteriza global acel set de valori.

Incertitudinea de tip B se determină pe baza analizei metodelor experimentale și de măsurare utilizate. Aici discutăm despre cumularea unor factori care țin de experiența inginerească, de cunoașterea comportamentului unui sistem de măsurare din perspectiva unor proiecte anterioare de cunoașterea datelor de calibrare ale aparatului, precum și tot ceea ce înseamnă judecată critică a metodelor utilizate. Pentru analiza *incertitudinii de tip B*, vom utiliza valori singulare și metode care analizează incertitudinea propagată, prin calcule indirekte ale valorii unui anumit parametru, sau vom utiliza informații pe care le vom identifica în manualele tehnice.

După cum observăm, dacă în cazul *incertitudinii de tip A* lucrurile sunt relativ ușor de implementat (după cum vom vedea), analiza *incertitudinii de tip B* depinde de complexitatea aplicației și de experiența inginerului. Nu vom insista asupra altor detalii. Pentru scopul acestui material, este suficient să cunoaștem cele două tipuri de evaluare a incertitudinii. Evident, trebuie să stim că rezultatele furnizate de un sistem de măsurare includ incertitudinea formată din contribuții din ambele clasificări.

Incertudinea de măsurare include, la modul general, două tipuri de erori elementare, despre care vom discuta în continuare. Acestea tipuri sunt *erorile sistematice* și *erorile aleatorii*. Apariția erorilor într-un sistem de măsurare nu poate fi evitată. Însă, prin alegerea instrumentelor potrivite și cu ajutorul analizei riguroase a datelor obținute, efectul erorilor poate fi minimizat, dar nu eliminat. În cele ce urmează, trecem deocamdată cu vederea posibilele aşa-numite *erori grosolane*, cauzate de unele greșeli ale operatorului în modul de utilizare a instrumentelor de măsură.

Înainte a a discuta despre *erori sistematice* și *erori aleatorii*, este necesar să clarificăm *modul în care prezentăm rezultatele* obținute în urma procesului de măsurare. Reținem o regulă importantă. *Când prezentăm rezultatul unei măsurări, trebuie să precizăm întotdeauna limitele de eroare sau intervalul de încredere aferent.*

Dacă valoarea unei tensiuni măsurate $x = 4,23V$, iar limitele de eroare acceptate sunt diferite, fără a fi calculate în baza unei analize statistice riguroase, $Lei = -0,02V$ și $Les = +0,05V$, putem nota $x = 4,23V, -0,02V, +0,05V$. Însă acest caz este rar întâlnit.

De cele mai multe ori, limitele de eroare sunt egale în valoare absolută. Dacă presupunem că valoarea erorii absolut tolerante este de $0,05V$, putem prezenta compact rezultatul măsurării alături de inacuratețea aferentă ca $x = (4,23 \pm 0,05)V$. După cum precizam, în acest caz *intervalul de inacuratețe nu a fost construit pe baza unei analize statistice. El arată strict ceea ce numim limite de eroare sau eroarea absolut tolerată.*

Cu recomandarea ca domeniul de măsură să fie ales acoperitor, dar pe cât posibil apropiat de valoarea convențională adevărată a măsurandului, se poate aprecia că în măsurările curente, în care predomină erorile sistematice, rezultatul se poate exprima sub forma $x = x_m \pm \Delta_t$ în care x_m este valoarea măsurată, iar Δ_t reprezintă *eroarea absolută tolerată*. Astfel, utilizăm specificațiile producătorului instrumentului de măsură în vederea estimării inacurateței (sau, în sens negativ, inacurateței) și ne asigurăm că am urmat procedura corectă pentru a măsura valorile acestor componente.

Dacă valoarea tensiunii măsurate $x = 4,23V$ are asociat un interval de incertitudine calculat în baza unei analize statistice riguroase, de exemplu $\pm 0,05V$, cu un nivel de încredere de 95% (adică probabilitatea de 0,95), vom prezenta rezultatul ca $x_{0,95} = (4,23 \pm 0,05)V$ sau $x = (4,23 \pm 0,05)V; P = 0,95$. În acest caz estimarea inacurateței de măsurare s-a făcut pe baza metodelor de calcul probabilistic, iar din acest motiv discutăm despre un interval de incertitudine.

Există câteva reguli de reprezentare a rezultatelor și este util ca acestea să fie luate în considerare în vederea respectării rigurozității inginerești. Astfel, cifrele diferite de 0 contează ca fiind semnificative (1); cifrele de 0 care se află între cifre diferite de 0 contează ca fiind semnificative (2); cifrele de 0 aflate la dreapta virgulei sunt semnificative doar dacă se află în continuarea unor cifre diferite de 0 (3); cifrele de 0 care sunt prezente doar pentru a indica poziția virgulei nu sunt semnificative (4); cifrele de 0 care pot fi omise fără a afecta prezentarea valoarei măsurate nu sunt semnificative (5).

Prin urmare, dacă $x = 4,2356V$, înseamnă că am utilizat 5 cifre semnificative și 4 cifre de precizie (regula 1). Dacă $x = 40,2356V$, atunci am utilizat 6 cifre semnificative și 4 cifre de precizie

(regulile 1 și 2). Dacă $x = 4,2306V$, atunci am utilizat 5 cifre semnificative și 4 cifre de precizie (regulile 1 și 2). Dacă $x = 0,2306V$, atunci am utilizat 4 cifre semnificative și 4 cifre de precizie. Pentru cifra 0 din stânga virgulei se aplică regula 4. Atenție la situația în care $x = 4,230V$. În acest caz, avem 4 cifre semnificative (regula 3) și 3 cifre de precizie. Numărul a fost obținut prin rotunjire, el fiind probabil $x = 4,2295V$ cu rezoluția de reprezentare de $\pm 0,0005V$. Dacă $x = 0,03060V$, atunci am utilizat 4 cifre semnificative și 5 cifre de precizie. Cifra 0 din stânga virgulei nu este semnificativă (regula 4). Prima cifră 0 din dreapta virgulei nu este semnificativă (regula 3). Cifra 0 aflată între cifrele 3 și 6 este semnificativă (regula 2). Ultima cifră 0 este semnificativă fiind rezultatul unei rotunjiri.

Este foarte important ca rezultatul prezentat să aibă aceeași unitate de măsură pentru valoarea măsurată și pentru caracteristica de inacuratețe. Astfel, reprezentarea $x = (4 \pm 0,1)V$ utilizează aceeași unitate de măsură și o singură cifră semnificativă. La fel, pentru $x = (43 \pm 0,11)g$ utilizează aceeași unitate de măsură și două cifre semnificative. Contraexemple ar putea fi $x = 4V \pm 200mV$ sau $x = 43g \pm 250mg$. În fine, dacă inițial $x_1 = 4,2195V$ și $x_2 = 4,23V$, atunci și reprezentarea primei valori măsurate va fi $x_1 = 4,22V$. Ambele rezultate prezentate vor avea numărul minim de cifre semnificative (adică 3), vor avea 2 cifre de precizie și aceeași unitate de măsură.

Dacă într-un proces de măsurare cele două tipuri de erori (sistematice și aleatorii) coexistă, mai întâi trebuie încercată reducerea erorilor sistematice și apoi aplicate metode statistice pentru reducerea erorilor aleatorii.

Cauzele care determină apariția erorilor aleatorii au un caracter imprevizibil. De exemplu, perturbațiile (zgomotele) de natură electrică pot fi induse fie direct la nivelul instrumentelor de măsură, fie pe parcursul transmiterii la distanță a semnalelor captate de senzori. Liniile electrice de putere pot perturba prin cuplaje inductive sau capacitive cablurile de semnal care trec prin apropiere. Efect perturbator au și regimurile tranzistorii ale diferitelor echipamente electrice sau circuite de radiofrecvență din proximitatea sistemului de măsură. Schimbările imprevizibile ale condițiilor de mediu pot cauza de asemenea erori aleatorii. În cazul instrumentelor analogice, chiar și aprecierea poziției acului indicator între două gradații ale scalei este o sursă de erori aleatorii.

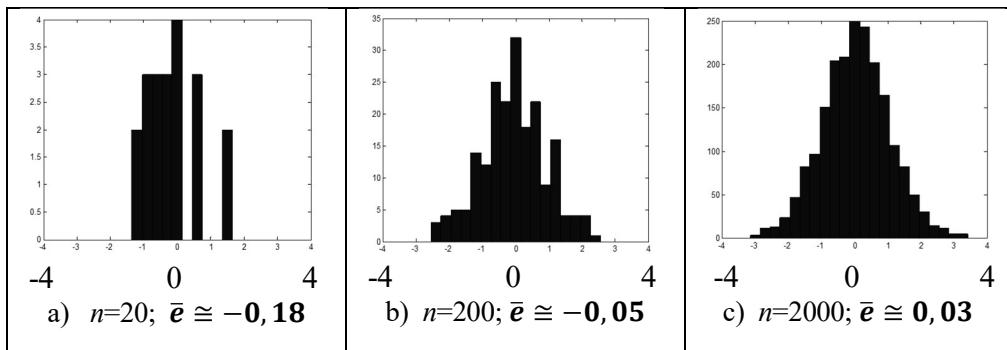
Auratețea și precizia măsurărilor sunt afectate de *zgomotele* care se suprapun peste semnalele utile. Se consideră că aceste manifestări parazite sunt fluctuații aleatorii, cu valoare medie nulă, ale tensiunilor și curentilor din sistemul de măsurare. Originea zgomotelor se află în chiar componentele instrumentației de măsurare și se explică prin caracterul discret al sarcinii electrice. Pentru creșterea performanțelor măsurării (implicit reducerea erorilor aleatorii) se recomandă folosirea unor componente de zgomot redus care, asociate cu tehnici de proiectare adecvate, imprimă același caracter întregului sistem de măsurare. Eventualele influențe continue ale zgomotelor, numite curenti sau tensiuni de decalaj, sunt eliminate prin tehnici de proiectare a circuitelor care implică utilizarea amplificatoare operaționale.

Interferențele sunt perturbații care afectează semnalele de măsurare, dar provin din afara instrumentației. Ele au, în general, un caracter periodic și sunt cauzate de alte instalații tehnice, cum ar fi liniile de transport al energiei electrice, antenele de radio și televiziune, circuite de comutare etc. Toate acestea produc câmpuri electrice și magnetice care pot perturba, prin interferență, sistemele de măsurare. Pentru a reduce posibilele interferențe se procedează la *ecranarea* echipamentelor de măsurare, sau la *modificarea conexiunilor la masă* ale acestora. O altă posibilă soluție este *plasarea sistemului de măsurare la o distanță suficient de mare* (cel puțin 0,5m), astfel încât acesta să nu fie afectat de interferențe generate de echipamente care funcționează în comutație. Există posibilitatea ca liniile de transmitere a semnalelor să fie *torsadate* (twisted pair), sau *ecranate*

(de exemplu prin utilizarea modelului de cabluri coaxiale RG316). Foarte des, aceste metode sunt aplicate în momentul în care lucrăm cu semnale de înaltă frecvență. În aplicațiile de măsurare se recomandă conectarea aparatului sau echipamentului de măsurare la sursa semnalului util cu ajutorul unor fire cât mai scurte. Prin urmare, pe cât este posibil, *păstrați lungimea firelor de conexiune cât mai mică*.

Presupunând că valoarea măsurandului rămâne constantă pe durata repetării operațiunii de măsurare, erorile cu caracter aleatoriu vor fi atât pozitive, cât și negative, iar valorile măsurate se vor situa de o parte și de alta a valorii adevărate a mărimii. Ca urmare, este firesc să considerăm că *valoarea adevărată* a măsurandului este aproximativ egală cu *media valorilor măsurate*.

Totuși, chiar dacă măsurările succesive se desfășoară în condiții practic identice, iar măsurandul își păstrează constantă valoarea, prin operațiunea de mediere nu se pot elimina cu totul, ci doar reduce, erorile aleatorii. Teoretic, pentru ca prin mediere să se obțină valoarea adevărată a măsurandului, ar trebui să se facă un număr infinit de măsurări ($n \rightarrow \infty$).



Histograme ale erorilor aleatorii pentru $n = 20 \div 2.000$ de măsurări simulate.

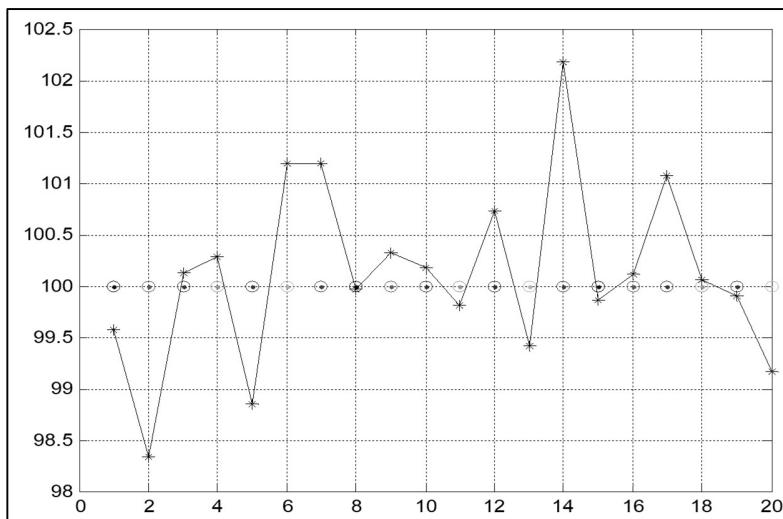
Astfel, pentru $n = 20$ de măsurări succesive, în 4 cazuri erorile de măsurare sunt aproximativ nule (coloana cea mai înaltă a histogramei) dar, în general, predomină erorile negative. Pentru $n = 200$ de măsurări, efectuate în condiții practic identice, histograma erorilor evidențiază o tendință de simetrizare, în jurul coloanei cu 32 de erori aproximativ nule. Ultimul caz corespunzătoare unui număr foarte mare de măsurări repetitive ($n = 2000$). Se observă că cele mai multe erori se încadrează în intervalul din jurul valorii zero (coloana cea mai înaltă din histogramă corespunde la 250 de valori obținute prin simulare).

Pentru ca prin medierea valorilor obținute în măsurări repetitive să se eliminate total erorile aleatorii, ar trebui ca media acestor erori să fie nulă, ceea ce nu se întâmplă. Se constată că media erorilor ar tinde spre zero odată cu creșterea spre infinit a numărului de măsurări repetitive. De exemplu, mediile erorilor redată de histogramele au fost: $\bar{e} \approx -0,18$ pentru $n = 20$, $\bar{e} \approx -0,05$ pentru $n = 200$, respectiv $\bar{e} \approx 0,03$ pentru $n = 2000$.

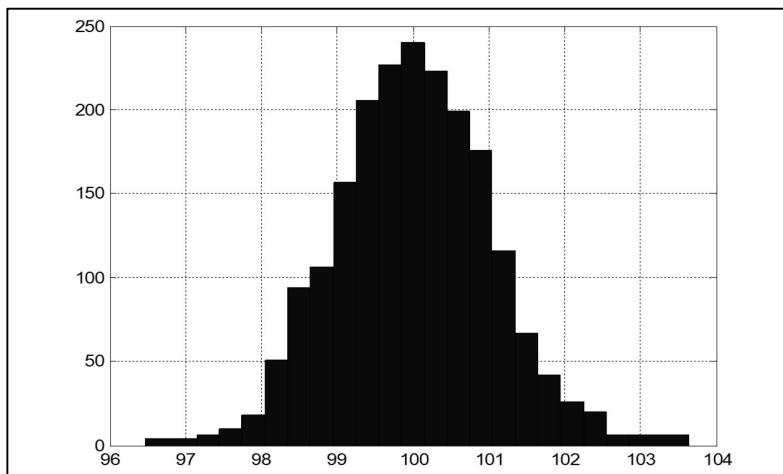
În imaginea următoare se poate urmări poziționarea rezultatelor a 20 de măsurări succesive (notație *), față de valoarea adevărată a măsurandului (notație o). De exemplu, presupunând că mărimea de măsurat este o tensiune constantă $U = 100V$, cele mai multe rezultate se plasează în apropierea acestei valori, ceea ce înseamnă că în histograma corespunzătoare, coloana cea mai înaltă ar corespunde unor erori apropiate de zero. Cele mai mari abateri de la valoarea adevărată se constată la măsurările a două ($U_2 \approx 98,3V$ cu eroarea absolută $\Delta_2 \approx -1,7V$) și a patrusprezecea ($U_{14} \approx 102,2V$ cu eroarea absolută $\Delta_{14} \approx +2,2V$).

Urmărind histogramele erorilor, se observă că, odată cu creșterea numărului de măsurări repetitive, alura histogramei tinde clar spre o *distribuție normală*, redată prin aşa-numita *curbă a lui*

Gauss, în formă de clopot. Aceeași alură se constată și în histograma rezultatelor a $n = 2000$ de măsurări simulate, pentru un măsurand având valoarea 100. Trebuie reținut că în histograme, pe abscisă se reprezintă valoarea erorii sau valoarea măsurandului, iar pe ordonată apare numărul de erori, respectiv de valori ale măsurandului, situate într-un anumit interval. De exemplu, se observă că, din cele 2000 de măsurări simulate, aproximativ 240 conduc la rezultate foarte apropiate de valoarea adevărată a măsurandului (coloana, sau banda, sau fâșia corespunzătoare valorii 100 este cea mai înaltă).



Rezultatele unor măsurări succesive (*), față de valoarea adevărată (o).



Histograma rezultatelor unor măsurări succesive simulate.

Cea mai cunoscută funcție densitate de probabilitate - un concept teoretic corespunzător unui număr infinit de măsurări ($n \rightarrow \infty$), descrie aşa-numita *distribuție normală*, redă curba (clopotul) lui Gauss și are următoarea expresie matematică:

$$f dp(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (1)$$

În expresia anterioară, x reprezintă valoarea măsurată, iar parametrii μ și σ sunt *media*, respectiv *abaterea standard*, ambele determinate pentru un număr infinit de măsurări ($n \rightarrow \infty$).

Probabilitatea ca valoarea măsurandului să se afle în intervalul $[x_1 \div x_2]$ este egală cu aria mărginită de $f dp(x)$ în cadrul acestui interval:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f dp(x) \cdot dx. \quad (2)$$

Densitatea de probabilitate normală (gaussiană), având valoarea medie μ și deviația/abaterea standard σ , se notează condensat ca $N(\mu, \sigma)$.

Cum valoarea maximă a densității de probabilitate corespunde abscisei $x = \mu$, și anume $f dp(\mu) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, înseamnă că parametrul μ reprezintă *valoarea medie* pentru distribuția normală. Semnificația parametrului σ rezultă cu claritate dacă se calculează probabilitatea ca valorile măsurate să se încadreze în intervale simetrice în jurul valorii medii. Patru astfel de date statistice privitoare la ipotetice seturi de valori măsurate care aparțin unei densități de probabilitate normală $N(\mu, \sigma)$, se prezintă tabelul următor.

Probabilități pentru intervale simetrice ale distribuției normale $N(\mu, \sigma)$.

Intervalul simetric în jurul mediei μ	$P(x_1 \leq x \leq x_2) \cdot 100$ (Probabilitatea în %)	Numărul probabil de valori în afara intervalului
$[(\mu - \sigma) \div (\mu + \sigma)]$	68,27	1 din 3
$[(\mu - 2\sigma) \div (\mu + 2\sigma)]$	95,45	1 din 22
$[(\mu - 3\sigma) \div (\mu + 3\sigma)]$	99,73	1 din 370
$[(\mu - 4\sigma) \div (\mu + 4\sigma)]$	99,99	1 din 15.625

Astfel, se constată că, deși funcția densitate de probabilitate este definită pentru tot domeniul $(-\infty, +\infty)$, practic este aproape imposibil să rezulte valori ale măsurandului în afara intervalului $[(\mu - 4\sigma) \div (\mu + 4\sigma)]$. Probabilitatea ca rezultatele măsurărilor să fie în intervalul $[(\mu - \sigma) \div (\mu + \sigma)]$ este suficient de mare ($\approx 0,68$), astfel încât cel mult unul din trei rezultate să se abată cu mai multe de $\pm\sigma$ de la valoarea medie μ . De aceea, parametrul σ se numește *abatere standard* (sau *standard deviation*). De exemplu, histogramele anterioare s-au generat cu un algoritm pentru o distribuție normală cu parametrii $\mu = 100$ și $\sigma = 1$ și se observă că niciuna dintre erorile aleatorii nu ieșe din intervalul $[(\mu - 4\sigma) \div (\mu + 4\sigma)] = [-4 \div +4]$. Similar, în secvența de valori măsurate, în condițiile în care valoarea adevărată a măsurandului este $\mu = 100$ și abaterea standard $\sigma = 1$, nicio valoare, din cele $n = 20$ obținute prin simulare, nu ieșe din intervalul $[(\mu - 4\sigma) \div (\mu + 4\sigma)] = [-96 \div +104]$.

În concluzie, se poate afirma că parametrul abatere standard σ descrie împărtierea valorilor măsurate în jurul mediei μ . Practic, din tabel rezultă că e foarte puțin probabil ca o valoare măsurată în condiții de manifestare a erorilor aleatorii să se afle în afara intervalului $[(\mu - 3\sigma) \div (\mu + 3\sigma)]$ (doar un rezultat din 370 de valori măsurate). Pe această constatare s-a formulat criteriul **3σ**. Adică se consideră că rezultatele care se află în afara intervalului $[(\mu - 3\sigma) \div (\mu + 3\sigma)]$ sunt cauzate de unele *erori grosolane*, care trebuie eliminate.

Prin urmare, în terminologia industrială este comună discuția despre aşa-numitele intervale/niveluri de încredere. Un nivel de încredere de „un sigma” înseamnă că aproximativ 68% dintre valorile măsurate trebuie să se regăsească în intervalul admis ca fiind valid. În cele mai multe situații, nivelul de încredere utilizat pentru validarea unei soluții de măsurare industrială este

de 2σ . Soluția de măsurare va fi acceptată dacă valorile furnizate se găsesc în procent de cel puțin 95% între limitele intervalului $[(\mu - 2\sigma) \div (\mu + 2\sigma)]$.

Practic, nu putem efectua decât un număr relativ limitat de măsurări. Dar media teoretică, μ , corespunde unui număr infinit de măsurări. Presupunând că operația de măsurare s-a repetat de n ori și s-au obținut valorile măsurandului x_i , unde $i = 1 \div n$, putem calcula *media empirică*:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3)$$

Statistic, valoarea medie m apare ca fiind cea mai probabilă dintre valorile măsurate. Pentru a stabili valoarea centrală a unui sir de valori măsurate, se poate folosi aşa-numita *valoare mediană*, definită ca valoarea situată numeric la mijlocul sirului de valori măsurate (50% dintre valorile măsurate sunt mai mici, iar 50% sunt mai mari decât mediana). De exemplu, presupunând că s-au măsurat și aranjat în ordine crescătoare un număr impar de valori, x_1, x_2, \dots, x_9 , mediana va fi valoarea măsurată x_5 . Dacă însă sirul valorilor măsurate și aranjate în ordine crescătoare cuprinde un număr par de valori, mediana poate fi determinată ca media aritmetică a valorilor centrale din sir. De pildă, pentru zece valori măsurate și aranjate în ordine crescătoare, x_1, x_2, \dots, x_{10} , mediana se determină ca $(x_5 + x_6)/2$.

Față de media empirică m (uneori notată μ , cu acceptul că $\mu \cong m$ dacă $n \geq 100$), rezultatele măsurărilor individuale prezintă *abateri* care au semnificația unor *erori de măsurare*: $a_i = x_i - m$, unde $i = 1 \div n$. Media patratelor acestor abateri se numește *varianță* și caracterizează global măsura în care rezultatele individuale se depărtează de media empirică m . S-a dovedit că deoarece media m este ea însăși calculată cu o anumită eroare, în calculul varianței este util un factor de corecție $[n/(n - 1)]$, care tinde spre unu odată cu creșterea lui n . Astfel, *varianța empirică* se calculează, în funcție de abaterile individuale, cu formula:

$$V = \left(\frac{n}{n-1} \right) \cdot \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (4)$$

Pe această bază se poate calcula o *abatere standard empirică* numită și *eroare medie pătratică experimentală*, sau incertitudine de tip A:

$$s = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2}. \quad (5)$$

Putem reține ideea că validarea unei soluții de măsurare, în condiții industriale, va parcurge un proces de analiză a rezultatelor înregistrate. Spre exemplu, un stand pentru testarea funcțională a unor plăci electronice generează un set de valori ale măsurărilor de tensiune, curent sau frecvență, în anumite noduri (sau puncte de test, „Test Points”). Pentru validarea caracteristicilor de acuratețe și repetabilitate, este posibil ca procesul de măsurare să fie repetat de câteva sute de ori, pentru același produs, sau pentru produse diferite. Generalizând, un set de valori prezintă un *grad de încredere mai ridicat dacă dispersia acestora este cât mai redusă*. În această situație putem avea convingerea că valoarea medie empirică m este foarte apropiată de valoarea adevărată a măsurandului. *Cu cât numărul valorilor măsurate crește, cu atât valoarea mediană tinde să se apropie de valoarea medie*.

2. APLICATII

Exemplu: Estimarea erorilor cumulate în cazul determinării valorii unei mărimi pe baza unor măsurări indirecte – legea de propagare a erorilor.

O metodă des întâlnită în calculul incertitudinii pentru măsurările indirecte este numită *propagarea incertitudinilor sau erorilor*. Metoda permite calculul incertitudinii dacă măsurandul $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$. Cu alte cuvinte, relația pentru calculul măsurandului Y include alți parametri, fiecare contribuind în calculul final cu o anumită incertitudine relativă. Însă este important să știm că acest caz este cel al mărimilor independente. Practic, nu există o corelație între parametrii funcției f . Se poate dovedi că relația (6) reprezintă o formă simplificată generală a *legii de propagare a erorilor* în cazul măsurărilor independente.

$$(\delta Y)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial X_i}}_{\text{eroră/incertidură indirect evaluată}} \cdot \underbrace{\delta X_i}_{\text{derivate parțiale}} \right)^2 \xrightarrow{\text{erori/incertitudini individuale}}$$
(6)

În relația (6) întâlnim coeficienții de sensibilitate $\frac{\partial f}{\partial X_i}$ (derivatele parțiale ale funcției f), și incertitudinile individuale δX_i asociate fiecărui măsurand considerat în calculul mărimii Y .

Calculăm rezistivitatea unui segment de cablu $\rho = \frac{R \cdot A}{L}$

$R = (2 \pm 0,1) \Omega$, $L = (1 \pm 0,01) m$, $A = (2 \cdot 10^{-6} \pm 1,5 \cdot 10^{-8}) m^2$

$\delta_R \approx \pm 5\%$ $\delta_L \approx \pm 1\%$ $\delta_A \approx \pm 0,75\%$

$\rho \approx \pm 6,75\% - \text{supraestimare}$

$\rho \approx \frac{2 \Omega \cdot 2 \cdot 10^{-6} m^2}{1 m} \approx 4 \mu\Omega m$

$\rho_{\max} = \frac{R_{\max} \cdot A_{\max}}{L_{\min}} \approx \frac{2,1 \Omega \cdot 2,015 \mu m^2}{0,99 m} \approx 4,27 \mu\Omega m$

$\rho_{\min} = \frac{R_{\min} \cdot A_{\min}}{L_{\max}} \approx 3,73 \mu\Omega m$

$\Rightarrow \rho = 4 \mu\Omega m \pm 6,75\% \rightarrow \text{supraestimare } \delta_\rho \%$

$\rho = (4 \pm 0,27) \mu\Omega m$

$\rho = (4 \pm 0,27) \mu\Omega m$

Legea de propagare a erorilor

$$\delta_\rho = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial L} \cdot \delta_L \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial A} \cdot \delta_A \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial R} \cdot \delta_R \right)^2} = \pm \sqrt{(-4 \mu\Omega \cdot 0,01 m)^2 + (2 \frac{\Omega}{m} \cdot 0,015 \mu m^2)^2 + (2 \mu m \cdot 0,1 \%)^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial L} = \frac{\partial \left(\frac{RA}{L} \right)}{\partial L} = - \frac{RA}{L^2} \approx - \frac{4 \mu\Omega m^2}{1 m^2} \approx -4 \mu\Omega$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial A} = \frac{R}{L} \approx \frac{2 \Omega}{1 m} = 2 \frac{\Omega}{m}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{A}{L} \approx \frac{2 \mu m^2}{1 m} \approx 2 \mu m$$

$\rho = (4 \pm 0,27) \mu\Omega m$ - statistic mult mai potrivită

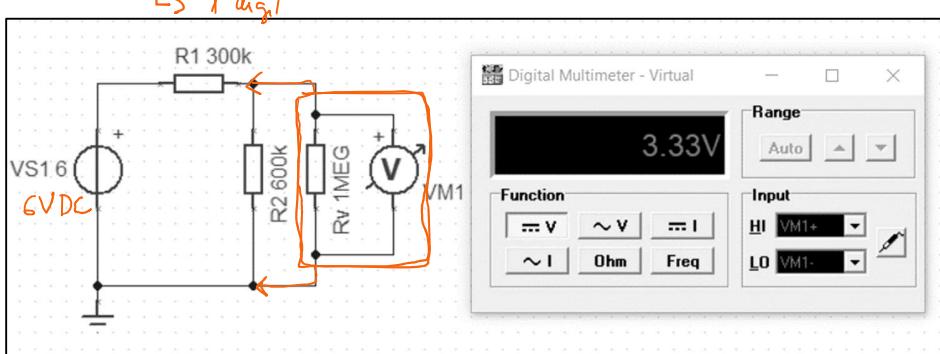
Temă optională: vezi C2, $P = 1,1$, $i = (80 \pm 2,25) mA$, $U = (70 \pm 1,5) V$

Prin supraestimare $\delta_P \approx \pm 4,195\%$

Prin calcul în quadratură $\delta_P \approx \pm 3,5\%$

Prin calcul cu legea de propagare $\delta_P \approx ??$

Exemplu: Problema aduce în discuție eroarea sistematică de interacțiune, care apare atunci când aranjamentul experimental nu asigură măsurarea exclusivă a mărimii vizate, ci o valoare modificată a acesteia. În acest caz, conectarea unui voltmetru nepotriva aplicației de măsurare generează rezultate eronate. În montajul experimental propus observăm următoarele componente: o sursă de tensiune continuă, V_{S1} , care alimentează circuitul cu tensiunea de 6V, două rezistențe conectate în serie (valori de sute de kΩ, toleranță 5%) și un aparat de tip voltmetru numeric. Voltmetrul VM1 este setat în modul automat (AutoRange). Rezistența internă a voltmetrului R_V , pe domeniul de măsură selectat, are valoarea de 1MΩ. În manualul aparatului putem consulta specificația de acuratețe a măsurării, care pentru domeniile de 1V, 3V, 40V și 400V este de $\pm(0,5\%+1)$. \rightarrow eroare absolut tolerată con form manualului



$$U_{R_2} = V_{S1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6V \cdot \frac{600k\Omega}{900k\Omega} = 4V \rightarrow \text{valoare convențională adveră}$$

V_{M1} - rezistență internă ($\rightarrow \infty$, $R_V \gg R_2$)

$$R_V \parallel R_2 \Rightarrow R_{eq} \approx \frac{R_V \cdot R_2}{R_V + R_2} \approx 375k\Omega$$

$$U_{R_2} = 6V \cdot \frac{375k\Omega}{675k\Omega} \approx 3,33V \rightarrow \text{valoare greșită, eronată, cauzată de eroarea sistematică de interacțiune.}$$

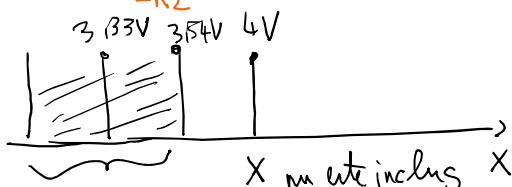
$$X = (3,33 \pm 0,21)V \rightarrow X_{max} = 3,54V$$

$$\delta_{UR_2} = \pm 0,5\% \cdot 40 + 1 \cdot 10mV \approx 0,21V$$

\downarrow rezoluția

$$3,33$$

100
mv
10
mv
1
mV



$$\Delta = -0,67V, \quad \delta \% = \frac{-0,67V}{4V} \cdot 100 \approx -16,8\%, \quad X \neq X$$

$$R_V = 10M\Omega \Rightarrow R_{eq} \approx 566k\Omega \Rightarrow U_{R_2} \approx 3,92V$$

$$\delta_{UR_2} = \pm 0,5\% \cdot 40V + 1 \cdot 10mV = 0,21V$$

$$X = (3,92 \pm 0,21)V \Rightarrow X_{max} = 4,13V \Rightarrow X \text{ este inclusă în intervalul de eroare absolut tolerată}$$

$$\Delta = -0,08V, \quad \delta \% = \frac{-0,08V}{4V} \cdot 100 \approx -2\%$$

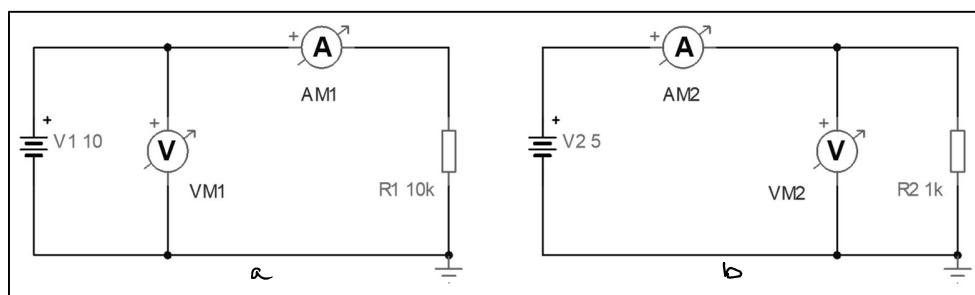
$$X = 4V \quad x = 3,987V \text{ (presupun)} \quad \underbrace{\pm 0,15\% \cdot 3,987V + 2 \cdot 0,001V}_{\delta V} = \frac{\pm 0,0079}{8}V = \pm 0,008V$$

$$X = (3,987 \pm 0,008)V$$

Electrical Specifications

Function	Range ^[1]	Resolution	Accuracy \pm ([% of Reading] + [Counts])		
			175	177	179
AC Volts ^{[2][3]}	600.0 mV	0.1 mV	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz)	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz)	1.0 % + 3 (45 Hz to 500 Hz)
	6.000 V	0.001 V			
	60.00 V	0.01 V			
	600.0 V	0.1 V			
	1000 V	1 V	2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)	2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)	2.0 % + 3 (500 Hz to 1 kHz)
DC mV	600.0 mV	0.1 mV	0.15 % + 2	0.09 % + 2	0.09 % + 2
DC Volts	6.000 V	0.001 V			
	60.00 V	0.01 V	0.15 % + 2	0.09 % + 2	0.09 % + 2
	600.0 V	0.1 V			
	1000 V	1 V	0.15 % + 2	0.15 % + 2	0.15 % + 2
Continuity	600 Ω	1 Ω	Product beeps at $<25 \Omega$, beeper turns off at $>250 \Omega$; detects opens or shorts 250 μ s or longer.		
Ohms	600.0 Ω	0.1 Ω	0.9 % + 2	0.9 % + 2	0.9 % + 2
	6.000 k Ω	0.001 k Ω	0.9 % + 1	0.9 % + 1	0.9 % + 1
	60.00 k Ω	0.01 k Ω	0.9 % + 1	0.9 % + 1	0.9 % + 1
	600.0 k Ω	0.1 k Ω	0.9 % + 1	0.9 % + 1	0.9 % + 1
	6.000 M Ω	0.001 M Ω	0.9 % + 1	0.9 % + 1	0.9 % + 1
	50.00 M Ω	0.01 M Ω	1.5 % + 3	1.5 % + 3	1.5 % + 3

Exemplu: Vom prezenta specificul erorilor sistematice de metodă prin măsurarea rezistențelor prin așa-numita *metodă voltampermetrică*. Denumirea acestui procedeu vine de la faptul că, pentru a determina valoarea rezistenței, se folosesc două instrumente, un voltmetru și un ampermetru. În principiu, metoda de măsurare se bazează pe legea lui Ohm: valoarea rezistenței necunoscute se determină ca raportul dintre valoarea măsurată a tensiunii la bornele rezistenței și valoarea măsurată a curentului care trece prin ea. Putem aprecia faptul că utilizăm un tip de măsurare indirectă. Cu ajutorul argumentelor *tensiune* și *curent*, determinăm valoarea rezistenței necunoscute.



Cele două variante ale metodei voltampermetrice de măsurare a rezistențelor.

Ne propunem să calculăm indirect valoile R_1 și R_2 (presupus cunoscute) utilizând indicațiile VM_1 , AM_1 și AM_2 , VM_2 .

- (a) Ampermetrul AM_1 în serie cu $R_1 \Rightarrow$ tensiunea măsurată de VM_1 include căderea pe AM_1 + căderea pe R_1 . Teoretic rezistența internă a $AM_1 \rightarrow 0$, practic este > 0 (către zeci de Ω)

$$\text{Astfel } \underbrace{(R_1 + R_a)}_{\substack{\text{resistență} \\ \text{măsurată}}} = \frac{U}{I} \Rightarrow R_1 = \frac{U}{I} - R_a$$

măsurat de VM^A
măsurat de AM^A

Δa (eroarea absolută sistematică de metodă) = $\frac{U}{I} - R_1$

Deci $\frac{U}{I}$ este nistemicic > decât valoarea R_1 convențională aderătoare datorită faptului că $R_a > 0$.

$$\delta\% = \frac{\Delta a}{R_1} \cdot 100 \Rightarrow \text{eroarea relativă} \begin{cases} \text{mică dacă } R_1 \gg R_a \\ \text{mare dacă } R_1 \approx R_a \end{cases}$$

De asemenea, pentru minimizarea erorii sistematice, utilizăm această metodă de măsurare dacă $R_1 \gg R_a$.
Se recomandă pentru măsurarea rezistențelor relativ mari. Er. sot KR $\leq 100\Omega$

- (b) Voltmetrul V_M este plasat în paralel cu R_2 (presupusă neconoscută).

$R_{ec} = R_V \parallel R_2 = \frac{R_V \cdot R_2}{R_V + R_2} \Rightarrow$ de fapt discutăm despre cădereea de tensiune măsurată pentru rezistență și nu deoarece R_V are valoare limitată ($m \rightarrow \infty$).

$$\frac{U}{I} = R_{ec} = \frac{R_V \cdot R_2}{R_V + R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{U \cdot R_V}{I R_V - U} \quad \text{în } R_{ec} + \Delta b = R_2 \quad (\text{deoarece } R_{ec} < R_2, \text{ deci apare o eroare sistematică } \Delta b)$$

$$\Delta b = R_2 - R_{ec} = \frac{R_2^2}{R_V + R_2}$$

Fie $R_2 = 1\text{k}\Omega$, $R_V = 5\text{k}\Omega \rightarrow$ valoare exagerat de mică, presupunem că este astăzi doar pentru evidențierea erorii sistematice.

$$R_2 \parallel R_V \approx 833,33\Omega \quad (\text{Rec}) \quad \text{și } R_a \text{ (rezistență internă } A_M 2) = 100\Omega.$$

$$I = \frac{V_2}{R_a + R_{ec}} = \frac{5V}{933,33\Omega} \approx 5,357\text{mA} \quad \text{- curentul prin circuit}$$

$$U = R_{ec} \cdot I \approx 4,464V \quad \text{- tensiunea măsurată de voltmetru.}$$

$$* R_2 = \frac{4,464V \cdot 5\text{k}\Omega}{5,357\text{mA} \cdot 5\text{k}\Omega - 4,464V} \approx \frac{22,32\text{k}\Omega V}{22,321V} \approx \underbrace{999,955\Omega}_{\substack{\text{valoare } R_2 \text{ rezultată} \\ \text{din calculul indirect}}}$$

relația pentru calculul corect al R_2 care ține cont de R_V

$$\Delta b = R_{ec} - R_2 = 833,33\Omega - 999,955\Omega \approx -166,625\Omega$$

⇒ eroarea sistematică de metodă

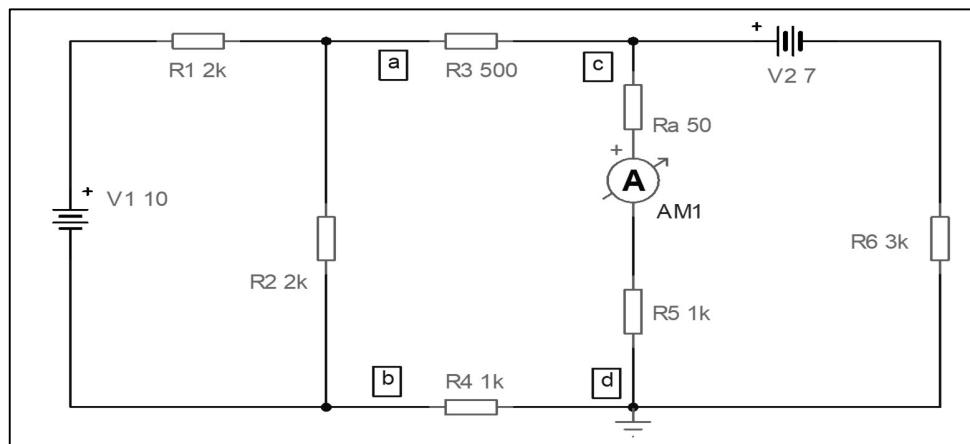
$$\text{nu } \Delta b = \frac{R_2^2}{R_V + R_2} \Rightarrow \text{cu cat } R_V \gg R_2 \Rightarrow \Delta b scade.$$

$R_V \gg R_2$ condiție pentru reducerea erorii sistematice de metodă.

Montajul se recomandă pentru evaluarea rezistențelor de valori relativ mici!

Exemplu: Într-un circuit cu schema de mai jos dorim să măsurăm curentul care trece prin rezistența R_5 . În acest scop, conectăm în serie cu rezistența R_5 ampermetrul AM1 având rezistență internă $R_a = 50\Omega$. Cele două surse din circuit au rezistențele interne nule și prezintă tensiunile constante $V_1 = 10V$, respectiv $V_2 = 7V$. Rezistențele au valorile: $R_1 = R_2 = 2k\Omega$, $R_3 = 500\Omega$; $R_4 = R_5 = 1k\Omega$; $R_6 = 3k\Omega$. Se pune întrebarea dacă introducerea ampermetrului AM1 pentru măsurarea curentului prin rezistența R_5 modifică valoarea acestui curent și în ce măsură?

Obs: Teorema lui Thévenin este foarte utilă pentru analiza rețelelor electrice relativ complexe. Astfel, în cazul unei rețele care cuprinde surse de tensiune, surse de curent, voltmetre, ampermetre și rezistențe, teorema permite **înlocuirea unei părți a circuitului situată între două puncte a și b cu o singură sursă de tensiune (Etab) și o rezistență inseriată (Rtab)**. Elementele inseriate, după Thévenin, între punctele a și b (Etab și Rtab) trebuie să aibă același efect asupra restului circuitului ca și porțiunea de rețea înlocuită. În acest scop, sursa de tensiune echivalentă Etab se determină ca fiind tensiunea produsă între punctele a și b de porțiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită, atunci când acea porțiune ar fi decuplată de restul circuitului. La rândul ei, rezistența echivalentă Rtab se determină ca fiind egală cu rezistența prezentată între punctele a și b de porțiunea de circuit ce urmează a fi înlocuită și în care oricare sursă de curent este tratată ca circuit deschis și oricare sursă de tensiune este considerată ca scurtcircuit.



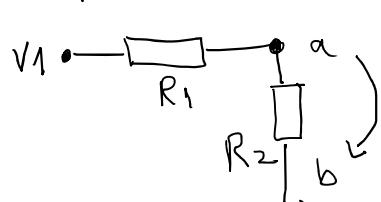
Schemă pentru ilustrarea erorilor sistematice de interacțiune.

① Înlocuim porțiunea de circuit $V_1 - R_1 - R_2$.

- scurtcircuităm sursa V_1 , de către $R_1 \parallel R_2$, deci $R_{tab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx$

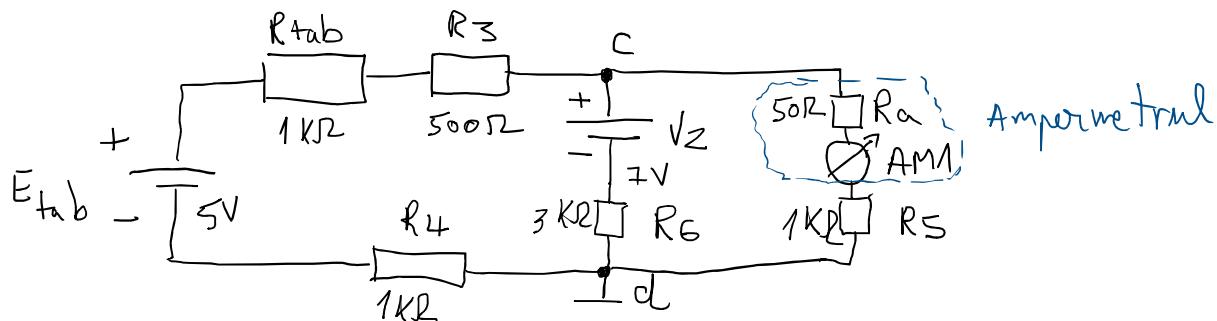
$$\approx 1k\Omega$$

- de către decuplăm circuitul $V_1 - R_1 - R_2$ făcând de la restul schemei \Rightarrow între punctele a și b putem aplica regulă diviziorelor de tensiune.



$$E_{ab} = V_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \approx 5V$$

Cum va arăta circuitul meu?



- ② Continuăm cu aplicarea teoremei T, pe secțiunea de circuit aflată la stânga de C și d.

- scurtcircuităm E_{tab} în V_2 , deci R_{tab} , R_3 și R_4 sunt inseriate. Sunt conectate în paralel cu R_6 .

$$R_{tcd} = \frac{(R_{tab} + R_3 + R_4) \cdot R_6}{R_{tab} + R_3 + R_4 + R_6} \approx 1,364 \text{ k}\Omega$$

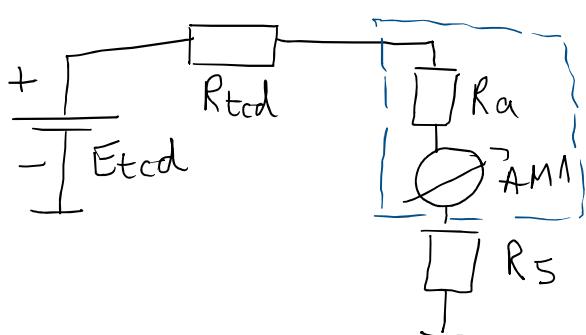
- Considerăm că decuplăm secțiunea de circuit de restul circuitului.

Curentul prin R_6 va fi:

$$i_{R_6} = \frac{E_{tab} - V_2 \text{ (sursă în opozitie)}}{R_{tab} + R_3 + R_6 + R_4} = \frac{2V}{55k\Omega} \approx -0,364 \text{ mA}$$

Deci $E_{tcd} = V_2 + i_{R_6} \cdot R_6 = 7V - 0,364 \text{ mA} \cdot 3k\Omega \approx 5,91V$

cum arată circuitul?



$$i_{Ra} = \frac{E_{tcd}}{R_{tcd} + Ra + R_5} \approx \frac{2,45 \text{ mA}}{\downarrow}$$

cu AM1 în circuit

$$i_{R5a} = \frac{E_{tcd}}{R_{tcd} + R_5} \approx \frac{2,45 \text{ mA}}{\downarrow}$$

fără AM1 în circuit

Eroarea sistematică de interacție:

$$\delta\% = \frac{2,45 \text{ mA} - 2,5 \text{ mA}}{2,5 \text{ mA}} \cdot 100 \approx -2\%$$