

ALGORITMICA GRAFURILOR

Săptămâna 10 (4-9 Ianuarie 2016)

C. Croitoru

croitoru@info.uaic.ro

FII

January 2, 2016

LA MULȚI ANI!



- ① **Grafuri planare** (ag 15-16 allinone.pdf pag. 338 → 374)
- ② **Problemele pentru seminariile 11 și 12**(4-15 Ianuarie 2016)

Proprietăți de bază.

Definiție. Fie $G = (V, E)$ un graf și S o suprafață în \mathbf{R}^3 . Spunem că G este **reprezentabil pe S** dacă există $G' = (V', E')$ un graf astfel încât:

- a) $G \cong G'$.
- b) V' e o mulțime de puncte distincte din S .
- c) Orice muchie $e' \in E'$ este o curbă simplă conținută în S care unește cele două extremități.
- d) Orice punct al lui S este sau vârf al lui G' , sau prin el trece cel mult o muchie a lui G' .

G' se numește **reprezentare a lui G în S** .

Dacă S este un plan atunci G se numește **planar** iar G' o **reprezentare planară** a lui G .

Dacă S este un plan și G' este un graf care satisface b) c) și d) de mai sus atunci G' se numește **graf plan**.

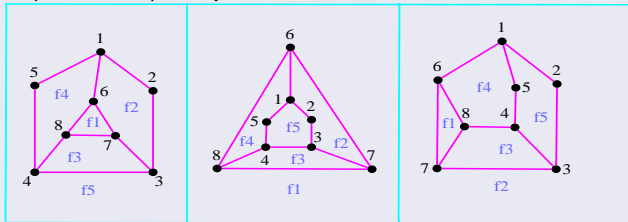
Proprietăți de bază.

Lemă. *Un graf este planar dacă și numai dacă este reprezentabil pe o sferă.*

proiecția stereografică !

Definiție. Fie G un graf plan. Dacă îndepărtăm punctele lui G (vîrfurile și muchiile sale) din plan se obține o reuniune de regiuni conexe (orice două puncte se pot uni printr-o curbă simplă conținută în regiune) ale planului, care se numesc **fețele** lui G .

Orice graf plan are un număr finit de fețe, dintre care una singură este nemărginită și se numește **față exterioară** a lui G .



Proprietăți de bază.

Lemă. *Orice reprezentare planară a unui graf poate fi transformată într-o reprezentare diferită astfel încât o față specificată a sa să devină fața exterioară.*

Teoremă. (Formula lui Euler) *Fie $G = (V, E)$ un graf plan conex cu n vîrfuri, m muchii și f fețe. Atunci*

$$f = m - n + 2$$

Din punct de vedere algoritmic, teorema are drept consecință imediată faptul că orice graf planar este "rar", numărul muchiilor este de ordinul numărului de vîrfuri. Va rezulta că orice traversare în ordinul $O(|V| + |E|)$ a lui G este de fapt în $O(|V|)$ operații.

Corolar 1. *Fie G un graf planar, conex, cu $n(\geq 3)$ vîrfuri și $m > 2$ muchii. Atunci*

$$m \leq 3n - 6.$$

Graful K_5 nu este planar !

Proprietăți de bază.

Corolar 2. Dacă G este un graf bipartit, conex și planar cu $m > 2$ muchii și n vârfuri, atunci $m \leq 2n - 4$.

Graful K_{33} nu este planar.

Corolar 3. Dacă G este un graf planar conex, atunci G are un vârf de grad cel mult 5.

Fie $G = (V, E)$ un graf și $v \in V(G)$ astfel încât $d_G(v) = 2$ și $vw_1, vw_2 \in E$, $w_1 \neq w_2$. Fie $h(G) = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw_1, vw_2\} \cup \{w_1w_2\})$. Se observă că G este planar dacă și numai dacă $h(G)$ este planar.

Vom nota cu $h^*(G)$ graful obținut din G aplicîndu-i repetat transformarea h , pînă cînd graful curent nu mai are vârfuri de grad 2.

Rezultă că G este planar, dacă și numai dacă $h^*(G)$ este planar.

Definiție. Două grafuri G_1 și G_2 se numesc *homeomorfe* dacă și numai dacă $h^*(G_1) \cong h^*(G_2)$.

Teoremă. (Kuratowski 1930) Un graf este planar dacă și numai dacă nu are subgrafuri homeomorfe cu K_5 sau K_{33} .

Desenarea unui graf planar.

Fary 1948 (independent Wagner și Stein):

Orice graf planar are o reprezentare planară cu toate muchiile segmente de dreaptă (reprezentarea Fary).

Existența unei reprezentări Fary cu **vîrfuri în puncte de coordonate întregi** și, în același timp, aria suprafeței ocupate de reprezentare să fie polinomială în raport cu numărul n de vîrfuri ale grafului !

Teoremă. (Frayssseix, Pach, Pollack (1988)) *Orice graf planar cu n vîrfuri are o reprezentare planară cu vîrfuri de coordonate întregi în $[0, 2n - 4] \times [0, n - 2]$ și cu muchii segmente de dreaptă.*

Demonstrația: algoritm de complexitate $O(n \log n)$ pentru obținerea acestei reprezentări.

Vom demonstra teorema în ipoteza suplimentară că G este **maximal planar** : orice muchie i s-ar adăuga se obține un graf neplanar (sau multigraf). Să observăm că orice față a unui graf maximal planar este un C_3 (altminteri în reprezentarea lui G cu fața exterioară mărginită de un C_n cu $n \geq 4$ se pot introduce muchii fără a pierde planaritatea grafului).

Ipoteza nu este restrictivă: de la o reprezentare a lui G ca o hartă planară (ce se obține aplicînd de exemplu algoritmul de testare a planarității) se trece la o hartă cu toate fețele triunghiului prin inserția în timp liniar de corzi în circuite. La desenarea grafului obținut, muchiile fictive introduse nu se vor trasa.

Grafuri plane - versiunea combinatorială.

În versiunea combinatorială un graf este un triplet $G = (E, \theta, -)$, unde E este o mulțime de cardinal par, $-$ este o *involuție* pe E (permutare de ordin 2) fără puncte fixe, și θ este o permutare pe E .

Elementele lui E sunt gândite ca *arce*; o muchie (neorientată) este reprezentată ca o pereche $e, \bar{e} \in E$ de arce, inverse unul altuia. Aplicația $-$ inversează direcția.

Se dorește ca aplicația θ să dea o **orientare a muchiilor din jurul unui vârf** (în sens contrar acelor de ceasornic).

Vârfurile sunt *ciclii* permutării θ . (Un ciclu al permutării θ este o submulțime nevidă a lui E închisă în raport cu θ și minimală cu această proprietate).

Dacă notăm cu V mulțimea ciclilor permutării θ atunci definim
 $t : E \rightarrow V$, $t(e) =$ **unicul ciclu al lui θ ce conține e** (extrem. inițială a lui e)
 $h : E \rightarrow V$, $h(e) =$ **unicul ciclu al lui θ ce conține \bar{e}** (extrem. finală a lui e)
Se observă că $\forall e$ $t(e) = h(\bar{e})$ și $h(e) = t(\bar{e})$.

Dacă $\theta^* : E \rightarrow E$ definită de $\theta^*(e) = \theta(\bar{e})$, atunci o **față** a lui G este un ciclu al permutării θ^* . Intuitiv, pentru a calcula $\theta^*(e)$, inversăm e pentru a obține \bar{e} și apoi ne rotim (în sensul acelor de ceasornic) în jurul extremității inițiale a lui \bar{e} . Numărul fețelor lui G se notează cu f .

Grafuri plane - versiunea combinatorială.

O **componentă conexă** a lui G este o *orbită* a lui E în grupul de permutări generat de θ și \neg : **o mulțime nevidă minimală cu proprietatea că este închisă la θ și \neg .**

Fie G un graf cu $m = \frac{1}{2}|E|$ muchii (neorientate), $n = |V|$ vârfuri, f fețe, și c componente conexe. **Caracteristica Euler** a lui G se definește ca fiind

$$\chi(G) = 2c + m - n - f.$$

Un graf G se numește **graf plan** dacă $\chi(G) = 0$.

Se poate demonstra că pentru un graf conex în definiția tradițională, cele două noțiuni de grafuri plane coincid

(graful neorientat construit așa cum am descris mai sus atașat unui graf în formă combinatorială este graf plan conform definiției tradiționale și invers,

dacă pentru un graf tradițional plan conex se construiește θ conform unei orientări inverse acelor de ceasornic a muchiilor și \neg corespunzătoare, graful combinatorial obținut este plan în noua definiție).

Teorema Separatorului.

Teoremă. (Tarjan & Lipton, 1979) Fie G un graf planar cu n vârfuri. Există o partiție a lui $V(G)$ în clasele disjuncte A, B, S astfel încât:

1. S separă A de B în G : $G - S$ nu are muchii de la A la B .
2. $|A| \leq \frac{2}{3}n$, $|B| \leq \frac{2}{3}n$.
3. $|S| \leq 4\sqrt{n}$.

Această partiție se poate afla în timpul $O(n)$.

Demonstrație. Considerăm graful conex și de asemenea considerăm că dispunem de o reprezentare planară.

Alegem un vârf s și executăm o parcurgere bfs din s numerotând vârfurile (în ordinea întâlnirii lor în această parcurgere) și atribuind fiecărui vârf v nivelul său în arborele bfs construit. Vom nota cu $L(t)$, $0 \leq t \leq l+1$ mulțimea vârfurilor de pe nivelul t (nivelul $l+1$ va fi introdus în scopuri tehnice și este vid, ultimul nivel este de fapt l).

Fiecare nivel este un separator în G (avem muchii doar între nivele consecutive).

Fie t_1 nivelul de la mijloc, adică nivelul ce conține vârful numerotat bfs cu numărul de ordine $\frac{n}{2}$. Mulțimea $L(t_1)$ are o parte din proprietățile separatorului pe care îl căutăm:

$$|\cup_{t < t_1} L(t)| < \frac{n}{2} \quad \wedge \quad |\cup_{t > t_1} L(t)| < \frac{n}{2}.$$

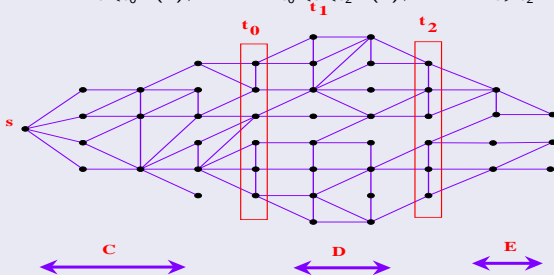
Dacă și $|L(t_1)| \leq 4\sqrt{n}$, teorema are loc.

Teorema Separatorului.

Lemă. Există nivelele $t_0 \leq t_1$ și $t_2 > t_1$ a. încât $|L(t_0)| \leq \sqrt{n}$, $|L(t_2)| \leq \sqrt{n}$ și $t_2 - t_0 \leq \sqrt{n}$.

Se alege t_0 cel mai mare număr cu proprietățile $t_0 \leq t_1$ și $|L(t_0)| \leq \sqrt{n}$ (există un astfel de nivel pentru că $|L(0)| = 1$). La fel, există t_2 un cel mai mic număr astfel înc. at $t_2 > t_1$ și $|L(t_2)| \leq \sqrt{n}$ (de aceea s-a luat $|L(l+1)| = 0$). Orice nivel strict între t_0 și t_2 are mai mult de \sqrt{n} vârfuri deci numărul acestor nivele este mai mic decât \sqrt{n} , altfel am avea mai mult de n vârfuri în graf. Considerăm

$$C = \cup_{t < t_0} L(t), \quad D = \cup_{t_0 < t < t_2} L(t), \quad E = \cup_{t > t_2} L(t).$$



Teorema Separatorului.

Dacă $|D| \leq \frac{2}{3}n$ atunci teorema are loc cu $S = L(t_0) \cup L(t_2)$, A mulțimea cu cele mai multe elemente dintre C, D, E și B reuniunea celorlalte două (nu uităm că C și E au cel mult $\frac{n}{2}$ elemente).

Considerăm deci că $n_1 = |D| > \frac{2}{3}n$.

Dacă vom găsi un separator de tipul $\frac{2}{3} \leftrightarrow \frac{2}{3}$ pentru D cu cel mult $2\sqrt{n}$ vârfuri, atunci

îl vom adăuga la $L(t_0) \cup L(t_2)$ pentru a obține un separator de cardinal cel mult $4\sqrt{n}$,

reunim mulțimea cu cel mai mare număr de elemente dintre C și E cu partea mică rămasă din D pentru a obține A ,

iar partea mare rămasă în D o reunim cu cealaltă mulțime (mică) dintre C și E pentru a obține B .

Construcția separatorului pentru D . Vom șterge toate vârfurile grafului care nu-s în D cu excepția lui s pe care-l unim cu toate vîrfurile de pe nivelul $t_0 + 1$ (primul nivel rămas în D). Graful obținut îl notăm cu D și este evident planar și conex. În plus are un arbore parțial T de diametru cel mult $2\sqrt{n}$ (orice vârf este accesibil din s pe un drum de lungime cel mult \sqrt{n} așa cum am arătat în lemă). Acest arbore se parcurge dfs și se construiește separatorul dorit.

Teorema Separatorului. Aplicație.

Considerăm problema testării dacă un graf planar dat admite o 3-colorare a vârfurilor (problemă cunoscută ca fiind NP-completă).

Pentru grafuri cu puține vârfuri (un număr constant c) se poate testa în timpul $O(3^c) = O(1)$ dacă graful are o 3-colorare.

Pentru grafuri planare cu numărul n de vârfuri mai mare decât c , construim în timp liniar $O(n)$, așa cum ne asigură teorema separatorului, partiția A, B, C a mulțimii vârfurilor sale cu $|A|, |B| \leq \frac{2n}{3}$ și $|C| \leq 4\sqrt{n}$.

Pentru fiecare din cele $3^{|C|} = 2^{O(\sqrt{n})}$ funcții posibile definite pe C și cu valori în $\{1, 2, 3\}$ se testează dacă este 3-colorare a subgrafului indus de C și dacă poate fi extinsă la o 3-colorare a subgrafului indus de $A \cup C$ în G și la o 3-colorare a subgrafului indus de $B \cup C$ în G (recursiv).

Timpul de lucru al acestui algoritm, $T(n)$, va satisface recurența

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{dacă } n \leq c; \\ O(n) + 2^{O(\sqrt{n})}(O(\sqrt{n}) + 2T(\frac{2n}{3})) & \text{dacă } n > c. \end{cases}$$

Se obține $T(n) = 2^{O(\sqrt{n})}$, destul de bun pentru probleme de dimensiuni rezonabile. Este posibil însă ca notația $O(\cdot)$ să ascundă constante mari !



- ① Problemele date anul trecut la examen (câteva dintre ele, desigur) \implies next pages
- ② **Problemele din tema 3**

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014*

Problema 1. Să se arate că dacă un graf G are exact două vârfuri de grad impar atunci în G există un drum între aceste două vârfuri.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf dat prin listele de adiacență. Pentru fiecare vârf $v \in V$ este dată "puterea" sa $p(v) \in \mathbf{R}^+$. Descrieți un algoritm de complexitate timp $O(|V| + |E|)$ care să calculeze pentru fiecare vârf v al grafului $P(v) := \max\{p(u) | u \in V, u \text{ accesibil printr-un drum din } v \text{ în } G\}$.

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex și $c : E \rightarrow \mathbf{R}$. Fie C un circuit al grafului G și $e_0 \in E(C)$ astfel încât $c(e_0) = \max\{c(e) | e \in E(C)\}$. Demonstrați că G are un arbore parțial de cost minim care nu conține muchia e_0 ($E(C)$ notează mulțimea muchiilor circuitului C).

Problema 4. Să se arate că un graf G este bipartit dacă și numai dacă orice subgraf indus H al lui G conține o mulțime S de vârfuri neadiacente două câte două în H și având cel puțin $|V(H)|/2$ vârfuri.

Problema 5. În rețeaua $R = (G, s, t, c)$ se cunoaște un flux x^0 de la s la t de valoare maximă. Fie R' rețeaua obținută din R prin dublarea capacității fiecărui arc. Arătați că se poate rezolva problema fluxului maxim în R' în timpul $O(m)$ ($m = |E(G)|$).

*Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014^a

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu proprietatea că $\forall v, w \in V, v \neq w$ are loc $d_G(v) + d_G(w) \geq |V| - 1$. Demonstrați că diametrul lui G este cel mult 2.

Problema 2. Fie $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graf bipartit reprezentat cu ajutorul listelor de adiacență. Descrieți un algoritm de complexitate timp $O(n + m)$ care să testeze dacă un cuplaj dat, $M \subseteq E$, este cuplaj de cardinal maxim în G ($n = |V_1| + |V_2|$, $m = |E|$).

Problema 3. În rețeaua $R = (G, s, t, c)$ se cunoaște pentru fiecare vârf $i \in V(G) - \{s, t\}$ un număr real nenegativ $a(i) \in \mathbf{R}_+$. Se cere să se determine un flux de valoare maximă de la s la t în R printre toate fluxurile care satisfac condiția ca suma fluxurilor pe arcele care intră în orice vârf $i \in V(G) - \{s, t\}$ să nu depășească $a(i)$. Construiți o rețea R' cu proprietatea că aplicând un algoritm uzual de flux maxim se obține soluția la problema dată.

Problema 4. Fie G un graf și $\delta(G)$ gradul minim al unui vârf al său. Descrieți un algoritm care, pentru un arbore dat T cu $k \leq \delta(G)$ muchii, să construiască (în timp polinomial) un subgraf H al lui G astfel încât $H \cong T$.

Problema 5. Arătați că pentru orice graf planar se poate construi în timp polinomial o ordonare a vârfurilor sale astfel încât aplicând algoritmul greedy de colorare se obține o colorare cu cel mult 6 culori.

^aBaza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014^b

Problema 1.

Fie G un graf conex cu toate vârfurile de grad par. Demonstrați că $\forall e \in E$ graful $G - e$ este conex.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex și $w : E \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție de pondere pe muchiile sale. Presupunem că graful este reprezentat prin listele de adiacență. Proiectați un algoritm de complexitate timp $O(m \log n)$ care să testeze dacă, pentru două vârfuri $u, v \in V$ date, există un drum în G cu toate muchiile de aceeași pondere ($n = |V|, m = |E|$; indicație: utilizați sortarea și BFS repetat).

Problema 3.

Arătați că problema

Să se determine $x, y, z \in \{0, 1\}$ astfel încât $3.5 \cdot x + 2.5 \cdot y + 5 \cdot z \leq 8$ iar $3 \cdot x + 8 \cdot y + 10 \cdot z$ să aibă valoare maximă

se poate rezolva cu ajutorul unui algoritm pentru problema drumului de cost minim pentru un digraf și costurile arcelor convenabil alese.

Problema 4. Fie G un graf și $c : E(G) \rightarrow \mathbf{R}_+$ o funcție de capacitate a muchiilor. Oricărui drum P din graf cu măcar o muchie i se asociază **locul îngust** $b(P) = \min\{c(e) | e \text{ muchie a drumului } P\}$. Descrieți un algoritm eficient care să determine, pentru două vîrfuri s și t distincte ale grafului G , drumul cu locul îngust cel mai mare (dintre toate drumurile de la s la t în graful G).

Problema 5. Demonstrați că *problema determinării dacă un graf bipartit dat este hamiltonian* este o problemă NP-completă.

^bBaza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014^c

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu cel puțin 3 vârfuri. Demonstrați că G este conex dacă și numai dacă există două vârfuri $u, v \in V$ ($u \neq v$) astfel încât grafurile $G - u$ și $G - v$ sunt conexe.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex reprezentat prin listele de adiacență. Fiecare muchie $e \in E$ are un cost $c(e) \in \{0, 1\}$. Descrieți un algoritm care să determine în timpul $O(n + m)$ un arbore parțial de cost minim în graful dat ($n = |V|, m = |E|$; indicație: BFS pe grafuri convenabil alese).

Problema 3. Fie $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graf bipartit în care toate vârfurile au același grad $k \geq 1$. Demonstrați că G are un cuplaj perfect.

Problema 4. În rețeaua $R = (G, s, t, c)$, toate capacitățile nenule sunt numere întregi pozitive pare. Demonstrați că există un flux x de valoare maximă cu proprietatea că pe orice arc, dacă fluxul este nenul atunci el este un număr pozitiv par.

Problema 5. Demonstrați că dacă graful G este p -conex ($p \geq 2$) atunci, pentru orice vârf $v \in V(G)$, graful $G - v$ este $p - 1$ -conex.

^cBaza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014^d

Problema 1. Dacă $H = (V(H), E(H))$ este un graf, notăm numărul muchiilor lui H cu $e(H)$ ($e(H) = |E(H)|$). Demonstrați că pentru orice graf $G = (V, E)$ cu cel puțin 3 vârfuri are loc egalitatea $e(G) = \frac{\sum_{v \in V} e(G-v)}{|V|-2}$.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf cu cel puțin 3 vârfuri, reprezentat cu ajutorul matricii de adiacență A . Se dorește să se afle numărul circuitelor de lungime 3 existente în graful G . Descrieți un algoritm care să folosească A^3 pentru aflarea acestui număr.

Problema 3. Demonstrați că următoarea problemă este **NP**-completă.

CLICA MAXIMĂ

Instantă: G un graf și $k \in \mathbb{N}^*$.

Întrebare: Există Q o clică în G cu cel puțin k vârfuri?

Problema 4. Arătați că se poate determina, într-o matrice cu elemente 0 și 1 dată, o mulțime de cardinal maxim de elemente egale cu 0 și care să nu se găsească pe aceeași linie sau coloană, cu ajutorul unui algoritm de flux maxim (pe o rețea convenabil definită).

Problema 5. Un graf G este maximal planar dacă $G + e$ nu este planar pentru orice muchie e a complementarului lui G . Demonstrați că fiecare față a unui graf maximal planar este mărginită de un circuit de lungime 3.

^dBaza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.

Examen AG

Student:

Grupa:

18-19 ianuarie 2014^e

Problema 1. Fie G un graf autocomplementar ($G \cong \overline{G}$) de ordin $2k + 1 \geq 5$. Demonstrați că G are un vârf de grad k .

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex și u, v, w trei vârfuri distincte ale sale. Să se descrie un algoritm cu timp de lucru polinomial care să testeze dacă există în G un drum de la u la v care să treacă prin w (indicație: se pot considera drumuri intern disjuncte plecând din w).

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf 2-conex care nu conține subgrafuri induse izomorfe cu graful circuit C_k , $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$. Demonstrați că pentru orice două vârfuri neadiacente u și v ale lui G , graful $G - \{u, v\}$ este conex.

Problema 4. Fie $R = (G, s, t, c)$ o rețea și (S_i, T_i) ($i = 1, 2$) secțiuni de capacitate minimă ale ei. Demonstrați că și $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ și $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ sunt secțiuni de capacitate minimă în R .

Problema 5. Desenați un graf 3-regulat care să nu aibă cuplaj perfect (justificare).

^eBaza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactați soluțiile pe foile proprii.