Tema 1 Algoritmica Grafurilor

Hălăucă Andrei IIA1, Belu Cătălin-Cosmin IIA6

November 9, 2018

PROBLEMA 1 Fie D(V,E) un digraf cu n arce reprezentând rețeaua stradală a orașului. Fie ij un arc de la nodul i la nodul j, $i, j \in [1, n]$, i $\neq$ j , reprezentând un sens al unei străzi.
Pentru ca digraful nostru să nu conțină circuite va trebui ca acesta să admită o sortare topologică a arcelor sale.

Considerăm arcul de la i la j sortat topologic dacă i<j. Eliminăm din D(V,E) p arce, p minimal astfel încât digraful să nu conțină circuite. Cu cele p arce eliminate vom forma un nou digraf $D'(V', E')$. Cum în digraful D(V,E) arcele eliminate nu admiteau o sortare topologică(deoarece formau circuite), înseamnă că nici în $D'(V', E')$ acestea nu admit sortare topologică

$\Rightarrow i > j, \forall i, j \in [1, p]$ noduri între care avem un arc.$(\star)$

În $D'(V', E')$ vom inversa sensurile tuturor arcelor, astfel încât arcul ij va deveni ji.$(\star\star)$

Din $(\star)$ și $(\star\star)$ $\Rightarrow$ avem sortare topologică a arcelor digrafului $D'(V', E')$ $\Rightarrow$ digraful $D'(V', E')$ va deveni aciclic.
Cum digraful obținut prin inversarea arcelor eliminate din digraful inițial este aciclic, $\Rightarrow$ digraful inițial va fi aciclic și dacă doar vom inversa cele p muchii(în loc să le eliminăm)$\Rightarrow$putem elimina posibilitatea de a merge în cerc în oraș pe rețeaua sa stradală prin inversarea celor p sensuri.

PROBLEMA 2 Deci, vom arăta că dacă :

1. $G_1 \bigodot G_2$ este conex, atunci G_1 și G_2 sunt conexe și unul dintre ele conține un circuit impar(Implicația directă $'' \Rightarrow ''$)

2. G_1 și G_2 sunt conexe și unul dintre ele conține un circuit impar, atunci $G_1 \bigodot G_2$ este conex(Implicația indirectă $'' \Leftarrow ''$)

Implicația directă $'' \Rightarrow ''$: Știm că $G_1 \bigodot G_2$ este conex $\Rightarrow$ există câte un drum între orice două noduri ale grafului $G_1 \bigodot G_2$.
Conform proprietății din ipoteză: $V(G_1 \bigodot G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$
și $E(G_1 \bigodot G_2) = (u_1, u_2)(v1, v2) : u_1v_1 \in E(G_1), u_2v_2 \in E(G_2) \Rightarrow$ există câte un drum între orice două noduri ale grafului G_1 și există câte un drum între orice două noduri ale grafului G_2.

Vom demonstra că $\exists$ muchie între două noduri alese aleator u_1 și v_1 în graful G_1, și că $\exists$ muchie între două noduri alese aleator u_2 și v_2 în graful G_2. Știm din ipoteză că există un drum de la (u_1, u_2) la (v_1, v_2) în graful $G_1 \bigodot G_2$ de forma:$(u_1, u_2), \underbrace{(t_1, s_1), (t_1, s_1), ..., (t_{k-1}, s_{k-1}), (t_k, s_k)}_{k \quad iterații}, (v_1, v_2)$

$(\bigotimes)$

Din $(\bigotimes) \Rightarrow \underbrace{(u_1, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3), ..., (t_{k-1}, t_k), (t_k, v_1)}_{k \quad iterații}$ muchii în graful $G_1 \Rightarrow \exists$muchie de la u_1 la v_1 în graful G_1

Știm că dintr-un mers, într-un graf, se poate extrage un drum și că un mers(parcurs) de lungime minimă este un drum (1) $\Rightarrow \exists$ drum de la u_1 la v_1 în graful G_1 $(\star)$

Din $(\bigotimes) \Rightarrow \underbrace{(u_2, s_1), (s_1, s_2), (s_2, s_3), ..., (s_{k-1}, s_k), (s_k, v_2)}_{k \quad iterații}$ muchii în graful $G_2 \Rightarrow \exists$muchie de la u_2 la v_2 în graful G_2

Aplicand (1), ca mai sus, $\Rightarrow \exists$ drum de la u_1 la v_1 în graful G_1 $(\star\star)$

Din $(\star)$ și $(\star\star) \Rightarrow G_1$ și G_2 sunt conexe

Până acum știm că G_1 și G_2 sunt conexe, dar mai trebuie să arătăm că unul dintre ele conține un circuit impar. Presupunem, prin reducere la absurd, că nici G_1 și nici G_2 nu conțin circuite impare, deci ele conțin circuite pare. Știm, din definiție, că un graf bipartit nu conține niciun ciclu de lungime impară, deci conține doar cicluri de lungime pară. Deci, G_1 și G_2 sunt grafuri bipartite.

Fie G_1', G_1'' două componente din graful G_1 și G_2', G_2'' două componente din graful G_2. Vom defini funcția $returnElement(G_1') = e, e\exists G_1'$, care selectează un nod din componenta G_1' a grafului G_1.

În cazul de față, putem avea muchie între
(returnElement(G_1'),returnElement(G_2')) și
(returnElement(G_1''),returnElement(G_2'')),
cât și între (returnElement(G_1''),returnElement(G_2''))
și (returnElement(G_1'),returnElement(G_2')),în schimb muchiile formate în modul acesta nu se pot intersecta niciodată și vor putea fi formate doar în acest fel.($\diamondsuit$)

De asemenea, nu putem avea muchie între nodurile
(returnElement(G_1'),returnElement(G_2''))
și (returnElement(G_1''),returnElement(G_2')).($\diamondsuit\diamondsuit$)

Din ($\diamondsuit$) și ($\diamondsuit\diamondsuit$) $\Rightarrow$ Grafurile G_1 și G_2, având componentele G_1' și G_1'', respectiv G_2' și G_2'', reprezintă 2 componente conexe pentru graful $G_1 \bigodot G_2$ generat de cele două, ceea ce înseamnă că graful $G_1 \bigodot G_2$ nu este conex.

$\Rightarrow$ CONTRADICȚIE cu ce știm din ipoteză($G_1 \bigodot G_2$ este conex), ceea ce înseamnă că presupunerea noastră este falsă

$\Rightarrow$ Măcar un graf dintre G_1 și G_2 are circuit impar.

$\Rightarrow$ $G_1 \bigodot G_2$ este conex, atunci G_1 și G_2 sunt conexe și unul dintre ele conține un circuit impar

Implicația indirectă $'' \Leftarrow''$: Știm că G_1 și G_2 sunt conexe și unul dintre ele conține un circuit impar, atunci $G_1 \bigodot G_2$ este conex.

Dacă G_1 și G_2 sunt conexe $\Rightarrow$ $\exists$drum între oricare două noduri $u_1 \in V(G_1)$, $u_2 \in V(G_2)$. De asemenea, graful care are circuitul impar, își poate schimba paritatea lungimii numarului de muchii parcurse cu ajutorul circuitului pe care îl deține.Știm din definiție că în cadrul unui mers putem parcurge de 2 sau mai multe ori aceeași muchie.Deci, putem ajunge la 2 mersuri m_1 și m_2 de lungime egala(dacă la început unul este de lungime mai mare decât celălalt), mergând înainte și înapoi pe ele.

PROBLEMA 3

a) Fie T un arbore, M_T matricea transpusă de incidență nod-muchie, m=numărul de muchii(linii), n=numărul de noduri(coloane).
Știm că T este arbore, deci m=n-1. Eliminând din matrice o coloană și vom avea că n devine n-1, deci m=n $\Rightarrow$ matricea rezultată va fi pătratică.
T este arbore $\Rightarrow$ fiecare nod este incident cu minim o muchie $\Rightarrow$ pe fiecare coloană din M_T avem cel puțin o valoare de 1. $(\star)$
O muchie este întotdeauna incidentă cu exact 2 noduri $\Rightarrow$ pe fiecare linie avem exact două valori de 1. $(\star\star)$

Se elimină o coloană. Notăm cu M_{T_r} matricea rămasă prin eliminarea unei coloane și $|M_{T_r}|$ determinantul acesteia.
Din $(\star)$ și $(\star\star)$ $\Rightarrow$ cel puțin o linie va rămâne cu o singură valoare de 1 în matricea M_{T_r} $\Rightarrow$ $|M_{T_r}|$ se poate calcula dezvoltând după valoarea de 1 rămasă. După fiecare dezvoltare vom putea dezvolta din nou după o linie care rămâne cu o singură valoare de 1 până când obținem un determinant de 2 linii și 2 coloane pe care îl putem calcula după formula (ad-bc),
unde $M_{T_{r_f}} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ -determinantul final rămas.

Mai avem de demonstrat doar că $|M_{T_{r_f}}|$ este diferit de 0. În M_T avem: minim două valori de 1 pe linia $i, \forall i \in [1, m]$ și o coloană eliminată din ipoteză $\Rightarrow$ pe cel puțin o linie avem doar o valoare de 1 $\Rightarrow$ $|M_{T_{r_f}}|$ va putea avea înrtre una si trei valori de 1, iar în cazul în care va avea două, acestea vor fi pe pozițiile a și d sau b și c $\Rightarrow$ $M_{T_{r_f}} = \pm 1$

$\Rightarrow$ Matricea este nesingulară.

b) $'' \Leftarrow ''$
Vom arăta că dacă circuitul C este impar, atunci matricea este nesingulară.

Notăm cu n=numărul de noduri și cu m=numărul de noduri. Știm că C este impar, deci :

1. n=m
2. $2 \not| n$
3. $2 \not| m$

M_C este de forma: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

În determinantul D_{M_C} la prima coloană vom scădea coloanele cu indice par și vom aduna coloanele cu indice impar
(începem numărătoarea coloanelor de la 1). Astfel vom obține un determinant de forma: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Vom dezvolta după 2-ul de pe prima coloană și avem : $(-1)^{2k+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Pentru fiecare linie $i \in [2, n]$ vom scădea linia precedentă.($L_2 - L_1$,apoi $L_3 - L_2$,apoi $L_4 - L_3$...apoi $L_n - L_{n-1}$).

Va rezulta astfel: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot |I|$,unde I este matricea unitate.

Cum $|I| = 1 \Rightarrow D_{M_C} = 2, \forall M_C$ matrice de incidență a unui circuit C impar $\Rightarrow M_C$ este nesingulară.

$'' \Rightarrow ''$ Vom porni de la ipoteza că matricea este nesingulară.

Presupunem, prin reducere la absurd, că avem o matrice M_C,n=numărul de coloane și m=numărul de linii cu:

1. n=m
2. $2|m$,deci numărul de linii este par
3. $2|n$,deci numărul de coloane este par

$$M_C \text{ este de forma: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

În determinantul D_{M_C} la prima coloană vom scădea coloanele cu indice par și vom aduna coloanele cu indice impar
(începem numărătoarea coloanelor de la 1). Astfel vom obține un determinant de forma: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0\cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.
Având prima coloană egală cu 0, este evident faptul că rezultatul determinantului este 0 $\Rightarrow$ Matricea este singulara $\Rightarrow$ CONTRADICȚIE cu presupunerea făcută $\Rightarrow$ Pentru un circuit par nu putem avea o matrice nesingulară.

$\Rightarrow$ Trebuie să avem circuit impar pentru ca matricea să fie nesingulară.

PROBLEMA 4

a) Presupunem că la iterația i avem minimul de la iterația curentă și de la iterația i-1. Minimul de la iterația curentă poate fi diferit sau nu față de cel de la iterația precedentă. În cazul în care va fi diferit atunci va fi de forma $minimPrecedent + costNou$.

Conform ipotezei, muchiile pot avea doar cost pozitiv, deci în mod sigur minimul poate doar să crească sau să rămână neschimbat după fiecare iterație a buclei WHILE.