TEMA 2 ALGORITMICA GRAFURILOR

Dorneanu Anca uuianu Corneliu grupa A7 ,an II

11/30/2014

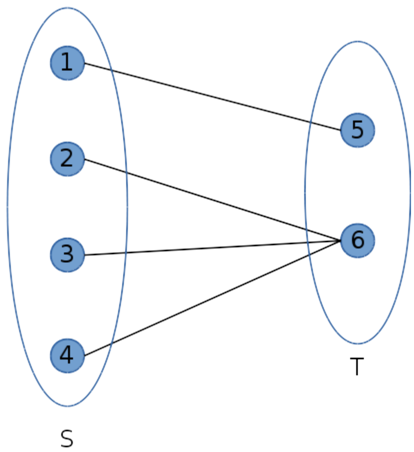
Problema 1

Demonstrati ca daca G este un graf bipartit atunci $\chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$

Un graf bipartit este un graf G cu proprietatea ca $V(G)$ se poate partitiona ın doua multimi independente in G. Daca S si T satisfac $S \bigcup T = V(G)$, $S \bigcap T = \varnothing$ si S, T sunt independente si nevide in G, atunci graful bipartit G se noteaza $G = (S, T; E(G))$.

Deci, daca $G = (S, T; E(G))$ este un graf bipartit, atunci$\forall e \in E(G)$ are o extremitate in S si cealalta in T.

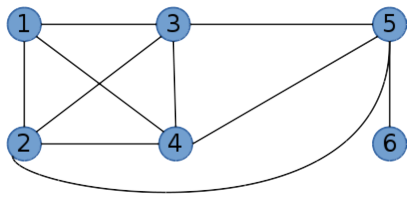
Exemplu: Fie G un graf bipartit, $S = \{1, 2, 3, 4\}, T = \{5, 6\}, E(G) = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 6)\}$



Daca $G = (V(G), E(G))$ este un graf, atunci complementarul sau este graful $\overline{G}$ cu $V(\overline{G}) = V(G)$ ¸si $E(\overline{G}) = \mathcal{P}_2(V(G)) \setminus E(G)$.

In cazul nostru $\overline{G} = (V^{'}(\overline{G}), E^{'}(\overline{G}))$, cu

$E^{'}(\overline{G}) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$



$\overline{\text{G}}$

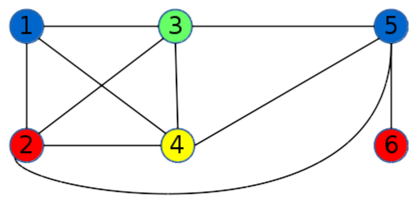
Numarul cromatic al grafului G, notat $\chi(G)$, este cea mai mica valoare a lui $p \in \mathbb{N}^*$ pentru care G admite o p-colorare.

Daca $G = (V(G), E(G))$ este un graf si $p \in \mathbf{N}^*$, se numeste $p$colorare a (varfurilor) lui G o aplicatie $c : V(G) \to 1, ..., p$ cu proprietatea ca $c^{-1}(i)$ este o multime stabila in G, $\forall i \in 1, ..., p$ (remarcam ca, din definitia multimilor stabile, $\varnothing$ este o multime stabila).

O $p$colorare a muchiilor lui G este o aplicatie $c : E(G) \to 1, ..., p$ cu proprietatea ca $c^{-1}(i)$ este un cuplaj al lui G, $\forall i \in 1, ..., p$.

Un cuplaj in$G$ este o multime de muchii M in care nici o pereche de muchii nu are un nod comun. Nodurile adiacente la muchiile din M se numesc noduri saturate de M (sau M-saturate). Celelalte noduri se numesc M-nesaturate.

Pentru problema noastra:$\chi(\overline{G})$este cea mai mica valoare a lui $p$$\in$$\mathbb{N}^*$ pentru care $\overline{G}$ admite o p-colorare.

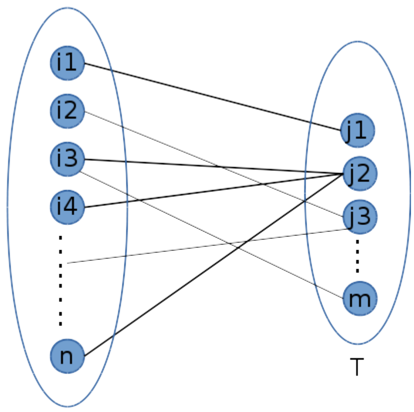


p-colorare $\overline{\mathrm{G}}$

Se poate observa ca din cauza faptului ca multimea$S > T$ din G, si din aceasta cauza nodurile din S formeaza un subgraf complet in G(si numarul cromatic pentru un graf complet este n,$n = |V(G)|$) ,astfel incat $\chi(\overline{G}) = |S|$ in cazul nostru $\chi(\overline{G}) = 4$.

In alta ordine de cuvinte pentru complementul $\overline{G}$ al unui graf bipartit G cu$nr = max(cardinal(S), cardinal(T))$, $\chi(\overline{G}) = nr$. Numarul cromatic maximum dintre cardinalele multimilor ce formeaza graful bipartit G.

Caz genereal



Multimile de noduri S si T in $\overline{G}$ vor deveni 2 subgrafuri complete ce vor avea n-colorare si respectiv m-colorare. Evident pentru a putea colora graful $\overline{G}$ vom avea nevoie de $max(n, m)$ -colorare.

Un subgraf complet (de ordin q) al unui graf G se numeste clica (q-clica) a lui G.

Cardinalul maxim al unei clici a lui G se numeste numarul de clica sau numarul de densitate al lui G ¸si se noteaza $\omega(G)$. Cum, evident $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$, rezulta ca determinarea numarului de clica al unui graf si a unei clici de cardinal maxim este problema P1 cu intrarea G.

O multime independenta de varfuri (sau multime stabila) in G este o multime $S \subseteq V(G)$ de varfuri cu proprietatea ca $P_2(S) \bigcap E(G) = \varnothing$ (adica o multime de varfuri neadiacente doua cate doua). Cardinalul maxim al unei multimi stabile se numeste numarul de stabilitate sau numarul de independenta al grafului G si se noteaza cu $\alpha(G)$.

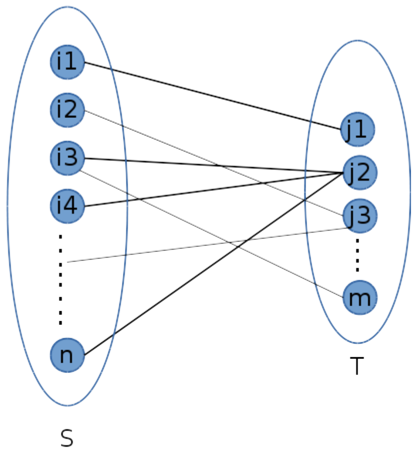
Exemplu: in exemplul nostru pentru a afla numarul de densitate ω pentru $\overline{G}$ trebuie sa aflam numarul de stabilitate pentru G,deoarece $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$.

Varfurile neadiacente 2 cate 2 din G: $(1,2),(1,3),(1,4),(1,6),(2,3)(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)$;

$S = \{1,2,3,4\} sau \{\{2,3,4,5\}\}$inlocuid varful 1 cu 5 (daca am adauga in plus nodul 6 ,am pierde 2,3,4) deci astea sunt toate combinatiile; $|S| = 4 = \alpha(G) \Longrightarrow \omega(\overline{G}) = \alpha(G) \Longrightarrow \chi(\overline{G}) = \omega(\overline{G})$.

Cardinalul maxim al unei multimi stabile pentru un graf bipartit G este maximum dintre cardinalele multimilor ce formeaza graful bipartit G.

Caz general.



Se poate observa ca numarul de stabilitate va fi cardinalul cel mai mare dintre cele 2 multimi, deoarece in oricare din cele 2 multimi toate nodurile care formeaza multimea sunt neadiacente doua cate doua si daca vom adauga oricare nod din cealalta multime vom pierde aceasta proprietate.

Problema 2

Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Demonstrati ca numarul arborilor partiali ai grafului complet K_n, care nu contin o muchie fixata $e \in E(Kn)$, este$(n-2)n^{n-3}$.

Fie graful complet K_n cu $n \in \mathbb{N}, n \geq 3 |V(K_n)| = n$ si $E(Kn) = P2(V(Kn)) \Longrightarrow \forall v_i, v_j \in V(K_n), \exists m, m \in E(K_n) m = (v_i, v_j)$ (muchia m uneste virfurile v_i si v_j)

Un arbore este un graf conex si fara circuite.

Fie $G = (V, E)$ un (multi)graf. Se numeste arbore partial al lui G, un graf partial $T = (V, E\prime)(E\prime \subseteq E)$ care este arbore. Vom nota cu $\mathcal{T}_G$ multimea arborilor partiali ai lui G. Obs. $\mathcal{T}_G \neq \emptyset$ daca si numai daca G este conex.

Kirchoff-Trent: (Matrix Tree Theorem) Daca G este un multigraf cu multimea de virfuri $\{1, ..., n\}$ ¸si $L[G]$ matricea *Laplace,* atunci $|\mathcal{T}_G| = det(L[G]_{ii}) \forall i \in \{1, ..., n\}$. $L[G]_{ij}$ noteaza minorul lui $L[G]$ obtinut prin indepartarea liniei i ¸si coloanei j.

Teorema lui Cayley: Pentru un graf complet K_n,$|\mathcal{T}_{K_n}| = n^{n\text{-}2}$. In adevar :

$L(K_n) = (\begin{matrix} n-1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & -1 \\ -1 & ... & -1 & n-1 \end{matrix})$ si dupa un calcul $det(L[K_n]_{11}) = | \begin{matrix} n-1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & -1 \\ -1 & ... & -1 & n-1 \end{matrix} | = n^{n-2}$

In continuare vom afla numarul arborilor partiali ai grafului complet K_n care contin o muchie fixata $e \in E(Kn)$.

Fiecare muchie din K_n pe $\{1, 2, ..., n\}$ este formata peste acelasi numar de varfuri. Avand in vedere ca un arbore partial contine $n-1$ muchii, numarul de perechi (T, e) cu T un arbore partial si e o muchie din T este, dupa formula lui Cayley , $n^{n-2}(n-1)$. Si stiind ca sunt $n(n-1)/2$ muchii in K_n,numarul de arbori partiali care contine o anumita muchie este $\frac{n^{n-2}(n\text{-}1)}{n(n-1)/2} = 2n^{n-3}$.

Final: din numarul total de arbori partiali scadem numarul de arbori partiali care contine o anumita muchie(au o muchie fixata)

$n^{n\text{-}2} - 2n^{n\text{-}3} = nn^{n-2} - 2n^{n-3} = n^{n-3}(n-2)$

Problema 3

Ana si Barbu se joaca pe un graf G, alegand alternativ varfuri distincte $v_0, v_1, \ldots$ astfel incat, pentru $\forall i > 0$, v_i este adiacent cu v_{i-1}. Pierde jucatorul care nu mai poate alege un varf. Demonstrati ca daca Ana incepe jocul, atunci ea are o strategie castigatoare (adica indiferent de cat de bine joaca Barbu, ea ca¸stiga) daca si numai daca graful G nu are un cuplaj perfect. Argumentati ca, pentru un graf dat, problema de a decide daca Ana are o strategie castigatoare (atunci cand ea incepe jocul) este din NP.

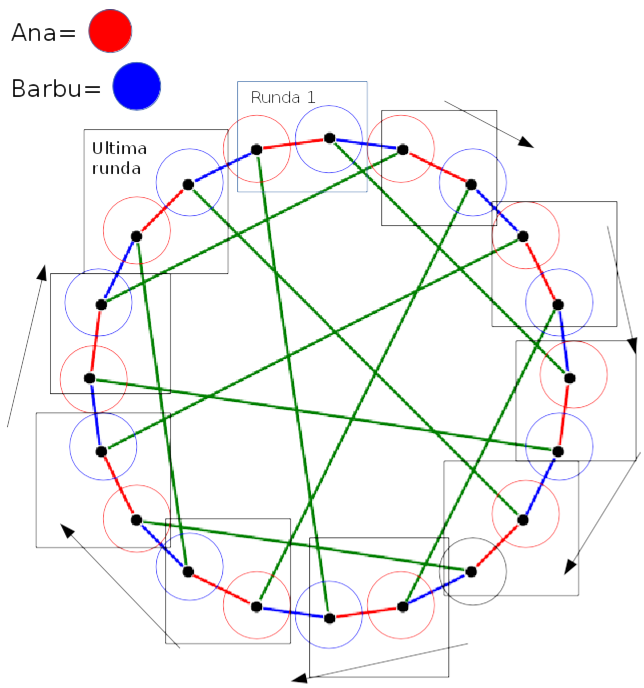
Fie graful G. Un cuplaj perfect este un cuplaj care satureaza toate nodurile lui G.

Daca G nu este conex $\Longrightarrow$vom lua componenta conexa care are cel mai mare nr de noduri si vom lucra pe ea.

Fie$G$ este conex(sau componenta sa conexa). Ana are o strategie castigatoare $\Longleftrightarrow G$ nu are un cuplaj perfect.

Caz 1 :Presupunem ca G are un cuplaj perfect $\Longrightarrow G$ are un numar par de varfuri care sunt impartiti de-alungul muchiilor potrivite.

Acum, Ana va alege un varf (care este coincident cu un varf al formei geometrice formate din muchiile potrivite factorizarii-1 a grafului) ;apoi Barbu va alege urmatorul varf. Evident ca in acest caz Ana va pierde ,deoarece in graf sunt un nr par de varfuri si ea fiind jucatorul care incepe va alege doar nodurile care in enumerare sunt cu etichete cu numere impare; si in ultima instanta cand Barbu va alege ultimul nod din graf cu eticheta para n, ea nu va mai avea ce sa aleaga deci va pierde.



-cuplaj perfect pentru un graf cu 20 noduri-

Si din exemplu se poate observa ca in urma alegerilor, Ana ramane fara optiune in final.

Caz 2:

Presupunem ca G nu are cuplaj perfect. Aratam prin contradictie ca Ana are o strategie castigatoare.

Fie M un cuplaj maxim din G. Fie $v_0 \notin M$ primul varf ales de Ana. Deoarece M este un cuplaj maxim, v_0 este adiacent cu un alt varf din M. Deci Barbu va alege un astfel de varf din M. Apoi Ana alege varful adiacent din M. Tot procesul continua, dandu-i sansa mereu Anei sa aleaga un varf,sa se miste. Prin presupunere ,Barbu castiga, si astfel alege ultimul varf . Insa, aceasta secventa ar defini un drum augmentar pentru M (nr impar de noduri) care este o contradictie pentru M maxim.

Ca sa aratam ca problema este in NP,trebuie sa verificam secventa de varfuri din perechea (G, S) unde G este graful nostru si S este tuplul strategiilor Anei. Asta poate fi facut in timp polinomial fiind o cautare.

Problema4

Fie $H = (V, E)$ un graf. Daca $v \in V$ si $r \in \mathbb{N}$, notam cu $S_H(v, r)$ sfera de raza r cu centrul in v: $S_H(v, r) = \{u \in V : dist_H(u, v) \leq r\}$. Consideram urmatorul algoritm de partitionare a unui graf G dat in "clustere" sferice.

Algorithm 1

Partitionarea in clustere a unui graf G dat.$\rho > 2$ este un parametru real dat.

1: **while** $V(G) \neq \emptyset$ **do**
2: fie $v \in V(G)$;
3: $r := 0$;
4: **while**$|S_G(v, r+1)| > \rho|S_G(v, r)|$**do**
5: $r := r + 1$
6: **end while**
7: makeCluster($S_G(v, r)$) // $S_G(v, r)$este noul cluster
8: $G := G - S_G(v, r)$
9: **end while**

a)Aratati ca Algoritmul 1 construieste clustere de raza cel mult $log_\rho n$.

b) In procedura makeCluster($S_G(v, r)$), pentru fiecare varf $u \in V(G) - S_G(v, r)$ cu proprietatea ca exista $w \in S_G(v, r)$ astfel incat $wu \in E(G)$, se memoreaza exact o astfel de muchie si se numeste "muchie intercluster". Demonstrati ca numarul muchiilor intercluster este cel mult $(\rho - 1)n$.

c) Pentru $k \in \{1, ..., \lceil logn \rceil\}$, sa se determine o alegere corespunzatoare a lui $\rho(k)$ astfel ca sa avem $O(n^{1+\frac{1}{k}})$ muchii intercluster.

a)Explicatie algoritm:

1: **while** $V(G) \neq \emptyset$ **do** //cat timp mai exista un nod in multimea de varfuri din G
2: fie $v \in V(G)$; //alege un varf din V(G)
3: $r := 0$; //initializam lungimea razei sferei cu 0
4: **while**$|S_G(v, r+1)| > \rho|S_G(v, r)|$**do** //cat timp cardinalul lui $S_G(v, r+1)$ este mai mare decat cardinalul lui $S_G(v, r)$ inmultit cu ρ
5: $r := r + 1$ //creste lungimea razei
6: **end while** //avem un $S_G(v, r) < \rho|S_G(v, r-1)$
7: makeCluster($S_G(v, r)$) // $S_G(v, r)$este noul cluster
8: $G := G - S_G(v, r)$ //eliminam din G toate nodurile pe care le gasim in $S_G(v, r)$
9: **end while**

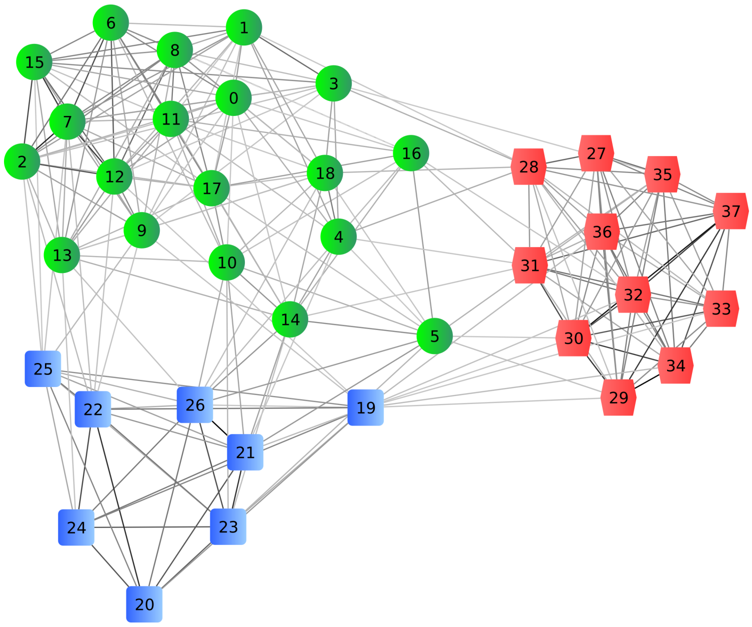
$S_G(v, r)$este multimea formata din toate nodurile u din $V(G)$ in care lungimea drumului raportat la graful G de la v la u e cel mult r. $S_G$poate fi privita ca o sfera care in care nodurile apartin interiorului sau sau pe suprafata sa.

In urma algoritmului se vor forma clustere care vor avea raza r.

Raza maxima pe care o poate avea un cluster este in cazul in care in urma executiei algoritmului se va forma un singur cluster ce va contine toate nodurile, deci lungimea sa va fi n.

Insa numarul de noduri intr-un cluster creste exponential in functie de ρ care este > 2. Pe linia 4 multimea nodurilor din $S_G$trebuie sa creasca exponential cu ρ altfel va iesi din **while**.

Din cele enuntate mai sus rezulta faptul raza maxima va fi $= log_\rho n$.



exemplu de clusterizare pt un graf

b)muchie intercluster=muchie(care $\in E(G)$) ce face legatura dintr un nod din cluster si unul din afara sa.

Fie graful G si nr real ρ.Se vor afla clusterele pentru G in functie de ρ.

Initial, raza unui cluster este 0,si va creste doar daca clusterul va creste cu un factor mai mare decat ρ. Asta se poate intampla doar de maxim$log_\rho n$ ori deoarece sunt doar n noduri in graf(demonstrat si la punctul a).

Observam ca pentru a numara muchiile intercluster pentru un cluster dat,vom lua in considerare nodurile care se afla pe marginea clusterului deoarece numai ele pot deveni muchii intercluster (putand conecta noduri care se afla in cluster exteriorul clusterului).

Fie C un cluster de marimea $|C|$. Stim ca $C = S_G(v, r)$ pentru un $v \in V$sir ≥ 0.

In continuare stim ca $|S_G(v, r+1)| \leq \rho |S_G(v, r)|$. Deci numarul de noduri adiacente clusterului C este cel mult $|\frac{S_G(v,r+1)}{S_G(v,r)}| \leq \rho \cdot |C|$-$|C|$. Astfel, numarul de muchii intercluster adiacente cu C este maxim $(\rho - 1)|C|$. Insumand pentru toate clusterele vom avea ca numarul totat de muchii intercluster este maxim $(\rho - 1)n$

c)

Daca $\rho = 2$,Algoritmul1va calcula o clusterizare a grafului cu raza maxim $\log_2 n$ si cu n muchii intercluster.

Daca $\rho = n^{\frac{1}{k}}$,Algoritmul1 va calcula o clusterizare a grafului cu raza maxim k si cu maxim $O(n^{1+\frac{1}{k}})$muchii intercluster.

$(\rho(k) - 1)n = n^{1+\frac{1}{k}} \Rightarrow \rho(k) - 1 = n^{\frac{1}{k}} \Rightarrow \rho(k) = n^{\frac{1}{k}} + 1$