Seminarii

Setul de probleme 1

Problema 1. Un graf G se numeşte *rar* dacă numărul său de muchii m este mai mic decit $\frac{n^2}{\log n}$, unde n reprezintă numărul de virfuri. O justificare este aceea că matricea de adiacenţă A a grafului, care ocupă n^2 locaţii de memorie, poate fi intotdeauna reprezentată folosind $O(\frac{n^2}{\log n})$, locaţii de memorie astfel incit răspunsul la o intrebare " $A(i,j) = 1$? " să se facă in $O(1)$. Descrieţi o astfel de schemă de reprezentare. (**4 puncte**)

Problema 2. Diametrul unui graf este lungimea maximă a unui drum de lungime minimă intre două virfuri ale grafului. Două virfuri care sunt extremităţile unui drum minim de lungime maximă in graf se numesc diametral opuse. Demonstraţi că următorul algoritm determină o pereche de virfuri diametral opuse intr-un arbore T:

• dintr-un virf oarecare se execută o parcurgere BFS a lui T; fie u ultimul virf vizitat;din virful u se execută o parcurgere BFS a lui T; fie v ultimul virf vizitat;

• return u,v.

Este valabil algoritmul pentru un graf conex oarecare ? (**4 puncte**)

Problema 3. Fie T un arbore un arbore binar cu rădăcină. Un algoritm simplu de desenare a lui T poate fi descris recursiv dupa cum urmează.

- Folosim ca suport o grilă (liniatura unui caiet de mate); virfurile se plasează in punctele de intersecţie ale grilei.
- Desenăm subarborele sting; Desenăm subarborele drept.
- Plasăm cele două desene unul lingă altul la distanţă pe orizontală doi şi cu rădăcinile la aceeaşi inălţime.
- Plasăm rădăcina cu un nivel mai sus la jumătatea distanţei pe orizontală dintre cei doi copii.
- Dacă avem doar un copil plasăm rădăcina cu un nivel mai sus la distanţa 1 faţă de copil (la stinga sau la dreapta după cum este acesta).

Descrieţi cum se poate asocia pentru fiecare nod v al arborelui T (folosind algoritmul de mai sus) coordonatele $(x(v), y(v))$ reprezentind punctul de pe grilă unde va fi desenat.(**3 puncte**)

Problema 4. Intr-o sesiune de examene s-au inscris n studenţi care trebuie să susţină examene dintr-o mulţime de m discipline. Intrucit examenele se susţin in scris, se doreşte ca toţi studenţii care dau examen la o disciplină să facă acest lucru simultan. De asemenea, regulamentul de desfăşurare a examenelor interzice ca un student să dea două examene in aceeaşi zi. Pentru fiecare student se dispune de lista disciplinelor la care doreşte să fie examinat.
Să se descrie construcţia unui graf G care să ofere răspunsul la următoarele două intrebări prin determinarea unor parametri asociaţi (care se vor preciza):
- care e numărul maxim de examene ce se pot organiza in aceeaşi zi ?
- care e numărul minim de zile necesare organizării tuturor examenelor? (**3 puncte**)

Setul de probleme 2

Problema 1. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit și $X \in \{S, T\}$. Graful G se numește X-lanț dacă vârfurile mulțimii X pot fi ordonate $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ (unde $p = |X|$) astfel încât $N_G(x_1) \supseteq N_G(x_2) \supseteq \ldots \supseteq N_G(x_p)$.

a) Demonstrați că G este X-lanț dacă și numai dacă este $\overline{X}$-lanț, unde $\overline{X} = \{S, T\} - \{X\}$. (**2 puncte**)

b) Dacă G (bipartit) este reprezentat cu ajutorul listelor de adiacență , are ordinul n și dimensiunea m, descrieți un algoritm cu timpul $O(n + m)$ care să testeze dacă G este S-lanț . (**2 puncte**)

Problema 2. Un graf G se numește *autocomplementar* dacă este izomorf cu complementul său : $G \simeq \overline{G}$.

a) Demonstrați că un graf autocomplementar este conex si că ordinul său este multiplu de 4 sau multiplu de 4 plus 1.(**2 puncte**)

b) Demonstrați că pentru orice graf G există un graf autocomplementar H astfel incit G este subgraf indus in H. (**2 puncte**)

c) Determinați toate grafurile autocomplementare cu cel mult 7 virfuri. (**2 puncte**)

Problema 3. O echipă de doi programatori L(azy) și T(hinky) primește ca sarcină să determine un drum intre 2 noduri date, care să satisfacă anumite cerințe, intr-un graf G dat, despre care se știe că este rar : $|E(G)| = O(|G|)$. Programatorul L propune ca soluție generarea (cu backtracking) a tuturor drumurilor dintre cele două noduri și selectarea celui convenabil, motivând că intr-un astfel de graf nu pot exista prea multe drumuri intre două noduri fixate (sunt puține muchii și deci puține posibilități de ramificare; de ex., intr-un arbore există exact un drum intre orice două noduri fixate). Programatorul T nu-i de acord și dă următorul contraexemplu: se consideră graful $H = K_2 \times P_{n-1}$ (n un intreg mare); o pereche de virfuri de grad 2 adiacente din H se unește cu un virf nou x, iar cealaltă pereche de virfuri de grad 2 adiacente din H se unește cu un virf nou y; graful obținut, G, are proprietățile din problema de rezolvat și totuși numărul drumurilor de la x la y in G este prea mare. Ajutați-l pe L să ințeleagă contraexemplul, desenind graful G, arătind că este rar și estimind numărul drumurilor de la x la y. (**2 puncte**)

Problema 4. Presupunem că un *turneu* (digraf cu proprietatea că orice 2 virfuri sunt unite exact printr-un arc) are un circuit C de lungime $n \geq 4$.

Arătați că pentru orice virf x al lui C se pot determina in timpul $O(n)$, incă două virfuri ale lui C y și z astfel incit (x, y, z) este un circuit de lungime 3. (**2 puncte**)

Setul de probleme 3

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu n virfuri, m muchii și cu matricea de adiacență A. Dintre cele 2^m orientări posibile ale muchiilor sale considerăm una oarecare și cu ajutorul ei construim matricea de incidență virf-arc $Q \in \{0, 1, -1\}^{n \times m}$ definită prin :
$(Q)_{ve} = -1$, dacă v este extremit. inițială a arcului e,
$(Q)_{ve} = 1$, dacă v este extremitatea finală a arcului e
$(Q)_{ve} = 0$ in toate celelalte cazuri.
Demonstrați că matricea $A + QQ^T$ este o matrice diagonală și precizați semnificația combinatorie a elementelor ei. (**3 puncte**)

Problema 2. Fie G un graf oarecare și notăm cu $b(G)$ graful obținut din G prin inserarea cite unui nou nod pe fiecare muchie. Demonstrați că $b(G)$ este un graf bipartit. (**2 puncte**)
Demonstrați că G și H sunt izomorfe dacă și numai dacă $b(G)$ este izomorf cu $b(H)$. Deduceți că testarea izomorfismului a 2 grafuri oarecare se reduce polinomial la testarea izomorfismului a 2 grafuri bipartite (**2 puncte**)

Problema 3. Graful *paianjen* cu n virfuri este graful care se obține unind unul din virfurile de grad 1 ale grafului P_3 cu toate virfurile unui graf oarecare cu $n-3$ virfuri, disjunct de P_3 (n este un intreg pozitiv mare).

Dacă G este un graf cu n virfuri reprezentat prin matricea de adiacență, arătați că se poate testa dacă este graf paianjen folosind doar $O(n)$ *probe* ale matricii de adiacență.

(o probă este un acces la un element oarecare al matricii, fără a-l memora explicit pentru utilizări ulterioare). (**4 puncte**)

Problema 4. Asociem unui arbore binar T de ordin n cu rădăcina r un drum P_{3n} orientat procedind astfel: fiecărui nod v al lui T i se asociază trei noduri cu același nume v pe care le desemnăm prin v_1, v_2, v_3; dacă v nu are in T descendent sting, atunci se introduce arcul v_1v_2 in P_{3n}; dacă v nu are in T descendent drept, atunci se introduce arcul v_2v_3 in P_{3n}; dacă descendentul sting al lui v in T este w, atunci se introduc in P_{3n} arcele v_1w_1 și w_3v_2; dacă descendentul drept al lui v in T este w, atunci se introduc in P_{3n} arcele v_2w_1 și w_3v_3.
Dacă se parcurge drumul P_{3n} de la extremitatea inițială r_1 la extremitatea finală r_3 și se listează numele virfurilor in ordinea parcurgerii lor se obține un șir in care numele fiecarui virf al lui T apare exact de trei ori.
Demonstrați că :
dacă din acest șir se reține doar prima apariție a fiecărui nume se obține parcurgerea *pre-order* a arbrelui T;
dacă din acest șir se reține doar a doua apariție a fiecărui nume se obține parcurgerea *in-order* a arbrelui T;
dacă din acest șir se reține doar a treia apariție a fiecărui nume se obține parcurgerea *post-order* a arbrelui T.
(3 puncte)

Setul de probleme 3'

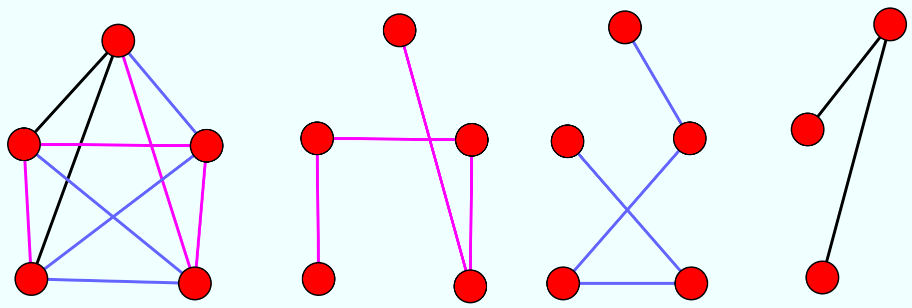
Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf de ordin n și dimensiune m. O ordonare $V = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$ a vârfurilor lui G se numește d-*mărginită* dacă în digraful $G^{\mapsto}$, obținut din G prin înlocuirea fiecărei muchii $\{v_{i_j}, v_{i_k}\}$ cu arcul $(v_{i_{\min\{j,k\}}}, v_{i_{\max\{j,k\}}})$, avem $\forall v \in V \quad d^{+}_{G^{\mapsto}}(v) \leq d$.

a) Descrieți un algoritm care primind la intrare G reprezentat cu ajutorul listelor de adiacență și $d \in \mathbf{N}^*$, testează în timpul $O(n+m)$ dacă G are o ordonare d-mărginită (se vor argumenta corectitudinea și complexitatea). (**2 puncte**)

b) Utilizați algoritmul de la punctul a) pentru a determina în timpul $O(m \log n)$ parametrul
$o(G) = \min\{d \in \mathbf{N} |\ G$ are o ordonare d-mărginită $\}$. (**2 puncte**)

c) Arătați că orice graf G admite o colorare a vârfurilor cu $o(G) + 1$ culori. (**2 puncte**)

Problema 2. Demonstrați algoritmic că mulțimea muchiilor oricărui graf complet K_n $(n \geq 2)$ poate fi partiționată în $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ submulțimi, fiecare dintre acestea reprezentând mulțimea muchiilor unui arbore (subgraf al lui K_n). Exemplu. K_5, $\lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$:



(**4 puncte**)

Problema 3. Pentru un graf conex G se execută următorul algoritm:

- Se inițializează o coadă $\mathbf{Q}$ cu graful G.
- Cât timp coada $\mathbf{Q}$ nu-i vidă:
- se extrage în H graful din capul cozii,
- se determină o mulțime de articulație $A \subseteq V(H)$, minimală în raport cu incluziunea (nici o submulțime proprie nu-i mulțime de articulație în H), și dacă $V_1, \ldots, V_k$ ($k \geq 2$) sunt mulțimile de vârfuri ale componentelor conexe ale grafului $H - A$, atunci
- se adaugă la $\mathbf{Q}$ grafurile $[A \cup V_1]_H, \ldots, [A \cup V_k]_H$.

Se observă că dacă graful curent este complet atunci nu se adaugă nimic în coada $\mathbf{Q}$.

a) Arătați că fiecare graf introdus în coadă este conex.(**2 puncte**)
b) Demonstrați că numărul total al grafurilor introduse în coada $\mathbf{Q}$ nu depășește $|G|^2$. (**2 puncte**)

Setul de probleme 3”

Problema 1. Fie $\mathcal{C}$ clasa grafurilor G cu proprietatea că orice arbore dfs al lui G este un drum (pentru orice ordonare a vârfurilor lui G și orice ordonare a listelor de adiacență asociate acestor vârfuri, orice aplicare a unui dfs generează un drum hamiltonian în G).
Demonstrați că

$$\mathcal{C} = \{K_1, K_2\} \cup \cup_{n \geq 3} \{K_n, C_n, K_{n,n}\}.$$

(1+3 puncte)

Problema 2. Fie $D = (V, E)$ un digraf (fără bucle) de ordin n cu mulțimea vârfurilor $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Considerăm următorul algoritm:

1. $SK \leftarrow \emptyset$;
   for $i = 1$ **to** n **do** \\\\ stânga $\rightarrow$ dreapta
   if ($\nexists j \in SK$ astfel încât $ji \in E$) **then** $SK \leftarrow SK \cup \{i\}$;

2. **for** $i = n$ **to** 1 **do** \\\\ dreapta $\rightarrow$ stânga
   if $i \in SK \wedge (\exists j \in SK$ astfel încât $ji \in E)$ **then** $SK \leftarrow SK \setminus \{i\}$;

3. **output** SK.

Demonstrați că SK este un *seminucleu* în D: SK este nevidă, stabilă în $G[D]$ (graful suport al digrafului D) și orice vârf din $v \in V \setminus SK$ e accesibil în D, dintr-un vârf al lui SK, pe un drum de lungime cel mult 2.
Indicați structurile de date și modul de folosire a acestora pentru o implementare a algoritmului de mai sus în timpul $\mathcal{O}(n+m)$ (m fiind $|E|$).

(**2+2 puncte**)

Problema 3. Arătați că dacă $G = (S, T; E)$ este un graf bipartit cu următoarele proprietăți:
- $|S| = n; |T| = m$ ($n, m \in \mathbf{N}^*$);
- $\forall t \in T$ $|N_G(t)| > k > 0$;(pentru un k oarecare — mai mic decât n);
- $\forall t_1, t_2 \in T$ dacă $t_1 \neq t_2$ atunci $N_G(t_1) \neq N_G(t_2)$;
- $\forall t_1, t_2 \in T$ dacă $t_1 \neq t_2$ atunci $|N_G(t_1) \cap N_G(t_2)| = k$,
atunci are loc inegalitatea $m \leq n$. (**2 puncte**)

Problema 4.

Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ definim graful $G_n = (V, E)$ astfel:
— $V = \{(i, j) | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$,
— $(i, j)(k, l) \in E$ (pentru două vârfuri (i, j) și (k, l) distincte din V) dacă și numai dacă $i = l$ sau $j = k$.

Demonstrați că G_n este *universal pentru familia arborilor de ordin* n:
oricare ar fi T un arbore de ordin n există $A \subset V$ astfel încât $T \cong [A]_{G_n}$.

(**2+2 puncte**)

Setul de probleme 4

Problema 1. Prezentați (pe cel mult o pagină) o problemă interesantă din domeniul IT care să necesite rezolvarea eficientă a unei probleme de drum minim intr-un digraf asociat problemei inițiale. (**3 puncte**)

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf, $s \in V$ un virf oarecare al lui G iar t un alt virf, accesibil in G printr-un drum din s. O mulțime A de muchii se numește st-*inevitabilă* dacă există $S \subset V$ astfel incit $s \in S$, $t \notin S$ și $A = \{e \in E | e = uv, u \in S\ v \notin S\}$. Arătați că numărul maxim de mulțimi st-inevitabile disjuncte două cite două este egal cu distanța in G de la s la t și că se poate determina o familie de astfel de mulțimi cu ajutorul unui bfs a lui G din s. (**3 puncte**)

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex și v un virf al său cu proprietatea că $N_G(v) \neq V - \{v\}$. Dacă pentru $A \subset V$ notăm cu $N_G(A) = \cup_{a \in A} N_G(a) - A$, se observă că există mulțimi de virfuri A care satisfac proprietățile : $v \in A$, $[A]_G$ este conex, $N = N_G(A) \neq \emptyset$ și $R = V - (A \cup N) \neq \emptyset$ (de exemplu, $A = \{v\}$).

a) Demonstraţi că dacă se consideră o mulţime A maximală (in raport cu incluziunea) satisfăcind proprietaţile enunţate, atunci orice virf din R este adiacent cu orice virf din N.(**2 puncte**)
b) Dacă, in plus, graful G este $\{C_k\}_{k \geq 4}$-free, atunci mulţimea N de la punctul a) are proprietatea că este clică in graful G.(**2 puncte**)
c) Deduceţi că singurele grafuri $\{C_k\}_{k \geq 4}$-free, regulate şi conexe sunt grafurile complete.(**2 puncte**)

Problema 4. Arătaţi că se poate utiliza o parcurgere dfs pentru a determina un circuit par intr-un graf 3-regulat oarecare. (**2 puncte**)

Setul de probleme 4'

Problema 1. Fie $T = (V, E)$ un arbore cu măcar două vârfuri reprezentat cu ajutorul listelor de adiacență. Se declară un vârf oarecare $r \in V$ rădăcină și se notează cu $d(v)$ (pentru orice vârf $v \in V$) lista descendenților imediați ai lui v în parcurgerea bfs din r (vârfurilor pendante le corespund liste vide). Considerăm următorul algoritm:

1. *Se construiesc tablourile de intregi $a[v]$ și $b[v]$ ($v \in V$) astfel: dacă $d(v)$ este vidă, atunci $a[v] \leftarrow 1$ și $b[v] \leftarrow 0$; dacă $d(v)$ este nevidă și toate vârfurile u din $d(v)$ au $a[u]$ și $b[u]$ calculate, atunci $a[v] \leftarrow 1 + \sum_{u \in d(v)} b[u]$ și $b[v] \leftarrow \sum_{u \in d(v)} \max(a[u], b[u])$.*

2. *Se returnează $x \leftarrow \max(a[r], b[r])$.*

Descrieți în pseudocod algoritmul de mai sus, argumentați complexitatea timp de $O(|V|)$ și demonstrați că valoarea returnată x este numărul de stabilitate $\alpha(T)$ al arborelui T. **(1+1+2 = 4 puncte)**

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf d-regulat de ordin n care satisface următoarea proprietate:

există $\alpha > 0$ astfel încât pentru orice mulțime de vârfuri $S \subset V$ cu proprietatea că $|S| \leq \frac{n}{2}$, numărul muchiilor cu o extremitate în S și cealaltă în $V - S$ este cel puțin $\alpha|S|$.

a) Grafurile complete au proprietatea de mai sus ? (argumentaţi răspunsul)
b) Dacă α şi d sunt constante (nu depind de n), demonstraţi că diametrul lui G satisface

$$d(G) = \mathcal{O}(\log n).$$

(1+3 = 4 puncte)

Problema 3. Muchiile grafului conex $G = (V, E)$ se colorează arbitrar roşu şi albastru.
a) Demonstraţi că există în G un parcurs Euleian închis fără muchii consecutive de aceeaşi culoare dacă şi numai dacă pentru fiecare vârf $v \in V$ al lui G numărul muchiilor roşii incidente cu v este egal cu numărul muchiilor albastre incidente cu v.
b) Dacă graful G este complet şi x, y, z sunt trei vârfuri distincte ale sale demonstraţi că *dacă există în G un drum fără muchii consecutive de aceeaşi culoare de la x la y trecând prin z, atunci există un drum cu aceeaşi proprietate care are ca primă muchie pe xz sau ca ultimă muchie pe zy.* **(1+1+2 = 4 puncte)**

Problema 4. Fie G un graf şi $\delta(G)$ gradul minim al unui vârf al său. Descrieţi un algoritm care, pentru un arbore dat T cu $k \le \delta(G)$ muchii, să construiască (în timp polinomial) un subgraf H al lui G astfel încât $H \cong T$. **(2 puncte)**

Setul de probleme 5

Problema 1. Să se arate că un graf G este bipartit dacă și numai dacă orice subgraf indus H al lui G satisface proprietatea $2\alpha(H) \geq |H|$ (**3 puncte**)

Problema 2. Demonstarați că intr-un graf bipartit G cu n virfuri și m muchii avem inegalitatea $4m \leq n^2$. (**2 puncte**)

Descrieţi un algoritm care să testeze dacă un graf cu n virfuri și m muchii este complementarul unui graf bipartit in timpul $O(n+m)$ (**3 puncte**)

Problema 3. Arătați că orice graf G cu m muchii are un graf partial H bipartit si cu cel puţin $\frac{m}{2}$ muchii.(**3 puncte**)

Problema 4. Demonstrați că in orice graf conex $G = (V, E)$ există o mulțime stabilă S astfel incit graful bipartit $H = (S, V-S; E')$ este conex, unde $E' = E - \mathcal{P}_2(V-S)$. Deduceţi că $\alpha(G) \geq \frac{|G|-1}{\Delta(G)}$ pentru orice graf conex G. (**3 puncte**)

Setul de probleme 6

Problema 1. Pentru $d \in N^*$ se consideră graful $G_d = \underbrace{K_2 \times K_2 \times ... \times K_2}_{d\ factori}$.

Să se determine ordinul, dimensiunea și diametrul lui G_d. (**2 puncte**)

Să se arate că G_d este bipartit și să se determine $\alpha(G_d)$. (**2 puncte**)

Problema 2. Un graf cu cel puțin trei virfuri se numește *confidențial conex* dacă pentru orice trei virfuri distincte a, b, c ale grafului există un drum de la a la b astfel incit niciunul dintre virfurile interne ale acestui drum (dacă există astfel de virfuri) nu este c sau un vecin al lui c. Un exemplu banal de graf confidențial conex este graful K_n cu $n \geq 3$.

Demonstrați că un graf conex $G = (V, E)$, cu cel puțin trei virfuri și care nu-i complet, este confidențial conex dacă și numai dacă au loc următoarele două condiții :

1. Pentru orice virf v mulțimea $\overline{N}(v) = \{w \in V | w \neq v,\ vw \notin E\}$ este nevidă și induce un graf conex.

2. Orice muchie a grafului este conținută intr-un C_4 indus in graf sau este muchia din mijlocul unui P_4 indus in graf.

(**4 puncte**)

Problema 3. In Problema 2-SAT se dau : o mulţime de variabile boolene $U = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ şi o mulţime de clauze $C = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$, unde fiecare clauză C_i este disjuncţia a doi literali $C_i = v_i \vee w_i$, literalii reprezentind variabile sau negaţiile acestora. Problemei i se asociază un digraf G cu $V(G) = \{x_1, x_2, ., x_n, \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}\}$ (adică toţi literalii posibili) şi in care pentru fiecare clauză $C_i = v_i \vee w_i$ se adaugă arcele $\overline{v_i}w_i$ şi $\overline{w_i}v_i$ (folosind, evident, convenţia referitoare la dubla negare). Demonstraţi că există o atribuire a valorilor de adevăr şi fals pentru variabilele booleene, astfel incit fiecare clauză să fie adevărată, dacă şi numai dacă digraful G are poprietatea că pentru orice $i \in \{1, ..., n\}$ $\overline{x_i}$ şi x_i aparţin la componente tari conexe diferite. (**4 puncte**)
Argumentaţi complexitatea timp de $O(n + m)$ pentru testarea proprietăţii de mai sus. (**2 puncte**)

Setul de probleme 7

Problema 1. Gossip Problem. Intr-un grup de n "doamne", fiecare cunoaşte o parte dintr-o birfă pe care celelalte n-o cunosc. Ele comunică prin telefon şi orice apel telefonic intre orice două doamne are ca efect faptul că fiecare din ele va afla tot ce cunoaşte cealaltă.

(a) Descrieţi o schemă de a da telefoanele astfel incit intr-un numar minim $f(n)$ de apeluri telefonice, fiecare "doamnă" va afla tot ce ştiu celelalte.

Indicaţie: Arătaţi că $f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 4$ şi pentru $n > 4$ $f(n) = 2n - 4$ (uşor, indicind scheme de telefonare cu aceste numere de apeluri). Incercaţi sa argumentaţi că $2n - 4$ este chiar numărul minim.

(**2 puncte** pentru descrierea schemei, **1 punct** pentru demonstrarea optimalităţii)

(b) Modelaţi problema in limbajul teoriei grafurilor: schemei de telefonare ii va corespunde un şir de muchii iar cunoaşterea comună se va exprima printr-o condititie referitoare la existenţa unor drumuri speciale cu elemente din şirul considerat **(1 punct)**

Problema 2. Fie D un digraf și două funcții definite pe multimea arcelor sale, $a : E(D) \longrightarrow R_+$ și $b : E(D) \longrightarrow R_+^*$. Descrieți un algoritm eficient pentru determinarea unui circuit C^* in D astfel incit
$\frac{a(C^*)}{b(C^*)} = \min\{\frac{a(C)}{b(C)}; C$ circuit in D $\}$
(**4 puncte**)

Problema 3. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ submulțimi distincte ale unei mulțimi de n elemente S. Demonstrați că există un element x in mulțimea S astfel incit $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, ..., A_n - \{x\}$ să fie și ele distincte. (**2 puncte**)

Problema 4. Fie G un graf și $c : E(G) \longrightarrow R_+$ o funcție de capacitate a muchiilor. Oricărui drum din graf cu măcar o muchie i se asociază *locul ingust* ca fiind muchia sa de capacitate minimă . Descrieți un algoritm eficient care să determine pentru două virfuri s și t distincte ale grafului drumul cu locul ingust cel mai mare (dintre toate drumurile de la s la t in graful G).
(**4 puncte**)

Setul de probleme 7'

Problema 1. Fie $G=(V,E)$ un digraf de ordin n, $a:E\to\mathbf{R}_+$ o funcţie de cost nenegativă, şi $s\neq t$ două vârfuri fixate. Pentru rezolvarea problemei **P1** (a determinării unui drum de cost a minim de la s la t în G) se propune următorul algoritm:

1. **for** each $i\in V$ **do** $p_i\leftarrow 0$;
   $i\leftarrow s$;*înainte*$(s)\leftarrow s$;
2. **while** $i\neq t$ **do**
   if $\exists j\in V$ astfel încât $p_i-p_j=a_{ij}$ **then**
   { *înainte*$(j)\leftarrow i$; $i\leftarrow j$; }
   else
   { $p_i\leftarrow \min_{ij\in E}(a_{ij}+p_j)$; $i\leftarrow$*înainte*(i) };
3. Costul unui drum de cost minim de la s la t este p_s-p_t şi un drum de cost minim se obţine din:
   t, *înainte*(t), *înainte*(*înainte*(t)), ..., s.

a)Demonstraţi că dacă pasul 2 se termină atunci afirmaţiile din pasul 3 sunt corecte.(**2 puncte**)
b)Stabiliţi complexitatea timp a algoritmului(**2 puncte**)

Problema 2. Fie $T=(V,E)$ un arbore şi $w:V\to\mathbf{R}_+$ o funcţie de pondere nenegativă. Pentru orice subarbore T' al lui T se defineşte ponderea sa, $w(T')$, ca fiind suma ponderilor vârfurilor sale.

Arătaţi că există un vârf $v_0\in V$ astfel încât nici unul din subarborii lui $T-v_0$ nu are ponderea mai mare decât $\frac{1}{2}w(T)$.(**1 punct**)
Descrieţi un algoritm cu timpul $O(|V|)$ pentru găsirea lui v_0. (**2 puncte**)

Problema 3. Dacă G și H sunt două grafuri, notația $G \rightarrow H$ semnifică faptul că există $f : V(G) \rightarrow V(H)$ astfel încât $\forall\ uv \in E(G)$ avem că $f(u)f(v) \in E(H)$ (există un morfism de grafuri de la G la H).
Justificați corectitudinea unui algoritm care să răspundă în timpul $O(1)$ la întrebarea: "*Are loc* $C_n \rightarrow C_m$ *?* " $(n, m \in \mathbf{N}, n, m \geq 3$; C_k este graful circuit de ordin k). (**3 puncte**)

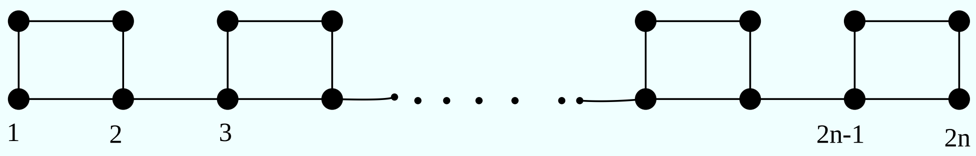
Problema 4. Dacă H este un graf, atunci $q(H)$ notează numărul componentelor conexe de ordin impar ale lui H, iar $\nu(H)$ cardinalul maxim al unui cuplaj al lui H . Demonstrați că pentru orice graf G are loc relația:

$$\max_{S \subset V(G)} (q(G - S) - |S|) = |V(G)| - 2\nu(G)\ .$$

(Se presupune cunoscută teorema lui Tutte)(**4 puncte**)

Setul de probleme 7''

Problema 1. Determinați numărul cuplajelor perfecte ale grafului:



(3 puncte)

Problema 2.
a) Fie $D = (V, E)$ un digraf aciclic cu n vârfuri și m arce și $A, B \subset V$ două mulțimi disjuncte, stabile în $G(D)$ (graful suport al digrafului). Fie $d(A, B) := \min\{d(a, b) | a \in A, b \in B\}$ ($d(x, y)$=distanța în D de la x la y = lungimea celui mai scurt drum dintre x și y, dacă acesta există). Descrieți un algoritm de complexitate $\mathcal{O}(n + m)$ pentru aflarea unei mulțimi maximale $\mathcal{P}$ de drumuri disjuncte (cu mulțimile de vârfuri disjuncte) de la A la B, fiecare de lungime $d(A, B)$ (maximalitatea lui $\mathcal{P}$ este în raport cu incluziunea, adică nu mai există un alt drum de la A la B care să aibă lungimea $d(A, B)$ și să fie disjunct de orice drum din $\mathcal{P}$).
b) Arătați cum poate fi folosit algoritmul de la a) pentru implementarea algoritmului lui Hopcroft & Karp de aflare a unui cuplaj de cardinal maxim într-un graf bipartit.

(3+2 puncte)

Problema 3. Fie $D = (V, E)$ un digraf cu mulţimea de vârfuri $V = \{1, \ldots, n\}$ şi mulţimea arcelor $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

Fie $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\{-1, 0, 1\})$ matricea de incidenţă a lui D (dacă arcul e_j iese din i atunci $a_{ij} = 1$, dacă arcul e_j intră în i atunci $a_{ij} = -1$, altfel $a_{ij} = 0$). Arătaţi că pentru orice submatrice pătrată B a lui A are loc:

$$det(B) \in \{-1, 0, 1\}.$$

(2 puncte)

Problema 4. Într-un graf fără vârfuri izolate se construieşte un drum P astfel: se pleacă dintr-un vârf oarecare de start şi apoi, din vârful curent în care ne aflăm, alegem un vecin diferit de vârfurile deja vizitate. Atunci când nu mai este posibilă nici o alegere, construcţia lui P se încheie. Evident, lungimea drumului P este cel puţin 1 şi ea depinde de structura grafului şi de alegerile făcute. Proprietarul grafului solicită o plată pentru folosirea acestuia în procesul de construcţie a drumului P. Această plată se poate face înaintea fiecărei alegeri şi, dacă se plăteşte 1 RON se obţine dreptul de a face această alegere, iar dacă se plătesc $T >> 1$ RONi atunci se obţine dreptul de a face gratuit toate alegerile următoare. După terminarea construcţiei se poate compara suma plătită, $Apriori(P)$, cu cea care s-ar fi făcut dacă s-ar fi cunoscut drumul P, notată $Posteriori(P)$. Găsiţi o strategie de plată astfel încât pentru orice graf şi orice drum construit P să avem $Apriori(P) \leq (2 - 1/T)Posteriori(P)$.

(4 puncte)

Setul de probleme 8

Problema 1. Fie G un graf conex şi o funcţie de cost $c : E(G) \longrightarrow R$. Vom numi *tăietură* orice mulţime A de muchii ale lui G cu proprietatea că există o bipartiţie $(S, V(G) - S)$ a mulţimii virfurilor lui G astfel incit A este mulţimea muchiilor lui G cu extremităţile in clase diferite ale bipartiţiei.

a) Arătaţi că dacă funcţia de cost are proprietatea că orice tăietură are o unică muchie de cost minim, atunci există un unic arbore parţial de cost minim. **(2 puncte)**

b) Deduceţi că, dacă funcţia de cost c este injectivă,atunci G are un unic arbore parţial de cost minim. **(1 punct)**

c) Sunt adevărate reciprocele afirmaţiilor a) si b) ? **(1 punct)**

Problema 2. Considerăm o numerotare fixată a celor $m > 0$ muchii ale unui graf conex $G = (V, E)$ de ordin n. Pentru orice submulţime de muchii A considerăm $x^A \in GF^m$ vectorul m-dimensional cu elemente 0,1 definit prin $x_i^A = 1 \Leftrightarrow e_i \in A$ (vect. caracteristic). GF^m este spaţiul vectorial peste corpul GF (cu elem. 0 şi 1, şi operaţiile de adunare şi inmulţire modulo 2).

a) Demonstraţi că mulţimea vectorilor caracteristici ai tuturor tăieturilor grafului G, la care adăugăm şi vectorul nul, formeaza un subspaţiu vectorial X al lui GF^m.**(1 punct)**

b) Demonstraţi că vectorii caracteristici ai mulţimilor muchiilor circuitelor grafului G generează un subspaţiu vectorial U al lui GF^m ortogonal pe X. **(1 punct)**

c) Arătaţi că $dim(X) \geq n - 1$ **(1 punct)**

d) Arătaţi că $dim(U) \geq m - n + 1$**(1 punct)**

e) Deduceţi că $dim(X) = n-1$ şi că $dim(U) = m-n+1$. **(1 punct)**

Problema 3. Arătaţi că orice arbore cu gradul maxim $t > 0$ are cel puţin t virfuri pendante. (**2 puncte**)

Problema 4. Fie $T = (V, E)$ un arbore cu rădăcina r (un virf oarecare) şi cu $parent(v)$ părintele nodului $v \in V$, $v \neq r$. Un cuplaj M al lui T se numeşte *propriu* dacă orice virf expus v (relativ la M) in T are un frate w (două virfuri sunt fraţi dacă au acelaşi părinte) astfel incit $w\ parent(v) \in M$. a)Demonstraţi că orice cuplaj propriu este de cardinal maxim. **(1 punct)**

b)Arătaţi că pentru orice arbore cu n virfuri, dat prin listele de adiacenţă, se poate construi in timpul $O(n)$ un cuplaj propriu. **(2 puncte)**

Setul de probleme 8'

Problema 1.
O procedura naivă de creare a unei reţele sociale $G = (V, E)$ este următoarea:

Iniţializare
$G = (\{v\}, \emptyset)$ // v este creatorul reţelei

Aderarea la G (a unui nou membru $v \notin V(G)$)
$V \leftarrow V(G) \cup \{v\}$; $E \leftarrow E(G)$
if v has a friend in $V(G)$ **then** $E \leftarrow E \cup \{vw | w \in V(G)\}$
$G \leftarrow (V, E)$

a) Descrieţi un algoritm eficient care, pentru un graf dat G, să decidă dacă este o reţea socială naivă (a fost creat cu algoritmul de mai sus).

b) Administratorul reţelei a observat că pentru orice doi useri v şi w ai reţelei $G = (V, E)$ ($v \neq w \in V$), se poate răspunde în timp constant la o întrebare $vw \in E$? astfel: se asociază grafului o valoare întreagă pozitivă $x(G)$ şi câte o valoare întreagă pozitivă $y(v)$ pentru fiecare vârf v, astfel încât pentru orice două vârfuri distincte v şi w are loc $vw \in E \Leftrightarrow y(v) + y(w) > x(G)$. Modificaţi algoritmul de mai sus pentru a realiza această nouă reprezentare a grafului (se întreţin doar mulţimea vârfurilor V, $x(G)$ şi lista $(y(v))_{v \in V}$).

(2+2 = 4 puncte)

Problema 2. Considerăm următoarea euristică pentru determinarea unui cuplaj de cardinal maxim într-un graf bipartit $G = (S, T; E)$:

---

function $MMB(G = (S, T; E))$
  $M = \emptyset$
  while $E \neq \emptyset$ **do** $\{$
    if $\exists u$ varf de grad 1 **then** $e \leftarrow$ muchia incidentă cu u
      else $e \leftarrow$ o muchie incidentă cu un vârf de grad maxim
    $M \leftarrow M \cup \{e\}$
    se şterg extremităţile muchiei e din G
  $\}$
  return M

---

a) Demonstraţi că algoritmul returnează cuplajul de cardinal maxim dacă G este arbore.
b) Demonstraţi că dacă G are un unic cuplaj perfect M_0 , atunci algoritmul returnează M_0.
c) Arătaţi că pentru cuplajul M returnat are loc $|M| \geq \frac{\nu(G)}{2}$. **(2+2+2 = 6 puncte)**

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbf{R}$ o funcţie de cost cu valori reale asociate muchiilor.

a) Fie T_0 un arbore parţial al lui G cu proprietatea că pentru orice muchie $e \in E(T_0)$ există un arbore parţial de cost minim T^* al lui G astfel încât $e \in E(T^*)$. Rezultă că T_0 este arbore parţial de cost minim al lui G? (argumentaţi răspunsul)

(b) Pentru $T \in \mathcal{T}_G$ definim $b(T) = \max_{e \in E(T)} c(e)$. Se dorește aflarea unui arbore $T_0 \in \mathcal{T}_G$ astfel încât $b(T_0) = \min_{T \in \mathcal{T}_G} b(T)$. Dacă aplicăm algoritmul lui Prim pentru aflarea unui arbore parțial de cost minim T^*, este acesta o soluție pentru problema dată? (argumentați răspunsul)

(2+2 = 4 puncte)

Setul de probleme 9

Problema 1. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit. Utilizați teorema lui Hall pe un graf convenabil pentru a demonstra că pentru orice intreg k, cu $0 \leq k \leq |S|$, graful G are un cuplaj de cardinal cel puțin $|S| - k$ dacă și numai dacă $\forall A \subseteq S$ $|N_G(A)| \geq |A| - k$. **(2 puncte)**

Problema 2. Numim cuplaj *de grad maxim* in graful G, un cuplaj M cu suma gradelor virfurilor saturate de M maximă printre toate cuplajele grafului.

a) Arătați că un cuplaj de grad maxim este de cardinal maxim **(2 puncte)**

b) Dem. că există in graful G un cuplaj care saturează toate virfurile de grad maxim dacă și numai dacă orice cuplaj de grad maxim are aceeași proprietate. **(2 puncte)**

c) Demonstrați că dacă mulțimea virfurilor de grad maxim ale grafului G induce un graf bipartit, atunci G are un cuplaj care saturează toate virfurile de grad maxim. **(2 puncte)**

d) Deduceți că mulțimea muchiilor unui graf bipartit G poate fi partiționată in $\Delta(G)$ cuplaje.**(2 puncte)**

Problema 3. Considerăm următoarea problemă de decizie:

Instanță: $G = (V, E)$ un graf, $k \in N$, $b \in N^*$.
Intrebare : Există in G un subgraf H cu b muchii, fără virfuri izolate și cu ordinul lui H cel puțin k ?

Arătați că problema se poate rezolva in timp polinomial. (**2 puncte**)

Problema 4. Arătați, utilizind teorema lui Tutte, că orice graf 2-muchie conex 3-regulat are un cuplaj perfect. **(2 puncte)**

Setul de probleme 10

Problema 1. Fie G un graf conex cu n virfuri și $\mathcal{T}_G$ familia arborilor săi parțiali. Se consideră graful $H = (\mathcal{T}_G, E(H))$ unde $T_1T_2 \in E(H) \Longleftrightarrow |E(T_1)\triangle E(T_2)| = 2$.

a) Demonstrați că H este conex și are diametrul cel mult $n-1$. **(2 puncte)**

b)Demonstrați că pentru orice funcție de cost c pe mulțimea muchiilor grafului G, mulțimea arborilor parțiali de cost c minim induce un subgraf conex in H. **(2 puncte)**

Problema 2. Fie $H = (V, E)$ un digraf și $ts \in E$ un arc fixat al său. Se colorează toate arcele lui H cu galben, roșu și verde arbitrar, cu singura condiție ca arcul ts să fie galben (se poate intimpla ca să nu avem arce roșii sau verzi). Demonstrați algoritmic că are loc exact una din urmatoarele situații:

i) există un circuit in graful $G(H)$ (nu se ține seama de orientare) cu arce galbene sau verzi care conține arcul ts și toate arcele galbene ale sale au aceeași orientare.

ii) există o partiție (S, T) a lui V astfel incit $s \in S, t \in T$, toate arcele de la S la T sunt roșii și toate arcele de la T la S sunt roșii sau galbene.

(2 puncte)

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf. O mulțime de virfuri $A \subseteq V$ se numește *m-independentă* dacă există un cuplaj M al lui G astfel incit $A \subseteq S(M)$. Demonstrați că dacă A și B sunt mulțimi m-independente și $|A| < |B|$, atunci $\exists b \in B - A \quad : \quad A \cup \{b\}$ este m-independentă (mulțimile m-independente maximale au același cardinal).(**4 puncte**)

Problema 4. Cuplaje stabile in grafuri bipartite Fie graful complet bipartit $K_{n,n} = (B, F; E)$, unde $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ și $F = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Dacă M este un cuplaj perfect in $K_{n,n}$ (fiecare b este cuplat cu exact un f), vom folosi notația : $b_i f_j \in M \iff f_j = M(b_i) \iff b_i = M(f_j)$.
Vom presupune că
$\forall b \in B$ are o ordonare a preferințelor sale pe F :
$f_{i_1} <_b f_{i_2} <_b ... <_b f_{i_n}$ și
$\forall f \in F$ are o ordonare a preferințelor sale pe B :
$b_{i_1} <_f b_{i_2} <_f ... <_f b_{i_n}$.
Un cuplaj perfect M al lui $K_{n,n}$ se numește *stabil* dacă :

$\forall b \in B$ dacă $f <_b M(b)$, atunci $M(f) <_f b$ și, de asemenea,
$\forall f \in F$ dacă $b <_f M(f)$, atunci $M(b) <_b f$.
Să se arate că pentru orice ordonări ale preferințelor există un cuplaj stabil și să se construiască unul in $\mathcal{O}(n^3)$.
(4 puncte)

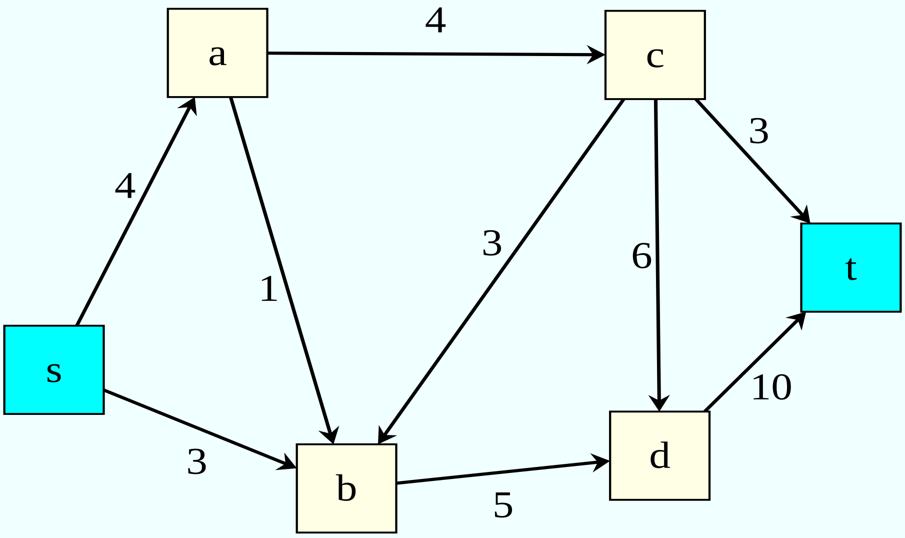
Setul de probleme 11

Problema 1. Se dispune de un algoritm care primind la intrare un graf G şi o funcţie de pondere nenegativă pe mulţimea muchiilor acestuia, returnează un cuplaj perfect in graful G de pondere minimă (printre toate cuplajele perfecte ale grafului; dacă G nu are cuplaj perfect se anunţă acest lucru). Arătaţi căse poate utiliza acest algoritm pentru determinarea eficientă a cuplajului de cardinal maxim intr-un graf oarecare. **(3 puncte)**

Problema 2. Arătaţi că se poate determina, intr-o matrice cu elemente 0 şi 1 dată, o mulţime de cardinal maxim de elemente egale cu 0 şi care să nu se găsească pe aceeaşi linie sau coloană, cu ajutorul unui algoritm de flux maxim (pe o reţea convenabil definită). **(3 puncte)**

Problema 3. Digraful $G = (V, E)$ descrie topologia interconectarii intr-o reţea de procesoare. Pentru fiecare procesor $v \in V$ se cunoaşte incărcarea sa $load(v) \in R^+$. Se cere să se determine (cu ajutorul unei probleme de flux maxim) un plan de *echilibrare statică* a incărcării procesoarelor : se va indica pentru fiecare procesor ce cantitate de incărcare va trimite şi la ce procesor astfel incit, in final, toate procesoarele să aibă aceeaşi incărcare. (**4 puncte**)

Problema 4. Să se determine fluxul de valoare maximă in reteaua din figura de mai jos (explicind funcţionarea algoritmului lui Edmonds-Karp):



(Etichetele arcelor reprezinta capacităţile)

(4 puncte)

Setul de probleme 11'

Problema 1. Considerăm următoarele probleme de decizie:

PERF *Instanță*: G un graf.
Intrebare: Are G un cuplaj perfect?

3PERF *Instanță*: G un graf cu gradul fiecărui vârf ≤ 3.
Intrebare: Are G un cuplaj perfect?

Demonstrați că **PERF** se reduce polinomial la **3PERF** (**4 puncte**)

Problema 2. Demonstrați că nu există nici o permutare $e_1, e_2, \ldots, e_{10}$ a muchiilor grafului complet K_5, astfel încât pentru orice $i \in \{1, \ldots, 9\}$ muchiile e_i și e_{i+1} nu sunt adiacente în K_5 și, de asemenea, e_1 și e_{10} nu sunt adiacente în K_5. (**2 puncte**)

Problema 3. Un organizator al unei conferințe trebuie să asigure fețe de masă (curate) pentru fiecare din cele D zile cât durează conferința.
Se cunoaște numărul M_i al meselor de care e nevoie în ziua i a conferinței ($i = \overline{1, D}$). Se consideră că toate cele M_i fețe de masă se murdăresc la sfârșitul zilei i ($i = \overline{1, D}$).
Organizatorul are de ales între a cumpăra fețe de masă noi, la prețul unitar p, sau, în dimineața zilei i, să trimită la curățat fețe de masă murdare (din zilele precedente; $i \geq 2$). Curățătoria are două tipuri de servicii: *serviciul rapid*, prin care se returnează fețele de masă curate la începutul zilei $i + 1$ la un cost unitar c_1, și *serviciul lent* prin care returnează fețele de masă curate la începutul zilei $i + 2$ la un cost unitar c_2. Desigur, $p > c_1 > c_2$.
Problema pe care și-o pune organizatorul este de a face o planificare a modului de cumpărare și trimitere la curățătorie a fețelor de masă, astfel încât să satisfacă toate cererile pe durata conferinței, la un preț minim.
(Se presupune că nu există fețe de mese în stoc, la începutul conferinței, și că valoarea acestora după terminarea conferinței e neglijabilă).

Să se formuleze problema organizatorului ca o problemă de flux de cost minim (justificare). (**4 puncte**)

Problema 4. O euristică naturală pentru colorarea vârfurilor unui graf $G = (V, E)$ este următoarea:

a) Se alege o D-ordonare a lui G, adică o ordonare $V = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n}\}$ astfel încât $d_G(v_{i_1}) \geq d_G(v_{i_2}) \geq \ldots \geq d_G(v_{i_n})$.

b) Se colorează *greedy* vârfurile: lui v_{i_1} i se atribuie culoarea 1 și apoi pentru fiecare vârf v_{i_j}, cu $j = 2, \ldots, n$, se atribuie cea mai mică culoare posibilă (cel mai mic număr natural p cu proprietatea că nu a fost atribuit drept culoare unuia dintre vecinii săi deja colorați).

Considerăm următoarea problemă de decizie:

3GCOL *Instanță*: G un graf.
Intrebare: Există o D-ordonare a vârfurilor lui G astfel încât euristica de mai sus dă o 3-colorare a lui G ?

Demonstrați că problema

3COL *Instanță*: G un graf.
Intrebare: Admite G o 3-colorare ?

se reduce polinomial la **3GCOL**. (**4 puncte**)

Setul de probleme 11"

Problema 1. Fie $R = (G, s, t, c)$ o rețea (G digraful suport, $s \in V(G)$ intrarea, $t \in V(G)$, $t \neq s$ ieșirea și $c : E(G) \to \mathbf{R}_+$ funcția de capacitate). Presupunem (fără a restrânge generalitatea !) că st și ts nu sunt arce în G. Se dispune și de o funcție *de mărginire inferioară* $m : E(G) \to \mathbf{R}_+$, satisfăcând $m(e) \leq c(e)$ pe orice arc e al lui G. Numim *flux legal în* R orice flux x în R cu proprietatea că $x(e) \geq m(e)$ $\forall e \in E(G)$.

a) Demonstrați că pentru orice flux legal x și orice secțiune (S, T) în R are loc

$$v(x) \leq \sum_{i \in S, j \in T, ij \in E(G)} c(ij) - \sum_{i \in S, j \in T, ji \in E(G)} m(ji).$$

b) Se construiește din R rețeaua $\overline{R}$ astfel:

- se adaugă la G o intrare nouă $\overline{s}$ și o ieșire nouă $\overline{t}$;

- pentru $\forall v \in V(G)$ se adaugă arcul $\overline{s}v$ de capacitate $\overline{c}(\overline{s}v) = \sum_{uv \in E(G)} m(uv)$;

- pentru $\forall v \in V(G)$ se adaugă arcul $v\overline{t}$ de capacitate $\overline{c}(v\overline{t}) = \sum_{vu \in E(G)} m(vu)$;

- se adaugă arcele st și ts de capacitate $\overline{c}(st) = \overline{c}(ts) = \infty$;

- se definește $\overline{c}$ pe arcele ij ale lui G ca fiind $\overline{c}(ij) = c(ij) - m(ij)$.

Demonstraţi că există un flux legal în reţeaua R dacă şi numai dacă există un flux de valoare $M = \sum_{e \in E(G)} m(e)$ în reţeaua $\overline{R} = (\overline{G}, \overline{s}, \overline{t}, \overline{c})$ ($\overline{G}$ este digraful construit mai sus, $\overline{c}$ este funcţia de capacitate definită mai sus).

c) Utilizând un flux legal de start (care se poate obţine ca la b)), indicaţi cum se poate adapta algoritmul lui Ford & Fulkerson pentru a obţine un flux legal de valoare maximă într-o reţea în care pe fiecare arc este precizată capacitatea şi marginea inferioară.

(**2+2+2 puncte**)

Problema 2. Dacă H este un graf conex, $A \subseteq V(H)$ o mulţime nevidă de vârfuri ale sale şi $w : E(H) \to \mathcal{R}_+$, atunci se numeşte *arbore Steiner* corespunzător tripletei (H, A, w) un arbore $T(H, A, w) = (V_T, E_T)$, subgraf al lui H, cu proprietatea că $A \subseteq V_T$ şi suma costurilor muchiilor sale, $s[T(H, A, w)] = \sum_{e \in E_T} w(e)$, este minimă printre toţi arborii subgrafuri ale lui H care conţin A.

a) Justificaţi că determinarea lui $T(H, A, w)$ se poate face în timp polinomial pentru cazul când $A = V(H)$ sau $|A| \leq 2$.

b) Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu mulțimea de vârfuri $V = \{1, \ldots, n\}$ și $A \subseteq V$. Pe mulțimea muchiilor lui G este dată o funcție de cost $c : E \to \mathcal{R}_+$.
Considerăm și graful complet K_n cu mulțimea de vârfuri V și cu funcția de cost $\overline{c} : E(K_n) \to \mathcal{R}_+$ dată de $\overline{c}(ij) = \min_{[\ P \text{ drum în } G \text{ de la } i \text{ la } j\ ]} c(P)$ pentru orice $ij \in E(K_n)$.
Demonstrați că $s[T(G, A, c)] = s[T(K_n, A, \overline{c})]$ și că din orice arbore Steiner $T(K_n, A, \overline{c})$ se poate construi un arbore Steiner $T(G, A, c)$.

c) Arătați că există un arbore Steiner $T(K_n, A, \overline{c})$ cu proprietatea că vârfurile sale care nu-s din A au gradul cel puțin 3. Deduceți (folosind această proprietate) că există întotdeauna un arbore Steiner $T(K_n, A, \overline{c})$ cu cel mult $2|A| - 2$ vârfuri.

(**(1+1)+(1+2)+(2+1) puncte**)

Setul de probleme 12

Problema 1. Fie v valoarea fluxului maxim in rețeaua $R = (G, c, s, t)$. Demonstrați că există k st-drumuri in G, $P_1, ..., P_k$ ($0 \leq k \leq |E(G)|$), și numerele reale nenegative $v_1, ..., v_k$, astfel incit $x : E(G) \longrightarrow \mathbf{R}$, definit pentru orice arc ij prin $x_{ij} = 0 + \Sigma_{t:ij \in P_t} v_t$, este flux in R de valoare maximă v. **(4 puncte)**

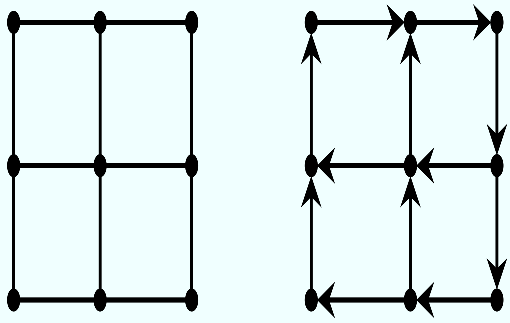
Problema 2. Numim *GP-descompunere* a grafului graful complet K_n orice mulțime $\mathcal{A} = \{B_1, ..., B_{k(\mathcal{A})}\}$, unde : fiecare B_i este un subgraf bipartit complet al lui K_n, orice două grafuri B_i si B_j au mulțimile de muchii disjuncte și $\cup_{i=1,k(\mathcal{A})} E(B_i) = E(K_n)$. Arătați că orice GP-descompunere $\mathcal{A}$ a lui K_n satisfce inegalitatea $k(\mathcal{A}) \geq n - 1$. **(4 puncte)**

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf și $f : V \longrightarrow V$ cu proprietatea că $\forall uv \in E$: $f(u)f(v) \in E$. Demonstrați că $\omega(G) \leq |f(V)|$. Este adevărat că pentru orice graf $G = (V, E)$ există funcții f cu proprietatea de mai sus și astfel incit $|f(V)| \leq \Delta(G) + 1$? (**4 puncte**)

Problema 4. Fie $G = (V, E)$ un graf. Numim *partiție specială* orice bipartiție (S, T) a lui V astfel incit subgraful indus de T in G este neconex și subgraful indus de S in complementarul grafului G este neconex.
Arătați că graful circuit C_n $(n \geq 3)$ nu are partiții speciale.
Descrieți un algoritm polinomial care să testeze dacă un graf dat are partiții speciale. **(2 puncte)**

Setul de probleme 13

Problema 1. Consiliul municipal al unui orăşel a decis să elimine blocajele de circulaţie de pe străzile acestuia prin introducerea sensului unic pe fiecare stradă. Desigur, va trebui ca între orice două locaţii să existe (măcar) un drum de acces după această decizie. Dacă reprezentăm graful străzilor folosind noduri pentru intersecţiile stradale şi muchii conectând aceste noduri corespunzător străzilor, o situaţie simplificată este dată de următoarea figură :



Desigur, graful real al străzilor este mult mai complicat şi de aceea a fost angajat un expert (student la info) care, analizându-l, a observat că are proprietatea că este 2-conex (orice intersecţie s-ar bloca, singurele locaţii afectate sunt cele de pe străzile din acea intersecţie) şi a propus următorul algoritm de orientare a muchiilor (fixarea sensului unic pentru fiecare stradă):

1. *Se alege un nod oarecare și se execută o parcurgere* **dfs** *etichetând nodurile de la 0 la* $n-1$ *(*n *e numărul de noduri din graf) în ordinea întâlnirii lor*;

2. *Fiecare muchie (stradă) este orientată de la nodul cu etichetă mai mică la nodul cu etichetă mai mare dacă acea muchie face parte din arborele* **dfs** *construit, și de la nodul cu etichetă mai mare la nodul cu etichetă mai mică, în caz contrar.*

Arătați că algoritmul funcționează corect pe graful din figura de mai sus și apoi demonstrați că algoritmul este corect (digraful obținut este tare conex) pentru orice graf 2-conex. (**1+3 puncte**)

Problema 2. Demonstrați că orice graf G conex are un subgraf indus H astfel încât :

1. H *este conex*;

2. $|H| = 2|S| - 1$, *unde* S *este o mulțime stabilă a grafului* H;

3. $\forall v \in V(G) - V(H)\ \exists w \in V(H)$ *astfel încât* $vw \in E(G)$.

(**2 puncte**)

Problema 3. La sfârşitul unei zile de lucru, laborantul a observat că a disparut un mouse din laborator, deşi la verificarea de dimineaţă nu lipsea. Din registrul sălii a rezultat că în acea zi au intrat în laborator doar următorii şase studenţi: Ana, Barbu, Costică, Dan, Elena şi Ion. De asemenea, se ştie că fiecare din ei a stat în laborator un interval de timp şi apoi a plecat (dar nu se cunosc orele de venire sau plecare şi nici ordinea în care cei şase au accesat laboratorul). Decanul i-a anchetat, şi a obţinut următoarele mărturii (sub jurământ):

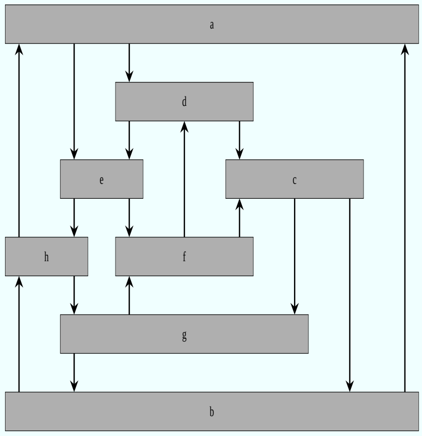
1. *Ana a spus că i-a vazut în laborator pe Barbu şi Elena;*
2. *Barbu a spus că i-a vazut în laborator pe Ana şi Ion;*
3. *Costică a spus că i-a vazut în laborator pe Dan şi Ion;*
4. *Dan a spus că i-a vazut în laborator pe Ana şi Ion;*
5. *Elena a spus că i-a vazut în laborator pe Barbu şi Costică;*
6. *Ion a spus că i-a vazut în laborator pe Costică şi Elena.*

Analizând răspunsurile, decanul (care ştia teoria grafurilor) a intuit că exact unul (hoţul) dintre cei şase studenţi a minţit, apoi, folosind deducţia logică, l-a identificat şi i-a cerut să aducă de urgenţă mouse-ul înapoi pentru a nu-l exmatricula.

Ştiind că decanul a asociat fiecărui student un interval de timp (notat, A,B,..., după numele lor) şi că dintr-o mărturie "X... *spune că i-a văzut pe* Y... *şi* Z..." a dedus că intervalul X se intersectează cu Y şi Z, evidenţiaţi inconsistenţa din graful asociat intersecţiilor acestor intervale şi cum se poate depista hoţul, în ipoteza că exact unul dintre cei şase studenţi a minţit.

(2+2 puncte)

Problema 4. Un grup de poliţişti îşi desfăşoară activitatea în 8 locaţii $a, b, \ldots, h$ conectate prin străzi cu sens unic de circulaţie, aşa cum este descris în digraful de mai jos. Se observă că în fiecare nod (locaţie) intră două arce şi din fiecare ies două arce. De asemenea se observă că digraful corespunzător este tare conex.



Şeful poliţiştilor a hotărât să vopsească străzile roşu şi oranj astfel încât din fiecare nod să plece un arc roşu şi un arc oranj. Scopul acestei decizii a fost ca atunci când într-o locaţie oarecare se întâmplă o infracţiune, să-i adune operativ pe toţi poliţiştii în acel nod al digrafului transmiţându-le tuturor prin sistemul lor de radiorecepţie mesajul "*Adunarea*" şi un cuvânt din $\{r, o\}^*$ (cuvânt ce depinde doar de nodul în care loc infracţiunea).

La primirea mesajului fiecare polițist își notează cuvântul primit și îl folosește drept algoritm de deplasare astfel:

din nodul în care se află pleacă pe strada roșie sau pe strada oranj, după cum e prima literă (r sau o) din cuvântul primit. Apoi, daca n-a ajuns la locul de adunare (pe care-l recunoaște după prezența șefului), alege strada indicată de a doua literă a cuvântului și așa mai departe.

Descrieți (într-un pseudocod prietenos) un algoritm care sa depisteze o vopsire roșu-oranj a arcelor digrafului și, corespunzător acesteia, a câte unui cuvânt de rutare pentru fiecare nod de adunare (sau să decidă că nu există soluție).

Pentru digraful din figură există soluții! Descrieți una din ele și argumentați că merge (se poate implementa algoritmul descris, sau se poate folosi o abordare *try and error*).

(2+2 puncte)

Setul de probleme 14

Problema 1. În problema P2 - a determinarii drumurilor de cost minim de la un vârf dat, s, la toate celelalte ale unui digraf $G = (V, E)$ - se știe că funcția de cost asociată arcelor satisface $a : E \to \{0, 1, \ldots, C\}$, unde C este constantă întreagă (adică nu depinde de $n = |V|$ sau de $m = |E|$).

Să se adapteze algoritmul lui Dijkstra pentru această situație, astfel încât complexitatea timp să fie $O(n + m)$. Se vor descrie structurile de date folosite și modul (argumentare !) în care se obține complexitatea liniară.

(2+2 puncte)

Problema 2. Pentru o instanță $\mathcal{C}$ a problemei 2SAT construim multigraful $G_{\mathcal{C}} = (V; E)$ ale cărui muchii sunt colorate R(oșu) și B(leu), astfel:

1. $V \leftarrow \emptyset$; $R \leftarrow \emptyset$; $B \leftarrow \emptyset$;
2. **for** $C \in \mathcal{C}$ **do** {
   if $C = x_\alpha \vee x_\beta$ **then** $\{V \leftarrow V \cup \{x_\alpha, x_\beta\}; R \leftarrow R \cup \{x_\alpha x_\beta\}\}$;
   if $C = \overline{x}_\alpha \vee \overline{x}_\beta$ **then** $\{V \leftarrow V \cup \{x_\alpha, x_\beta\}; B \leftarrow B \cup \{x_\alpha x_\beta\}\}$;
   if $C = \overline{x}_\alpha \vee x_\beta$ **then**
   $\{V \leftarrow V \cup \{x_\alpha, x_\beta, x_C\}; R \leftarrow R \cup \{x_\beta x_C\}; B \leftarrow B \cup \{x_C x_\alpha\}\}$;
   if $C = x_\alpha \vee \overline{x}_\beta$ **then**
   $\{V \leftarrow V \cup \{x_\alpha, x_\beta, x_C\}; R \leftarrow R \cup \{x_\alpha x_C\}; B \leftarrow B \cup \{x_C x_\beta\}\}$;
   }
3. $E \leftarrow R \sqcup B$; **output** $G_{\mathcal{C}} = (V; E)$.

Observăm că V conţine mulţimea X a variabilelor booleene care apar în 2-clauzele lui $\mathcal{C}$ şi pentru fiecare 2-clauză $C \in \mathcal{C}$ compusă dintr-un literal pozitiv şi unul negativ (clauză mixtă) se adaugă un vârf nou la V. Notaţia $R \sqcup B$ semnifică faptul că muchiile $e \in R \cap B$ au multiplicitate 2 [extremitaţile lui e sunt unite printr-o muchie R(oşie) şi una B(leu)].

Demonstraţi că $\mathcal{C}$ este satisfiabilă dacă şi numai dacă există $S, T \subseteq V$ astfel încât: $S \cap T = \emptyset$, $S \cup T = V$, nu există muchii R(oşii) cu ambele extremităţi în S şi nu există muchii B(leu) cu ambele extremităţi în T.

(2 +2 puncte)

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbf{R}$. Pentru un arbore parţial oarecare $T = (V, E')$ al lui G, şi două vârfuri oarecare $v, w \in V$, se notează cu $v \underset{T}{\to} w$ unicul drum de la v la w în T şi cu $E(v \underset{T}{\to} w)$ mulţimea muchiilor acestuia. Demonstraţi că arborele parţial $T^* = (V, E^*)$ este arbore parţial de cost minim dacă şi numai dacă

$$\forall e = vw \in E \setminus E^*, \forall e' \in E(v \underset{T^*}{\to} w) \text{ are loc } c(e) \geq c(e').$$

(1+1 puncte)

Problema 4. Fie $G = (V, E)$ un graf conex fără punți și $c : E \to \mathbf{R}$. Fie $T = (V, E')$ un arbore parțial al lui G de cost minim și $e \in E'$ o muchie oarecare a sa. $T - e$ are exact două componente conexe cu mulțimile de vârfuri V_1 și V_2. Muchia de cost minim (diferită de e) printre toate muchiile lui G cu o extremitate în V_1 și cealată în V_2 se notează cu $rep_T(e)$ (deoarece e nu e punte în G, $rep_T(e)$ există !).

a) Demonstrați că dacă T^* e arbore parțial de cost minim în G și e este o muchie oarecare a lui T^* atunci $T_1^* = T^* - e + rep_{T^*}(e)$ este arbore parțial de cost minim în $G - e$ (T_1^* se obține din T^* scoțând muchia e și adăugând muchia $rep_{T^*}(e)$).

b) Fie $k \in \mathbf{N}$ astfel încât $2 \leq k < |V|$ și $T_1, \ldots, T_k$ arbori parțiali ai lui G astfel încât $c(T_1) \leq c(T_2) \leq \ldots \leq c(T_k)$ și pentru orice alt arbore parțial T al lui G avem $c(T) \geq c(T_k)$ ($T_1, \ldots, T_k$ sunt primii cei mai mici arbori parțiali ai lui G în raport cu costul c).

Fie T^* un arbore parțial de cost minim în G. Pentru fiecare muchie e a lui T^* considerăm ponderea $w(e) = c(rep_{T^*}(e)) - c(e)$. Sortăm cele $|V| - 1$ muchii ale lui T^* crescător în raport cu ponderile w. Fie S mulțimea formată din ultimile $|V| - k$ muchii din acest șir.

Demonstrați că $S \subseteq E(T_i)\, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

(2+2 puncte)

Setul de probleme 15

Problema 1. *Demonstrați că numărul cuplajelor perfecte ale unui arbore este 0 sau 1 și că un arbore are un cuplaj perfect dacă și numai dacă prin îndepărtarea oricărui vârf se obține o pădure cu exact un arbore de ordin impar.* **(2+2 puncte)**

Problema 2. Fie $R = (G, s, t, c)$ o rețea și (S_i, T_i) $(i = 1, 2)$ secțiuni de capacitate minimă ale ei. *Demonstrați că și $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ și $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ sunt secțiuni de capacitate minimă în R.* **(3+1 puncte)**

Problema 3. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit și M un cuplaj de cardinal maxim în G. Considerăm următorele mulțimi de vârfuri:

1. $P = \{v \in S \cup T | \exists w \in E(M)$ și un drum alternat (relativ la M în G) de lungime pară de la w la $v\}$;

2. $I = \{v \in S \cup T | \exists w \in E(M)$ și un drum alternat (relativ la M în G) de lungime impară de la w la $v\}$;

3. $N = \{v \in S \cup T |$ nu $\exists w \in E(M)$ și un drum alternat (relativ la M în G) de la w la $v\}$.

Demonstrați că :

a) Mulțimile P,I și N sunt disjuncte două câte două și sunt aceleași pentru orice cuplaj de cardinal maxim M.

b) În orice cuplaj de cardinal maxim al lui G fiecare vârf din I este cuplat cu un vârf din P și fiecare vârf din N este cuplat cu un alt vârf din N. Cardinalul maxim al unui cuplaj al grafului este $|I| + \frac{|U|}{2}$.

(2+2 puncte)

Problema 4. O firmă de soft dispune de n programatori, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pentru executarea a m lucrări, $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Se cunoaște pentru fiecare programator P_i lista $\mathcal{L}_i$ de lucrări pe care le poate executa și numărul s_i al lucrărilor din $\mathcal{L}_i$ pe care le poate termina într-o săptămână ($s_i \leq |\mathcal{L}_i|$). Fiecare lucrare poate fi executată de măcar un programator.

Să se descrie cum se poate determina numărul minim de săptămâni în care se pot termina toate lucrările, folosind fluxurile în rețele.

(2 puncte)

Setul de probleme 16

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu n vârfuri $\{v_1, \ldots, v_n\}$ și $c : E \to \mathbf{R}_+$ o funcție de capacitate nenegativă, care asociază fiecărei muchii e capacitatea $c(e)$. Se numește secțiune în G orice partiție cu două clase (S, T) a lui V. Capacitatea secțiunii (S, T) este $c(S, T) = \sum_{e \in E,\ |e \cap S| = 1} c(e)$. O *secțiune minimă* în G este o secțiune (S_0, T_0) astfel încât

$$c(S_0, T_0) = \min_{(S,T) \text{ secțiune în } G} c(S, T).$$

a) *Să se arate că se poate determina în timp polinomial o secțiune minimă în graful G rezolvând un număr polinomial de probleme de flux maxim pe rețele convenabil alese.*

b) *Arătați că dacă $G = C_n$ (graful circuit de ordin $n \geq 3$) cu toate muchiile de capacitate 1, atunci există $\frac{n(n-1)}{2}$ secțiuni de capacitate minimă.* **(2+2 = 4 puncte)**

Problema 2. În continuarea notațiilor de la problema 1, definim pentru orice pereche $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$,

$$c'_{i,j} = \min_{(S,T) \text{ secțiune în } G \text{ cu } v_i \in S \text{ și } v_j \in T} c(S, T).$$

a) *Demonstrați că pentru orice șir $i_1, i_2, \ldots, i_k$ de $k \geq 3$ elemente distincte din $\{1, \ldots, n\}$ are loc*

$$c'_{i_1, i_k} \geq \min\{c'_{i_1, i_2}, c'_{i_2, i_3}, \ldots, c'_{i_{k-1}, i_k}\}.$$

b) Se consideră graful K_n cu mulţimea de vârfuri $\{1, \ldots, n\}$ şi funcţia de pondere pe muchiile sale c' definită mai sus (notăm că $c'_{i,j} = c'_{j,i}$). Fie T^* un arbore parţial de pondere maximă al lui K_n (în raport cu ponderea c'). *Demonstraţi că* $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, *dacă* P *este unicul drum de la* i *la* j *în* T^*, *atunci*

$$c'_{i,j} = \min_{e \in P} c'(e).$$

Observaţie: Rezultă că există un arbore cu mulţimea de vârfuri V, cu ponderi pe muchii astfel încât, pentru a determina capacitatea minimă a unei secţiuni în graful G care separă două virfuri, determinăm muchia de pondere minimă de pe drumul ce uneşte cele două vârfuri în arbore. **(2+3 = 5 puncte)**

Problema 3.
Se consideră o competiţie sportivă între n echipe $\{e_1, \ldots, e_n\}$, în care fiecare echipă dispută $a \geq 1$ meciuri cu fiecare dintre celelalte $n-1$ echipe (deci, fiecare echipă va juca $a(n-1)$ meciuri în total). Orice meci se termină cu victoria uneia dintre cele două echipe participante (nu există remize). Se doreşte să se decidă dacă este posibil ca, la finalul competiţiei, fiecare echipă e_i să câştige un număr de c_i meciuri (vectorul de întregi $c[1 \ldots n]$ este intrarea problemei de decizie).
Arătaţi ca problema se poate rezolva în timp polinomial cu ajutorul fluxurilor pe o reţea convenabil definită. **(3 puncte)**

Problema 4. În reţeaua $R = (G, s, t, c)$, toate capacităţile nenule sunt numere întregi pozitive pare.
Demonstraţi că există un flux x de valoare maximă cu proprietatea că pe orice arc, dacă fluxul este nenul atunci el este un număr pozitiv par. **(2 puncte)**

Setul de probleme 17

Problema 1. Fie $G = (S, T; E)$ un graf bipartit cu $n = |V(G)|$ vârfuri și $m = |E|$ muchii.

a) Demonstrați că $m \leq \frac{n^2}{4}$.

b) Demonstrați că, dacă $B_{n \times m}$ este matricea de incidență a lui G, atunci orice submatrice pătrată C a lui B are proprietatea că $det(C) \in \{-1, 0, 1\}$.

c) Se orientează arbitrar muchiile lui G și se obține digraful $\vec{G}$. Demonstrați că există $K \subseteq V(G) = S \cup T$ astfel încât K e mulțime stabilă în G și oricare ar fi $v \in V(G) - K$, există $u \in K$ cu proprietatea că $uv \in E(\vec{G})$.

(2+2+2 = 6 puncte)

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf de ordin n și $s, t \in V$ astfel încât $d_G(s, t) > \frac{n}{2}$. Demonstrați că există $v \in V - \{s, t\}$ cu proprietatea că orice drum de la s la t în graful G trece prin v. Descrieți un algoritm de complexitate timp $O(n + |E|)$ care să determine acest vârf v.

(2+2 = 4 puncte)

Problema 3. a) Modificați algoritmul BFS astfel încât pentru un graf $G = (V, E)$ dat și $s \in V$ să determine pentru orice vârf $v \in V$ numărul drumurilor de lungime minimă de la s la v, în timpul $O(|V| + |E|)$.
b) Aceeași problemă pentru cazul în care G este digraf!

(2+2 = 4 puncte)

Setul de probleme 18

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu n vârfuri și m muchii și fie $c : E \to \mathbf{R}_{>0}$ o funcție de cost pe muchiile sale.

a) Fie $T = (V, E_T)$ un arbore parțial al lui G cu proprietatea că pentru orice muchie $e \in E_T$ există un arbore parțial de cost minim $T^* = (V, E_{T^*})$ astfel încât $e \in E_{T^*}$. Adevărat sau fals? : "T este arbore parțial de cost minim" (pentru răspunsul adevărat dați o demonstrație, pentru răspunsul fals dați un contraexemplu).

b) Fie R și S doi arbori parțiali ai lui G, $R \neq S$. Cum se poate construi un șir de lungime minimă de arbori parțiali $T_0, T_1, \ldots, T_k$ astfel încât $T_0 = R$, $T_k = S$ și fiecare arbore T_i ($i \geq 1$) se obține din precedentul, T_{i-1}, prin ștergerea unei muchii și adăugarea alteia? Care este complexitatea timp a construcției?

c) Pentru orice arbore parțial $T = (V, E_T)$ al lui G se definește "costul" său ca fiind produsul costurilor muchiilor sale: $c(T) = \prod_{e \in E_T} c(e)$. Descrieți un algoritm cât mai eficient care să determine T^*, arbore parțial al lui G, astfel încât

$$c(T^*) = \max_{T \text{arbore parțial al lui} G} c(T).$$

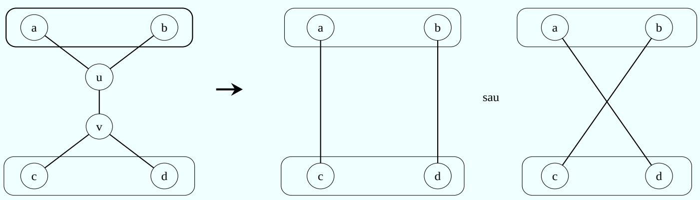
(2+2+2 = 6 puncte)

Problema 2. Considerăm următoarea problemă de decizie:

AGM **Input**: $G = (V, E)$ graf, $k \in \mathbf{N}$.
Question: Există un arbore parțial al T al lui G cu $\Delta(T) \geq k$?

Arătați că **AGM**$\in$ P. **(2 puncte)**

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf 3-regulat, conex și fără punți.
a) Fie $uv \in E$ o muchie oarecare a lui G ca în figura de mai jos. Se elimină cele două vârfuri u și v, iar vecinii lor se conectează prin muchii așa cum este indicat în figură. Demonstrați că măcar unul din grafurile G^1_{uv} sau G^1_{uv} este 3-regulat, conex și fără punți. Se notează cu G' acest graf.



G $\quad$ G^1_{uv} $\quad$ G^2_{uv}

b) Arătați că dacă G' are un cuplaj perfect M, atunci M se poate transforma într-un cuplaj perfect al lui G.

c) Deduceți că pentru orice graf 3-regulat, conex și fără punți se poate construi un cuplaj perfect. Ce complexitate timp are construcția, dacă G are n vârfuri ?

(2+2+2 = 6 puncte)

Setul de probleme 19

Problema 1. Se consideră rețeaua $R = (G, c, s, t)$ cu digraful $G = (V, E)$ având n vârfuri și m arce, $c : E \to \mathbf{Z}_+$ și $C \in \mathbf{Z}_+$, $C = \max_{e \in E} c(e)$.

a) Demonstrați că valoarea maximă a unui flux în rețeaua R este cel mult $m \cdot C$.

b) Arătați că $\forall x$ flux în R, dat $K \in \mathbf{Z}_+$, se poate depista un drum de creștere P de capacitate reziduală $\delta(P)$ cel puțin K (dacă el există), în timpul $O(m)$.

c) Considerăm următorul algoritm

SC-MAX-FLOW(R)

$C = \max_{e \in E} c(e)$

$x \leftarrow 0$ // x este fluxul curent din rețea

$K \leftarrow 2^{1+\lfloor \log C \rfloor}$

while $K \geq 1$ **do** $\{$

  while x are un dr. de creșt. P cu $\delta(P) \geq K$ **do** $\{$

    $x \leftarrow x \otimes \delta(P)$ $\}$

  $K \leftarrow K/2$ $\}$

return x

1. Demonstrați că algoritmul **SC-MAX-FLOW**(R) de mai sus construiește un flux x de valoare maximă în R.

2. Demonstrați că, după fiecare iterație a buclei while exterioare, valoarea maximă a unui flux în R este cel mult $v(x) + m \cdot K$.

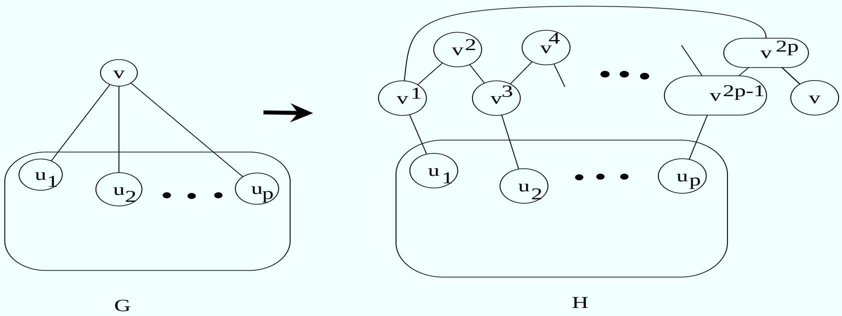
3. Demonstrați că pentru fiecare valoare a lui K, numărul iterațiilor buclei while interioare nu depășește $2m$. Deduceți că algoritmul are complexitatea $O(m^2 \log C)$.

(2+2+1+2+2 = 9 puncte)

Problema 2. Considerăm următoarea problemă de decizie:
MIN-SECŢIUNE-UNICĂ
Input: $R = (G, c, s, t)$, reţea.
Question: Există în R o unică secţiune de capacitate minimă?

Arătaţi că **MIN-SECŢIUNE-UNICĂ**$\in \mathrm{P}$. (**2 puncte**)

Problema 3. a) Fie $G = (V, E)$ un graf şi $v \in V$ un vârf cu gradul $d_G(v) = p \geq 4$. Fie $N_G(v) = \{u_1, \ldots, u_p\}$. Construim graful H astfel: (1) se şterg din G muchiile $vu_1, \ldots, vu_p$; (2) se adaugă la G circuitul C_{2p} cu vârfurile $v^1, \ldots, v^{2p}$; (3) se adaugă la graful obţinut muchiile $v^{2i-1}u_i$ pentru $i \in \{1, \ldots, p\}$, şi muchia vv^{2p} (vezi figura de mai jos). Demonstraţi că $\alpha(H) = \alpha(G) + p$.



b) Fie **SM3** problema de decizie obţinută din **SM** (vezi pag. 283 din curs) prin restricţionarea instanţei la un graf cu gradul maxim cel mult 3. Demonstraţi că **SM** $\propto$ **SM3**.

(**1+2 = 3 puncte**)