

ALGORITMICA GRAFURILOR

Săptămâna 13

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

January 7, 2015

LA MULȚI ANI!



-
- ① **Grafuri planare** (ag 14-15 [allinone.pdf](#) pag. 338 → 374)
 - ② **Problemele pentru seminariile 13 și 14**

Proprietăți de bază.

Definiție. Fie $G = (V, E)$ un graf și S o suprafață în \mathbf{R}^3 . Spunem că G este **reprezentabil pe S** dacă există $G' = (V', E')$ un graf astfel încât:

- a) $G \cong G'$.
- b) V' e o mulțime de puncte distincte din S .
- c) Orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă conținută în S care unește cele două extremități.
- d) Orice punct al lui S este sau vîrf al lui G' , sau prin el trece cel mult o muchie a lui G' .

G' se numește **reprezentare a lui G în S** .

Dacă S este un plan atunci G se numește **planar** iar G' o **reprezentare planară** a lui G .

Dacă S este un plan și G' este un graf care satisface b) c) și d) de mai sus atunci G' se numește **graf plan**.

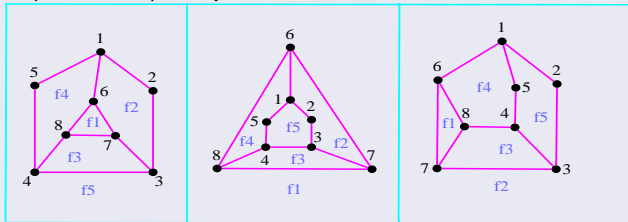
Proprietăți de bază.

Lemă. *Un graf este planar dacă și numai dacă este reprezentabil pe o sferă.*

proiecția stereografică !

Definiție. Fie G un graf plan. Dacă îndepărtăm punctele lui G (vîrfurile și muchiile sale) din plan se obține o reuniune de regiuni conexe (orice două puncte se pot uni printr-o curbă simplă conținută în regiune) ale planului, care se numesc **fețele** lui G .

Orice graf plan are un număr finit de fețe, dintre care una singură este nemărginită și se numește **față exterioară** a lui G .



Proprietăți de bază.

Lemă. *Orice reprezentare planară a unui graf poate fi transformată într-o reprezentare diferită astfel încât o față specificată a sa să devină fața exterioară.*

Teoremă. (Formula lui Euler) *Fie $G = (V, E)$ un graf plan conex cu n vîrfuri, m muchii și f fețe. Atunci*

$$f = m - n + 2$$

Din punct de vedere algoritmic, teorema are drept consecință imediată faptul că orice graf planar este "rar", numărul muchiilor este de ordinul numărului de vîrfuri. Va rezulta că orice traversare în ordinul $O(|V| + |E|)$ a lui G este de fapt în $O(|V|)$ operații.

Corolar 1. *Fie G un graf planar, conex, cu $n(\geq 3)$ vîrfuri și $m > 2$ muchii. Atunci*

$$m \leq 3n - 6.$$

Graful K_5 nu este planar !

Proprietăți de bază.

Corolar 2. Dacă G este un graf bipartit, conex și planar cu $m > 2$ muchii și n vârfuri, atunci $m \leq 2n - 4$.

Graful K_{33} nu este planar.

Corolar 3. Dacă G este un graf planar conex, atunci G are un vârf de grad cel mult 5.

Fie $G = (V, E)$ un graf și $v \in V(G)$ astfel încât $d_G(v) = 2$ și $vw_1, vw_2 \in E$, $w_1 \neq w_2$. Fie $h(G) = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw_1, vw_2\} \cup \{w_1w_2\})$. Se observă că G este planar dacă și numai dacă $h(G)$ este planar.

Vom nota cu $h^*(G)$ graful obținut din G aplicîndu-i repetat transformarea h , pînă cînd graful curent nu mai are vârfuri de grad 2.

Rezultă că G este planar, dacă și numai dacă $h^*(G)$ este planar.

Definiție. Două grafuri G_1 și G_2 se numesc *homeomorfe* dacă și numai dacă $h^*(G_1) \cong h^*(G_2)$.

Teoremă. (Kuratowski 1930) Un graf este planar dacă și numai dacă nu are subgrafuri homeomorfe cu K_5 sau K_{33} .

Desenarea unui graf planar.

Fary 1948 (independent Wagner și Stein):

Orice graf planar are o reprezentare planară cu toate muchiile segmente de dreaptă (reprezentarea Fary).

Existența unei reprezentări Fary cu **vîrfuri în puncte de coordonate întregi** și, în același timp, aria suprafeței ocupate de reprezentare să fie polinomială în raport cu numărul n de vîrfuri ale grafului !

Teoremă. (Frayssseix, Pach, Pollack (1988)) *Orice graf planar cu n vîrfuri are o reprezentare planară cu vîrfuri de coordonate întregi în $[0, 2n - 4] \times [0, n - 2]$ și cu muchii segmente de dreaptă.*

Demonstrația: algoritm de complexitate $O(n \log n)$ pentru obținerea acestei reprezentări.

Vom demonstra teorema în ipoteza suplimentară că G este **maximal planar** : orice muchie i s-ar adăuga se obține un graf neplanar (sau multigraf). Să observăm că orice față a unui graf maximal planar este un C_3 (altminteri în reprezentarea lui G cu fața exterioară mărginită de un C_n cu $n \geq 4$ se pot introduce muchii fără a pierde planaritatea grafului).

Ipoteza nu este restrictivă: de la o reprezentare a lui G ca o hartă planară (ce se obține aplicînd de exemplu algoritmul de testare a planarității) se trece la o hartă cu toate fețele triunghiului prin inserția în timp liniar de corzi în circuite. La desenarea grafului obținut, muchiile fictive introduse nu se vor trasa.

Grafuri plane - versiunea combinatorială.

În versiunea combinatorială un graf este un triplet $G = (E, \theta, -)$, unde E este o mulțime de cardinal par, $-$ este o *involuție* pe E (permutare de ordin 2) fără puncte fixe, și θ este o permutare pe E .

Elementele lui E sunt gândite ca *arce*; o muchie (neorientată) este reprezentată ca o pereche $e, \bar{e} \in E$ de arce, inverse unul altuia. Aplicația $-$ inversează direcția.

Se dorește ca aplicația θ să dea o **orientare a muchiilor din jurul unui vârf** (în sens contrar acelor de ceasornic).

Vârfurile sunt *ciclii* permutării θ . (Un ciclu al permutării θ este o submulțime nevidă a lui E închisă în raport cu θ și minimală cu această proprietate).

Dacă notăm cu V mulțimea ciclilor permutării θ atunci definim
 $t : E \rightarrow V$, $t(e) =$ **unicul ciclu al lui θ ce conține e** (extrem. inițială a lui e)
 $h : E \rightarrow V$, $h(e) =$ **unicul ciclu al lui θ ce conține \bar{e}** (extrem. finală a lui e)
Se observă că $\forall e$ $t(e) = h(\bar{e})$ și $h(e) = t(\bar{e})$.

Dacă $\theta^* : E \rightarrow E$ definită de $\theta^*(e) = \theta(\bar{e})$, atunci o **față** a lui G este un ciclu al permutării θ^* . Intuitiv, pentru a calcula $\theta^*(e)$, inversăm e pentru a obține \bar{e} și apoi ne rotim (în sensul acelor de ceasornic) în jurul extremității inițiale a lui \bar{e} . Numărul fețelor lui G se notează cu f .

Grafuri plane - versiunea combinatorială.

O **componentă conexă** a lui G este o *orbită* a lui E în grupul de permutări generat de θ și \neg : **o mulțime nevidă minimală cu proprietatea că este închisă la θ și \neg .**

Fie G un graf cu $m = \frac{1}{2}|E|$ muchii (neorientate), $n = |V|$ vârfuri, f fețe, și c componente conexe. **Caracteristica Euler** a lui G se definește ca fiind

$$\chi(G) = 2c + m - n - f.$$

Un graf G se numește **graf plan** dacă $\chi(G) = 0$.

Se poate demonstra că pentru un graf conex în definiția tradițională, cele două noțiuni de grafuri plane coincid

(graful neorientat construit așa cum am descris mai sus atașat unui graf în formă combinatorială este graf plan conform definiției tradiționale și invers,

dacă pentru un graf tradițional plan conex se construiește θ conform unei orientări inverse acelor de ceasornic a muchiilor și \neg corespunzătoare, graful combinatorial obținut este plan în noua definiție).

Teorema Separatorului.

Teoremă. (Tarjan & Lipton, 1979) Fie G un graf planar cu n vârfuri. Există o partiție a lui $V(G)$ în clasele disjuncte A, B, S astfel încât:

1. S separă A de B în G : $G - S$ nu are muchii de la A la B .
2. $|A| \leq \frac{2}{3}n$, $|B| \leq \frac{2}{3}n$.
3. $|S| \leq 4\sqrt{n}$.

Această partiție se poate afla în timpul $O(n)$.

Demonstrație. Considerăm graful conex și de asemenea considerăm că dispunem de o reprezentare planară.

Alegem un vârf s și executăm o parcurgere bfs din s numerotând vârfurile (în ordinea întâlnirii lor în această parcurgere) și atribuind fiecărui vârf v nivelul său în arborele bfs construit. Vom nota cu $L(t)$, $0 \leq t \leq l + 1$ mulțimea vârfurilor de pe nivelul t (nivelul $l + 1$ va fi introdus în scopuri tehnice și este vid, ultimul nivel este de fapt l).

Fiecare nivel este un separator în G (avem muchii doar între nivele consecutive).

Fie t_1 nivelul de la mijloc, adică nivelul ce conține vârful numerotat bfs cu numărul de ordine $\frac{n}{2}$. Mulțimea $L(t_1)$ are o parte din proprietățile separatorului pe care îl căutăm:

$$|\cup_{t < t_1} L(t)| < \frac{n}{2} \quad \wedge \quad |\cup_{t > t_1} L(t)| < \frac{n}{2}.$$

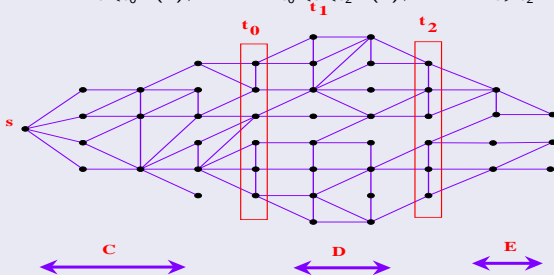
Dacă și $|L(t_1)| \leq 4\sqrt{n}$, teorema are loc.

Teorema Separatorului.

Lemă. Există nivelele $t_0 \leq t_1$ și $t_2 > t_1$ a. încât $|L(t_0)| \leq \sqrt{n}$, $|L(t_2)| \leq \sqrt{n}$ și $t_2 - t_0 \leq \sqrt{n}$.

Se alege t_0 cel mai mare număr cu proprietățile $t_0 \leq t_1$ și $|L(t_0)| \leq \sqrt{n}$ (există un astfel de nivel pentru că $|L(0)| = 1$). La fel, există t_2 un cel mai mic număr astfel înc. at $t_2 > t_1$ și $|L(t_2)| \leq \sqrt{n}$ (de aceea s-a luat $|L(l+1)| = 0$). Orice nivel strict între t_0 și t_2 are mai mult de \sqrt{n} vârfuri deci numărul acestor nivele este mai mic decât \sqrt{n} , altfel am avea mai mult de n vârfuri în graf. Considerăm

$$C = \cup_{t < t_0} L(t), \quad D = \cup_{t_0 < t < t_2} L(t), \quad E = \cup_{t > t_2} L(t).$$



Teorema Separatorului.

Dacă $|D| \leq \frac{2}{3}n$ atunci teorema are loc cu $S = L(t_0) \cup L(t_2)$, A mulțimea cu cele mai multe elemente dintre C, D, E și B reuniunea celorlalte două (nu uităm că C și E au cel mult $\frac{n}{2}$ elemente).

Considerăm deci că $n_1 = |D| > \frac{2}{3}n$.

Dacă vom găsi un separator de tipul $\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{2}{3}$ pentru D cu cel mult $2\sqrt{n}$ vârfuri, atunci

îl vom adăuga la $L(t_0) \cup L(t_2)$ pentru a obține un separator de cardinal cel mult $4\sqrt{n}$,

reunim mulțimea cu cel mai mare număr de elemente dintre C și E cu partea mică rămasă din D pentru a obține A ,

iar partea mare rămasă în D o reunim cu cealaltă mulțime (mică) dintre C și E pentru a obține B .

Construcția separatorului pentru D . Vom șterge toate vârfurile grafului care nu-s în D cu excepția lui s pe care-l unim cu toate vîrfurile de pe nivelul $t_0 + 1$ (primul nivel rămas în D). Graful obținut îl notăm cu D și este evident planar și conex. În plus are un arbore parțial T de diametru cel mult $2\sqrt{n}$ (orice vârf este accesibil din s pe un drum de lungime cel mult \sqrt{n} așa cum am arătat în lemă). Acest arbore se parcurge dfs și se construiește separatorul dorit.

Teorema Separatorului. Aplicație.

Considerăm problema testării dacă un graf planar dat admite o 3-colorare a vârfurilor (problemă cunoscută ca fiind NP-completă).

Pentru grafuri cu puține vârfuri (un număr constant c) se poate testa în timpul $O(3^c) = O(1)$ dacă graful are o 3-colorare.

Pentru grafuri planare cu numărul n de vârfuri mai mare decât c , construim în timp liniar $O(n)$, așa cum ne asigură teorema separatorului, partiția A, B, C a mulțimii vârfurilor sale cu $|A|, |B| \leq \frac{2n}{3}$ și $|C| \leq 4\sqrt{n}$.

Pentru fiecare din cele $3^{|C|} = 2^{O(\sqrt{n})}$ funcții posibile definite pe C și cu valori în $\{1, 2, 3\}$ se testează dacă este 3-colorare a subgrafului indus de C și dacă poate fi extinsă la o 3-colorare a subgrafului indus de $A \cup C$ în G și la o 3-colorare a subgrafului indus de $B \cup C$ în G (recursiv).

Timpul de lucru al acestui algoritm, $T(n)$, va satisface recurența

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{dacă } n \leq c; \\ O(n) + 2^{O(\sqrt{n})}(O(\sqrt{n}) + 2T(\frac{2n}{3})) & \text{dacă } n > c. \end{cases}$$

Se obține $T(n) = 2^{O(\sqrt{n})}$, destul de bun pentru probleme de dimensiuni rezonabile. Este posibil însă ca notația $O(\cdot)$ să ascundă constante mari !



① <http://profs.info.uaic.ro/~croitoru/ag/Examen/>