Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

18-19 ianuarie 2014*

Problema 1. Să se arate că dacă un graf G are exact două vârfuri de grad impar atunci în G există un drum între aceste două vârfuri.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf dat prin listele de adiacenţă. Pentru fiecare vârf $v \in V$ este dată "puterea" sa $p(v) \in \mathbf{R}^+$. Descrieţi un algoritm de complexitate timp $O(|V| + |E|)$ care să calculeze pentru fiecare vârf v al grafului $P(v) := max\{p(u)|u \in V, u$ accesibil printr-un drum din v în $G\}$.

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $c : E \to \mathbf{R}$. Fie C un circuit al grafului G şi $e_0 \in E(C)$ astfel încât $c(e_0) = \max\{c(e)|e \in E(C)\}$. Demonstraţi că G are un arbore parţial de cost minim care nu conţine muchia e_0 ($E(C)$ notează mulţimea muchiilor circuitului C).

Problema 4. Să se arate că un graf G este bipartit dacă şi numai dacă orice subgraf indus H al lui G conţine o mulţime S de vârfuri neadiacente două câte două în H şi având cel puţn $|V(H)|/2$ vârfuri.

Problema 5. În reţeaua $R = (G, s, t, c)$ se cunoaşte un flux x^0 de la s la t de valoare maximă. Fie R' reţeaua obţinută din R prin dublarea capacităţii fiecărui arc. Arătaţi că se poate rezolva problema fluxului maxim în R' în timpul $O(m)$ ($m = |E(G)|$).

---

*Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

18-19 ianuarie 2014[a]

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu proprietatea că $\forall\ v, w \in V,\ v \neq w$ are loc $d_G(v) + d_G(w) \geq |V| - 1$. Demonstraţi că diametrul lui G este cel mult 2.

Problema 2. Fie $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graf bipartit reprezentat cu ajutorul listelor de adiacenţă. Descrieţi un algoritm de complexitate timp $O(n + m)$ care să testeze dacă un cuplaj dat, $M \subseteq E$, este cuplaj de cardinal maxim în G ($n = |V_1| + |V_2|$, $m = |E|$).

Problema 3. În reţeaua $R = (G, s, t, c)$ se cunoaşte pentru fiecare vârf $i \in V(G) - \{s, t\}$ un număr real nenegativ $a(i) \in \mathbf{R}_+$. Se cere să se determine un flux de valoare maximă de la s la t în R printre toate fluxurile care satisfac condiţia ca suma fluxurilor pe arcele care intră în orice vârf $i \in V(G) - \{s, t\}$ să nu depăşească $a(i)$. Construiţi o reţea R' cu proprietatea că aplicând un algoritm uzual de flux maxim se obţine soluţia la problema dată.

Problema 4. Fie G un graf şi $\delta(G)$ gradul minim al unui vârf al său. Descrieţi un algoritm care, pentru un arbore dat T cu $k \leq \delta(G)$ muchii, să construiască (în timp polinomial) un subgraf H al lui G astfel încât $H \cong T$.

Problema 5. Arătaţi că pentru orice graf planar se poate construi în timp polinomial o ordonare a vârfurilor sale astfel încât aplicând algoritmul greedy de colorare se obţine o colorare cu cel mult 6 culori.

---

[a] Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

18-19 ianuarie 2014[b]

Problema 1.
Fie G un graf conex cu toate vârfurile de grad par. Demonstraţi că $\forall e \in E$ graful $G - e$ este conex.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi $w : E \to \mathbf{R}$ o funcţie de pondere pe muchiile sale. Presupunem că graful este reprezentat prin listele de adiacenţă. Proiectaţi un algoritm de complexitate timp $O(m \log n)$ care să testeze dacă, pentru două vârfuri $u, v \in V$ date, există un drum în G cu toate muchiile de aceeaşi pondere ($n = |V|, m = |E|$; indicaţie: utilizaţi sortarea şi BFS repetat).

Problema 3. Arătaţi că problema

Să se determine $x, y, z \in \{0, 1\}$ *astfel încât* $3.5 \cdot x + 2.5 \cdot y + 5 \cdot z \leq 8$ *iar* $3 \cdot x + 8 \cdot y + 10 \cdot z$ *să aibă valoare maximă*

se poate rezolva cu ajutorul unui algoritm pentru problema drumului de cost minim pentru un digraf şi costurile arcelor convenabil alese.

Problema 4. Fie G un graf şi $c : E(G) \to \mathbf{R}_+$ o funcţie de capacitate a muchiilor. Oricărui drum P din graf cu măcar o muchie i se asociază **locul ingust** $b(P) = \min\{c(e) | e \text{ muchie a drumului } P\}$. Descrieţi un algoritm eficient care să determine, pentru două virfuri s şi t distincte ale grafului G, drumul cu locul ingust cel mai mare (dintre toate drumurile de la s la t in graful G).

Problema 5. Demonstraţi că *problema determinării dacă un graf bipartit dat este hamiltonian* este o problemă NP-completă.

---

[b] Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

18-19 ianuarie 2014[c]

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu cel puţin 3 vîrfuri. Demonstraţi că G este conex dacă şi numai dacă există două vârfuri $u, v \in V$ $(u \neq v)$ astfel încât grafurile $G - u$ şi $G - v$ sunt conexe.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex reprezentat prin listele de adiacenţă. Fiecare muchie $e \in E$ are un cost $c(e) \in \{0, 1\}$. Descrieţi un algoritm care să determine în timpul $O(n + m)$ un arbore parţial de cost minim în graful dat ($n = |V|, m = |E|$; indicaţie: BFS pe grafuri convenabil alese).

Problema 3. Fie $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graf bipartit în care toate vârfurile au acelaşi grad $k \geq 1$. Demonstraţi că G are un cuplaj perfect.

Problema 4. În reţeaua $R = (G, s, t, c)$, toate capacităţile nenule sunt numere întregi pozitive pare. Demonstraţi că există un flux x de valoare maximă cu proprietatea că pe orice arc, dacă fluxul este nenul atunci el este un număr pozitiv par.

Problema 5. Demonstraţi că dacă graful G este p-conex ($p \geq 2$) atunci, pentru orice vârf $v \in V(G)$, graful $G - v$ este $p - 1$-conex.

---

[c]Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.

Examen AG

Student: ....

Grupa: ....

18-19 ianuarie 2014[d]

Problema 1. Dacă $H = (V(H), E(H)$ este un graf, notăm numărul muchiilor lui H cu $e(H)$ ($e(H) = |E(H)|$). Demonstraţi că pentru orice graf $G = (V, E)$ cu cel puţin 3 vârfuri are loc egalitatea $e(G) = \frac{\sum_{v \in V} e(G-v)}{|V|-2}$.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf cu cel puţin 3 vârfuri, reprezentat cu ajutorul matricii de adiacenţă A. Se doreşte să se afle numărul circuitelor de lungime 3 existente în graful G. Descrieţi un algoritm care să folosească A^3 pentru aflarea acestui număr.

Problema 3. Demonstraţi că următoarea problemă este **NP**-completă.
CLICA MAXIMĂ
Instanţă: G un graf şi $k \in \mathbf{N}^*$.
Întrebare: Există Q o clică în G cu cel puţin k vârfuri?

Problema 4. Arătaţi că se poate determina, într-o matrice cu elemente 0 şi 1 dată, o mulţime de cardinal maxim de elemente egale cu 0 şi care să nu se găsească pe aceeaşi linie sau coloană, cu ajutorul unui algoritm de flux maxim (pe o reţea convenabil definită).

Problema 5. Un graf G este maximal planar dacă $G + e$ nu este planar pentru orice muchie e a complementarului lui G. Demonstraţi că fiecare faţă a unui graf maximal planar este mărginită de un circuit de lungime 3.

---

[d]Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.

Examen AG

Student: ....
Grupa: ....
18-19 ianuarie 2014[e]

Problema 1. Fie G un graf autocomplementar ($G \cong \overline{G}$) de ordin $2k+1 \geq 5$. Demonstraţi că G are un vârf de grad k.

Problema 2. Fie $G = (V, E)$ un graf conex şi u, v, w trei vârfuri distincte ale sale. Să se descrie un algoritm cu timp de lucru polinomial care să testeze dacă există în G un drum de la u la v care să treacă prin w (indicaţie: se pot considera drumuri intern disjuncte plecând din w).

Problema 3. Fie $G = (V, E)$ un graf 2-conex care nu conţine subgrafuri induse izomorfe cu graful circuit C_k, $\forall k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$. Demonstraţi că pentru orice două vârfuri neadiacente u şi v ale lui G, graful $G - \{u, v\}$ este conex.

Problema 4. Fie $R = (G, s, t, c)$ o reţea şi (S_i, T_i) ($i = 1, 2$) secţiuni de capacitate minimă ale ei. Demonstraţi că şi $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ şi $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ sunt secţiuni de capacitate minimă în R.

Problema 5. Desenaţi un graf 3-regulat care sa nu aibă cuplaj perfect (justificare).

---

[e]Baza=10 puncte; Fiecare problemă=10 puncte; Redactaţi soluţiile pe foile proprii.