Setul de probleme 2

soluţiile se primesc

miercuri 3 decembrie între orele 14 şi 16, la cabinetul C-402

26 noiembrie 2014

Problema 1. Demonstraţi că dacă G este un graf bipartit atunci

$$\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G}).$$

(**3 puncte**)

Problema 2. Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Demonstraţi că numărul arborilor parţiali ai grafului complet K_n, care nu conţin o muchie fixată $e \in E(K_n)$, este $(n-2)n^{n-3}$.

(**3 puncte**)

Problema 3. *Ana* şi *Barbu* se joacă pe un graf G, alegând alternativ vârfuri distincte $v_0, v_1, \ldots$ astfel încât, pentru $\forall i > 0$, v_i este adiacent cu v_{i-1}. Pierde jucătorul care nu mai poate alege un vârf. Demonstraţi că dacă *Ana* începe jocul, atunci ea are o strategie câştigătoare (adică indiferent de cât de bine joacă *Barbu*, ea câştigă) dacă şi numai dacă graful G nu are un cuplaj perfect. Argumentaţi că, pentru un graf dat, problema de a decide dacă *Ana* are o strategie câştigătoare (atunci când ea începe jocul) este din NP. (**1+1+1 puncte**)

Problema 4. Fie $H = (V, E)$ un graf. Dacă $v \in V$ şi $r \in \mathbf{N}$, notăm cu $S_H(v, r)$ sfera de rază r cu centrul în v: $S_H(v, r) = \{u \in V : dist_H(u, v) \leq r\}$. Considerăm următorul algoritm de partiţionare a unui graf G dat în "clustere" sferice.

Algorithm 1 Partiţionarea în clustere a unui graf G dat. $\rho > 2$ este un parametru real dat.

while $V(G) \neq \emptyset$ **do**
  fie $v \in V(G)$;
  $r := 0$;
  while $|S_G(v, r+1)| > \rho |S_G(v, r)|$ **do**
    $r := r + 1$
  end while
  makeCluster($S_G(v, r)$) // $S_G(v, r)$ este noul cluster
  $G := G - S_G(v, r)$
end while

a) Arătaţi că Algoritmul 1 construieşte clustere de rază cel mult $\log_\rho n$.

b) In procedura makeCluster($S_G(v,r)$), pentru fiecare vârf $u \in V(G) - S_G(v,r)$ cu proprietatea că există $w \in S_G(v,r)$ astfel încât $wu \in E(G)$, se memorează exact o astfel de muchie şi se numeşte "muchie intercluster". Demonstraţi că numărul muchiilor intercluster este cel mult $(\rho - 1)n$.

c) Pentru $k \in \{1, \ldots, \lceil \log n \rceil\}$, să se determine o alegere corespunzătoare a lui $\rho(k)$ astfel ca să avem $\mathcal{O}(n^{1+\frac{1}{k}})$ muchii intercluster.

(2 +2+1 puncte)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.

2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.

3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.

4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.

5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.