Setul de probleme 3

soluţiile se primesc

miercuri 7 ianuarie între orele 14 şi 16, la cabinetul C-402

17 decembrie 2014

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un digraf. Dacă $X \subseteq V$, notăm cu $\delta^+(X) = \{xy \in E | x \in X, y \in V - X\}$ şi cu $\delta^-(X) = \delta^+(V - X)$. $\delta^+(v)$ şi $\delta^-(v)$ sunt prescurtări pentru $\delta^+(\{v\})$ şi $\delta^-(\{v\})$.

Numim **circulaţie** în G o funcţie $f : E \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^-(v)} f(e), \text{ pentru orice } v \in V.$$

Fie $l, u : E \to \mathbf{R}^+$ două funcţii cu proprietatea că $l(e) \leq u(e)$ pentru orice arc $e \in E$. Demonstraţi că exact una din următoarele afirmaţii este adevărată:

(a) Există o circulaţie f în G astfel încât $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$, $\forall e \in E$.

(b) Există $X \subseteq V$ astfel încât

$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) < \sum_{e \in \delta^-(X)} l(e).$$

(**2+2 puncte**)

Problema 2. O componentă conexă a unui graf se numeşte *e-pară* dacă are un număr par de muchii (în particular, vârfurile izolate sunt componente e-pare). Notăm cu $eh(G)$ numărul componentelor conexe e-pare ale grafului G.

a) Demonstraţi că dacă $F = (V, E)$ este o pădure, atunci $eh(F) \equiv |V| \pmod 2$.
Fie $T = (V, E)$ un arbore cu un număr de vârfuri impar mai mare sau egal cu 3.

b) Demonstraţi că dacă $eh(T - v) \in \{0, 2\}$, $\forall v \in V$, atunci $L(T)$ – graful reprezentativ al muchiilor lui T – are exact un cuplaj perfect.

c) Demonstraţi că dacă $L(T)$ are exact un cuplaj perfect, atunci $eh(T - v) \in \{0, 2\}$, $\forall v \in V$.

(**1+1+1 puncte**)

Problema 3. Considerăm următoarea problemă de decizie:

P **Intrare:** $G = (V, E)$ digraf şi $p \in \mathbf{N}$.
Întrebare: Există $A \subseteq V$ astfel încât $|A| \leq p$ şi $G - A$ nu are circuite?

Demonstraţi că dacă SM este problema mulţimii stabile maxime (notele de curs, pag. 267), atunci $SM \propto P$.

(1+1+1 puncte)

Problema 4. Fie $D = (d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{0, 1, \ldots, n-1\}^n$. Construim graful M_D astfel:

- Pentru $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ considerăm mulţimile R_i şi S_i:

$$R_i = \begin{cases} \{r_{1,2}, \ldots, r_{1,n}\} & \text{dacă } i = 1, \\ \{r_{i,1}, \ldots, r_{i,i-1}, r_{i,i+1}, \ldots, r_{i,n}\} & \text{dacă } 1 < i < n, \\ \{r_{n,1}, \ldots, r_{n,n-1}\} & \text{dacă } i = n. \end{cases}$$

$$S_i = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } d_i = n-1, \\ \{s_{i,1}, \ldots, s_{i,n-1-d_i}\} & \text{dacă } d_i < n-1, \end{cases}$$

- Subgraful indus de $R_i \cup S_i$ în M_D este

$$[R_i \cup S_i]_{M_D} \cong \begin{cases} N_{n-1} & \text{dacă } d_i = n-1 \\ K_{n-1,n-1-d_i} & \text{dacă } d_i < n-1. \end{cases}$$

- Mulţimea muchiilor grafului M_D este reuniunea muchiilor subgrafurilor de mai sus, la care se adaugă toate muchiile $\{r_{i,j}, r_{j,i}\}$ pentru $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ şi $i \neq j$.

Demonstraţi că există un graf $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ astfel încât d_i este gradul vârfului i în G, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, dacă şi numai dacă graful M_D are un cuplaj perfect.

(2+2 puncte)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.