Outline

Cuprins

1 Recapitulare

String Searching (Matching) Problem

Input Două şiruri: $s = s[0] \dots s[n-1]$, numit subiect sau text, şi $p = p[0] \cdots p[m-1]$, numit pattern.

Output Prima apariţie a patternului p în textul s, dacă există; -1, altfel.

Algoritmul naiv (brute force)

- $O(n \cdot m)$ în cazul cel mai nefavorabil, $O(min(n, m))$ în cazul cel mai favorabil
- numărul mediu de comparații $\leq 2(n + 1 - m)$

Întrebare: putem obține O(n) în cazul cel mai nefavorabil?

Algoritmul Rabin-Karp

- utilizează tehnica tabelelor de dispersie (hash)
- trebuie să fie ușor de calculat și de comparat valorile hash
- complexitatea în cazul cel mai nefavorabil $O(n \cdot m)$, dar foarte puțin probabil să apară în practică
- complexitatea medie $O(m + n)$
- extensibil la cazul bidimensional (imagini)

Algoritmul Boyer-Moore

- regula caracterului rău: pentru cazul cel mai nefavorabil are complexitatea $O(m \cdot n)$
- Regula sufixului bun:
  - complexitate $O(n + m)$ dacă patternul p nu apare în subiect; altfel rămâne $O(m \cdot n)$
  - totuși, cu o simplă modifcare (regula Galil, 1979) se poate obține $O(n + m)$ în toate cazurile
  - algoritmul original al lui Boyer-Moore (1977) utilizează o variantă simplificată a regulei sufixului bun
  - Richard Colen (1991) a stabilit o limită de $3n$

2 Algoritmul Knuth-Morris-Pratt

Algoritmul naiv[1]

a	b	c	b	a	b	a	b	a	a	b	c	b	a	b
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$					
				a	b	a	b	a	c	a				

Intuiția[2]

a	b	c	b	a	b	a	b	a	a	b	c	b	a	b
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$					
				a	b	a	b	a	c	a				
					a	b	a	b	a	c	a			
						a	b	a	b	a	c	a		

Intuiția[3]

?	?	?	?	a	b	a	b	a	?	?	?	?	?	?
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$					
				a	b	a	b	a	?	?				
					a	b	a	b	?	?	?			
						a	b	a	?	?	?	?		

Pentru pattern-ul *ababaca*, dacă la o poziție i se potrivesc exact 5 caractere, nu există nicio șansă ca pattern-ul să se potrivească la poziția $i + 1$.

Ideea

?	?	?	?	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	?	?	?	?	?	?	?	?
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$							
				x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	?							
								$=$	$=$	$=$								
								x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	?			

Ideea

?	?	?	?	x_0	x_1	x_2	x_3	x_0	x_1	x_2	?	?	?	?	?	?	?	?
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$							
				x_0	x_1	x_2	x_3	x_0	x_1	x_2	?							
								$=$	$=$	$=$								
								x_0	x_1	x_2	x_3	x_0	x_1	x_2	?			

[1]Exemplu din [CLRS]
[2]Exemplu din [CLRS]
[3]Exemplu din [CLRS]

Ideea

?	?	?	?	x_0	...	x_{k-1}	...	x_0	...	x_{k-1}	?	?	?	?
				=	=	=	=	=	=	=	$\neq$			
				x_0	...	x_{k-1}	...	x_0	...	x_{k-1}	?			

Ne interesează cea mai mare valoarea a lui k astfel încât $x_1 \ldots x_k$ să fie atât prefix cât și sufix al părții din pattern care s-a potrivit.

Notații

- reamintim: frontieră (bordură) a unui șir t - un factor (subșir) care este si prefix și sufix al lui t
- notăm: $maxFr(k)$ - frontiera maximă a lui $p[0..k-1]$ care e factor propriu ($\neq p[0..k-1]$)
  $f[k] = |maxFr(k)|$ (lungimea frontierei (bordurii) maxime a lui $p[0..k-1]$)
- exemplu: $p = \begin{matrix} a & b & a & b & a & c & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}$

k	$maxFr(k)$	$f[i]$
1	ε	0
2	ε	0
3	a	1
4	ab	2
5	aba	3
6	ε	0

- notație: $u \leq_{fr} v$ ddacă $u \leq_{pref} v$ și $u \leq_{suff} v$

Raționament în domeniul problemei 1/2

- definiția formală a lui $maxFr(v)$:
  $maxFr(v) <_{fr} v$ și
  $(\forall w) w <_{fr} v$ implică $w \leq_{fr} maxFr(v)$;
  cu alte cuvinte, frontiera (bordura) de lungime maximă este maximă și relativ la relația de ordine $\leq_{fr}$;
- notație: $maxFr^0(v) = v$, $maxFr^{j+1}(v) = maxFr(maxFr^j(v))$
- avem:
  $\cdots <_{fr} maxFr^{j+1}(v) <_{fr} maxFr^j(v) <_{fr} \cdots <_{fr} maxFr^1(v) <_{fr} maxFr^0(v) = v$

Theorem 1. *$u \leq_{fr} v$ ddacă există $j \geq 0$ a.î. $u = maxFr^j(v)$.*

Corollary 2. *$u <_{fr} v$ ddacă există $j > 0$ a.î. $u = maxFr^j(v)$.*

Raționament în domeniul problemei 2/2

Theorem 3. $|maxFr^j(p[0..k-1])| = f^j[k]$.

Verificăm pentru $j =, 2, 3$, cazul general rezultând prin inducție:

$$\begin{aligned}
|maxFr^2(p[0..k-1])| &= |maxFr(maxFr(p[0..k-1]))| \\
&= maxFr(p[0..f[k]-1) \\
&= f[f[k]] \\
&= f^2[k] \\
|maxFr^3(p[0..k-1])| &= |maxFr(maxFr^2(p[0..k-1]))| \\
&= maxFr(p[0..f^2[k]-1) \\
&= f[f^2[k]] \\
&= f^3[k] \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Deoarece frontierele (bordurile) lui $v = p[0..k-1]$ sunt

$\cdots <_{fr} maxFr^{j+1}(v) <_{fr} maxFr^{j}(v) <_{fr} \cdots <_{fr} maxFr^{1}(v) <_{fr} maxFr^{0}(v) = v$

rezultă că lungimile acestora sunt în relația

$\cdots < f^{j+1}[k] < f^j[k] < \cdots < f[k] < f^0[k] = k$

și că "saltul" de la $maxFr^{j+1}(v)$ la $maxFr^{j}(v)$ este egal cu $f^{j+1}[k] - f^j[k]$

Exemplu 1/6

Să vedem pe un exemplu cum poate fi utilizat eficient $f[i]$:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
$=$	$=$	$\neq$												
a	b	a	b	a	c	a								
0	1	2	3	4	5	6								

- eșec la pozițiile $i = k = 2$ (poziția i în subiect, poziția k în pattern)
- $f[k] = f[2] = 0$
- se face un salt egal cu $k - f[k] = 2 - 0 = 2$
- următoarele poziții ce se vor compara: $i = 2, k = f[k] = 0$ (k devine $f[k]$)

Exemplu 2/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
		$\neq$												
		a	b	a	b	a	c	a						
		0	1	2	3	4	5	6						

- eșec la pozițiile $i = 2, k = 0$
- $f[0] = ?$
- se face un salt egal cu $k - f[k] = 0$, deci luăm $f[0] = -1$
- următoarele poziții ce se vor compara: $i = i + 1 = 3, k = f[k] + 1 = 0$ ()

Exemplu 3/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
			$\neq$											
			a	b	a	b	a	c	a					
			0	1	2	3	4	5	6					

- eșec la pozițiile $i = 3, k = 0$
- $f[0] = -1$
- se face un salt egal cu $k - f[k] = 0 - f[0] = 1$
- următoarele poziții ce se vor compara: $i = i + 1 = 4, k = f[k] + 1 = 0$ (se incrementează cu 1 atât i cât și k)

Exemplu 4/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
				$=$	$=$	$=$	$=$	$=$	$\neq$					
				a	b	a	b	a	c	a				
				0	1	2	3	4	5	6				

- eșec la pozițiile $i = 9, k = 5$
- $f[5] = 3$
- se face un salt egal cu $k - f[k] = 5 - f[5] = 2$
- următoarele poziții ce se vor compara: $i = 9, k = f[k] = 3$ (k devine $f[k]$)

Exemplu 5/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
									$=$	$=$	$\neq$			
						a	b	a	b	a	c	a		
						0	1	2	3	4	5	6		

- eșec la pozițiile $i = 11, k = 5$
- $f[5] = 3$
- se face un salt egal cu $k - f[k] = 5 - f[5] = 2$
- următoarele poziții ce se vor compara: $i = 11, k = f[k] = 3$ (k devine $f[k]$)

Exemplu 6/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	b	c	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	c	a
											=	=	=	=
								a	b	a	b	a	c	a
								0	1	2	3	4	5	6

- s-a găsit prima apariție

Reguli

- dacă $k = m - 1$, atunci avem o apariție la la poziția de start $i - m + 1$;
- dacă $p[k] \neq s[i]$ atunci k devine $p[k]$ ($k = p[k]$), adică se trece la următoarea frontieră (bordură);
- dacă $k == -1$ atunci se incrementează atât i cât și k;
- dacă $p[k] == s[i]$ atunci se incrementează atât i cât și k;

Algoritmul KMP în Alk

```
KMP(s, n, t, m, f) {
  i = 0;
  k = 0;
  while (i < n) {
    while (k != -1) && (p[k] != s[i])
      k = f[k];
    // k == -1 or p[k] == s[i]
    if (k = m-1)
      return i-m+1; /* gasit p in s */
    else {
      i = i+1;
      k = k+1;
    }
  }
  return -1; /* p nu apare in s */
}
```

Timpul de execuție

Reamintim funcția eșec pentru exemplul precedent:

0	1	2	3	4	5	6
a	b	a	b	a	c	a
-1	0	0	1	2	3	0

1. Observații:
   (a) pentru orice k, $-1 \leq f[k] < k$.
   (b) valoarea lui k va crește de cel mult n ori (ca și i)
   (c) la fiecare iterație while interioară k descrește, dar va fi ≥ -1
   (d) per total, k nu va putea descrește de mai multe ori de câte ori crește
   (e) deci while interior va face cel mult n iterații în total
2. Concluzie: timpul de execuție pentru KMP este $O(n)$

Funcția eșec f: introducere

- deoarece f este utilizată atunci când o comparație eșuează, f se numește și funcție eșec (failure function)
- notată și cu π (de exemplu in [CLR])
- reamintim că $f[i] = |maxFr(p[0..i-1])|$ (lungimea frontierei maxime a lui $p[0..i-1]$
- exemplu:

a	b	a	b	a	c	a
-1	0	0	1	2	3	0

- O implementare naivă poate avea complexitatea $O(m^3)$ (exercițiu pentru acasă).
- Dacă presupunem că $f[0..i-1]$ a fost deja calculat, cum calculăm eficient $f[i]$?

Funcția eșec f:calcul

- reamintim că prefixele lui $v = p[0..i-1]$ sunt:
  $\cdots <_{fr} maxFr^{j+1}(v) <_{fr} maxFr^{j}(v) <_{fr} \cdots <_{fr} maxFr^{1}(v) <_{fr} maxFr^{0}(v) = v$

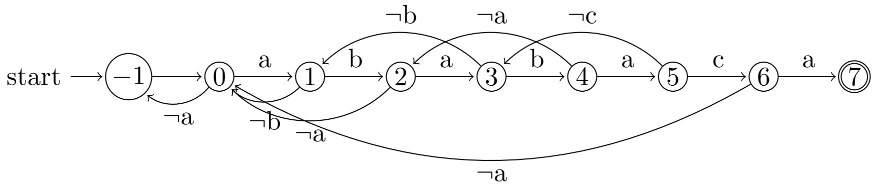
  și că $f^j[i] = |maxFr^j(p[0..i-1])$
- rezultă că $f[i] = f^k[i-1]+1$, unde k este cel mai mic întreg cu proprietatea $p[f^k[i-1]+1] = p[i-1]$
- adică ne uităm la prefixele lui p care sunt sufixe ale lui $p[0..i-2]$ și-l luăm pe cel mai mare cu proprietatea că următorul caracter coincide cu $p[i-1]$

Calculul funcției eșec: reprezentarea în Alk

```
f[0] = -1;
k = -1;
for (i = 1; i <= m; ++i) {
  // invariant: k = f[i-1]
  while(k >= 0 && p[k+1] != p[i-1])
    // invariant: exista j cu k = f^j[i-1] si
    // j este cel mai mic cu p[f^j[i-1]+1] != p[i-1]
    k = f[k];
  k = k + 1;
  f[i] = k;
}
```

Timp de execuție: $\Theta(m)$.
Analiza e similară cu cea de la KMP.

Funcția eșec reprezentată ca un automat



Un automat este format din:

- alfabet de intrare (a, b, c)
- stări $(-1, 0, 1, \ldots, 7)$
- starea inițială (-1)
- stare finală/acceptare (7)
- tranziții spontane: $(-1 \to 0)$
- tranziții etichetate: $(0 \xrightarrow{a} 1, 1 \xrightarrow{b} 2, 2 \xrightarrow{a} 3, \ldots, 0 \to -1, 1 \to 0, \ldots)$

3 Expresii regulate

Motivație: pattern-uri în Emacs (sau alt editor similar)

Din documentație:

Pattern	Matches
.	Any single character except newline ("\n").
\.	One period
[0-9]+	One or more digits
[ˆ 0-9]+	One or more non-digit characters
[A-Za-z]+	one or more letters
[-A-Za-z0-9]+	one or more letter, digit, hyphen
[_A-Za-z0-9]+	one or more letter, digit, underscore
[-_A-Za-z0-9]+	one or more letter, digit, hyphen, underscore
[[:ascii:]]+	one or more ASCII chars. (codepoint 0 to 127, inclusive)
[[:nonascii:]]+	one or more none-ASCII characters (For example, Unicode characters)
[\n\t]+	one or more {newline character, tab, space}.

[1ex]

Demo cu Emacs

Definiţie

În această secţiune considerăm cazul când "pattern"-ul constituie doar o specificaţie a ceea ce se caută în sensul că el desemnează o mulţime de şiruri pentru care se caută. Numim o astfel de specificaţie *"pattern" generalizat.* Un alt mod de a specifica "pattern"-uri generalizate îl constituie expresiile regulate.

Definiţie 1. *Mulţimea* expresiilor regulate *peste alfabetul Σ este definită recursiv astfel:*

- *ε, empty sunt expresii regulate*
- *orice caracter din Σ este o expresie regulată;*
- *dacă e_1, e_2 sunt expresii regulate, atunci e_1e_2 şi $e_1 + e_2$ sunt expresii regulate;*
- *dacă e este expresie regulată, atunci (e) şi e^* sunt expresii regulate.*

Arborele sintactic abstract: *pe tabla.*

Legătura cu pachetul `<regex>` din C++, Emacs

`<regex>`	expresia regulata
`[abc]`	$\mathtt{a} + \mathtt{b} + \mathtt{c}$
`\d sau [[:digit:]]`	$0 + 1 + \cdots + 9$
`[[:digit:]]*`	$(0 + 1 + \cdots + 9)^*$
`[[:digit:]]+`	$(0 + 1 + \cdots + 9)(0 + 1 + \cdots + 9)^*$

Limbajul definit de o expresie regulată

Definiţie 2. *Mulţimea de şiruri (limbajul) $L(e)$ definit de o expresie regulată e este definit recursiv astfel:*

- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ *(ε este şirul vid (de lungime zero)),* $L(\mathtt{empty}) = \emptyset$
- *dacă e este un caracter atunci $L(e) = \{e\}$;*
- *dacă $e = e_1e_2$ atunci $L(e) = L(e_1)L(e_2) = \{w_1w_2 \mid w_1 \in L(e_1), w_2 \in L(e_2)\}$;*
- *dacă $e = e_1 + e_2$ atunci $L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$;*
- *dacă $e = e_1^*$ atunci $L(e) = \cup_k L(e_1^k)$, unde $L(e_1^0) = \{\varepsilon\}, L(e_1^{k+1}) = L(e_1^k)L(e_1)$;*
- *dacă $e = (e_1)$ atunci $L(e) = L(e_1)$.*

Exemplu: Fie alfabetul $A = \{a, b, c\}$. Avem $L(a(b + a)c) = \{abc, aac\}$ şi $L((ab)^*) = \{\varepsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^k \mid k \geq 0\}$. $\boxed{\text{sfex}}$

Căutare cu expresii regulate

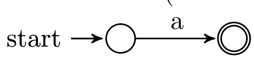
Input Un text s, un pattern p exprimat ca o expresie regulată. [2ex] *Output*: Prima apariție a unui șir din limbajul definit de expresia regulată [3ex]

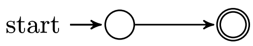
Algoritmul de căutare utilizează un automat asociat patternului, similar ca la KMP.

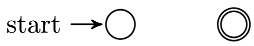
Automatul asociat unei expresii regulate

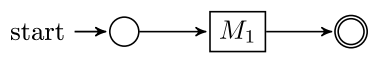
– cazul de bază

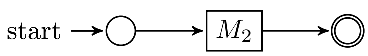
e este o litera (un simbol) $a \in \Sigma$



e este ε 

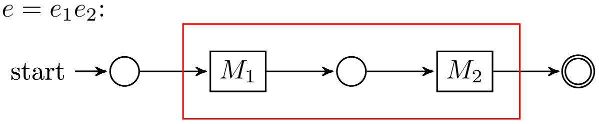
e este *empty* 

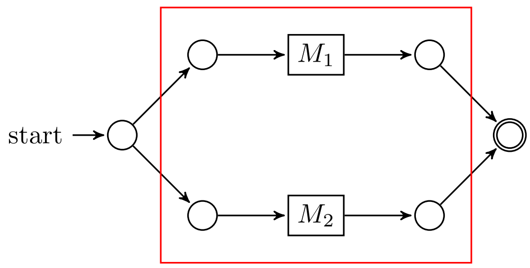
pentru cazul inductiv presupunem că e_1 și e_2 au asociate automatele: 



Automatul asociat unei expresii regulate

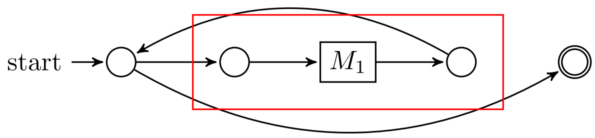
$e = e_1 e_2$:





$e = e_1 + e_2$:

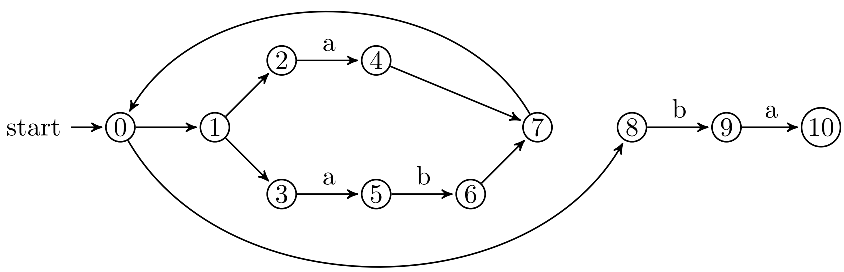
Automatul asociat unei expresii regulate



$e = e_1^*$:

Exemplu

$e = (a + ab)^* ba$



Detaliile procesului de construţie pe tablă

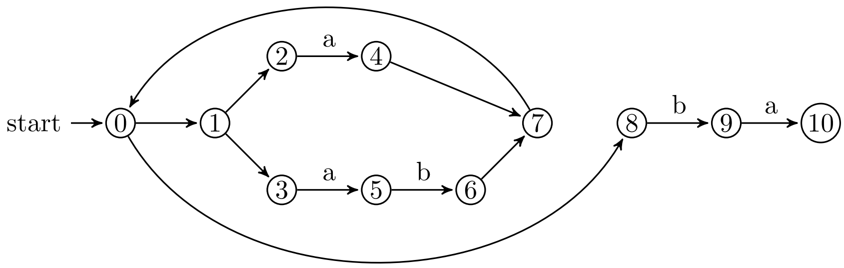
Construcţii mai performante

- automatului Brzozowski (1964)
- construcția unui automat determinist
- utilizând funcţiile `first` şi `follow` (Berry, Setti, 1986)
- paralelizare (Myer, A Four Russians Algorithm for Regular Expression Pattern Matching)
- o altă construcţie pentru automatul nedeterminist este Glushkov-McNaughton-Yamada (1960-1961), care poate fi si paralelizată (Navarro & Raffinot, 2004)

Mai multe detallii despre expresii regulate și automatele lor la cursul LFAC din anul II.

Utilizarea automatului în căutare

$e = (a + ab)^*ba$



Detalii pe tablă

Complexitatea căutării cu expresii regulate

Presupunem că lungimea expresiei regulate este m (numărul de caractere fără operatori) şi $m_\Sigma = |\Sigma \cup \{\cdot, +, *\}|$.

Theorem 4 (Thomson, 1968)**.** *Problema căutării cu expresii regulate poate fi rezolvată în timpul $O(mn)$ cu automate nedeterministe şi spaţiu $O(m)$.*

Theorem 5 (Kleene, 1956)**.** *Problema căutării cu expresii regulate poate fi rezolvată în timpul $O(n + 2^{m_\Sigma})$ cu automate deterministe şi spaţiu $O(2^{m_\Sigma})$.*

Theorem 6 (Myers, 1992)**.** *Problema căutării cu expresii regulate poate fi rezolvată în timpul $O(mn/\log n)$ cu automate deterministe şi spaţiu $O(mn/\log n)$.*