Setul de probleme 2

soluţiile se primesc

marţi 5 ianuarie între orele 10 şi 12, la cabinetul C-402

13 decembrie 2015

Problema 1. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit fără vârfuri izolate, în care $|S| \geq |T|$ şi pentru orice muchie $st \in E$ ($s \in S$ şi $t \in T$) are loc inegalitatea $d_G(s) \geq d_G(t)$ între gradele celor două extremităţi.

(a) Demonstraţi că $|S| = |T|$ şi fiecare componentă conexă a lui G este un graf (bipartit) regulat.

(b) Demonstraţi că graful G are un cuplaj perfect.

(2+2= 4 puncte)

Problema 2. Pentru un graf oarecare $H = (V(H), E(H))$, notăm $f(H) := \frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. Fie $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ un graf cu $|E| = m$ muchii. Considerăm $\mathbf{P}$, problema determinării unui subgraf G^* al lui G asfel încât

$$f(G^*) = \max_{G' \text{ subgraf al lui } G} f(G').$$

Din graful G construim o reţea $R = (D, c, s, t)$ astfel: adăugăm la vârfurile lui G două vârfuri noi s şi t; se înlocuieşte fiecare muchie $\{u, v\}$ a lui G cu o pereche de arce simetrice (u, v) şi (v, u), fiecare de capacitate 1; pentru fiecare vârf $i \in \{1, \ldots, n\}$ se consideră arcele (s, i) şi (i, t) de capacităţi m, respectiv $m + 2g - d_G(i)$, unde $g \in \mathbf{R}_+^*$.

a) Demonstraţi că dacă valoarea fluxului maxim de la s la t în reţeaua R este mai mică decât mn, atunci există în G un subgraf G' cu $f(G') > g$.

b) Fie G^0 un subgraf al lui G astfel încât pentru orice subgraf G' al lui G avem $f(G') - f(G^0) < \frac{1}{n(n-1)}$. Arătaţi că G^0 este soluţie a problemei $\mathbf{P}$.

c) Stabiliţi complexitatea timp a unui algoritm de rezolvare a problemei $\mathbf{P}$ care să utilizeze căutarea binară şi punctele a) şi b) (ca funcţie de $A(n, m)$, complexitatea timp a rezolvării problemei fluxului maxim într-o reţea cu $O(n)$ vârfuri şi $O(m)$ arce).

(2+1+2= 5 puncte)

Problema 3. Fie $D = (V, E)$ un digraf fără bucle. O mulţime de vârfuri $S \subseteq V$ se numeşte **"2-hops" stabilă** dacă între vârfurile lui S nu există arce ($\forall s, t \in S,\ (s, t) \notin E$) şi orice vârf din $V - S$ poate fi accesat dintr-un vârf al lui S printr-un drum în D de lungime cel mult 2 ($\forall v \in V - S, \exists s \in S$ astfel încât $(s, v) \in E$ sau $\exists w \in V - S$ astfel încât $(s, w), (w, v) \in E$).
a) Arătaţi că pentru orice digraf fără bucle cu n vârfuri şi m arce se poate construi în timpul $O(n + m)$ o mulţime "2-hops" stabilă.
b) Demonstraţi că problema `3-SAT` se reduce polinomial la problema testării dacă într-un digraf dat există o mulţime "2-hops" stabilă care să conţină un vârf dat al digrafului.

(2+[1+1+1]= 5 puncte)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.