Simionesei Loredana-Marinela
Prisacaru Elena-Cătălina
grupa A5 anul 1

Tema 1
Algoritmica Grafurilor

Problema 3

a) Presupunem că G=(V,E) este un graf.

R-COV(G,k) returnează "Yes" dacă $\exists$ o mulţime T$\subseteq$ V(E), T-vertex cover pentru G, |T|$\leq$ k$\leq$ n.

1. If E(G)= $\emptyset$ then return ("Yes", $\emptyset$);

În această secvenţă se verifică dacă G nu are muchii, iar în cazul în care E(G)= $\emptyset$, răspunsul primit va fi că există o mulţime T$\subseteq$ V(G), T-vertex cover.

2. If|E(G)| > k(|V(G)|-1) then return "No";

Considerăm o mulţime de k noduri, fiecare nod din această mulţime poate fi adiacent cu cel mult n-1 noduri (poate fi adiacent cu oricare din celelalte noduri), de unde rezultă că fiecare nod poate parcurge cel mult k(n-1) muchii. Aşadar, răspunsul trebuie să fie "No" dacă |E(G)|>k(n-1).

3. Let {u,v} $\in$ E(G);
4. If R-COV(G-u,k-1) return ("Yes",T) then return ("Yes",T$\cup${u})
5. else if R-COV(G-v,k-1) return ("Yes",T) then return ("Yes",T$\cup${v})

Considerăm acum orice muchie (u,v) $\in$ E(G).
Considerăm o mulţime de noduri T$\subseteq$ V(G).
Dacă T-vertex cover pentru G, atunci înseamnă că măcar o extremitate a muchiei (u,v) aparţine lui T, adică măcar nodul u sau nodul v este din mulţimea T.
Dacă eliminăm nodul u sau nodul v din G, trebuie să eliminăm şi toate muchiile incidente cu acest nod. Obţinem în felul acesta un subgraf G' al grafului G. Facem aceeaşi eliminare şi din T$\subseteq$ V(G) obţinând astfel o mulţime T'$\subseteq$ V(G'), T'-vertex cover pentru G'.

6. else return ("No");

De aceea R-COV(G,k) returnează "Yes" dacă R-COV(G-u,k-1) sau R-COV(G-v,k-1) returnează "Yes". Altfel, returnează "No", adică nici u şi nici v nu aparţin lui T.

b) Presupunem k-constantă.

Atunci când alegem o muchie (u,v) din E(G), există cel mult $\binom{n}{2}$ iteraţii ($\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$=> complexitate O($n^2$)).
Pentru fiecare muchie (u,v) $\in$ E(G) $\exists$ cel mult două apeluri recursive (unul pentru nodul u şi altul pentru nodul v). Acest apel recursiv formează de fapt un arbore binar de adâncime maximă k-1. Numărul maxim de noduri într-un arbore binar de adâncime cel mult k-1 este 2^k-1=>

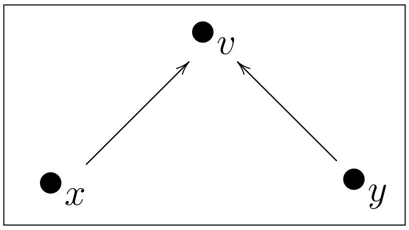
- T(n,k)= O ($2^k n^2$)

k-constantă => T(n,k)= O(n^2).

Problema 1

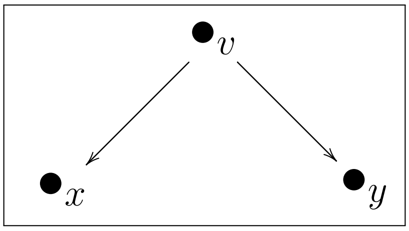
a) Vom arăta că $\{B_1^+, B_2^+ ,\ldots,B_p^+\}$ este o partiţie a lui V(D).

Dacă un vertex $v \in$ unor componente B_i^+ , $B_j^+ \subseteq \{B_1^+, B_2^+ ,\ldots,B_p^+\}$, $i,j \in \{1,2,\ldots,p\}$ spunem că $x \in B_i^+ \cap B_j^+$, atunci $\exists$ un arc de la $x \in B_i$ spre v şi un alt arc de la $y \in B_j$ spre v.
(Observaţie ! Două noduri a şi b au un "common prey" dacă $a^+ \cap b^+ \neq \emptyset$).



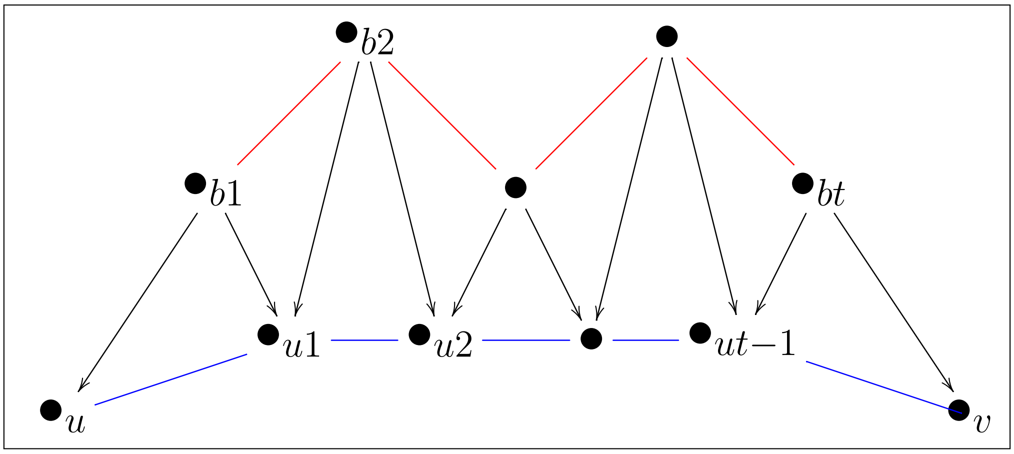
Atunci x şi y împart acelaşi "common prey" - nodul v, deci este o muchie în G_{cp} de la x la y, ceea ce contrazice faptul că x şi y fac parte din componente diferite ale lui $G_{cp.}$ Astfel, componentele $B_1^+, B_2^+ ,\ldots,B_p^+$ sunt separate.
$\forall B_z^+$, $z \in \{1,2,\ldots,p\}$ pentru că în orice nod $w \in B_z^+$, $z \in \{1,2,\ldots,p\}$ este un arc cu extremitatea în w (adică pleacă din nodul w).
Din ipoteză => faptul că în orice vertex din $B_1^+, B_2^+ ,\ldots,B_p^+$ există un arc care intră în nodul $w \in B_z^+$, $z \in \{1,2,\ldots,p\}$. În concluzie, $\{B_1^+, B_2^+ ,\ldots,B_p^+\}$ este o partiţie a lui V(D).

Analog pentru $\{A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-\}$
Vom arăta că $\{A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-\}$ este o partiţie a lui V(D).
Dacă un vertex $v \in$ unor componente A_i^- , $A_j^- \subseteq \{A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-\}$, $i,j \in \{1,2,\ldots,k\}$ spunem că $v \in A_i^- \cap A_j^-$, atunci $\exists$ un arc de la v spre $x \in A_i$ şi un alt arc de la v spre $y \in A_j$.
(Observaţie! Două noduri a şi b au un "common enemy" dacă $a^- \cap b^- \neq \emptyset$).



Atunci x şi y împart acelaşi "common enemy" - nodul v, deci este o muchie în G_{ce}de la x la y, ceea ce contrazice faptul că x şi y fac parte din componente diferite ale lui G_{ce}. Astfel, componentele $A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-$ sunt separate.
$\forall A_z^-$, $z \in \{1,2,\ldots,k\}$ pentru că în orice nod $w \in A_z^-$, $z \in \{1,2,\ldots,k\}$ un arc cu vârful în w (adică intră din nodul w).
Din ipoteză => faptul că în orice vertex din $A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-$ există un arc care iese în nodul $w \in A_z^-$, $z \in \{1,2,\ldots,k\}$. În concluzie, $\{A_1^-, A_2^- ,\ldots,A_k^-\}$ este o partiţie a lui V(D).

b) Presupunem că ∃ două vârfuri u şi v ∈ B_1^+. Dacă u şi v împart acelaşi ”common prey” w ∈ B_1, atunci ele împart şi acelaşi ”common enemy”, de unde obţinem că sunt adiacente în $G_{ce.}$



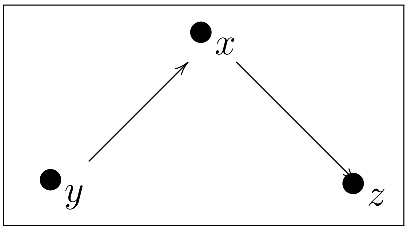
Roşu pentru Gcp (”common prey”). Albastru pentru Gce (”common enemy”)

Pe de altă parte avem b_1,b_t∈ B_1 în care exită un arc [$b_{1,}$ u] şi un arc [$b_{t,}$ v]=> ∃ un drum de lungime minimă de la b_1 la b_t în $G_{cp.}$
Pentru că b_1 şi b_2 sunt adiacente în G_{lp} ele împart acelaşi ”common prey” în u_1, apoi u şi n_1 împart acelaşi ”common enemy” prin b_1 => u i $u_1$sunt adiacente în G_{ce}=> ∃ (u, u_1) ∈ E(G_{ce}).
Generalizare:
Pentru că b_i şi b_{i+1} sunt adiacente în G_{cp} ele împart un ”common prey” îp u_i. Apoi u_{i-1} şi u_i împart un ”common enemy” în B_i => u_{i-1} şi u_i unt adiacente în $G_{ce.}$ Aşadar, u şi v fac parte din aceeaşi componentă convexă din G_{ce} => componentele conexe din B_i^+, i ∈ {1,2,. . . ,p}, apartin unei componente din A_j $^+$, j ∈ {1,2,. . . ,k}=> B_işi A_j sunt bijective şi p=k.

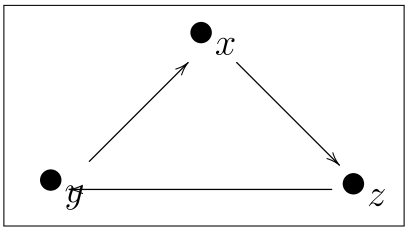
Analog pentru $A_{jsi}B_{i.}$
Presupunem că ∃ două vârfuri u şi v ∈ A_1^-. Dacă u şi v împart acelaşi ”common enemy” w ∈ A_1, atunci ele împart şi acelaşi ”common prey”, de unde obţinem că sunt adiacente în $G_{cp.}$
Pe de altă parte avem $a_{1,}a_t$∈ A_1 în care există un arc [$a_{1,}$ c] şi un arc [$s_{t,}$ v]=> ∃ un drum de lungime minimă de la a_1 la a_t în $G_{ce.}$
Pentru că a_1 şi a_2 sunt adiacente în G_{ce} ele împart acelaşi ”common enemy” în u_1, apoi u şi u_1 împart acelaşi ”common prey” prin a_1 => u şi $u_1$sunt adiacente în G_{rp}=> ∃ (u, u_1) ∈ E(G_{ce}).
Generalizare:
Pentru că a_i şi o_{i+1} sunt adiacente în G_{ce} ele împart un ”common enemy” în u_n. Apoi u_{i-1} şi u_i împart un ”common prey” în A_j => u_{i-1} şi u_i sunt adiacente îp $G_{cp.}$ Aşadar, u şi v fac parte din aceeaşi componentă convexă din G_{cp} => componentele conexe din A_e^-, i ∈ {1,2,. . . ,k}, aparţin unei componente din B_i $^+$, i ∈ {1,2,. . . ,p}=> A_j şi B_i sunt bijective şi p=k.
Din cele două cazuri => că G_{cp} şi G_{ce} au acelaşi număr de componente conexe.

Problema 2

a) D=(V,E) are proprietatea că $\forall$ nod v $\in$ V(D), $d^+(v) = d^-(v)=1$.

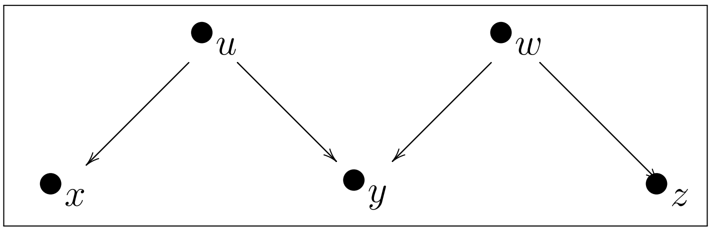


Din această proprietate deducem faptul că pentru $\forall$ nod v $\in$ V(D), $\exists$ x,y $\in$ V(D) astfel încât arcele (x,v) şi (v,y) $\in$ E(D).
Tot din proprietatea $d^+(v) = d^-(d)=1$ deducem faptul că în digraful cu cel puţin 3 noduri se formează un circuit.

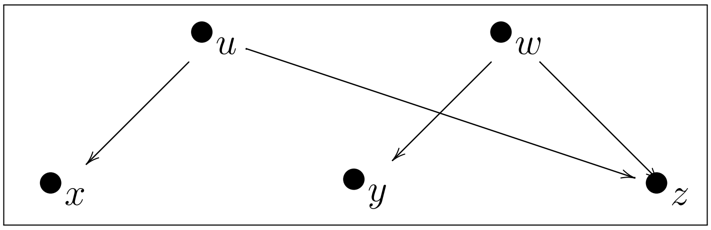


Presupunem că pentru $\forall$ i<n (n=numărul de vârfuri), alegând orice mulţime S $\subset$ V, cu |S|=i, $\exists$ un nod v din V(D) astfel încât $|S \cap v^+| \equiv 1$ mod 2.
P(1): pentru k=1, |S|=1, adică conţine un nod v, $\exists$ un nod y $\in$ V(D) şi arcul (y,v) $\in$ E(D) astfel încât $|y^+ \cap S| \equiv 1$ mod 2=> S conţine un singur vârf => "A"
Vom considera P(k) adevărată şi demonstrăm că P(k+1) adevărată.
P(k): pentru $\forall$ mulţime S $\subset$ V(D), |S|=k. $\exists$ un vârf v $\in$ V(D) astfel încât $|v^+ \cap S| \equiv$ 1 mod 2. Vom nota această mulţime S cu A.
P(k+1): $\forall$ S $\subset$ V, |S| =k+1=>$\exists$ un vârf w $\in$ V(D) astfel încât $|w^+ \cap S| \equiv 1$ mod 2.
Vom nota această mulţime S cu B.
Vom considera că {B}={A}$\cap${v}, v $\in$ V(D), dar nu $\in$ A, adică v $\in$ V(D)\A.
$\forall$ nodul v $\in$ V(D)\A, $\exists$ un nod i astfel încât (y,v) $\in$ E(D) => y^+={v}, adică nu $\exists$ un alt nod care să plece din y=> $|y^+|$=1.
$| y^+ \cap \{v\}| = | y^+ \cap \{A \cup v\}| \equiv 1$ mod 2=>P(k+1) "A". Deci, conform principiului inducţiei matematice => în digraful D nu $\exists$ mulţime pară.

b)



x este iniţial ”solo-prey” pentru u;
z este iniţiat ”solo-prey” pentru w;
y este ”commno-prey” pentru u şi w;
După ce facem modificările necesare obţinem D $_{uw}$.



Acum y o să fie ”solo-prey” pentru w, iar z o să fie ”common-prey” pentru u şi w.
Vom demonstra că digraful iniţial D are o mulţime pară $<=>$ D $_{uw}$ are o muţime pară.
$|u^+|=|x|+|x_i|+|c|+|c_i|$
$|w^+|=|y|+|y_i|+|c|+|c_i|$, unde $|x|$,$|y|$-toate ”solo-prey” ale lui u,w care nu sunt în S

$|x_i|$,$|y_i|$-toate ”solo-prey” ale lui u,w care sunt în S
$|c|$-toate ”common-prey” ale lui u şi w care nu sunt în S
$|c_i|$ toate ”common-prey” ale lui u şi w care sunt în S

$|x_i+c_i| \equiv 0 \bmod 2$
$|y_i+c_i| \equiv 0 \bmod 2$, unde x_i,y_i,c_i au *aceeaşi* paritate

$|u^+|=|x|+|x_i|+|y|+|y_i|$
$|w^+|=|c|+|c_i|+|y|+|y_i|$
Mulţimea de ”solo-prey” pentru w devine mulţimea de ”comlon-prey” pentru u şi w, iar ”common-prey” devine ”solo-prey” pentru w.
$|u^+ \cap S|=x_i+u_i \equiv 0 \bmod 2$
Pentru că $\exists$ o mulţime pară în D $_{uw}$ $=>$ $\exists$ o mulţime pară şi în digraful iniţial.

d) Fie matricea de adiacenţă A a lui D cu elemente din corpul GF(2).

Presupunem că există o mulţime S pară.
Fie nodul v $\in$ lui S. Adunăm toate coloanele corespunzătoare nodurilor din S pe coloana v.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1v} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2v} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots a_{3v} & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nv} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

m=nr_de_linii
n=nr_de_coloane

```
for (int i=0; i<nr_linii;i++)
{
   for(int j=0;j<nr_coloane;j++)
{
   a[i][v]+=a[i][j];
}
}
```

Dacă obţinem pe coloana v doar 0 (a[i][j]=0 pentru orice i=0,i<nr_linii)
= > det(A)=0 = > mulţimea S este mulţime pară de vârfuri = > că digraful D are o mulţime pară de vârfuri.