TEMA 3 ALGORITMICA GRAFURILOR

Dorneanu Anca Tutuianu Corneliu grupa A7 ,an II

01/06/2015

Problema 1

Fie un digraf $G = (V, E)$. Daca $X \subseteq V$, notam cu $\delta^+(X) = \{xy \in E | x \in X, y \in V - X\}$ si cu $\delta^-(X) = \delta^+(V - X)$.

Fie $l, u : E \to \mathbb{R}^+$ce satisfac $l(e) \leq u(e) \ \forall \ e \in E$. Atunci fie exista o circulatie $f : E \to \mathbb{R}$ cu $l(e) \leq f(e) \leq u(e) \ \forall \ e \in E$ sau exista $X \subseteq V$ astfel incat $\sum\limits_{e \in \delta^+(X)} u(e) < \sum\limits_{e \in \delta^-(X)} l(e)$.

Demonstratie:

Definim partea slaba a multimii X ca fiind $s(X) = \sum\limits_{e \in \delta^+(X)} u(e) - \sum\limits_{e \in \delta^-(X)} l(e)$

Este suficient sa demonstram ca exista un flux f cu presupunerea ca fiecare multime are o partea slaba≥ 0 .Daca fiecare muchie e satisface $l(e) = u(e)$, atunci definim $f = u = l$. Pentru fiecare $v \in V$ avem $\sum\limits_{e \in \delta^+(X)} f(e) - \sum\limits_{e \in \delta^-(X)} f(e) = s(\{v\}) \geq 0$ si $\sum\limits_{e \in \delta^-(X)} f(e) - \sum\limits_{e \in \delta^+(X)} f(e) = s(V \backslash \{v\}) \geq 0$ deci f este un flux. Vom modifica acum l, u pentru cate o muchie, mentinand partea slaba nenegativa peste tot pana cand ajungem la $l = u$ .Pentru a face asta, vom alege o muchie e' cu$l(e') \neq u(e')$. Alegem un multimea X cu o partea slaba minima astfel incat $e' \in \delta^+(X)$ si alegem o multime Y cu o partea slaba minima astfel incat $e' \in \delta^-(Y)$. Fie multimea S,multime cu muchii avand un varf in $X \backslash Y$ si cu un varf in $Y \backslash X$ si stim ca $e \in S$. Acum avem:

$s(X) + s(Y) = s(X \cap Y) + s(X \cup Y) + \sum(u(e) - l(e)) \geq u(e') - l(e' \underset{e \in S}{)}$.

Deci, putem alege $x, y \geq 0$ cu $x \leq s(X)$ si $y \leq s(Y)$ si$x + y = u(e') - l(e')$. Acum incrementam $l(e')$ cu x si decrementam $u(e')$ cu y , astfel rezultand $u(e') = l(e')$, iar in fuctie de modul in care am ales X, Y, functiile rezultate l, u inca au parti slabe nenegative pentru fiecare multime.

Problema 2

a) Fie $F = (V, E)$ o padure, adica o multime de componente conexe care sunt arbori. Stim ca $eh(F)$ reprezinta numarul componentelor conexe e-pare.

Fie $G = (V, E)$, G = arbore $\Rightarrow |E| = |V| - 1$. Fie $|V| = n$. Astfel avem $|E| = n - 1$, care este impar, rezultand ca n este par.

Consideram m ca fiind un numar de componente conexe e-pare.

Cazul I:

Avem $|V| = n$, n fiind par. Inseamna ca avem un numar impar de muchii $(n-1)$, ceea ce inseamna ca numarul de componente conexe e-pare este 0 ($m = 0$) $\Rightarrow eh(F) \equiv 0 mod 2$ .Presupunem prin reducere la absurd ca $|V| \equiv 1 mod 2$. Atunci vom avea$|V| = \sum\limits_{u \in e-par(V)} |u| + |V - e - par(V)|$, ceea ce nu se poate deoarece un numar impar(suma este para iar modulul este impar) nu poate fi scris ca o suma de numere pare, deci $|V| \equiv 0 mod 2$.

Cazul II: $eh(F) \equiv 1 mod 2$ .Presupunem prin reducere la absurd ca $V| \equiv 0 mod 2$. Atunci vom avea$|V| = \sum\limits_{u \in e-par(V)} |u| + |V - e - par(V)|$, ceea ce nu se poate deoarece un numar impar(atat suma cat si modulul sunt pare) nu poate fi scris ca o suma de numere pare, deci$|V| \equiv 1 mod 2$.

Astfel, din cazurile I si II rezulta ca $eh(F) \equiv |V| mod 2$.

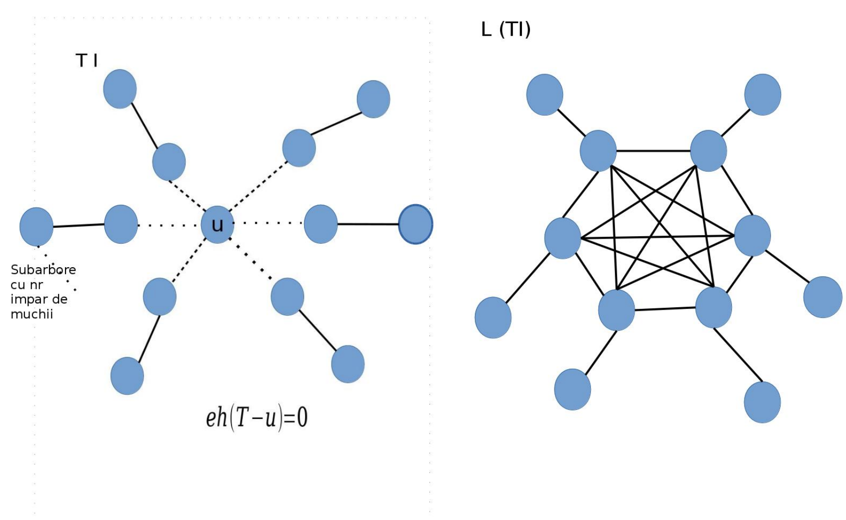
b) Fie $T = (V, E)$ un arbore cu un numar de varfuri impar ≥ 3. Daca avem$eh(T - v) \in \{0, 2\}, \forall v \in V$, atunci $L(T)$ – graful reprezentativ al muchiilor lui T – are exact un cuplaj perfect.

Se numeste cuplaj perfect in graf o modalitate de a alege muchii ale arborelui astfel incat oricare varf din el sa fie incident cu exact o muchie aleasa.

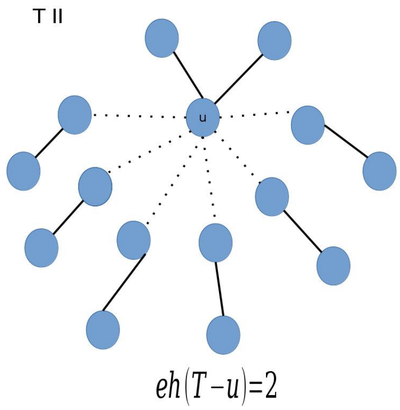
Deci daca numarul componentelor conexe e-pare al arborelui T, mai putin un varf v este egal cu 0 sau 2, atunci $L(T)$ are cuplaj perfect, deci avem 2 cazuri:

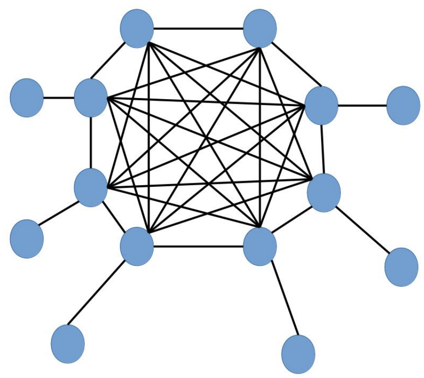
Cuplajele perfecte sunt unice datorita muchiilor incidente grafului complet format.

CAZ I



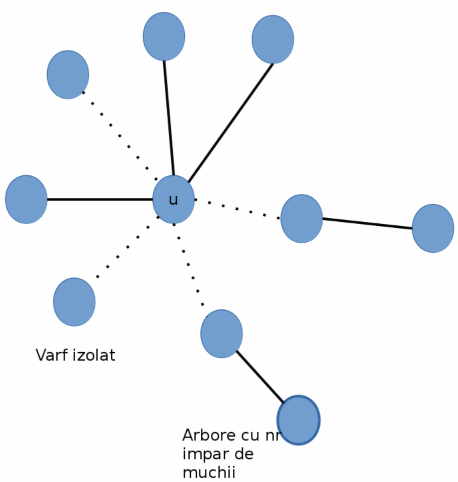
CAZ II

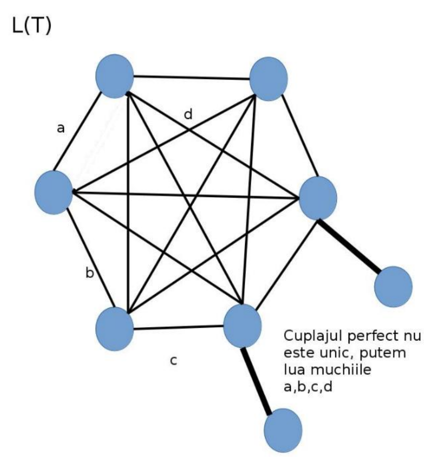




c) Daca L(T) are exact un cuplaj perfect, atunci $eh(T-v) \in \{0,2\}, \forall v \in V$

Presupunem prin reducere la absurd ca $eh(T-v) \notin \{0,2\} \implies eh(T-v) \geq 3$.





Pentru ca L(T) sa aiba cuplaj perfect unic trebuie ca $eh(T-v) \in \{0,2\}$.

Problema 3

$VertexCover \propto_p FAS$

Fie $G = (V, E)$ un graf unidirectional. Fie $V = \{v_1, ..., v_n\}$. Construim un digraf $G_0 = (V_0, E_0)$ care satisface urmatoarele proprietati :

- $v_i \in V \iff w_i, w'_i \in V_0$
- $(w_i, w'_i) \in E_0$pentru fiecare $i = 1, ..., n$
- $(v_i, v_j) \in E \iff (w'_i, w_j), (w'_j, w_i) \in E_0$

Deminstram ca G are o acoperire a varfurilor cu dimensiunea $\leq k$ daca si doar daca G_0 are FAS (feedback arc set) de dimensiune k.

Presupunem ca G are o acoperire a varfurilor VC de dimensiune k.Daca $(v_i, v_j) \in E$, atunci prin constructia $(w_i, w'_i), (w'_i, w_j), (w_j, w'_j), (w'_j, w_i) \in E_0$ care formeaza un ciclu. Daca $v_i \in VC$, atunci eliminarea lui (w_i, w'_i) ar intrerupe ciclul. In acelasi mod daca $v_j \in VC$, atunci eliminarea lui (w_j, w'_j) ar intrerupe ciclul. Asadar $\{(w_i, w'_i) | v_i \in VC\}$este un FAS, deci $G_0$are un FAS de dimensiune k.

Acum presupunem ca G_0 are un FAS de dimensiune k. Putem transforma acest FAS intr-unul doar cu muchii de forma (w_i, w'_i)in urmatorul mod: daca $(w'_i, w_j) \in FAS$, atunci il inlocuim cu (w_i, w'_i) si mentinem proprietatea FAS. Facand acest lucru, nu vom putea niciodata sa marim dimensiunea FAS, cu toate ca s-ar putea micsora, de exemplu daca (w'_k, w_j) si $(w'_i, w_j)$$\in FAS$, atunci le inlocuim pe amandoua cu (w_i, w'_i) . Deci avem un nou FAS de dimensiune maxim k. Pretindem ca $VC = \{v_i | (w_i, w'_i) \in FAS\}$este o acoperire a varfurilor pentru G . Presupunem ca nu este asa. Atunci exista $(v_i, v_j) \in E$ cu $v_i, v_j \notin VC$.Deci $(w_i, w'_i), (w_j, w'_j) \notin FAS$. Eliminand toate muchiile in FAS din E_0 ar trebui sa rezulte G_0 aciclic,dar (w_i, w'_i),(w'_i, w_j),(w_j, w'_j),(w'_j, w_i) formeaza un ciclu,acest lucru fiind o contradictie.