

# ALGORITMICA GRAFURILOR

## Săptămâna 7

**C. Croitoru**

*croitoru@info.uaic.ro*

FII

November 12, 2014

① **Fluxuri** (ag 14-15 [allinone.pdf](#) pag. 196 → ... )

② **Problemele pentru seminarul 7**

## Problema fluxului maxim

Numim **rețea** (de transport) cu **intrarea**  $s$  și **ieșirea**  $t$ , 4-uplul

$R = (G, s, t, c)$  unde: -  $G = (V, E)$  este un digraf,

-  $s, t \in V$ ;  $s \neq t$ ;  $d_G^+(s) > 0$ ;  $d_G^-(t) > 0$ ,

-  $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ ;  $c(e)$  este **capacitatea** arcului  $e$ .

$V = \{1, 2, \dots, n\}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ) și  $|E| = m$ . Extindem funcția  $c$  la

$$c : V \times V \rightarrow \mathbf{R}_+ \text{ prin } c((i, j)) = \begin{cases} c(ij) & \text{dacă } ij \in E \\ 0 & \text{dacă } ij \notin E \end{cases} = c_{ij}.$$

Numim **flux** în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$  o funcție  $x : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ , a.î.:

$$(i) \quad 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall ij \in V \times V$$

$$(ii) \quad \sum_{j \in V} x_{ji} - \sum_{j \in V} x_{ij} = 0 \quad \forall i \in V - \{s, t\}.$$

Dacă  $ij \in E$  atunci  $x_{ij}$  se numește **fluxul** (transportat) **pe arcul**  $ij$ . Evident, condiția (i) cere ca **fluxul pe orice arc să fie nenegativ și subcapacitar**, iar condiția (ii) (*legea de conservare a fluxului*) cere ca **suma fluxurilor pe arcele care intră în vârful  $i$  să fie egală cu suma fluxurilor pe arcele care ies din vârful  $i$ .**

## Problema fluxului maxim

*Definiție:* Dacă  $x$  este un flux în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$ , se numește **valoarea fluxului**  $x$  numărul

$$v(x) = \sum_{j \in V} x_{jt} - \sum_{j \in V} x_{tj}.$$

$v(x)$  este fluxul net care ajunge în ieșirea rețelei și este egal cu fluxul net care iese din intrarea rețelei.

### Problema fluxului maxim:

*Dată  $R = (G, s, t, c)$  o rețea, să se determine un flux de valoare maximă.*

## Problema fluxului maxim

*Definiție.* Dacă  $P$  este un drum în  $\overline{G}$ , multigraful suport al digrafului  $G$ , și  $e = v_i v_j$  este o muchie a lui  $P$  atunci: **dacă  $e$  corespunde arcului  $v_i v_j$  al lui  $G$ ,  $e$  se numește arc direct al drumului  $P$ ; dacă  $e$  corespunde arcului  $v_j v_i$  al lui  $G$ , atunci  $e$  se numește arc invers.**

*Definiție.* Fie  $R = (G, s, t, c)$  și  $x$  flux în  $R$ . Se numește **C-drum** (în  $R$  relativ la fluxul  $x$ ) un drum  $D$  în  $\overline{G}$  cu proprietatea că  $\forall ij \in E(D)$  :

$x_{ij} < c_{ij}$  dacă  $ij$  este arc direct,

$x_{ji} > 0$  dacă  $ij$  este arc invers.

Dacă  $D$  este un C-drum și  $ij \in E(D)$ , **capacitatea reziduală** a lui  $ij$

(relativ la C-drumul  $D$ ) este  $r(ij) = \begin{cases} c_{ij} - x_{ij} & \text{dacă } ij \text{ arc direct în } D \\ x_{ji} & \text{dacă } ij \text{ arc invers în } D \end{cases}$ .

**Capacitatea reziduală** a drumului  $D$  este  $r(D) = \min_{e \in E(D)} r(e)$ .

*Definiție.* Se numește **drum de creștere** a fluxului  $x$ , în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$ , un C-drum de la  $s$  la  $t$ .

## Problema fluxului maxim

**Lema 1.** Dacă  $D$  este un drum de creștere a fluxului  $x$  în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$ , atunci  $x^1 = x \otimes r(D)$  definit prin

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} x_{ij} & \text{dacă } \overline{ij} \notin E(D) \\ x_{ij} + r(D) & \text{dacă } ij \in E(D), ij \text{ arc direct în } D \\ x_{ij} - r(D) & \text{dacă } ji \in E(D), ji \text{ arc invers în } D \end{cases}$$

este flux în  $R$  și  $v(x^1) = v(x) + r(D)$ .

**Observăm că dacă  $x$  admite un drum de creștere atunci  $x$  nu este flux de valoare maximă.**

*Definiție.* Se numește **secțiune** în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$ , o partiție  $(S, T)$  a lui  $V$  cu  $s \in S$  și  $t \in T$ . **Capacitatea secțiunii**  $(S, T)$  este

$$c(S, T) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} c_{ij}$$

(suma capacităților arcelor de la  $S$  la  $T$ ).

## Problema fluxului maxim

**Lema 2.** Dacă  $x$  este un flux în  $R = (G, s, t, c)$  și  $(S, T)$  este o secțiune a rețelei, atunci

$$v(x) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} (x_{ij} - x_{ji}).$$

(valoarea fluxului este egală cu fluxul net ce trece prin orice secțiune.)

**Teorema 1.** (Teorema drumului de creștere)

Un flux  $x$  este de valoare maximă într-o rețea  $R$ , dacă și numai dacă, nu există drumuri de creștere a fluxului  $x$  în rețeaua  $R$ .

**Teorema 2.** (Teorema fluxului întreg)

Dacă toate capacitățile sînt întregi, atunci există un flux de valoare maximă cu toate componentele întregi (flux întreg de valoare maximă).

**Teorema 3.** (Ford-Fulkerson, 1956)

Valoarea maximă a unui flux în rețeaua  $R = (G, s, t, c)$  este egală cu capacitatea minimă a unei secțiuni a rețelei.

## Problema fluxului maxim

### Algoritmul lui Ford și Fulkerson pentru aflarea unui flux de valoare maximă

Se va folosi un procedeu de etichetare a vîrfurilor rețelei, în vederea depistării drumurilor de creștere a fluxului curent  $x$ . Dacă nu există drumuri de creștere, fluxul va fi de valoare maximă.

Eticheta atribuită unui vîrf  $j \in V$  are trei componente  $(e_1, e_2, e_3)$  unde  $e_1 \in V \cup \{0\}$ ;  $e_2 \in \{direct, invers\}$ ;  $e_3 \in \mathbb{R}_+$  și au următoarea semnificație:

- dacă  $e_2 = direct$  și  $e_1 = i$  atunci  $\exists$  un C-drum  $P$  de la  $s$  la  $j$  cu ultimul arc  $ij$ , arc direct și  $r(P) = e_3$ ;
- dacă  $e_2 = invers$  și  $e_1 = i$  atunci  $\exists$  un C-drum  $P$  de la  $s$  la  $j$  cu ultimul arc  $ij$ , arc invers și  $r(P) = e_3$ .

Inițial, se etichetează sursa  $s$  cu eticheta  $(0, ., \infty)$ . Celelalte vîrfuri primesc etichetă prin "*cercetarea*" vîrfurilor deja etichetate:

Dacă  $i$  este un vîrf etichetat, atunci  $\forall j \in V$

Dacă  $j$  neetichetat,  $ij \in E$  și  $x_{ij} < c_{ij}$  atunci

$j$  se etichetează  $e = (i, direct, \min(e_3[i], c_{ij} - x_{ij}))$ ;

Dacă  $j$  neetichetat,  $ji \in E$  și  $x_{ji} > 0$  atunci

$j$  se etichetează  $e = (i, invers, \min(e_3[i], x_{ji}))$ .



## Algoritmul lui Ford și Fulkerson

- 1: Se alege  $x = (x_{ij})$  flux inițial (de ex. fluxul nul);  
Se etichetează  $s$  cu  $(0, \cdot, \infty)$
- 2: **while**  $(\exists$  vîrfuri etichetate necercetate) **do**  
  { "alege" un vîrf etichetat și necercetat  $i$ ;  
    *etichetare*( $i$ );  
    **if** ( $t$  a primit etichetă) **then**  
      { modifică fluxul pe drumul dat de etichete;  
        șterge toate etichetele;  
        etichetează  $s$  cu  $(0, \cdot, \infty)$   
      }  
    }  
  }
- 3:  $S \leftarrow \{i | i \in V, i \text{ are etichetă}\}$   
    $T \leftarrow V - S$

$x$  este flux de valoare maximă

$(S, T)$  este secțiune de capacitate minimă.

Algoritmul are complexitatea  $O(mv)$ , unde  $v$  este valoarea fluxului maxim iar  $m = |E|$ .

## Modificarea lui Edmonds & Karp a alg. lui Ford & Fulkerson

Numim **drum minim de creștere a fluxului**  $x$  în rețeaua  $R$ , un drum de creștere de **lungime minimă** printre toate drumurile de creștere.

Fie  $x$  un flux oarecare în rețeaua  $R$ . Definim șirul de fluxuri  $x^k$  în  $R$  astfel:

$$x^0 \leftarrow x;$$

$$x^k \leftarrow x^{k-1} \otimes r(P_{k-1}), \quad P_k \text{ este drum minim de creștere} \\ \text{relativ la } x^{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots$$

**Teorema 4.** (Edmonds, Karp) Dacă  $x = x^0$  este un flux oarecare în rețeaua  $R$ , atunci șirul de fluxuri  $x^1, x^2, \dots$  obținut din  $x^0$  prin creșteri succesive pe drumuri minime de creștere, are cel mult  $\frac{mn}{2}$  elemente (în cel mult  $\frac{mn}{2}$  creșteri succesive, se obține un flux care nu admite drumuri de creștere).

**Teorema 5.** (Edmonds- Karp 1972) Dacă se modifică algoritmul lui Ford și Fulkerson cu precizarea alegerii *bfs* a vîrfurilor etichetate în vederea cercetării, atunci, fluxul maxim se obține în timpul  $O(m^2n)$ .

**Se vor discuta problemele restante din săptămâna 6 și cele din tema 1.**