

# ALGORITMICA GRAFURILOR

## Săptămâna 10

**C. Croitoru**

*croitoru@info.uaic.ro*

FII

December 3, 2014

① **Fluxuri** (ag 14-15 allinone.pdf pag. 244 → 264 )

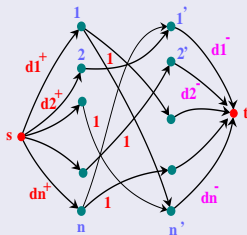
② **Problemele pentru seminarul 10**

# Aplicații combinatorii ale fluxurilor

## Recunoașterea secvențelor digrafice.

**Date**  $(d_i^+)_{i=1,n}$  și  $(d_i^-)_{i=1,n}$ , **există un digraf**  $G$  cu  $n$  vîrfuri astfel încît  $G = (\{1, \dots, n\}, E)$  și  $d_G^+(i) = d_i^+$  și  $d_G^-(i) = d_i^- \ \forall i = 1, n$  ?

Dacă  $0 \leq d_i^+ \leq n-1$  și  $0 \leq d_i^- \leq n-1 \ \forall i = 1, n$  și  $\sum_{i=1,n} d_i^+ = \sum_{i=1,n} d_i^- = m$  (unde,  $m = |E|$ , iar  $d_i^+, d_i^- \in \mathbf{Z}$ ),  
construim rețeaua bipartită:



Răspunsul este da dacă și numai dacă în această rețea, există un flux întreg de valoare maximă  $m$ .

# Aplicații combinatorii ale fluxurilor

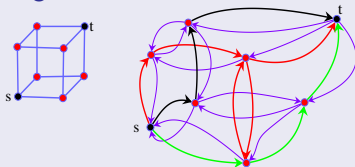
## Determinarea numărului de muchie-conexiune al unui graf.

Fie  $G = (V, E)$  un graf. Pentru  $s, t \in V, s \neq t$ , definim:

- $p_e(s, t)$  = nr. maxim de drumuri cu muchii disjuncte ce unesc  $s$  și  $t$ .
- $c_e(s, t)$  = cardinalul minim al unei mulțimi de muchii, prin îndepărtarea căreia din graf, între  $s$  și  $t$  nu mai există drumuri.

Construim din  $G$  digraful  $G_1$ , înlocuind fiecare muchie cu o pereche de arce simetrice. Considerăm  $c : E(G_1) \rightarrow \mathbf{Z}_+, c(e) = 1, \forall e \in E(G_1)$ .

Fie  $x^0$  un flux întreg de valoare maximă în  $R = (G_1, s, t, c)$ .



Fluxul pe arcele groase  
este 1, pe cele subțiri 0.

Rezultă că  $v(x^0) = p_e(s, t)$ . Dacă  $(S, T)$  e secțiune de capacitate minimă, avem  $c(S, T) = v(x^0) = c_e(s, t)$ .

**Corolar**  $G$  conex:

$$\lambda(G) = \min_{\substack{s, t \in V(G) \\ s \neq t}} c_e(s, t).$$

(\*)



## Determinarea numărului de muchie-conexiune al unui graf.

Pentru a afla  $\lambda(G)$  ar trebui să rezolvăm cele  $\frac{n(n-1)}{2}$  probleme de flux din (\*).

Dacă fixăm un vîrf  $s_0$  și rezolvăm  $n - 1$  probleme de flux cu  $t \in V - s_0$  se va obține în mod necesar o pereche  $s_0, t_0$  pentru care  $c(s_0, t_0) = \lambda(G)$ .

**Rezultă: în  $O(n \cdot (nm + n^2c)) = O(n^2m)$  se pot determina  $\lambda(G)$  și o mulțime separatoare de muchii de cardinal minim în  $G$ .**

# Aplicații combinatorii ale fluxurilor

## Determinarea numărului de conexiune al unui graf.

$G = (V, E)$  este un graf și  $s, t \in V$ ,  $s \neq t$ ,  $st \notin E$

-  $p(s, t)$  = numărul maxim de  $st$ -drumuri cu mulțimile de vârfuri disjuncte (cu excepția extremităților),

-  $c(s, t)$  = cardinalul minim al unei mulțimi de vârfuri  $st$ -separatoare,

Teorema lui Menger  $\Rightarrow$

$$p(s, t) = c(s, t) \quad (*)$$

Numărul de conexiune  $k(G)$  al grafului  $G$  este

$$k(G) = \begin{cases} n - 1 & \text{dacă } G = K_n \\ \min_{\substack{s, t \in V \\ st \notin E}} c(s, t) & \text{dacă } G \neq K_n \end{cases} \quad (**)$$

Fie  $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$  digraful construit din  $G$  astfel:

-  $\forall v \in V$  considerăm  $a_v, b_v \in V(G_1)$  și  $a_v b_v \in E(G_1)$ ;

-  $\forall vw \in E$  considerăm  $b_v a_w, b_w a_v \in E(G_1)$ .

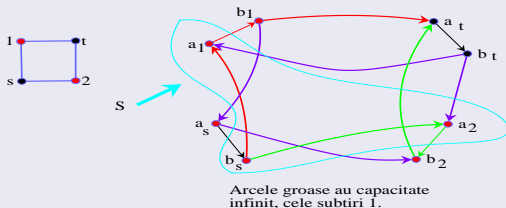
Definim  $c : E(G_1) \rightarrow \mathbf{Z}_+$  prin

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } e = a_v b_v \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$

# Aplicații combinatorii ale fluxurilor

Determinarea numărului de conexiune al unui graf.

Considerăm rețeaua  $R = (G_1, b_s, a_t, c)$ . Exemplu:



$x^0$  flux întreg de la  $b_s$  la  $a_t$  în  $R$  de valoare maximă  $\Rightarrow v(x^0) = p(s, t)$ .

$(S, T)$  o secțiune în  $R$  a.î.  $v(x^0) = c(S, T)$ .  $\Rightarrow$

$c(s, t) = |A_0| = c(S, T) = v(x_0) = p(s, t)$ , unde  $A_0$  este o mulțime de vîrfuri  $st$ -separatoare de cardinal minim.

Pentru a determina  $k(G)$  determinăm minimul din **(\*\*)** prin rezolvarea a  $|E(\overline{G})|$  probleme de flux. Se poate construi un algoritm de complexitate  **$O(m(nm + n^2 \log n))$** .

## Flux de cost minim.

Fie  $R = (G, s, t, c)$  o rețea și  $x$  un flux de la  $s$  la  $t$  în  $R$ .

Considerăm  $a : E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de cost care asociază fiecărui arc  $ij \in E$   $a(ij) = a_{ij}$  costul (transportului unei unități de flux) pe arcul  $ij$ . **Costul fluxului**  $x$  se definește ca fiind

$$a(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij}.$$

### Problema fluxului de cost minim

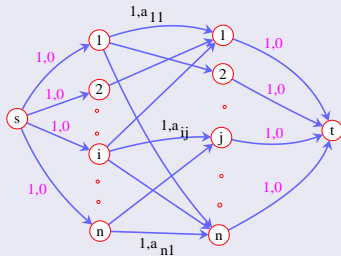
*Dată  $R$  o rețea,  $v \in \mathbf{R}^+$  și  $a : E \rightarrow \mathbf{R}$  funcție de cost, să se determine  $x^0$  flux în  $R$  astfel încât*

$$a(x^0) = \min\{a(x) \mid x \text{ flux în } R, v(x) = v\}.$$

*Problema simplă a atribuirii* Se dispune de  $n$  lucrători și  $n$  lucrări. Costul atribuirii lucrătorului  $i$  la lucrarea  $j$  este  $a_{ij}$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ). **Să se atribuiască fiecare dintre cele  $n$  lucrări la câte un lucrător, astfel încât costul total al atribuirii să fie minim.**



## Problema atribuirii.

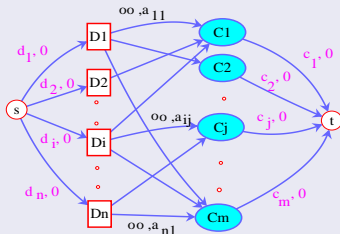


Un flux întreg de valoare  $n$  și de cost minim, oferă soluția problemei atribuirii.

**Problema simplă a transporturilor (Hitchcock-Koopmans):** O marfă disponibilă în depozitele  $D_1, \dots, D_n$  în cantitățile  $d_1, \dots, d_n$  este solicitată în centrele de consum  $C_1, C_2, \dots, C_m$  în cantitățile  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Se cunoaște costul  $a_{ij}$  al transportului unei unități de marfă de la depozitul  $D_i$  la centrul de consum  $C_j$  ( $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}$ ). Se cere să se stabilească un plan de transport care să satisfacă toate cererile și să aibă costul total minim

## Problema transporturilor

Dacă  $\sum_{i=1,n} d_i \geq \sum_{j=1,m} c_j$ , un flux de cost minim și de valoare  $v = \sum_{i=1,m} c_i$  în rețeaua următoare, rezolvă problema.



*Definiție.* Fie  $x$  un flux în  $R = (G, s, t, c)$  și  $a : E \rightarrow \mathbf{R}$  o funcție de cost.  $P$  C-drum în  $R$  relativ la fluxul  $x$ ,  $\Rightarrow$  **costul drumului  $P$**  este

$$a(P) = \sum_{\substack{ij \in P \\ \text{direct}}} a_{ij} - \sum_{\substack{ij \in P \\ \text{invers}}} a_{ji}.$$

Dacă  $C$  este un C-drum închis,  $a(C)$  se calculează după aceeași formulă, după stabilirea unui sens de parcurgere a lui  $C$ .

## Soluția problemei fluxului de cost minim.

Dacă  $P$  este drum de creștere relativ la fluxul  $x$ , atunci  $x^1 = x \otimes r(P)$  este un flux de valoare  $v(x^1) = v(x) + r(P)$  și de cost  $a(x) + r(P) \cdot a(P)$ .

Dacă  $C$  este un C-drum închis relativ la  $x$ , atunci  $x^1 = x \otimes r(C)$  este un flux de valoare  $v(x^1) = v(x)$  și de cost  $a(x^1) = a(x) + r(C) \cdot a(C)$ .

**Dacă  $a(C) < 0$  atunci  $x^1$  este un flux de aceeași valoare ca și  $x$ , dar de cost strict mai mic.**

**Teoremă.** *Un flux de valoare  $v$  este de cost minim dacă și numai dacă nu admite C-drumuri închise de cost negativ.*

**Teoremă.** *Dacă  $x$  este un flux de valoare  $v$  și de cost minim iar  $P_0$  este un drum de creștere, astfel încât*

*$a(P_0) = \min\{a(P) \mid P \text{ drum de creștere relativ la } x\}$ ,  
atunci  $x^1 = x \otimes r(P_0)$  este un flux de valoare  $v(x^1) = v + r(P_0)$  și de cost minim.*

Algoritm generic de rezolvare a problemei fluxului de cost minim.

**Algoritm generic de rezolvare a problemei fluxului de cost minim**

0: Se consideră  $x = (x_{ij})$  un flux cu valoarea  $v' \leq v$ ;  
     $\{x$  poate fi fluxul nul sau un flux  $y$  determinat  
    cu ajutorul algoritmului de flux maxim și apoi  
    considerînd  $x = (\frac{v}{v(y)}y)\}$

1: **while**  $(\exists$  circuite de pondere  $< 0$  relativ la  $\bar{a}_{ij})$  **do**  
     $\{$  determină un astfel de circuit;  
    modifică fluxul pe acest circuit  $\}$

2: **while**  $v(x) < v$  **do**  
     $\{$  aplică un algoritm de drum minim în raport cu  
    ponderile  $\bar{a}_{ij}$  pentru depistarea unui  
    C-drum  $P$  de cost minim;  
     $x \leftarrow x \otimes \min(r(P), v - v(x)) \}$

Complexitatea pentru pasul 2 este  $O(n^3v)$ , dacă se pleacă de la fluxul nul. Se poate dovedi că pasul 1 se poate implementa astfel ca numărul iterațiilor să fie  $O(nm^2 \log n)$ .

Se vor discuta (cel puțin) patru probleme dintre următoarele:

- ① **Problema 2 Setul 8'**
- ② **Problemele 1 și 4 Setul 9**
- ③ **Problemele 3 și 4, Setul 10**
- ④ **Problema 1 Setul 11'**
- ⑤ **Problema 1, Setul 11''**
- ⑥ **Problema 4 Setul 25**