Setul de probleme 2

soluţiile se primesc
miercuri 5 decembrie între orele 12 şi 14, la cabinetul C-402

26 noiembrie 2012

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf conex cu n vârfuri şi m muchii. Fiecare muchie $e \in E$ are asociat un cost real $c(e)$, iar costurile muchiilor sunt distincte.
a) Descrieţi un algoritm care să decidă în timpul $O(n + m)$ dacă, pentru o muchie dată $e_0 \in E$, există un arbore parţial de cost minim al lui G care să conţină muchia e_0.
b) Argumentaţi corectitudinea algoritmului propus. (**2+2=4 puncte**)

Problema 2. Pentru graful conex $G = (V, E)$ cu n vârfuri, m muchii şi funcţia de cost $c : E \to \mathbf{R}$, se cunoaşte lista muchiilor (cu costurile aferente) şi un arbore parţial de cost minim $T = (V, E_T)$. Arborele T este reprezentat de vectorul *parent* cu n componente, în care pentru orice $v \in V - \{s\}$ avem $parent[v]$ = vârful dinaintea lui v de pe unicul drum din T de la vârful s la v, iar $parent[s] = s$ (s este un vârf oarecare, fixat). Se doreşte să se actualizeze lista muchiilor şi arborele T la operaţiile de adăugare şi de ştergere a unei muchii. Se cere să se proiecteze algorimi de complexitate $O(n + m)$ pentru fiecare din aceste operaţii (cu justificarea corectitudinii şi a complexităţii timp). Mai precis, aceşti algoritmi au:
a) La intrare o muchie $e = uv$ nouă şi costul ei, iar la ieşire noua listă de muchii $(E \cup \{e\})$ şi vectorul *parent* reprezentând un arbore parţial de cost minim în $G + e$.
b) La intrare o muchie $e = uv$ existentă în graful G, iar la ieşire noua listă de muchii $(E - \{e\})$ şi vectorul *parent* reprezentând un arbore parţial de cost minim în $G - e$ (dacă acest arbore parţial mai există; altfel se returnează mesajul că graful nu mai este conex). (**2+2 = 4 puncte**)

Problema 3. Fie T un arbore cu un număr par de vârfuri care nu are cuplaj perfect. Demonstraţi că există în T un vârf v_0 cu proprietatea că stergând v_0 din arborele T (şi toate muchiile incidente cu v_0) se obţine o pădure cu măcar doi arbori cu un număr impar de vârfuri. (**2 puncte**)

Problema 4. Un cuplaj M al unui graf G se numeşte **cuplaj tare** dacă subgraful indus în G de mulţimea vârfurilor saturate de M este graful $|M|K_2$. Proiectaţi un algoritm de complexitate $O(n)$ pentru găsirea unui cuplaj tare de cardinal maxim într-un arbore cu n vârfuri. Argumentaţi corectitudinea acestui algoritm. **(2+2= 4 puncte)**

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.