ALGORITMICA GRAFURILOR
Săptămâna 11

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

December 10, 2014

OUTLINE

1. **Reduceri polinomiale pentru probleme de decizie pe grafuri** **(ag 14-15 allinone.pdf pag. 265** $\longrightarrow$ 308 **)**

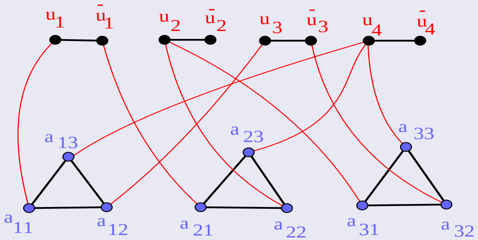
2. **Problemele pentru seminarul 11**

Stabila maximă.

SM
Instanță : $G = (V, E)$ graf și $k \in \mathbf{N}$.
Intrebare: Există S mulțime stabilă în G a. î. $|S| \geq k$?

Teoremă. (Karp 1972) $3SAT \propto SM$.

Exemplu: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$;
$C = (u_1 \vee u_3 \vee u_4) \wedge (\overline{u}_1 \vee u_2 \vee u_4) \wedge (u_2 \vee \overline{u}_3 \vee u_4)$; $k = 4 + 3 = 7$.

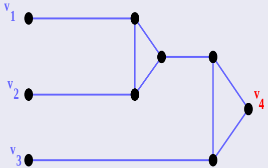


Colorarea vârfurilor.

COL

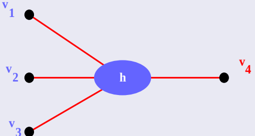
Instanță: $G = (V, E)$ graf și $p \in \mathbf{N}^*$.
Intrebare: Există o p-colorare a vârfurilor lui G?

Lemă. *Fie H graful:*



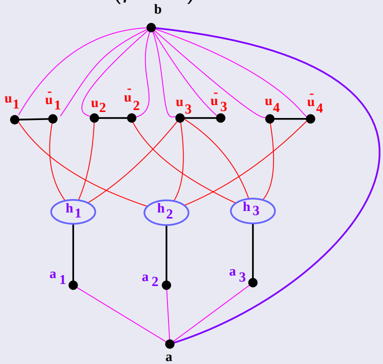
a) *Dacă c este o 3-colorare a lui H astfel încît $c(v_1) = c(v_2) = c(v_3) = a \in \{1, 2, 3\}$ atunci $c(v_4) = a$.*
b) *Fie $c : \{v_1, v_2, v_3\} \to \{1, 2, 3\}$ a.î. $c(\{v_1, v_2, v_3\}) \neq \{a\}$. Atunci c poate fi extinsă la o 3-colorare a lui H cu $c(v_4) \neq a$.*

Vom desemna (pentru simplitate) graful H astfel:



Colorarea vârfurilor.

Teoremă. $3SAT \propto COL$.
Exemplu: $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$,
$C = (\overline{u}_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (u_1 \vee u_3 \vee \overline{u}_4) \wedge (\overline{u}_2 \vee u_3 \vee u_4)$
Graful G va fi $(p = 3)$:



Reduceri polinomiale

Probleme hamiltoniene.

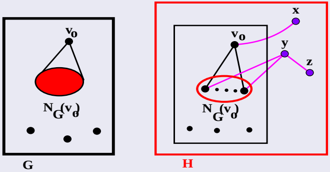
Definiție: Fie $G = (V(G), E(G))$ *un (di)graf. Un circuit* C *al lui* G *se numește* **circuit hamiltonian** *dacă* $V(C) = V(G)$. *Un drum deschis* D *al lui* G *se numește* **drum hamiltonian** *dacă* $V(D) = V(G)$. *Un (di)graf care are un circuit hamiltonian se numește* **(di)graf hamiltonian**.*Un (di)graf care are un drum hamiltonian se numește* **(di)graf trasabil.**

Teoremă. (Nash-Williams 1969) *Problemele următoare sînt polinomial echivalente:*

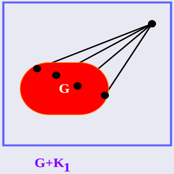
CH : *Dat* G *graf. Este* G *hamiltonian ?*
TR : *Dat* G *graf. Este* G *trasabil ?*
DCH: *Dat* G *digraf. Este* G *hamiltonian ?*
DTR: *Dat* G *digraf. Este* G *trasabil ?*
BCH: *Dat* G *graf bipartit. Este* G *hamiltonian ?*

Probleme hamiltoniene.

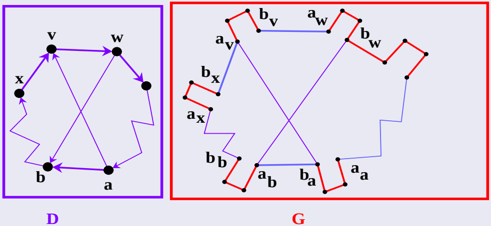
$CH \propto TR$



$TR \propto CH$



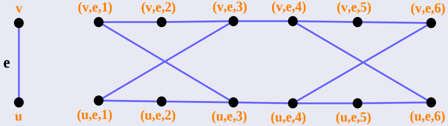
$DCH \propto CH$



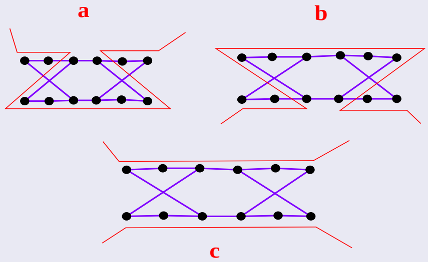
Probleme hamiltoniene.

Teoremă. (Karp 1972) $SM \propto CH$.

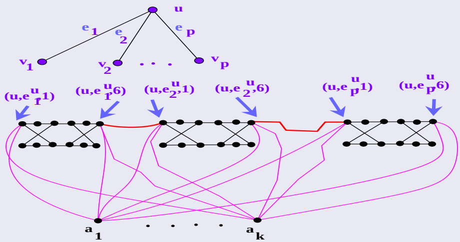
Pentru orice muchie a grafului G (intrare în SM) asociem graful



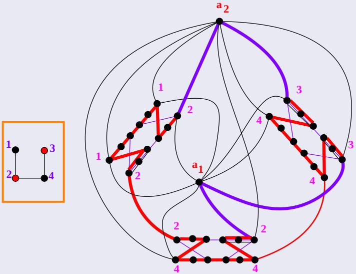
Singurele posibilități de traversare de către un circuit hamiltonian al lui H a vîrfurilor din G'_e sînt (a) (b) și (c) indicate în figura următoare:



Probleme hamiltoniene.



Exemplu:



Problema comisului voiajor

Algoritmi de aproximare.

CV Dat $n \in \mathbf{Z}_+$ $(n \geq 3)$ și $d : E(K_n) \to \mathbf{R}_+$, să se determine H_0 circuit hamiltonian în graful complet K_n cu $d(H_0)$ minim printre toate circuitele hamiltoniene ale lui K_n.

Algoritmi A, care pentru datele unei probleme CV vor oferi în timp polinomial (în raport cu n) un circuit hamiltonian H_A, care va aproxima soluția optimă H_0.

Măsuri ale eficienței unei astfel de "euristici" A pot fi considerate numerele:

$$R_A(n) = \sup_{\substack{d:E(K_n)\to\mathbf{R}_+ \\ d(H_0)\neq 0}} \frac{d(H_A)}{d(H_0)}$$

$$R_A = \sup_{n\geq 3} R_A(n).$$

Teoremă. Dacă există un algoritm aproximativ A cu timp de lucru polinomial pentru CV, astfel încît $R_A < \infty$, atunci CH se poate rezolva în timp polinomial.

$\mathbf{P} \neq \mathbf{NP} \Rightarrow$ *nu există algoritm aproximativ A polinomial cu $R_A < \infty$.*

Problemele pentru seminarul 11

Se vor discuta problemele restante din săptămâna 10 și cele din tema 2.