Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi

1.1 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile

Foma generală a unei **ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile** este

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \tag{1.1}$$

unde $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(y) \neq 0$, $\forall y \in \mathbb{J}$.

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile**:** Fie $x = x(t)$ o soluţie a ecuaţiei (1.1). Observăm că ecuaţia (1.1) poate fi rescrisă sub forma

$\dfrac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t), \forall t \in \mathbb{I}.$

Integrând această egalitate membru cu membru rezultă

$\displaystyle\int \frac{x'(t)}{g(x(t))}dt = \int f(t)dt, \forall t \in \mathbb{I}.$

Obţinem $G(x(t)) = \displaystyle\int f(t)dt + C$, unde G este definită prin relaţia $G(u) = \displaystyle\int \frac{du}{g(u)}$.

Observăm că g nu se anulează pe $\mathbb{J}$ şi este continuă, deci păstrează semn constant pe $\mathbb{J}$. Putem presupune că $g(y) > 0, \forall y \in \mathbb{J}$, schimbând eventual semnul funcţiei f. Atunci G este strict crescătoare pe $\mathbb{J}$, deci inversabilă. Rezultă

$$x(t, C) = G^{-1}\left(\int f(t)dt + C\right) \tag{1.2}$$

Exerciţiul 1.1 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$x' \cos t \ln x - x = 0, t \in (0, \frac{\pi}{2}), x > 0.$

Rezolvare. Scriem ecuaţia sub forma $x' = \dfrac{x}{\cos t \ln x} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{\cos t}$, $g(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Pe $(0, \frac{\pi}{2})$, f este continuă iar pentru $x > 1$, g este continuă şi strict pozitivă, iar pentru $x \in (0, 1)$, g este continuă şi strict negativă. Obţinem

$\frac{\ln x}{x}x' = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow \int \frac{\ln x(s)}{x(s)}x'(s)ds = \int \frac{1}{\cos t}dt \Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2|x| = \ln \operatorname{tg}\frac{2t+\pi}{4} + C \Rightarrow x(t,C) = e^{\sqrt{2\ln \operatorname{tg}\frac{2t+\pi}{4}+C}}, C \in \mathbb{R}.$▲

Exerciţiul 1.2 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x' = tx^2 + 2tx.$

Rezolvare. $f(t) = t, g(x) = x^2 + 2x$. Observăm că $x(t) = 0$ şi $x(t) = 2$ sunt soluţii ale ecuaţiei. Pe orice interval $\mathbb{I} = \mathbb{R}$, $\mathbb{J} \subset (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ sau $\mathbb{J} \subset (0, 2)$ avem
$\frac{1}{x^2+2x}x' = tdt \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right)x' = tdt \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 2t^2 + \ln C \Rightarrow$
$\left|\frac{x}{x+2}\right| = Ce^{2t^2} \Rightarrow x(t,C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{1-Ce^{2t^2}}, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ şi $x(t,C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{-1-Ce^{2t^2}}$, $x \in (0, 2)$.▲

1.2 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi reductibile la ecuaţii cu variabile separabile

Definiţia 1.1 *Funcţia $f = f(x,y)$ se numeşte* **omogenă de grad $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$** *dacă*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y). \tag{1.3}$$

Forma generală a unei **ecuaţii diferenţiale de ordin întâi omogenă** este

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{1.4}$$

unde f este o funcţie continuă şi omogenă de grad zero.

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi omogenă se face făcând schimbarea de funcţie

$$x(t) = tu(t) \tag{1.5}$$

şi se ajunge la o ecuaţie cu variabile separabile.

Exerciţiul 1.3 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\frac{x(t)}{t}, t \neq 0, x(t) \neq k\frac{\pi}{2}t, k \in \mathbb{N}.$

Rezolvare. Observăm că $g\left(\frac{x(t)}{t}\right) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\frac{x(t)}{t}$. Facem substituţia $x(t) = tu(t)$ şi obţinem $u(t) + tu'(t) = u(t) + \operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}\operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)}dt =$

$\int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \ln|\sin u(t)| = \ln t + \ln C \Leftrightarrow \sin u(t) = Ct \Leftrightarrow \sin\frac{x(t)}{t} = Ct \Leftrightarrow \frac{x(t)}{t} = \arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right] \Rightarrow x(t,C) = t\arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right]$. ▲

Ecuaţia diferenţială de ordin întâi de forma

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 x(t) + b_1 t + c_1}{a_2 x(t) + b_2 t + c_2}\right) \tag{1.6}$$

unde $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$, **poate fi redusă la o ecuaţie cu variabile separabile**.

Rezolvarea ecuaţiei (1.6) se face în funcţie de compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 t + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 t + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{1.7}$$

Distingem trei cazuri:

Cazul I. Dacă sistemul (1.7) este compatibil determinat, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, cu soluţia (t_0, x_0) atunci prin schimbarea de variabilă şi de funcţie $\begin{cases} x = y + x_0 \\ t = s + t_0 \end{cases}$,ecuaţia (1.6) poate fi adusă la forma ecuaţiei omogene

$y'(s) = f\left(\frac{a_1\frac{y(s)}{s} + b_1}{a_2\frac{y(s)}{s} + b_2}\right)$.

Cazul II. Dacă sistemul (1.7) este compatibil nedeterminat $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ şi rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$, atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda(a_2, b_2, c_2)$ şi ecuaţia (1.6) se reduce la $x'(t) = f(\lambda)$.

Cazul III. Dacă sistemul (1.7) este un sistem incompatibil $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ şi rang $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$ atunci $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$ şi prin schimbarea de funcţie $y(t) = a_1 x(t) + b_1 t$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$\frac{y'(t) - b_1}{a_1} = f\left(\frac{y(t) + c_1}{\lambda y(t) + c_2}\right)$.♦

Exerciţiul 1.4 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$x'(t) = 2\left(\frac{x(t) + 1}{t + x(t) - 2}\right)^2, t + x - 2 \neq 0.$

Rezolvare. Observăm că $x(t) = -1$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale date. Considerăm sistemul algebric

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ t + x - 2 = 0 \end{cases} . \tag{1.8}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ sistemul algebric (1.8) are soluţie unică, $t_0 = 3, x_0 = -1$. Făcând schimbarea de variabile şi de funcţie $\begin{cases} t = s + 3 \\ x = y - 1 \end{cases}$ se obţine ecuaţia diferenţială $y'(s) = 2\left(\dfrac{y(s)}{s + y(s)}\right)^2$. Ecuaţia se mai poate scrie sub forma $y'(s) = 2\left(\dfrac{\frac{y(s)}{s}}{1 + \frac{y(s)}{s}}\right)^2$ care este o ecuaţie omogenă. Efectuăm schimbarea de funcţie $y(s) = su(s)$ şi obţinem ecuaţia

$$u(s) + su'(s) = 2\left(\frac{u(s)}{1 + u(s)}\right)^2 \Leftrightarrow su'(s) = su'(s) = \frac{-u(s) - u^3(s)}{(1 + u(s))^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1 + u(s))^2}{u(s) + u^3(s)} u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u(s)} + \frac{2}{u^2(s) + 1}\right) u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{u(s)} + \frac{2}{u^2(s) + 1}\right) u'(s) ds = \int \frac{1}{s} ds \Leftrightarrow$$

$$\ln u(s) + 2 \operatorname{arctg} u(s) = \ln s + \ln C \Leftrightarrow \frac{u(s)}{s} = Ce^{-2 \operatorname{arctg} u(s)}$$

Dar $u(s) = \dfrac{y(s)}{s} = \dfrac{x(t) + 1}{t - 3} \Rightarrow \dfrac{x(t) + 1}{(t - 3)^2} = Ce^{-2 \operatorname{arctg} \frac{x(t) + 1}{t - 3}}$.▲

Exerciţiul 1.5 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t) = \dfrac{t - x(t) + 1}{t - x(t) + 2}, t - x(t) + 2 \neq 0.$

Rezolvare. Considerăm sistemul algebric $\begin{cases} t - x + 1 = 0 \\ t - x + 2 = 0 \end{cases}$. Deoarece $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ şi rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$ sistemul algebric (1.8) este incompatibil. Prin schimbarea de funcţie $y(t) = -x(t) + t$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{-y'(t) + 1}{1} = \frac{y(t) + 1}{y(t) + 2} \Leftrightarrow y'(t) = \frac{1}{y(t) + 2} \Leftrightarrow$$

$$(y(t) + 2)y'(t) = 1 \Leftrightarrow \int (y(t) + 2)y'(t)dt = \int 1dt \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}y^2(t) + 2y(t) = t + C \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-x(t) + t)^2 + 2(-x(t) + t) = t + C.▲$$

Exerciţiul 1.6 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$2t^4 x'(t)x(t) + x^4(t) = 4t^6.$

Rezolvare. Facem schimbarea de funcţie $x(t) = y^m(t), m \in \mathbb{R}, y(t) > 0 \Rightarrow x(t) > 0$, $x'(t) = my^{m-1}(t)y'(t)$

$$2t^4my^{m-1}(t)y'(t)y^m(t) + y^{4m}(t) = 4t^6 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$$

$$3t^4y^2(t)y'(t) + y^6(t) = 4t^6 \Rightarrow y'(t) = \frac{4t^6 - y^6(t)}{3t^4y^2(t)}$$

care este o ecuaţie diferenţială omogenă. Facem schimbarea de funcţie $y(t) = tz(t)$.

$$z(t) + tz'(t) = \frac{4 - z^6(t)}{3z^2(t)} \Rightarrow tz'(t) = \frac{4 - z^6(t) - 3z^3(t)}{3z^2(t)} \Rightarrow$$

$$\frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t) = \frac{1}{t} \Leftrightarrow \int \frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t)dt = \int \frac{1}{t}dt$$

Pentru a calcula prima integrală facem schimbarea de variabilă $w(t) = z^3(t)$

$$\int \frac{3z^2(t)}{-z^6(t) - 3z^3(t) + 4}z'(t)dt = -\int \frac{w'(t)}{w^2(t) + 3w(t) - 4}dt = -\frac{1}{5}\ln\frac{w(t) - 1}{w(t) + 4}$$

Rezultă

$$\frac{1}{5}\ln\frac{z^3(t) - 1}{z^3(t) + 4} = -\ln|t| + \ln C \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{z^3(t) - 1}{z^3(t) + 4}} = Ct \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^3 - 1}{\left(\frac{y(t)}{t}\right)^3 + 4}} = \frac{C}{t}$$

Dar $y(t) = x^{\frac{2}{3}}(t)$ de unde rezultă

$$\frac{\left(\frac{x^2(t)}{t^3}\right) - 1}{\left(\frac{x^2(t)}{t^3}\right) + 4} = \left(\frac{C}{t}\right)^5 \Leftrightarrow \frac{x^2(t) - t^3}{x^2(t) + 4t^3} = \left(\frac{C}{t}\right)^5 . \blacktriangle$$

1.3 Ecuaţii cu diferenţiale exacte

Forma generală. Fie $\mathcal{D}$ o mulţime nevidă şi deschisă din $\mathbb{R}^2$ şi P, Q :$\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ două funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathcal{D}$, cu $Q(t, x) \neq 0$ pe $\mathcal{D}$. O ecuaţie de forma

$$P(t, x(t))dt + Q(t, x(t))dx(t) = 0 \tag{1.9}$$

se numeşte **ecuaţie cu diferenţială exactă** dacă

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{1.10}$$

Atunci există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, F:$\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} = P(t, x) \\ \frac{\partial F}{\partial x} = Q(t, x) \end{cases} \tag{1.11}$$

Rezolvarea ecuaţiei cu diferenţială exactă. Dacă (1.9) este o ecuaţie cu diferenţială exactă, atunci x este soluţie a ecuaţiei dacă şi numai dacă
$P(t,x(t))dt + Q(t,x(t))dx(t) = 0, \forall t \in \mathrm{Dom}(x)$, egaliatate care împreună cu faptul că F satisface (1.11) este echivalentă cu $dF(t,x(t)) = 0, \forall t \in \mathrm{Dom}(x)$, echivalentă cu $F(t,x(t)) = C$.

Determinarea lui F se face astfel: considerăm sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = P(t,x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = Q(t,x) \end{cases}. \tag{1.12}$$

Exerciţiul 1.7 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$(e^t + x(t) + \sin x(t))dt + (e^t + t + t\cos x(t))dx(t) = 0, e^x + t + t\cos x \neq 0$.

Rezolvare. $P(t,x) = e^t + x + \sin x$, $Q(t,x) = e^x + t + t\cos x$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x) = 1 + \cos x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x) = 1 + \cos x$, (1.10) este satisfăcută $\Rightarrow$ este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Rezultă că există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, F astfel încât $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x) = (e^t + x + \sin x)$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^x + t + t\cos x$. Integrăm prima relaţie în raport cu t, $F(t,x) = \displaystyle\int (e^t + x + \sin x)dx = (e^t + xt + t\sin x) + h(x)$. Calcuăm derivata în raport cu t, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x) = (t + t\cos x) + h'(x)$.
Egalăm expresiile derivatelor lui f în raport cu x şi obţinem $h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + C_1 \Rightarrow$
$F(t,x) = e^t + xt + t\sin x + e^x + C_1 \Rightarrow$

$F(t,x(t)) = C_2 \Rightarrow e^t + x(t)t + t\sin x(t) + e^{x(t)} = C, C = C_2 - C_1$.▲

1.4 Ecuaţii cu factor integrant

Rezolvarea ecuaţiei cu factor integrant. Dacă ecuaţia (1.9) nu este cu diferenţială exactă, căutăm o funcţie $\mu : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathcal{C}^1$ cu $\mu(t,x) \neq 0, \forall (t,x) \in \mathcal{D}$ astfel încât $\mu(t,x)P(t,x)dt + \mu(t,x)Q(t,x)dx$ să fie diferenţiala unei funcţii $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. O condiţie necesară şi suficientă pentru aceasta este 1.10, adică:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu(t,x)Q(t,x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(t,x)P(t,x)\right),$$

care este echivalent cu

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,x)Q(t,x) + \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\mu(t,x) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(t,x)P(t,x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\mu(t,x) = 0$$

sau

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}(t,x)Q(t,x) - \frac{\partial \mu}{\partial x}(t,x)P(t,x) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)\mu(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathcal{D}.$$

Aceasta este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi cu μ ca funcţie necunoscută. Vom studia două cazuri particulare de rezolvare a acestui tip de ecuaţii. Cazul general va fi studiat la capitolul ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi liniare omogene şi cvasiliniare.

Observăm că dacă
$\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right)=f(t)$
este independentă de variabila x, putem căuta funcţia μ ca funcţie independentă de variabila x. Această funcţie este soluţie a ecuaţiei liniare omogene
$\mu'(t)=f(t)\mu(t)$.

Analog, dacă $P(t,x)\neq 0, \forall (t,x)\in\mathcal{D}$ şi
$\frac{1}{P(t,x)}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)-\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)\right)=k(x)$
este independentă de variabila t, putem căuta funcţia μ ca funcţie independentă de variabila t. Această funcţie este soluţie a ecuaţiei liniare omogene
$\mu'(x)=k(x)\mu(x)$.

Exerciţiul 1.8 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$(x(t)+\ln t)\,dt - t dx(t)=0, t>0.$

Rezolvare. $P(t,x)=x+\ln t$, $Q(t,x)=-t$, $\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)=1$, $\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=-1$, $\frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x)-\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x\right.$ $\frac{2}{-t}=f(t)\Rightarrow \mu'(t)=\frac{2}{-t}\mu(t)\Rightarrow \ln\mu(t)=-2\ln t\Rightarrow \mu(t)=\frac{1}{t^2}\Rightarrow \frac{1}{t^2}(x(t)+\ln t)\,dt-\frac{1}{t}dx(t)=0\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t}(t,x)=\frac{1}{t^2}(x+\ln t)$, $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)=-\frac{1}{t}$. Dintre aceste două relaţii se integrează cea a cărei integrală se poate calcula mai uşor, de exemplu integrăm a doua relaţie $\Rightarrow F(t,x)=-\frac{x}{t}+u(t)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)=\frac{x}{t^2}+u'(t)\Rightarrow u'(t)=\frac{\ln t}{t^2}\Rightarrow u(t)=-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}+C_1\Rightarrow \frac{x(t)}{t}+\frac{\ln t}{t}+\frac{1}{t}=C\Rightarrow x(t,C)=Ct-\ln t-1.$▲

1.5 Ecuaţia diferenţială de ordin întâi liniară

Forma generală. O **ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară** este o ecuaţie de forma

$$x'(t)=a(t)x(t)+b(t) \tag{1.13}$$

unde $a,b:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Dacă $b\equiv 0$ pe $\mathbb{I}$ ecuaţia se numeşte liniară şi omogenă, iar în caz contrar liniară şi neomogenă.

Teorema 1.1 *Soluţia generală a ecuaţiei (1.13) în condiţiile $a,b:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$, este de forma:*

$$x(t,C)=e^{\int a(t)dt}\left(C+\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right) \tag{1.14}$$

Demonstraţie.

Prezentăm două metode de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Prima metodă este **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**.

Soluţia generală a ecuaţiei (1.13) se scrie ca sumă dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene, $x_o(t,C)$ şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, $x_p(t)$, deci $x(t,C) = x_o(t,C) + x_p(t)$.

Etapa I. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Fie ecuaţia omogenă $x'(t) = a(t)x(t)$ care este o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia ei este $x_o(t,C) = Ce^{\int a(t)dt}, C \in \mathbb{R}$.

Etapa II. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma soluţiei ecuaţiei omogene, presupunând constanta ca funcţie necunoscută, $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ unde u este o funcţie derivabilă. Funcţia necunoscută se determină impunând condiţia ca funcţia $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ să verifice ecuaţia neomogenă. Rezultă că $u'(t) = e^{-\int a(t)dt}b(t) \Rightarrow u(t) = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$ (nu am menţionat constanta deoarece căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene). Deci $x_p(t) = e^{\int a(t)dt}\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$.

$x(t,C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)$ este soluţia generală a ecuaţiei (1.13).

A doua metodă utilizează **factorul integrant**. În ecuaţia (1.13) putem considera $P(t,x) = a(t)x + b(t)$ şi $Q(t,x) = -1 \Rightarrow \frac{1}{Q(t,x)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}(t,x) - \frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)\right) = \frac{a(t)}{-1}$, $\mu'(t) = -a(t)\mu(t) \Rightarrow \mu(t,x) = e^{-\int a(t)dt}$ şi obţinem:

$x'(t)e^{-\int a(t)dt} = a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} + b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int a(t)dt}\right) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$

$x(t)e^{-\int a(t)dt} = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + C \Leftrightarrow$

$x(t,C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)$.♦

Exerciţiul 1.9 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$x'(t)+\dfrac{t}{1-t^2}x(t)=t+\arcsin t, t\in[-1,1]$.

Rezolvare. Metoda variaţiei constantelor. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene

$x'(t)+\dfrac{t}{1-t^2}x(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{x'(t)}{x(t)}=-\dfrac{t}{1-t^2}\Leftrightarrow\displaystyle\int\frac{x'(t)}{x(t)}dt=-\int\frac{t}{1-t^2}dt\Leftrightarrow$

$\ln x(t)=\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)+\ln C\Leftrightarrow x_0(t)=C\sqrt{1-t^2}$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t)=u(t)\sqrt{1-t^2}$. Impunem condiţia să verifice ecuaţia neomogenă.

$u'(t)\sqrt{1-t^2}-u(t)\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{t}{1-t^2}u(t)\sqrt{1-t^2}=t+\arcsin t\Leftrightarrow$

$u'(t)\sqrt{1-t^2}=t+\arcsin t\Leftrightarrow u'(t)=\dfrac{t+\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\Leftrightarrow\displaystyle\int u'(t)dt=\int\frac{t+\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt\Leftrightarrow$

$u(t)=-\sqrt{1-t^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin^2 t$.

Rezultă că $x_p(t)=\left(-\sqrt{1-t^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin^2 t.\right)\sqrt{1-t^2}$, iar soluţia generală este

$x(t,C)=x_0(t)+x_p(t)=C\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)+\dfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t$.

Utilizând a doua metodă, înmulţim ecuaţia diferenţială cu $e^{\int\frac{t}{1-t^2}dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ şi obţinem

$x'(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{t}{1-t^2}x(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}=t\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\Leftrightarrow$

$\dfrac{d}{dt}\left(x(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)=t\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\Leftrightarrow$

$x(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}=\displaystyle\int\left(t\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)dt\Leftrightarrow$

$x(t)\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}=-\sqrt{1-t^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin^2 t+C\Leftrightarrow$

$x(t,C)=C\sqrt{1-t^2}-(1-t^2)+\dfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\arcsin^2 t.\blacktriangle$

1.6 Ecuaţia Bernoulli

Forma generală. O ecuaţie de forma

$$x'(t)=a(t)x(t)+b(t)x^{\alpha}(t), \tag{1.15}$$

unde $a,b:\mathbb{I}\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$, neidentic nule pe $\mathbb{I}$ şi neproporţionale pe $\mathbb{I}$, iar $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, poartă denumirea de **ecuaţie Bernoulli**.

Teorema 1.2 *Dacă $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$ neidentic nule şi neproporţionale pe $\mathbb{I}$, iar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ atunci x este soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.15) dacă şi numai dacă funcţia y definită prin*

$$y(t) = x^{1-\alpha}(t) \tag{1.16}$$

este pentru orice $t \in \mathbb{I}$ este o soluţie pozitivă a ecuaţiei liniare şi neomogene

$$y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t). \tag{1.17}$$

Demonstraţie.

Dacă x este o soluţie pozitivă a ecuaţiei (1.15), împărţim această ecuaţie prin x^α şi obţinem:

$$x'(t)x^{-\alpha}(t) = a(t)x^{1-\alpha}(t) + b(t), \tag{1.18}$$

şi prin schimbarea de variabilă (1.16) obţinem
$\dfrac{y'(t)}{1-\alpha} = a(t)y(t) + b(t) \Leftrightarrow y'(t) = (1-\alpha)a(t)y(t) + (1-\alpha)b(t)$
care este o ecuaţie difernţială de ordin întâi liniară neomogenă.♦

Exerciţiul 1.10 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$tx'(t) + x(t) = x^2(t)\ln t, t > 0, x(t) > 0.$

Rezolvare. Împărţim ecuaţia prin $x^2(t)$ şi obţinem $x'(t)x^{-2}(t) + t^{-1}x^{-1}(t) = t^{-1}\ln t$, notăm
$y(t) = x^{-1}(t)$ şi obţinem $y'(t) = -\dfrac{1}{t}y(t) + \dfrac{1}{t}\ln t$ care este o ecuaţie liniară. Soluţia este $y\left(t\right) = \frac{1}{t}\left(t\ln t - t + C\right) \Rightarrow x^{-1}(t, C) = \frac{1}{t}\left(t\ln t - t + C\right)$.▲

1.7 Ecuaţia Riccati

Forma generală. O ecuaţie de forma

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t), \tag{1.19}$$

unde $a, b, c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu b şi c neidentic nule pe $\mathbb{I}$ poartă denumirea de **ecuaţie Riccati**.

Teorema 1.3 *Fie $a, b, c : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu b şi c neidentic nule pe $\mathbb{I}$. Dacă $x_1 : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ este o soluţie a ecuaţiei (1.19), atunci soluţia generală a ecuaţiei (1.19) pe $\mathbb{J}$ este dată de*
$x(t, C) = y(t, C) + x_1(t)$
unde y este soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli
$y'(t) = \left(a(t) + 2x_1(t)\right)y(t) + b(t)y^2(t).$

Demonstraţie.

Prin calcul direct obţinem $x(t) = y(t) + x_1(t) \Rightarrow y'(t) = y'(t) + x_1'(t) \Rightarrow$
$y'(t) + x_1'(t) = a(t)\left(y(t) + x_1(t)\right) + b(t)\left(y^2(t) + 2y(t)x_1(t) + x_1^2(t)\right) + c(t) \Rightarrow$
$y'(t) = \left(a(t) + 2x_1(t)\right)y(t) + b(t)y^2(t)$ care este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2.\blacklozenge$

Exerciţiul 1.11 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x'(t) = x^2(t) - \dfrac{2}{t^2}, t > 0.$

Rezolvare. Observăm că $x_1(t) = \dfrac{1}{t}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei date. Fie $x(t) = y(t) + \dfrac{1}{t} \Rightarrow x'(t) = y'(t) - \dfrac{1}{t^2} \Rightarrow y'(t) - \dfrac{1}{t^2} = y^2(t) + 2y(t)\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t^2} \Rightarrow$
$y'(t) = 2y(t)\dfrac{1}{t} + y^2(t) \Rightarrow y'(t)y^{-2}(t) = 2y^{-1}(t)\dfrac{1}{t} + 1, u(t) = y^{-1}(t), u'(t) = -y'(t)y^{-2}(t) \Rightarrow$
$-u'(t) = 2u(t)\dfrac{1}{t} + 1 \Rightarrow u'(t) = -2u(t)\dfrac{1}{t} - 1$. Înmulţim ecuaţia cu $e^{2\ln t} = t^2 \Rightarrow u'(t)t^2 + 2u(t)t = -t^2 \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(u(t)t^2\right) = -t^2 \Rightarrow u(t)t^2 = -\dfrac{t^3}{3} + C \Rightarrow u(t, C) = -\dfrac{t}{3} + Ct^{-2} \Rightarrow$
$y(t, C) = \dfrac{3}{3Ct^{-2} - t} \Rightarrow x(t, C) = \dfrac{3}{3Ct^{-2} - t} + \dfrac{1}{t}.\blacktriangle$

1.8 Ecuaţia Lagrange

Forma generală. O ecuaţie diferenţială de forma

$$x(t) = t\varphi(x'(t)) + \psi(x'(t)) \tag{1.20}$$

în care $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}$, $\varphi(r) \neq r, \forall r \in \mathbb{R}$, se numeşte **ecuaţie Lagrange**. (este o formă nenormală).

Acest tip de ecuaţie se poate integra folosind **metoda parametrului**. Ea constă în determinarea soluţiilor de clasă $\mathcal{C}^2$ nu sub formă explicită $x = x(t)$ ci sub formă paramertică $\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}.$

Rezolvarea ecuaţiei Lagrange. Fie x o soluţie de clasă $\mathcal{C}^2$ a ecuaţiei Lagrange. Derivăm ecuaţia (1.20) membru cu membru şi obţinem:
$x'(t) = \varphi(x'(t)) + t\varphi'(x'(t))x''(t) + \psi'(x'(t))x''(t).$
Notând $x'(t) = p(t)$ avem $x''(t) = p'(t)$ şi rezultă
$p(t) = \varphi(p(t)) + t\varphi'(p(t))p'(t) + \psi'(p(t))p'(t) \Leftrightarrow$

$$\frac{dp}{dt}(t) = -\frac{\varphi(p(t)) - p(t)}{t\varphi'(p(t)) + \psi'(p(t))}. \tag{1.21}$$

Presupunând că p este inversabilă şi notând inversa ei cu $t = t(p)$, ecuaţia (1.21) se mai scrie sub forma

$$\frac{dt}{dp}(p) = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}t(p) - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}. \tag{1.22}$$

Ecuaţia (1.22) este o ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară şi poate fi integrată prin una din metodele prezentate în Teorema 1.1. Vom găsi $t = \theta(p, C), p \in \mathbb{R}$ şi C o constantă reală. Folosim ecuaţia (1.20) deducem:

$$\begin{cases} t = \theta(p, C) \\ x = \theta(p, C)\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}. \tag{1.23}$$

Observaţia 1.1 În cazul în care în (1.23) putem elimina parametrul p, obţinem soluţia generală sub formă implicită sau chiar sub formă explicită.

Exerciţiul 1.12 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x(t) = \frac{1}{2}tx'(t) + (x'(t))^2$.

Rezolvare. Derivăm ecuaţia Lagrange în raport cu t şi obţinem notând $x'(t) = p(t)$:
$x'(t) = \frac{1}{2}x'(t) + \frac{1}{2}tx''(t) + 2x'(t)x''(t) \Leftrightarrow$
$p(t) = \frac{1}{2}p(t) + \frac{1}{2}tp'(t) + 2p(t)p'(t)$.
Facem schimbarea de funcţie $p(t) \longleftrightarrow t(p)$ şi obţinem
$t'(p) = \frac{1}{p}t(p) + 4p \Big| \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow$
$\frac{d}{dp}\Big| \left(t(p)\frac{1}{p}\right) = 4 \Rightarrow t(p)\frac{1}{p} = 4p + C \Rightarrow t(p) = 4p^2 + Cp \Rightarrow$
$\begin{cases} t(p) = 4p^2 + Cp \\ x(p) = \frac{1}{2}(4p^2 + Cp)p + p^2 \end{cases}.$
Observăm că ecuaţia admite şi soluţia $x(t) = 0$.▲

1.9 Ecuaţia Clairaut

Forma generală. O ecuaţie diferenţială de forma

$$x(t) = tx'(t) + \psi(x'(t)) \tag{1.24}$$

în care $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funcţie de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathbb{R}$ se numeşte **ecuaţie Clairaut.**

Ecuaţia Clairaut se rezolvă tot prin metoda parametrului.

Rezolvarea ecuaţiei Clairaut. Fie x o soluţie de clasă $\mathcal{C}^2$ pe $\mathbb{R}$ a ecuaţiei (1.24). Derivând ecuaţia (1.24) obţinem:
$x'(t) = x'(t) + tx''(t) + \psi'(x'(t))x''(t) \Leftrightarrow x''(t)\left(t + \psi'(x'(t))\right) = 0$.
Notând $p(t) = x'(t)$, ecuaţia de mai sus este echivalentă cu
$p'(t)\left(t + \psi'(p(t))\right) = 0$.
Dacă $p'(t) = 0$ rezultă $x'(t) = c$ cu $c \in \mathbb{R}$, şi înlocuind în ecuaţia (1.24) obţinem

$$x(t) = ct + \psi(t) \tag{1.25}$$

numită **soluţia generală a ecuaţiei Clairaut** care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie de drepte.

Dacă $t + \psi'(p(t)) = 0$ deducem

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}, p \in \mathbb{R}. \tag{1.26}$$

sistem care defineşte parametric o curbă plană numită **soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut** şi care nu este altceva decât înfăşurătoarea familiei de drepte definite de (1.26) (înfăşurătoarea unei familii de drepte este o curbă cu proprietatea că familia de drepte coincide cu familia tuturor tangentelor la curbă).♦

Exerciţiul 1.13 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x(t) = tx'(t) - (x'(t))^2$.

Rezolvare. Derivăm ecuaţia Clairaut în raport cu t şi obţinem notând $x'(t) = p(t)$:
$x'(t) = x'(t) + tx''(t) - 2x'(t)x''(t) \Leftrightarrow x''(t)\,(t - 2x'(t)) = 0 \Leftrightarrow p'(t)\,(t - 2p(t)) = 0 \Rightarrow$ $p'(t) = 0 \Rightarrow x(t) = ct + d \Rightarrow ct + d = ct - c^2 \Rightarrow d = -c^2 \Rightarrow x(t) = ct - c^2$ care reprezintă soluţia generală a ecuaţiei.
$t - 2p = 0 \Rightarrow t = 2p \Rightarrow$
$\begin{cases} t = 2p \\ x = p^2 \end{cases}$
care reprezintă soluţia singulară a ecuaţiei Clairaut. Ecuaţia implicită a curbei este $x(t) = \frac{t^2}{4}$. Aceasta reprezintă o parabolă. Tangentele la parabolă duse prin punctul (t_0, x_0) de pe parabolă au ecuaţia $x + x_0 = \frac{tt_0}{2}$. Dar $x_0 = \frac{t_0^2}{4} \Rightarrow x = \frac{t_0}{2}t - \frac{t_0^2}{4}$ care reprezintă ecuaţia $x(t) = ct - c^2$ cu $c = \frac{t_0}{2}$.▲

1.10 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior.

Vom prezenta câteva clase de ecuaţii diferenţiale de ordin n care, deşi nu pot fi rezolvate prin metode elementare, pot fi reduse la ecuaţii de ordin strict mai mic decât n.

I. Ecuaţii de forma
$x^{(n)}(t) = f(t), n \geq 2,$
unde $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Aceste ecuaţii pot fi integrate complet, soluţia lor generală exprimându-se prin n integrări succesive. Obţinem
$x(t, c_1, c_2, \ldots, c_n) = \int \left(\int \left(\ldots \int f(t)dt \ldots \right) dt \right) dt + c_1 t^{n-1} + c_2 t^{n-2} + \cdots + c_{n-1} t + c_n,$
$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$

Exemplul 1.1 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x^{(3)}(t) = \sin t$.

Rezolvare. $x''(t) = -\cos t + c_1 \Rightarrow x'(t) = -\sin t + c_1 t + c_2 \Rightarrow x(t) = \cos t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3 \Rightarrow$ $x(t, c_1, c_2, c_3) = \cos t + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t + c_3$.▲

II. Fie ecuaţia de ordin n incompletă

$$F\left(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.27}$$

unde $0 < k < n$ şi $F : \mathrm{Dom}(F) \subset \mathbb{R}^{n-k+2} \to \mathbb{R}$. Substituţia $y(t) = x^{(k)}(t)$ reduce această ecuaţie diferenţială la una de ordinul $n-k$ cu funcţia necunoscută y

$$F\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-k)}\right) = 0. \tag{1.28}$$

Să presupunem că putem determina soluţia generală a ecuaţiei (1.28), $y = y(t, c_1, \ldots c_{n-k})$. În aceste condiţii, soluţia generală a ecuaţiei (1.27), $x = x(t, c_1, \ldots c_n)$ se obţine integrând de k ori identitatea $x^{(k)} = y$.

Exemplul 1.2 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$x''' = -\frac{1}{t}x'' + 3t, t > 0$.

Rezolvare. Substituţia $x'' = y$ conduce la ecuaţia diferenţială de ordin întâi liniară
$y' = -\frac{1}{t}y + 3t$
a cărei soluţie generală se obţine înmulţind ecuaţia cu $e^{\int \frac{dt}{t}} = t \Rightarrow y't = -y + 3t^2 \Rightarrow$ $(yt)' = 3t^2 \Rightarrow yt = t^3 + c_1 \Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{c_1}{t} \Rightarrow x''(t) = t^2 + \frac{c_1}{t} \Rightarrow x'(t) = \frac{t^3}{3} + c_1 \ln t + c_2 \Rightarrow$ $x(t) = \frac{t^4}{12} + c_1(t\ln t - t) + c_2 t + c_3 \Rightarrow x(t, c_1, c_2, c_3) = \frac{t^4}{12} + c_1(t \ln t - t) + c_2 t + c_3$.▲

Capitolul 2

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

2.1 Forma generală

Definiţia 2.1 *O* **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** n *este o ecuaţie de forma:*

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t) \tag{2.1}$$

unde a_1, $a_2, \ldots$, a_n, f *sunt funcţii contiune de la un interval nevid deschis* $\mathbb{I}$ *în* $\mathbb{R}$, *iar* $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ *este funcţia necunoscută.*

Dacă în ecuaţia diferenţială (2.1) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, *ecuaţia se numeşte* **liniară omogenă** *de ordin n. În caz contrar ecuaţia diferenţială (2.1) se numeşte* **liniară neomogenă**.

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială liniară de ordin n :
Să se determine funcţia $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, $\mathbb{I}$ un interval nevid deschis în $\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -a_1(t)x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x'(t) - a_n(t)x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{10}, \ldots , x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}, \tag{2.2}$$

unde $a_1, a_2, \ldots , a_n, f$ sunt funcţii contiune pe $\mathbb{I}$, $t_0, x_{i0} \in \mathbb{R}$,$i = \overline{0, n}$.

Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy: reamintim că prin intermediul transformărilor

$$\begin{cases} (y_1, y_2, \ldots , y_n) = \left(x, x', \ldots , x^{(n-1)}\right) \\ \mathbf{g}\,(t, y_1, \ldots , y_n) = (y_2, \ldots , y_n, f_1(t, y_1, y_2, \ldots , y_n)) \end{cases},$$

ecuaţia (2.2) poate fi rescrisă echivalent ca un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu n funcţii necunoscute:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f_1(t, y_1, y_2, \ldots , y_n) \end{cases},$$

unde $f_1(t, y_1, y_2, \ldots , y_n) = -a_1(t)y_n(t) - \cdots - a_{n-1}(t)y_2(t) - a_n(t)y_1(t) + f(t)$.

Teorema 2.1 *Fie $f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1,n}$. Pentru orice $t_0 \in \mathbb{I}$, şi orice $x_{i0} \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n-1}$ problema (2.2) admite soluţie unică definită într-o vecinătate suficient de mică a lui t_0.*

2.2 Soluţia generală a ecuaţiei omogene

Considerăm aplicaţia:

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \tag{2.3}$$

definită de

$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x, \forall x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1,n}.$

Observăm că ecuaţia liniară omogenă de ordin n se poate scrie de forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1,n}. \tag{2.4}$$

Definiţia 2.2 *Funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc* **liniar dependente** *pe $\mathbb{I}$, dacă există $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$ astfel încât*

$c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = \theta_{\mathbb{V}}, \forall t \in \mathbb{I}.$

În caz contrar funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc **liniar independente** *pe $\mathbb{I}$.*

Propoziţia 2.1 *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n soluţii liniar independente ale problemei (2.4), atunci soluţia generală a acestei probleme este de forma*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Definiţia 2.3 *Dacă funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente, atunci ele poartă numele de* **sistem fundamental** *de soluţii ale ecuaţiei (2.4).*

Observaţia 2.1 Determinarea soluţiei generale revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii.

Definiţia 2.4 *Fie funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Se numeşte* **wronskianul** *acestor funcţii determinantul:*

$$W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2.2 *Funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente dacă şi numai dacă wronskianul lor este diferit de zero, $W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.*

Teorema 2.3 (Teorema lui Liouville) *Dacă* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ *atunci*

$$W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] = W[t_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)ds}, \forall t \in \mathbb{I}, \tag{2.6}$$

iar t_0 *este un punct arbitrar, fixat din* $\mathbb{I}$.

Propoziţia 2.2 *Oricare ar fi n funcţii din* $\mathbb{V}$, *wronskianul lor este sau identic nul sau diferit de zero în orice punct din* $\mathbb{I}$.

Exerciţiul 2.1 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$t^2x'' - 5tx' + 8x = 0, t \neq 0,$$

ştiind că admite ca soluţii particulare $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Se verifică prin calcul direct că $x_1(t) = t^2$ şi $x_2(t) = t^4$ sunt soluţii ale ecuaţiei date. Verificăm dacă sunt liniar independnte.

$W[t, x_1, x_2] = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t & 4t^3 \end{vmatrix} = 2t^5 \neq 0.$

Deci pe orice interval închis din $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ soluţia generală este de forma $x(t, c_1, c_2) = c_1t^2 + c_2t^4, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$▲

2.3 Soluţia generală a ecuaţiei neomogene

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordin n neomogenă

$$\mathcal{L}(x) = f; x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \tag{2.7}$$

Teorema 2.4 *Dacă* $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ *este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin* n, *(2.4), iar* $x_p(t)$ *este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordin* n, *(2.7), atunci*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.7).

Deci problema determinării soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordin n, în ipoteza că se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii, revine la *determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene.* Metoda generală de aflare a soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene este cunoscută sub numele de **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**.

Teorema 2.5 *Dacă* $x_o(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ *este soluţia generală a ecuaţiei omogene (2.4), atunci o soluţie particulară* x_p *a ecuaţiei neomogene (2.7) este de forma*

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t), t \in \mathbb{I}, \tag{2.8}$$

unde $C_1'(t), \ldots, C_n'(t)$ *sunt soluţii ale sistemului*

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \cdots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}. \tag{2.9}$$

Exerciţiul 2.2 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$t^2 x'' - 5tx' + 8x = t, t \neq 0,$$

ştiind că admite ca soluţii particulare $x_1(t) = t^2, x_2(t) = t^4$.

Rezolvare. Ecuaţia se scrie sub foma

$$x'' - \frac{5}{t}x' + \frac{8}{t^2}x = \frac{1}{t}. \tag{2.10}$$

Ştim din Exerciţiul (2.1) că soluţia generală a ecuaţiei omogene este
$x_o(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = C_1(t)t^2 + C_2(t)t^4$. Calculăm derivatele lui x_p şi impunem condiţiile precizate în Teorema (2.5).

$x_p'(t) = C_1'(t)t^2 + C_1(t)2t + C_2'(t)t^4 + C_2(t)4t^3 \Rightarrow C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0$

$x_p''(t) = C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă (2.10) şi obţinem

$C_1'(t)2t + C_1(t)2 + C_2'(t)4t^3 + C_2(t)12t^2 - 10C_1(t) - 20C_2(t)t^2 + 8C_1(t) + 8C_2(t)t^2 = \frac{1}{t}.$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} C_1'(t)t^2 + C_2'(t)t^4 = 0 \\ C_1'(t)2t + C_2'(t)4t^3 = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow C_1'(t) = \frac{-t^3}{2t^5} = -\frac{1}{2t^2}, C_2'(t) = \frac{t}{2t^5} = \frac{1}{2t^4}.$$

$C_1(t) = \frac{1}{2t}, C_2(t) = -\frac{1}{6t^3} \Rightarrow x_p(t) = \frac{1}{2t}t^2 - \frac{1}{6t^3}t^4 \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{2} - \frac{t}{6} \Rightarrow x_p(t) = \frac{t}{3}.$

Soluţia generală

$x(t, c_1, c_2) = c_1 t^2 + c_2 t^4 + \frac{t}{3}.$▲

2.4 Ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Definiţia 2.5 *O* **ecuaţie diferenţială liniară de ordin** n **cu coeficienţi constanţi** *este o ecuaţie de forma:*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t) \tag{2.11}$$

unde f este o funcţie contiunuă de la un interval nevid $\mathbb{I}$ din $\mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_n$ sunt numere reale, iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcţia necunoscută.

Dacă în ecuaţia diferenţială (2.11) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte **liniară omogenă** *de ordin n cu coeficienţi constanţi. În caz contrar ecuaţia diferenţială (2.11) se numeşte* **liniară neomogenă**.

Definim funcţia liniară
$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$
$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x.$

Ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordin n **cu coeficienţi constanţi** poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

Ne propunem *să determinăm efectiv soluţia generală* a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi. Pentru aceasta căutăm soluţii ale ecuaţiei (2.12) de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Are loc relaţia

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} P(\lambda), t \in \mathbb{I}. \tag{2.13}$$

unde

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{2.14}$$

Polinomul $P(\lambda)$ se numeşte **polinom caracteristic**, iar ecuaţia

$$P(\lambda) = 0 \tag{2.15}$$

se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei (2.12).

Teorema 2.6 *Funcţia $x(t) = e^{\lambda t}$ este soluţie a ecuaţiei (2.12) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei caracteristice (2.15).*

Teorema 2.7 *Dacă polinomul $P(\lambda)$ are n rădăcini (reale sau complexe) distincte, $\lambda_1, \ldots,$ λ_n, atunci sistemul de funcţii $\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$ este un sistem fundamental de soluţii pentu ecuaţia (2.12).*

Teorema 2.8 *Sistemul de funcţii*

$$\left(t^k e^{\lambda_j t} \mid 0 \leq k \leq n_j - 1, 1 \leq j \leq m\right) \tag{2.16}$$

este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (2.12).

Observaţia 2.2 Dacă $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ este rădăcină a ecuaţiei (2.12) atunci deoarece $t^k e^{\lambda_j t} = t^k(e^{\alpha_j t}\cos\beta_j + ie^{\alpha_j t}\sin\beta_j) = t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j + it^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j$ rezultă că şi $t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j$ şi $t^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j$ sunt soluţii ale ecuaţiei (2.12). Deci asociem valorilor proprii λ_j şi $\overline{\lambda}_j$ de ordin de multiplicitate cu n_j următorul sistem de $2n_j$ funcţii reale

$$\left(t^k e^{\alpha_j t}\cos\beta_j, t^k e^{\alpha_j t}\sin\beta_j \mid 0 \le k \le n_j\right). \tag{2.17}$$

Din independenţa liniară a sistemului (2.16) rezultă independenţa sistemului (2.17).

Exerciţiul 2.3 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x''' + 3x'' - x' - 3x = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Căutăm soluţii ale ecuaţiei de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$. Calculăm derivatele $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $x'''(t) = \lambda^3 e^{\lambda t}$ şi le înlocuim în ecuaţie. Obţinem ecuaţia caracteristică $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte, rezultă că sistemul de funcţii $(x_1(t) = e^{-3t}, x_2(t) = e^t, x_3(t) = e^{-t})$ este un sistem fundamental de soluţii $\Rightarrow x(t, c_1, c_2, c_3) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$. Determinăm soluţia particulară impunând condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ x'(0) = -3c_1 + c_2 - c_3 \\ x'(0) = 9c_1 + c_2 + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ 9c_1 + c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$x(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$.▲

Exerciţiul 2.4 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(IV)} + 2x'' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -i, \lambda_{3,4} = i$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi multiple cu ordinul de multiplicitate 2.

Sistemul de funcţii $(\sin t, \cos t, t\sin t, t\cos t)$ este un sistem fundamental de soluţii. Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1\sin t + c_2\cos t + c_3 t\sin t + c_4 t\cos t$.▲

Exerciţiul 2.5 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(V)} - x^{(IV)} - x' + x = 0.$$

Rezolvare. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -1, \lambda_{4,5} = 1$. Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt şi reale şi complexe, simple şi multiple.

Sistemul de funcţii $(\sin t, \cos t, e^{-t}, e^t, te^t)$ este un sistem fundamental de soluţii. Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 e^{-t} + c_4 e^t + c_5 te^t$.▲

Considerăm cazul ecuaţiei diferenţiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienţi constanţi. Considerăm ecuaţia

$$\mathcal{L}(x) = f, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}). \tag{2.18}$$

Din Teorema 2.4 ştim că soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$ unde $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin n, (2.4), iar $x_p(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordin n. În momentul de faţă ştim să determinăm efectiv soluţia generală $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ a ecuaţiei omogene ataşate, iar din Teorema 2.5, aplicând metoda variaţiei constantelor lui Lagrange, putem determina $x_p(t)$. Astfel *problema determinării soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n neomogenă cu coeficienţi constanţi este complet rezolvată.*

Exerciţiul 2.6 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}, t \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene folosind metoda variaţiei constantelor.

$x_p(t) = u_1(t) \sin t + u_2(t) \cos t$

$x_p'(t) = u_1'(t) \sin t + u_1(t) \cos t + u_2'(t) \cos t - u_2(t) \sin t \Rightarrow u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0$

$x_p''(t) = u_1'(t) \cos t - u_1(t) \sin t - u_2'(t) \sin t - u_2(t) \cos t \Rightarrow u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \dfrac{1}{\cos t}$.

Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} u_1'(t) \sin t + u_2'(t) \cos t = 0 \\ u_1'(t) \cos t - u_2'(t) \sin t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{u_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \dfrac{1}{\cos t} & -\sin t \end{vmatrix} = -1, \Delta_{u_2'} = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \dfrac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = \operatorname{tg} t \Rightarrow$$

$u_1'(t) = 1 \Rightarrow u_1(t) = t; u_2'(t) = -\operatorname{tg} t \Rightarrow u_2(t) = \ln|\cos t|$.

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este $x_p(t) = t \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este:

$x(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$.▲

În aplicaţiile tehnice apar probleme care necesită determinarea soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi în care funcţia f este un cvasipolinom sau o sumă de cvasipolinoame. În aceste cazuri se poate determina direct o soluţie particulară a ecuaţie neomogene folosind rezultatele ce urmează.

forma lui f	x_p	x_p
$f(t)=\sum_{i=0}^{m} b_i t^i$	$P(0)\neq 0$	$P(0)=0$, ... $P^{(s-1)}(0)=0$, $P^{(s)}(0)\neq 0$
	$x_p(t)=\sum_{i=0}^{m}\mu_i t^i$ (Exerciţiul 2.7)	$x_p(t)=t^s\sum_{i=0}^{m}\mu_i t^i$ (Exerciţiul 2.8)
$f(t)=e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m} b_i t^i$	dacă $P(\alpha)\neq 0$	dacă $\begin{cases} P(\alpha)=0, \\ \dots \\ P^{(s-1)}(\alpha)=0, \\ P^{(s)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$
	$x_p(t)=e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}\mu_i t^i$ (Exerciţiul 2.9)	$x_p(t)=t^s e^{\alpha t}\sum_{i=0}^{m}\mu_i t^i$ (Exerciţiu l2.10)
$f(t)=P(t)\cos\beta t+$ $+Q(t)\sin\beta t$	dacă $P(i\beta)\neq 0$ atunci	dacă $\begin{cases} P(i\beta)=0, \\ \dots. \\ P^{(s-1)}(i\beta)=0, \\ P^{(s)}(i\beta)\neq 0 \end{cases}$
$gradP=n$, $gradQ=m$	$x_p(t)=$ $=A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t$ (Exerciţiul 2.11) unde $gradA=$ $=gradB=\max\{m,n\}$	$x_p(t)=$ $=t^s[A(t)\cos\beta t+$ $+B(t)\sin\beta t]$ (Exerciţiul 2.12) unde $gradA=$ $=gradB=\max\{m,n\}$
$f(t)=$ $=e^{\alpha t}[P(t)\cos\beta t+$ $+Q(t)\sin\beta t]$	dacă $P(\alpha+i\beta)\neq 0$ atunci	dacă $\begin{cases} P(\alpha+i\beta)=0, \\ \dots. \\ P^{(s-1)}(\alpha+i\beta)=0, \\ P^{(s)}(\alpha+i\beta)\neq 0 \end{cases}$
$gradP=n$, $gradQ=m$	$x_p(t)=$ $e^{\alpha t}\left[A(t)\cos\beta t+B(t)\sin\beta t\right]$ (Exerciţiul 2.13) , unde $gradA=$ $=gradB=\max\{m,n\}$	$x_p(t)=$ $=t^s e^{\alpha t}[A(t)\cos\beta t+$ $+B(t)\sin\beta t]$ (Exerciţiul 2.14) unde $gradA=$ $=gradB=\max\{m,n\}$

Facem observaţia că P,Q,A,B sunt polinoame de grad care se specifică de fircare dată.

Exerciţiul 2.7 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''-x=t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x_p'(t) = 2at + b, x_p''(t) = 2a$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$2a - at^2 - bt - c = t^2 \Rightarrow a = -1, b = 0, c = -2 \Rightarrow x_p(t) = -t^2 - 2$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 - 2$.▲

Exerciţiul 2.8 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(IV)} - 4x'' = 8t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 0$ este rădăcină de ordin de multiplicitate doi a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) \Rightarrow x_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$, $x_p''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$, $x_p'''(t) = 24at + 6b, x_p^{(IV)}(t) = 24a$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.▲

Exerciţiul 2.9 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - 3x' + 2x = 8t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci

$x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$

$x_p'(t) = 3e^{3t}\left(at^2 + bt + c\right) + e^{3t}\left(2at + b\right)$,

$x_p''(t) = 9e^{3t}\left(at^2 + bt + c\right) + 4e^{3t}\left(2at + b\right) + e^{3t}2a$.

Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.▲

Exerciţiul 2.10 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - 6x' + 9x = t^2 e^{3t}.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ este rădăcină de ordin doi a ecuaţiei caracteristice, deci

$x_p(t) = t^2 e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$

$x_p'(t) = 3e^{3t}\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + e^{3t}\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right),$

$x_p''(t) = 9e^{3t}\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6e^{3t}\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + e^{3t}(12at^2 + 6bt + 2c)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă, simplificăm prin e^{3t} şi obţinem: $9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + (12at^2 + 6bt + 2c) - 18\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) - 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) +$
$+9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}, b = 0, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = -\dfrac{2}{3}t^4.$

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} - \dfrac{2}{3}t^4$.▲

Exerciţiul 2.11 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - 6x' + 9x = 10 \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = a \sin t + b \cos t \Rightarrow x_p'(t) = a \cos t - b \sin t$, $x_p''(t) = -a \sin t - b \cos t$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $-a \sin t - b \cos t - 6(a \cos t - b \sin t) + 9(a \sin t + b \cos t) = 10 \sin t \Rightarrow \begin{cases} 8a + 6b = 10 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = \frac{3}{5}, a = \frac{4}{5}\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \dfrac{4}{5} \sin t + \dfrac{3}{5} \cos t$.▲

Exerciţiul 2.12 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + x = 10 \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate $s = 1$, deci $x_p(t) = t(a \sin t + b \cos t) \Rightarrow x_p'(t) = (a \sin t + b \cos t) + t(a \cos t - b \sin t)$, $x_p''(t) = 2(a \cos t - b \sin t) + t(-a \sin t - b \cos t)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $2(a \cos t - b \sin t) + t(-a \sin t - b \cos t) + t(a \sin t + b \cos t) = 10 \sin t \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 10 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = -\frac{1}{5}, a = 0\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - t\dfrac{1}{5} \sin t$.▲

Exerciţiul 2.13 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + x = 10e^t \sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=i, \lambda_2=-i \Rightarrow x_o(t,c_1,c_2)=c_1\cot s+c_2\sin t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda=1+i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t)=e^t(a\sin t+b\cos t) \Rightarrow x_p'(t)=e^t(a\sin t+b\cos t)+e^t(a\cos t-b\sin t)$, $x_p''(t)=2e^t(a\cos t-b\sin t)+e^t(-a\sin t-b\cos t)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $2e^t(a\cos t-b\sin t)+e^t(-a\sin t-b\cos t)+e^t(a\sin t+b\cos t)=10e^t\sin t \Rightarrow \begin{cases} 2a=0 \\ -2b=10 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b=-\frac{1}{5}, a=0\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t,c_1,c_2)=c_1\cos t+c_2\sin t-e^t\dfrac{1}{5}\sin t$.▲

Exerciţiul 2.14 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''-2x'+2x=10e^t t\sin t.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1+i, \lambda_2=1-i \Rightarrow x_o(t,c_1,c_2)=c_1e^t\cos t+c_2e^t\sin t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda=1+i$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate $s=1$, deci $x_p(t)=te^t((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t) \Rightarrow$

$x_p'(t)=e^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+te^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$te^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)$

$x_p''(t)=2e^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$e^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$te^t\left((at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$e^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left(a\cos t+a\cos t-(at+b)\sin t-m\sin t-m\sin t-(mt+n)\cos t\right)$

Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:

$x''-2x'+2x=2e^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$e^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$te^t\left((at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$e^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right)+$
$te^t\left(a\cos t+a\cos t-(at+b)\sin t-m\sin t-m\sin t-(mt+n)\cos t\right)$
$-2(e^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+te^t\left((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t\right)+$
$te^t\left(a\sin t+(at+b)\cos t+m\cos t-(mt+n)\sin t\right))+$
$2(te^t((at+b)\sin t+(mt+n)\cos t))=$
$2e^ta\sin t+2e^t(\cos t)b-e^t(\sin t)at+2e^tm\cos t-2e^t(\sin t)n+4e^t(\cos t)at-4e^t(\sin t)mt$

$2e^ta\sin t+2e^t(\cos t)b-e^t(\sin t)at+2e^tm\cos t-2e^t(\sin t)n+4e^t(\cos t)at-4e^t(\sin t)mt=10te^t\sin t \Rightarrow b=\frac{5}{2}, m=-\frac{5}{2} \Rightarrow$

Soluţia generală a ecuaţiei date este:
$x(t) = \frac{5}{2}e^t t \cot s - \frac{5}{2}e^t (\sin t)\, t^2 + c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t.$
Următorul exerciţiu este o aplicaţie la principiul superpoziţiei.

Exerciţiul 2.15 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' - 9x = e^{3t}\cos t + te^{-3t} + t^2.$$

Rezolvare. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Utilizând principiul superpoziţiei, notăm $f_1(t) = e^{3t}\cos t$, $f_2(t) = te^{-3t}$, $f_3(t) = t^2$ şi determinăm soluţii particulare ale ecuaţiilor $x'' - 9x = f_i$, $i = 1, 2, 3$. Fie ele x_{p_i}. Atunci $x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3}$.

Considerăm pe rând ecuaţiile: $x'' - 9x = e^{3t}\cos t$, $x'' - 9x = te^{-3t}$, $x'' - 9x = t^2$.

Fie ecuaţia $x'' - 9x = e^{3t}\cos t$. Atunci $x_{p_1}(t) = ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t$. $x'_{p_1}(t) = 3ae^{3t}\cos t - ae^{3t}\sin t + 3be^{3t}\sin t + be^{3t}\cos t$, $x''_{p_1}(t) = 8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t$.
Înlocuim în ecuatia neomogenă si obtinem:
$8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t - 9(ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t)$
$= -ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t \Rightarrow$
$-ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t = e^{3t}\cos t$
$\begin{cases} -a + 6b = 1 \\ -6a - b = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{a = -\frac{1}{37}, b = \frac{6}{37}\right\} \Rightarrow x_{p_1}(t) = -\frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t.$

Considerăm ecuaţia $x'' - 9x = te^{-3t}$. Deoarece $\lambda = -3$ este rădăcină de ordin întâi a polinomului caracteristic, atunci $x_{p_2}(t) = t(ct + d)e^{-3t}$.
$x'_{p_2}(t) = (2ct + d)\, e^{-3t} - 3\,(ct^2 + dt)\, e^{-3t}$, $x''_{p_2}(t) = 2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\, e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\, e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t}$
$2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\, e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\, e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t} - 9((ct^2 + dt)e^{-3t}) = te^{-3t}$
$2ce^{-3t} - 12e^{-3t}ct - 6e^{-3t}d = te^{-3t} \Rightarrow$
$\begin{cases} -12c = 1 \\ 2c - 6d = 0 \end{cases}, \Rightarrow \left\{d = -\frac{1}{36}, c = -\frac{1}{12}\right\} \Rightarrow x_{p_2}(t) = t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t}.$

Considerăm ecuaţia $x'' - 9x = t^2 \Rightarrow x_{p_3}(t) = mt^2 + nt + p$, $x'_{p_3}(t) = 2mt + n$, $x''_{p_3}(t) = 2m$
$2m + 9(mt^2 + nt + p) = t^2 \Rightarrow$
$\begin{cases} 9m = 1 \\ 9n = 0 \\ 2m + 9p = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{n = 0, m = \frac{1}{9}, p = -\frac{2}{81}\right\} \Rightarrow$
$x_{p_3}(t) = \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}.$

Soluţia generală este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t + t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t} + \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$.▲

Etapele de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior cu coeficienţi constanţi sunt:

-determinarea polinomului caracteristic,

-scrierea soluţiei generale a ecuaţiei omogene ţinând seama de natura rădăcinilor polinomului caracteristic,

-determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene fie cu metoda variaţiei constantelor fie, dacă este posibil, utilizând forma particulară a termenului liber,

-sumarea celor două soluţii.

2.5 Ecuaţia liniară de ordinul doi

În acest paragraf, vom expune câteva chestiuni care nu sunt neapărat specifice ecuaţiei liniare de ordinul doi, dar care în acest cadru particular îşi dovedesc utilitatea într-un mod mai evident. Prima dintre ele este **reducerea ordinului ecuaţiei cu o unitate, atunci când se cunoaşte o soluţie particulară care nu se anulează pe intervalul de definiţie.**

Fie ecuaţia

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{I} \tag{2.19}$$

în care coeficienţii p şi q sunt funcţii reale continue pe intervalul $\mathbb{I}$; se presupune $q(t) \not\equiv 0$. Fie $x = x_1(t)$ o soluţie particulară care nu se anulează pe acest interval. Fără a micşora generalitatea se poate presupune $x_1(t) > 0$ pentru $t \in \mathbb{I}$.. Pentru a rezolva problema se face schimbarea de funcţie $z(t) = x_1(t)x(t)$ şi se reduce ordinul ecuaţiei cu o unitate, adică la o ecuaţie de ordin întâi care poate fi rezolvată.

Exerciţiul 2.16 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'' + \frac{1}{t^2}x' - \frac{1}{t^3}x = 0, \quad t > 0$$

care admite soluţia particulară $x_1(t) = t$.

Rezolvare. Făcând substituţia $x(t) = x_1(t)z(t) = tz(t)$, în care $z = z(t)$ va fi noua funcţie necunoscută, găsim, după înlocuirea lui $x'(t) = z(t)+tz'(t)$ şi a $x''(t) = 2z'(t)+tz''(t)$. Înlocuim în ecuatie si obtinem:

$2z'(t) + tz''(t) + \frac{1}{t^2}z(t) + \frac{1}{t^2}tz'(t) - \frac{1}{t^3}tz(t) = 0 \Leftrightarrow tz''(t) + (2 + \frac{1}{t})z'(t) = 0$

Notam $z'(t) = u(t) \Rightarrow tu'(t) + (2 + \frac{1}{t})u(t) = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{2t+1}{t^2}dt \Rightarrow \ln u = -2\ln t + \frac{1}{t} + \ln c_1 \Rightarrow u(t)t^2 = c_1 e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow u(t) = \frac{c_1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow z'(t) = \frac{c_1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \Rightarrow z(t) = -e^{\frac{1}{t}}c_1 + c_2 \Rightarrow x(t) = -te^{\frac{1}{t}}c_1 + c_2 t$.

În continuare, vom arăta **cum poate fi simplificată integrarea ecuaţiei liniare de ordinul doi, în ipoteza că se cunoaşte o soluţie, ce nu se anulează, a aşa numitei ecuaţiei adjuncte.**

Vom defini

$\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$

$\mathcal{L}(x) = x'' + px' + qx.$

Vom face ipoteza suplimentară $p \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Ne propunem să calculăm integrala

$$\int y(t)(Lx)(t)\,dt = \int y(t)[x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t)]\,dt$$

în care $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este o funcţie fixată. Integrând prin părţi, vom obţine

$$\begin{array}{l} \int y\,(t)(\mathcal{L}x)(t)\,dt = y(t)x'(t) - (y'(t) - p(t)y(t))x(t) + \\ + \int x(t)[y''(t) - (p(t)y(t))' + q(t)y(t)]\,dt, \end{array} \tag{2.20}$$

iar dacă notăm cu $\mathcal{L}^*y$ funcţia dată de egalitatea

$$(\mathcal{L}^*y)(t) = y''(t) - (p(t)y(t))' + q(t)y(t)$$

am definit un operator
$\mathcal{L}^* : \mathcal{C}^2(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$,
care se va numi **adjunctul** operatorului $\mathcal{L}$.

În acest caz rezolvarea problemei se face astfel:

- se calculează $\mathcal{L}^*y$.
- se calculează

$$\int (y\mathcal{L}x - x\mathcal{L}^*y)\,dt = yx' - (y' - py)x + c, \tag{2.21}$$

în care c este o constantă arbitrară. Să presupunem acum că $y_1(x) \not\equiv 0$ este o soluţie particulară a ecuaţiei adjuncte $\mathcal{L}^*y = 0$, atunci

$$\int y_1\,\mathcal{L}x\,dt = y_1x' - (y_1' - py_1)x + c.$$

Deoarece căutăm o soluţie a ecuaţiei $\mathcal{L}x = 0$ rezultă că ecuaţia $\mathcal{L}x = 0$ este echivalentă cu

$$y_1x' - (y_1' - p\,y_1)x = c_1 \tag{2.22}$$

în care c_1 este o constantă reală arbitrară. Ecuaţia (2.22) este liniară de ordinul întâi în necunoscuta x şi poate fi scrisă în forma echivalentă

$$x' = \left(\frac{y_1'}{y_1} - p\right)x + \frac{c_1}{y_1} \tag{2.23}$$

care este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară.

- se rezolvă ecuaţia diferenţială de ordinul întâi liniară 2.23 şi vom obţine soluţia generală a ecuaţiei $\mathcal{L}x = 0$ care va depinde de două constante c_1 şi c_2. Luând pe rând $c_2 = 1$ şi $c_1 = 0$, apoi $c_2 = 0$ şi $c_1 = 1$, se obţin două soluţii liniar independente ale ecuaţiei (2.19) şi anume:

$x_1(t) = y_1(t)e^{-\int p(t)\,dt} \neq 0$
şi respectiv
$x_2(t) = \left[\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{\int p(t)\,dt}\,dt\right] y_1(t)e^{-\int p(t)\,dt} = x_1(t)\left[\int \frac{1}{y_1^2(t)} e^{\int p(t)\,dt}\,dt\right].$
Calculăm wronskianul acestor două funcţii $W[t, x_1, x_2] \neq 0$,deci x_1 şi x_2 sunt liniar independente şi putem scrie soluţia generală.♦

Exerciţiul 2.17 Să se rezolve ecuaţia diferenţială

$$x''(t) - 4tx'(t) + (4t^2 - 2)x(t) = 0$$

ştiind că o soluţie particulară a ecuaţiei adjuncte este $y_1(t) = e^{-t^2}$.

Rezolvare. Notam $\mathcal{L}x = x''(t) - 4tx'(t) + (4t^2 - 2)x(t)$.
Calculam $\mathcal{L}^*y$ integrând prin părţi: $\int y\mathcal{L}xdt = \int y(x'' - 4tx' + (4t^2 - 2)x)dt = yx' - \int y'x'dt - 4txy + \int (4ty)'xdt + \int (4t^2 - 2)xdt = yx' - y'x + \int y''xdt - 4txy + \int (4y + 4ty')xdt + \int (4t^2 - 2)yxdt = \int (y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y)xdt + yx' - (y' + 4ty)x$
Rezultă $\int y\mathcal{L}xdt = \int x\mathcal{L}^*ydt + yx' - (y' + 4ty)x$.
Facem în această relatie $y = y_1$ si deoarece $\mathcal{L}^*y_1 = 0$ iar problema este de a determina acel x solutie a lui $\mathcal{L}x = 0$ rezulta $e^{-t^2}x' - (-2te^{-t^2} + 4te^{-t^2})x = c_1 \Rightarrow e^{-t^2}x' - 2te^{-t^2}x = c_1 \Rightarrow (e^{-t^2}x)' = c_1 \Rightarrow e^{-t^2}x = c_1t + c_2 \Rightarrow x(t, c_1, c_2) = e^{t^2}(c_1t + c_2)$.▲

O altă chestiune foarte interesantă relativ la ecuaţia liniară de ordinul doi este aşa numita **problemă cu "condiţii bilocale"**, care se rezolvă cu ajutorul funcţiei lui Green. Considerăm din nou ecuaţia

$$x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = f(t), t \in \mathbb{I} \tag{2.24}$$

în care coeficienţii p, q şi termenul liber f sunt funcţii continue pe intervalul $\mathbb{I}$. Problema care se pune este de a determina solutiile care satisfac două condiţii

$$\begin{array}{l} (1)\ \alpha_1 x'(a) + \alpha_2 x(a) = 0 \\ (2)\ \beta_1 x'(b) + \beta_2 x(b) = 0 \end{array} \tag{2.25}$$

unde $a < b$ sunt două puncte din $\mathbb{I}$ şi unde am presupus

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, |\beta_1| + |\beta_2| > 0.$$

Considerăm ecuaţia omogenă ataşată

$$\mathcal{L}x = x'' + p(t)\,x' + q(t)\,x = 0, t \in \mathbb{I} \tag{2.26}$$

şi vom căuta pentru aceasta soluţii care să satisfacă condiţiile la limite (2.25).
Algoritmul de rezolvare a problemei bilocale.
Rezolvăm ecuaţia omogenă $\mathcal{L}x = 0$ cu condiţiile (2.25).
Sunt posibile numai două cazuri şi anume:

(a) ecuaţia $\mathcal{L}x = 0$ cu condiţiile (2.25) admit numai soluţia banală $x = 0$;

(b) ecuaţia $\mathcal{L}x = 0$ cu condiţiile (2.25) admit şi soluţii nebanale.

Presupunem că suntem în cazul (a): ecuaţia $\mathcal{L}x = 0$ cu condiţiile (2.25) admite numai soluţia banală $x = 0$. Vom considera un sistem fundamental de soluţii x_1, x_2 ale ecuaţiei $\mathcal{L}x = 0$ şi vom alege solutiile astfel:

- x_1 să satisfacă condiţia (2.25)-(1), iar x_2 să satisfacă condiţia (2.25)- (2). Căutăm soluţia problemei noastre cu metoda variaţiei constantelor

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), t \in \mathbb{I}$$

şi ajungem la relaţiile

$$\begin{cases} c_1'(t)\,x_1(t) + c_2'(t)\,x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)\,x_1'(t) + c_2'(t)\,x_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

din care rezultă

$$c_1(t) = c_1^0 + \int_t^b \frac{x_2(s)}{W(s)} f(s)\,ds,\ c_2(t) = c_2^0 + \int_a^t \frac{x_1(s)}{W(s)} f(s)\,ds$$

c_1^0 şi c_2^0 fiind constante arbitrare, care urmează să fie determinate ulterior. Soluţia generală a ecuaţiei $\mathcal{L}x = f$ este

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1^0 x_1(t) + c_2^0 x_2(t) + \\ &+ \int_a^t \tfrac{x_2(t)x_1(s)}{W(s)} f(s)\,ds + \int_t^b \tfrac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)} f(s)\,ds \end{aligned} \tag{2.27}$$

în care $W = W(t, x_1, x_2)$ este wronskianul soluţiilor x_1 şi x_2 ale ecuaţiei $\mathcal{L}x = 0$. Impunând funcţiei $x = x(t)$ să verifice ambele condiţii (2.25), găsim că c_1^0 şi c_2^0 se determină în mod unic şi anume $c_1^0 = c_2^0 = 0$. Prin urmare, în cazul (a) avem soluţie unică pentru ecuaţia (2.24), cu condiţiile la limite (2.25), dată de formula (2.27) în care $c_1^0 = c_2^0 = 0$. Putem scrie

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s)\,ds, t \in [a, b] \tag{2.28}$$

în care funcţia continuă $G = G(t, s)$, numită funcţia lui Green, are următoarea expresie

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{x_2(t)x_1(s)}{W(s)}, & s \le t \\ \\ \frac{x_1(t)x_2(s)}{W(s)}, & s \ge t \end{cases} \tag{2.29}$$

şi este definită pentru $(t, s) \in \mathbb{I} \times \mathbb{I}$.

Presupunem că suntem în cazul (b): ecuaţia $\mathcal{L}x = 0$ cu condiţiile (2.25) admite şi soluţii nebanale. Alegem soluţiile particulare ale ecuatiei $\mathcal{L}x = 0$ astfel:

-$x_1(t)$ să verifice ambele condiţii (2.25) şi lui $x_2(t)$ nu i se impun condiţii la limită, astfel încât $x_1(t)$ şi $x_2(t)$ să fie liniar independente. Evident, soluţia generală a ecuaţiei $\mathcal{L}x = f$ va fi dată tot de formula (2.27) şi impunând lui x condiţia să satisfacă (2.25)-(1), vom găsi din nou $c_2^0 = 0$. Impunând şi condiţia (2.25)-(2), obţinem relaţia

$$\begin{aligned} &c_1^0(\beta_1\, x_1'(b) + \beta_2\, x_1(b)) + \\ &+(\beta_1\, x_2'(b) + \beta_2\, x_2(b)) \int_a^b \tfrac{x_1(s)}{W(s)} f(s)\, ds = 0. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Deoarece paranteza care înmulţeşte pe c_1^0 este nulă, iar paranteza care înmulţeşte integrala este nenulă (spre deosebire de cazul (a)), rezultă că o condiţie necesară şi suficientă ca această relaţie să fie verificată este ca

$$\int_a^b \frac{x_1(s)}{W(s)} f(s)\, ds = 0. \tag{2.31}$$

Condiţia precedentă, pe care trebuie să o satisfacă f pentru ca ecuaţia $\mathcal{L}x = f$ cu condiţiile (2.25) să aibă soluţie, nu depinde în nici un fel de soluţia particulară x_2 a ecuaţiei $\mathcal{L}x = 0$, dacă ne amintim că în expresia wronskianului intră numai coeficientul p al ecuaţiei (2.26). Într-un anumit sens, putem spune că ea este o condiţie de "ortogonalitate" între funcţia f şi soluţiile problemei (2.26)- (2.25). În ipoteza că are loc (2.31), dacă $G(t, s)$ este din nou funcţia definită prin aceeaşi relaţie (2.29) ca şi în cazul (a), putem spune că funcţia

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s)\, ds, t \in [a, b] \tag{2.32}$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei $\mathcal{L}x = f$, satisfăcând ambele condiţii (2.25). Dacă ţinem seama că din relaţia (2.30) nu rezultă nici o restricţie pentru c_1^0, putem scrie mulţimea tuturor soluţiilor problemei (2.24)-(2.25) în forma

$$x(t) = c\, x_1(t) + \int_a^b G(t, s) f(s)\, ds, t \in [a, b] \tag{2.33}$$

în care c este o constantă arbitrară. Putem rezuma cele prezentate mai sus, enunţând

Observaţia 2.3 În cazul ecuaţiei

$$x'' + Q(t)\, x = 0, t \in \mathbb{I}$$

wronskianul a două soluţii oarecare este constant, deci condiţia de ortogonalitate (2.31) se scrie în forma mai simplă

$$\int_a^b x_1(t)\, f(t)\, dt = 0$$

Exerciţiul 2.18 Să considerăm problema

$$x'' + x = f(t), x(0) = 0, x(\pi) = 0. \tag{2.34}$$

Se vede că ecuaţia omogenă $x'' + x = 0$, cu aceleaşi condiţii la limite, are soluţia nebanală $x_1 = \sin t$. Condiţia necesară şi suficientă de compatibilitate este

$$\int_0^\pi f(t) \sin t\, dt = 0$$

Dacă este îndeplinită, luăm $x_2 = \cos t$ şi ţinând seama de (2.27), în care punem $c_2^0 = 0$, găsim că soluţiile problemei (2.34) sunt date de formula

$$x(t) = c\, \sin t - \int_0^t (\cos t\, \sin s)\, f(s)\, ds - \int_t^\pi (\sin t\, \cos s)\, f(s)\, ds$$

în care c este o constantă arbitrară. Desigur, pentru $t \in [0, \pi]$, putem scrie

$$x(t) = c \sin t + \int_0^\pi G(t, s)\, f(s)\, ds$$

unde funcţia G este definită prin

$$G(t, s) = \begin{cases} -\cos t \sin s, & s \leq t \\ -\sin t \cos s, & s \geq t \end{cases}.$$

Capitolul 3

Sisteme diferenţiale liniare de ordinul întâi

3.1 Soluţia generală a unui sistem diferential liniar omogen

Considerăm sistemul diferenţial omogen

$$\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t), t \in \mathbb{I}. \tag{3.1}$$

Notăm cu $\mathbb{V}$ mulţimea soluţiilor sistemului (3.1) definite pe $\mathbb{I}$,
$\mathbb{V} = \left\{\underline{\mathbf{y}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{R}^n), \underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t)\right\}$.

Teorema 3.1 *Mulţimea soluţiilor sistemului (3.1) definite pe* $\mathbb{I}$ *este spaţiu liniar peste* $\mathbb{R}$*, adică* $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ *este spaţiu liniar şi* $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

Observaţia 3.1 Din Teorema 3.1 rezultă că dacă $\underline{\mathbf{y}}^i(t), i = \overline{1, n}$ este o bază în $\mathbb{V}$, orice soluţie $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se exprimă în mod unic ca o combinaţie liniară de elementele bazei, adică $\exists$ $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ unic determinat, astfel încât

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = c_1\underline{\mathbf{y}}^1(t) + c_2\underline{\mathbf{y}}^2(t) + \ldots + c_m\underline{\mathbf{y}}^n(t), \forall t \in \mathbb{I}. \tag{3.2}$$

O problemă importantă în studiul sistemului (3.1) este aceea de a determina cel puţin o bază în mulţimea soluţiilor sistemului. **În general <u>nu</u> se cunosc metode de determinare a unei astfel de baze cu excepţia cazului în care matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este constantă.**

În continuare vom prezenta o metodă de verificare dacă n soluţii ale sistemului (3.1) sunt liniar independente.

Definiţia 3.1 *Fie* $\underline{\mathbf{y}}^i = \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{pmatrix}, i = \overline{1,n}$, *n soluţii ale sistemului liniar omogen (3.1). Matricea*

$$\underline{W}(t) = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \cdots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \cdots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & y_n^2 & \cdots & y_n^n \end{bmatrix}$$

se numeşte **matricea Wronski** *a soluţiilor* $\underline{\mathbf{y}}^i, i = \overline{1,n}$, *iar funcţia scalară*

$$W\left[t, \underline{\mathbf{y}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{y}}^n\right] = \det \underline{W}(t),$$

se numeşte **wronskianul** *soluţiilor precizate.*

Definiţia 3.2 *Sistemul de funcţii* $\underline{\mathbf{y}}^i \in \mathbb{V}, i = \overline{1,n}$ *se numeşte* **sistem fundamental de soluţii** *ale sistemului (3.1) dacă el constituie o bază în* $\mathbb{V}$.

Definiţia 3.3 *Matricea asociată unui sistem fundamental de soluţii ale sistemului (3.1) poartă numele de* **matrice fundamentală** *a sistemului (3.1).*

Observaţia 3.2 Sistemul (3.1) are o infinitate de matrici fundamentale. Aceasta rezută din observaţia că spaţiul soluţiilor sistemului (3.1) are o infinitate de baze.

Dacă $\underline{W}(t)$ este o matrice fundamentală a sistemului (3.1) atunci soluţia generală a sistemului (3.1) este dată de

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = \underline{W}(t)\underline{\mathbf{c}}, \tag{3.3}$$

pentru $\forall t \in \mathbb{I}$ şi $\underline{\mathbf{c}} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2 *(Liouville). Wronskianul a n soluţii particulare ale sistemului (3.1) satisface relaţia:*

$$W\left[t, \underline{\mathbf{y}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{y}}^n\right] = W\left[t_0, \underline{\mathbf{y}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{y}}^n\right] e^{\int_{t_0}^{t} tr\underline{\mathbf{A}}(s)ds}, \forall t, t_0 \in \mathbb{I}. \tag{3.4}$$

Observaţia 3.3 Din Teorema 3.2 rezultă că dacă matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este de ordin n, wronskianul a n soluţii fundamentale ale sistemului liniar omogen este sau identic nul pe $\mathbb{I}$ sau diferit de zero pe acest interval.

Teorema 3.3 *Dacă matricea* $\underline{\mathbf{A}}$ *este de ordin n, atunci soluţiile* $\underline{\mathbf{y}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{y}}^n$ *sunt liniar independente dacă şi numai dacă* $W\left[t, \underline{\mathbf{y}}^1, \ldots, \underline{\mathbf{y}}^n\right] \neq 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Exerciţiul 3.1 *Se consideră sistemul*

$$\left\{\begin{array}{l} y_1' = \dfrac{4}{t}y_1 - \dfrac{4}{t^2}y_2 \\ \\ y_2' = 2y_1 - \dfrac{1}{t}y_2 \end{array}\right. , t \in \mathbb{I} \subset (0, \infty).$$

Să se verifice că funcţiile $\underline{\mathbf{y}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{y}}^2 = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ *formează un sistemi fundamental de soluţii al sistemului dat, să se scrie matricea fundamentală şi să se scrie soluţia generală.*

Rezolvare. Verificăm că $\underline{\mathbf{y}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ este soluţie. Înlocuim întâi în sistem $y_1 = 1, y_2 = t \Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} 0 = \dfrac{4}{t} \cdot 1 - \dfrac{4}{t^2} \cdot t \\ 1 = 2 \cdot 1 - \dfrac{1}{t} \cdot t \end{array}\right.$, deci sistemul este verificat. Analog procedăm pentru $\underline{\mathbf{y}}^2 = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Pentru a arăta ca $\underline{\mathbf{y}}^1, \underline{\mathbf{y}}^2$ sunt soluţii fundamentale ale sistemului dat calculăm wronskianul: $W\left[t, \underline{\mathbf{y}}^1, \underline{\mathbf{y}}^2\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{vmatrix} = -t^3 \neq 0 \Rightarrow$ formează un sistem fundamental de soluţii.

Matricea fundamentală: $\underline{W}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix}$.

Soluţia generală:

$\underline{\mathbf{y}}^1(t, c_1, c_2) = c_1\underline{\mathbf{y}}^1(t) + c_2\underline{\mathbf{y}}^2(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

3.2 Soluţia generală a unui sistem neomogen

Considerăm sistemul liniar neomogen (**??**). Vom prezenta o metodă de determinare a soluţiei generale a sistemului neomogen cu ajutorul soluţiei generale a sistemului liniar omogen ataşat.

Teorema 3.4 *Fie* $\underline{W}(t)$ *o matrice fundamentală a sistemului (3.1) şi fie* $\underline{\mathbf{z}}$ *o soluţie particulară a stemului (**??**). O funcţie* $\underline{\mathbf{y}} : \mathbb{I} \to \mathbb{R}^n$ *este o soluţie generală a sistemului liniar (**??**) dacă şi numai dacă* $\underline{\mathbf{y}}$ *este de forma*

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = \underline{W}(t)\underline{\mathbf{c}} + \underline{\mathbf{z}}(t) \tag{3.5}$$

Considerăm problema Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t) + \underline{\mathbf{b}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t_0) = \underline{\mathbf{y}}_0. \end{array}\right. \tag{3.6}$$

Teorema 3.5 *Dacă $\underline{W}$ este o matrice fundamentală a sistemului omogen (3.1), atunci soluţia problemei Cauchy este dată de formula:*

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{W}(t)\underline{W}^{-1}(t_0)\underline{\mathbf{y}}_0 + \underline{W}(t)\int_{t_0}^{t} \underline{W}^{-1}(s)\underline{\mathbf{b}}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I} \tag{3.7}$$

3.3 Metoda matriceală

Deoarece matricea $e^{t\underline{\mathbf{A}}}$ verifică sistemul (3.1) $\dfrac{d}{dt}(e^{t\underline{A}}) = \underline{A}e^{t\underline{A}} = e^{t\underline{A}}\underline{A}, \forall t \in \mathbb{I}$.

şi $\det e^{t\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$ rezultă că matricea $e^{t\underline{\mathbf{A}}}$ este o matrice fundamentală, deci putem scrie $\underline{W}(t) = e^{t\underline{\mathbf{A}}}$ şi înlocuind în relaţia (3.7) obţinem:

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = e^{t\underline{\mathbf{A}}}e^{-t_0\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{y}}_0 + e^{t\underline{\mathbf{A}}}\int_{t_0}^{t} e^{-s\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{b}}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I}$$

echivalentă cu

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = e^{(t-t_0)\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{y}}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{b}}(s)ds, \forall t \in \mathbb{I}. \tag{3.8}$$

Dacă nu avem date condiţiile iniţiale, soluţia generală este dată de relaţia

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = e^{t\underline{A}}\underline{\mathbf{c}} + e^{t\underline{A}}\int e^{-t\underline{A}}\underline{\mathbf{b}}(t)dt, \forall t \in \mathbb{I}. \tag{3.9}$$

Prin analogie cu formele matricei exponenţiale, reamintim că

I. dacă $\underline{\mathbf{A}}$ este matrice diagonală, $\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{D}}$

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \; e^{t\underline{\mathbf{D}}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

II. dacă $\underline{\mathbf{A}}$ este diagonalizabilă, $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{P}}^{-1}\underline{\mathbf{AP}}$, atunci $e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{P}}e^{t\underline{\mathbf{D}}}\underline{\mathbf{P}}^{-1}$.

III. dacă $\underline{\mathbf{A}}$ este celulă Jordan corespunzătoare valorii proprii λ

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

$$e^{t\underline{\mathbf{J}}_n} = e^{\lambda t\underline{\mathbf{I}}_n + t\underline{\mathbf{E}}_n} = e^{t\lambda}\left[\underline{\mathbf{I}} + \frac{t}{1!}\underline{\mathbf{E}}_n + \frac{t^2}{2!}\underline{\mathbf{E}}_n^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\underline{\mathbf{E}}_n^{n-1}\right] =$$

$$= e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

IV. dacă

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{J}}_1 & & & 0 \\ & \underline{\mathbf{J}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underline{\mathbf{J}}_s \end{pmatrix}, e^{t\underline{\mathbf{J}}} = \begin{pmatrix} e^{t\underline{\mathbf{J}}_1} & & & 0 \\ & e^{t\underline{\mathbf{J}}_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\underline{\mathbf{J}}_s} \end{pmatrix}$$

V. dacă $\underline{\mathbf{A}}$ admite formă Jordan, $\underline{\mathbf{J}} = \underline{\mathbf{P}}^{-1}\underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{P}}$, atunci
$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{P}}e^{t\underline{\mathbf{J}}}\underline{\mathbf{P}}^{-1}$.

Exercițiul 3.2 *Să se determine soluția generală a sistemului diferențial*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 - 2y_4 \\ y_4' = y_1 - 2y_3 + 5y_4 \end{cases}.$$

Rezolvare.
Matricea sistemului este:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este diagonalizabilă, $\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, iar $\underline{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

$$\underline{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{40} & 0 & \frac{3}{20} & -\frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & -\frac{1}{20} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}.$$

Deci

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\mathbf{P}}e^{t\underline{\mathbf{D}}}\underline{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{17}{40} & 0 & \frac{3}{20} & -\frac{1}{40} \\ \frac{1}{40} & 0 & -\frac{1}{20} & \frac{7}{40} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8}+\frac{17}{20}e^t+\frac{1}{40}e^{6t} & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{3}{10}e^t-\frac{1}{20}e^{6t} & -\frac{1}{8}-\frac{1}{20}e^t+\frac{7}{40}e^{6t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8}+\frac{17}{40}e^t-\frac{1}{20}e^{6t} & 0 & \frac{3}{4}+\frac{3}{20}e^t+\frac{1}{10}e^{6t} & \frac{3}{8}-\frac{1}{40}e^t-\frac{7}{20}e^{6t} \\ -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{6t} & 0 & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{6t} & \frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^{6t} \end{pmatrix}.$$

Deci soluţia generală este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}+\frac{17}{20}e^t+\frac{1}{40}e^{6t} & 0 & -\frac{1}{4}+\frac{3}{10}e^t-\frac{1}{20}e^{6t} & -\frac{1}{8}-\frac{1}{20}e^t+\frac{7}{40}e^{6t} \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ -\frac{3}{8}+\frac{17}{40}e^t-\frac{1}{20}e^{6t} & 0 & \frac{3}{4}+\frac{3}{20}e^t+\frac{1}{10}e^{6t} & \frac{3}{8}-\frac{1}{40}e^t-\frac{7}{20}e^{6t} \\ -\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{6t} & 0 & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{6t} & \frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{8}c_1+\frac{17}{20}c_1e^t+\frac{1}{40}c_1e^{6t}-\frac{1}{4}c_3+\frac{3}{10}c_3e^t-\frac{1}{20}c_3e^{6t}-\frac{1}{8}c_4-\frac{1}{20}c_4e^t+\frac{7}{40}c_4e^{6t} \\ e^tc_2 \\ -\frac{3}{8}c_1+\frac{17}{40}c_1e^t-\frac{1}{20}c_1e^{6t}+\frac{3}{4}c_3+\frac{3}{20}c_3e^t+\frac{1}{10}c_3e^{6t}+\frac{3}{8}c_4-\frac{1}{40}c_4e^t-\frac{7}{20}c_4e^{6t} \\ -\frac{1}{8}c_1+\frac{1}{8}c_1e^{6t}+\frac{1}{4}c_3-\frac{1}{4}c_3e^{6t}+\frac{1}{8}c_4+\frac{7}{8}c_4e^{6t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (\frac{1}{8}+\frac{1}{40}e^{6t}+\frac{17}{20}e^t)c_1+(-\frac{1}{4}+\frac{3}{10}e^t-\frac{1}{20}e^{6t})c_3+(-\frac{1}{8}-\frac{1}{20}e^t+\frac{7}{40}e^{6t})c_4 \\ e^tc_2 \\ (-\frac{3}{8}+\frac{17}{40}e^t-\frac{1}{20}e^{6t})c_1+(\frac{3}{4}+\frac{3}{20}e^t+\frac{1}{10}e^{6t})c_3+(\frac{3}{8}-\frac{1}{40}e^t-\frac{7}{20}e^{6t})c_4 \\ (-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}e^{6t})c_1+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{6t})c_3+(\frac{1}{8}+\frac{7}{8}e^{6t})c_4 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 3.3 *Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1+4y_2 \\ y_3' = -2y_1+y_2+2y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matricea $\underline{\mathbf{A}}$ admite formă Jordan şi obţinem

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2te^{2t}+e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & 2te^{2t}+e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Deci soluţia generală este

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^{2t}+e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & 2te^{2t}+e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1te^{2t}+c_1e^{2t}+te^{2t}c_2 \\ -4c_1te^{2t}+2te^{2t}c_2+c_2e^{2t} \\ -2c_1te^{2t}+te^{2t}c_2+e^{2t}c_3 \end{pmatrix}$$

Exerciţiul 3.4 *Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial*

$$\begin{cases} y_1' = y_1+2y_2-3y_3+2e^{2t} \\ y_2' = y_1+y_2+2y_3-2e^{2t} \\ y_3' = y_1-y_2+4y_3+2te^{2t} \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \underline{b}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 2te^{2t} \end{pmatrix}.$$

Calculăm matricea exponenţială

$$e^{t\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2e^{2t}}{2} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} - te^{2t} & 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t} & -3te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} - te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} & 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ te^{2t} & -te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} - \frac{1}{2}t^2e^{2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix}$$

Folosim formula (3.9).

$$e^{-t\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(1+t) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) & \frac{1}{2}te^{-2t}(6+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(2+2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}te^{-2t}(2+t) & \frac{1}{2}e^{-2t}(2-4t-t^2) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \int \begin{pmatrix} e^{-2t}(1+t) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) & \frac{1}{2}te^{-2t}(6+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}e^{-2t}(2+2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{-2t}(4+t) \\ -te^{-2t} & \frac{1}{2}te^{-2t}(2+t) & \frac{1}{2}e^{-2t}(2-4t-t^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \\ 2te^{2t} \end{pmatrix} dt \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t + 3t^2 + \frac{7}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \\ -2t^2 - 2t - \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \\ -t^2 - \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{2t}(-1+t) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) & \frac{1}{2}te^{2t}(-6+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}e^{2t}(2-2t+t^2) & -\frac{1}{2}te^{2t}(-4+t) \\ te^{2t} & \frac{1}{2}te^{2t}(-2+t) & -\frac{1}{2}e^{2t}(-2-4t+t^2) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} c_1 + 2t + 3t^2 + \frac{7}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 \\ c_2 - 2t^2 - 2t - \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \\ c_3 - t^2 - \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 \end{pmatrix}.$$

3.4 Metoda valorilor şi vectorilor proprii

Uneori aplicarea unei formulelor de mai sus pentru găsirea unei matrice fundamentale se poate dovedi un lucru dificil, care poate fi evitat, cel puţin în cazul când ordinul matricei

$\underline{\mathbf{A}}$ nu este prea mare.

Consderăm sistemul difernţial liniar de ordin întâi omogen de forma (3.1),

$$\underline{\mathbf{y}}'(t) = \underline{\mathbf{A}}(t)\underline{\mathbf{y}}(t) \tag{3.10}$$

Vom căuta o soluţie particulară pentru acest sistem de forma

$$\underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda t}, \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.11}$$

în care λ este o constantă ce trebuie aflată, iar $\underline{u}$ este un vector constant de tipul $n \times 1$, dat prin

$${}^t\underline{\mathbf{u}} = [u_1, u_2, \ldots , u_n]$$

Derivând şi înlocuind în sistem, găsim condiţia $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}}$, în care $\underline{\mathbf{I}}$ este matricea unitate de ordinul n, iar $\underline{\mathbf{0}}$ este vectorul nul de tipul $n \times 1$. Pentru a avea soluţii $\underline{\mathbf{u}}$ nebanale, se impune ca $\det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda\underline{\mathbf{I}}) = 0$, adică λ trebuie să fie rădăcină a polinomului caracteristic $P(\lambda)$ al matricei $\underline{\mathbf{A}}$. Fie $\lambda = \lambda_1$ o rădăcină a acestui polinom şi $\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{1}}$ un vector propriu corespunzător, dat prin relaţia

$${}^t[\underline{\mathbf{u}}^1] = [u_1^1, u_2^1, \ldots , u_n^1]$$

Atunci $\underline{\mathbf{u}}^{\mathbf{1}}(t) = \underline{\mathbf{u}}^1 e^{\lambda_1 t}$ este o soluţie a sistemului dat, iar în cazul că $P(\lambda)$ are rădăcini distincte sau matricea admite o bază formată din vectori proprii (**matrice diagonalizabilă**), se găsesc în acest fel n soluţii particulare, care formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul 3.10. Matricea $\underline{W}(t) = [\underline{\mathbf{u}}^1(t), \underline{\mathbf{u}}^2(t), \ldots , \underline{\mathbf{u}}^n(t)]$ este o matrice fundamentală a aceluiaşi sistem. Ilustrăm cu un exerciţiu cele prezentate.

Exerciţiul 3.5 *Reluăm sistemul de la Exerciţiul 3.2:*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_4 \\ y_2' = y_2 \\ y_3' = y_3 - 2y_4 \\ y_4' = y_1 - 2y_3 + 5y_4 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Conform rezultatelor de la Exerciţiul 3.2 matricea $\underline{\mathbf{A}}$ este diagonalizabilă,

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

iar matricea care conţine vectorii proprii este matricea modală

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală a sistemului este:

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{6t} =$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 + 2e^t c_3 + e^{6t} c_4 \\ e^t c_2 \\ 3c_1 + e^t c_3 - 2e^{6t} c_4 \\ c_1 + 5e^{6t} c_4 \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 3.6 *Să se determine soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20$.

$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$, valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3 + i, \lambda_3 = 3 - i$.

Pentru $\lambda_1 = 2 \Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{y}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

$\lambda_2 = 3 + i \Rightarrow \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{(3+i)t} = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+3i \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}(\cos t + i \sin t) =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} e^{3t} + i \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Considerând

$$\underline{\mathbf{y}}_2(t) = \operatorname{Re} \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} e^{3t}$$

şi

$$\underline{\mathbf{y}}_3(t) = \operatorname{Im} \underline{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{3t}, \left(\underline{\mathbf{y}}_1, \underline{\mathbf{y}}_2, \underline{\mathbf{y}}_3\right)$$

formează un sistem fundamental de soluţii, deci soluţia generală este

$$\underline{\mathbf{y}}(t,\underline{\mathbf{c}}) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t - 3\sin t \\ 5\cos t \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos t + 2\sin t \\ 3\cos t + \sin t \\ 5\sin t \end{pmatrix} e^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t}c_1 + e^{3t}c_2\,(2\cos t - \sin t) + e^{3t}c_3\,(\cos t + 2\sin t) \\ e^{3t}c_2\,(\cos t - 3\sin t) + e^{3t}c_3\,(3\cos t + \sin t) \\ e^{2t}c_1 + 5e^{3t}c_2\cos t + 5e^{3t}c_3\sin t \end{pmatrix}.$$

În alte situaţii, când **polinomul caracteristic are rădăcini multiple si matricea nu este diagonalizabila**, se poate întâmpla să nu găsim un sistem fundamental de soluţii de forma "vector constant înmulţit cu $e^{\lambda t}$". În aceste cazuri, pentru autovalorile multiple vom căuta soluţii particulare de forma "vector-polinom înmulţit cu $e^{\lambda t}$". Să presupunem că pentru $\lambda = \lambda_1$ rădăcină cel putin dublă pentru $P(\lambda) = \det(\underline{\mathbf{A}} - \lambda\underline{\mathbf{I}})$ îi corespunde o serie formata dintr-un vector propriu $\underline{\mathbf{u}}$, $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ si un asociat $\underline{\mathbf{u}}^1$. Stim o solutie $\underline{\mathbf{y}}^1 = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda_1 t}$. Căutam doua soluţie de forma

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{a}}t + \underline{\mathbf{b}})e^{\lambda_1 t}$$

în care $\underline{\mathbf{a}}$ şi $\underline{\mathbf{b}}$ sunt vectori constanţi de tipul $n \times 1$, găsim după derivare şi înlocuire în $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, condiţiile

$$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0},\ \ (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}}.$$

Din prima condiţie, se vede că putem lua $\underline{\mathbf{a}}= \underline{\mathbf{u}}$, vectorul propriu iar soluţia sistemului $(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{u}}$, în care necunoscuta este $\mathbf{b}$, este vectorul propriu asociat lui $\underline{\mathbf{u}}$, pe care l-am notat $\underline{\mathbf{u}}^1$. Putem afirma că

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{u}}t + \underline{\mathbf{u}}^1)e^{\lambda_1 t}$$

este soluţia căutată. Dacă $\lambda = \lambda_1$ este rădăcină cel putin triplă pentru $P(\lambda)$ şi îi corespunde o serie de lungime trei formata dintr-un vector propriu si doi asociati, $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{u}}^1, \underline{\mathbf{u}}^2$. Stim doua solutii, $\underline{\mathbf{y}}^1(t) = \underline{\mathbf{u}}e^{\lambda_1 t}$ si $\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{u}}t + \underline{\mathbf{u}}^1)e^{\lambda_1 t}$ vom căuta a teia soluţie de forma

$$\underline{\mathbf{y}}^2 = (\underline{\mathbf{a}}t^2 + \underline{\mathbf{b}}t + \underline{\mathbf{c}})e^{\lambda_1 t}$$

în care $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ şi $\underline{\mathbf{c}}$ sunt vectori constanţi de tipul $n \times 1$. După derivare şi înlocuire în sistem, găsim

$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \Rightarrow \underline{\mathbf{a}}\ = \underline{\mathbf{u}}$

$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{b}} = 2\underline{\mathbf{a}} \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}}) = \underline{\mathbf{a}} \Rightarrow \frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{u}}^1 \Rightarrow \underline{\mathbf{b}} = 2\underline{\mathbf{u}}^1,$

$(\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{b}} \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} - \lambda_1\underline{\mathbf{I}})(\frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{b}} \Rightarrow \frac{1}{2}\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{u}}^2 \Rightarrow \underline{\mathbf{c}} = 2\underline{\mathbf{u}}^2$

de unde rezulta ca

$$\underline{\mathbf{y}} = (\underline{\mathbf{u}}t^2 + 2\underline{\mathbf{u}}^1 t + 2\underline{\mathbf{u}}^2)e^{\lambda_1 t}$$

este soluţia sistemului $\underline{\mathbf{y}}' = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{y}}$, căutată de noi. Vom ilustra metoda prezentată pe un exemplu concret.

Exerciţiul 3.7 *Reluăm sistemul de la Exerciţiul 3.3*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -4y_1 + 4y_2 \\ y_3' = -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases}.$$

Rezolvare.

Matricea sistemului este

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$

Baza Jordan este formată dintr-o serie de lungime doi şi una de lungime unu

$$\underline{\mathbf{u}}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Corespunzător seriei de lungime doi avem solutiile

$$\underline{\mathbf{y}}^1(t) = \underline{\mathbf{u}}_1^1 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$\underline{\mathbf{y}}^2(t) = (\underline{u}_1^1 t + \underline{u}_2^1)e^{2t} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{2t},$$

iar pentru seria de lungime unu avem solutia

$$\underline{\mathbf{y}}^3(t) = \underline{\mathbf{u}}_1^2 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

deci

Soluţia generală este

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \underline{\mathbf{c}}) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} (t+1) + c_3 e^{2t} \\ 2e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} (2t+2) + 2c_3 e^{2t} \\ e^{2t} c_1 + c_2 e^{2t} t \end{pmatrix}.$$

Vom prezenta o metodă mai mult formală pentru rezolvarea sistemelor diferenţiale cu coeficienti constanti, omogne sau neomogene. Pentru a simplifica modul de rezolvare a acestor sisteme diferenţiale introducem operatorul D ca o notaţie prescurtată pentru derivare

$D^n x \stackrel{def}{=} \frac{d^n x}{dx^n}$.

La fel

$\frac{1}{D^n} x \stackrel{def}{=} n$ integrale$\int \int ... \int x(t_1, t_2, ..., t_n) dt_1 dt_2 ... dt_n$

astfel încât

$D^n \left\{ \frac{1}{D^n} x \right\} = x$.

O ecuaţie diferenţială de ordin n

$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)x'(t) + a_n(t)x(t) = f(t)$
poate fi scrisă cu ajutorul operatorului D de forma
$(D^n x + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)x = f.$
Operatorul D satisface regulile algebrei.
Analog un sistem diferenţial de forma
$\begin{cases} 3x' + x + y' + 2y = f_1 \\ x' + 4x + y'' + y' = f_2 \end{cases}$
poate fi scris astfel

$$\begin{cases} (3D+1)x + (D+2)y = f_1 \\ (D+4)x + (D^2+D)y = f_2 \end{cases} . \tag{3.12}$$

Ideea metodei consta în a elimina x şi a obţine o ecuaţie diferenţială în y care poate fi rezolvata cu metodele cunoscute de la ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi. Pentru a elimina x înmulţim ecuaţia întâi din sistemul 3.12 cu $D^2 + D$ iar a doua ecuaţie din sistemul 3.12 cu $-(D+2)$ şi le adunăm. Obţinem
$(D^2 + D)(3D + 1)x - (D + 4)(D + 2)x = (D^2 + D)f_1 - (D + 2)f_2$
$3D^3x + 3D^2x - 5Dx - 8x = D^2 f_1 + Df_1 - Df_2 - 2f_2$
care se rezolva ca o ecuaţie de ordin trei cu coeficienţi constanţi. În mod analog se obţine o ecuaţie în y. Ca exemple de rezolvare prin această metodă prezentăm exerciţiile de mai jos.

Exerciţiul 3.8 *Să se afle soluţia generală a sistemului:*
$\begin{cases} x' - x + 2y = 0 \\ x'' - 2y = 2t - \cos 2t \end{cases} .$

Rezolvare. Scriem sistemul sub forma
$\begin{cases} (D-1)x + 2y = 0 \\ D^2x - 2Dy = 2t - \cos 2t \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} D(D-1)x + 2Dy = 0 \\ D^2x - 2Dy = 2t - \cos 2t \end{cases} \Leftrightarrow$
$(2D^2 - D)x = 2t - \cos 2t \Leftrightarrow$
$2x'' - x' = 2t - \cos 2t$
$x(t, C_1, C_2) = -t^2 + \frac{1}{34}\sin 2t - 4t - 8 + \frac{2}{17}\cos 2t + C_1 + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$
Din a doua ecuaţie obţinem $2y = 2t - \frac{1}{17}\cos 2t + 4 - \frac{9}{34}\sin 2t - \frac{1}{2}C_2 e^{\frac{1}{2}t} + t^2 - C_1 \Rightarrow$
$y(t, C_1, C_2) = t - \frac{1}{34}\cos 2t + 2 - \frac{9}{68}\sin 2t - \frac{1}{4}C_2 e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}C_1$

Exerciţiul 3.9 *Să se afle, prin metoda eliminării, soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \end{cases} .$$

Rezolvare.

Fixăm prima ecuaţie pe care o derivăm de două ori, iar ecuaţiile doi şi trei le derivăm o dată.

$$\begin{cases} (D-2)y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 + (-D+3)y_2 - y_3 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 + (-D+3)y_3 = 0 \end{cases}.$$

Eliminăm y_2 din ecuatiile doi si trei

$$\begin{cases} -(D^2-5D+5)y_1 - y_3 = 0 \\ (2D-5)y_1 - (D-3)y_3 = 0 \end{cases}$$

Eliminăm y_3 din ecuaţia a doua

$(2D-5)y_1 + (D-3)(D^2-5D+5)y_1 = 0 \Leftrightarrow$

$(D^3 - 8D^2 + 22D - 20)y_1 = 0$ sau

$y_1''' - 8y_1'' + 22y_1' - 20y_1 = 0 \Rightarrow$

$y_1(t, C_1, C_2, C_3) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}\cos t + C_3e^{3t}\sin t$

$y_3(t, C_1, C_2, C_3) = -y_1'' + 5y_1' - 5y_1 = C_1e^{2t} + 2C_2e^{3t}\cos t + 2C_3e^{3t}\sin t + C_2e^{3t}\sin t - C_3e^{3t}\cos t$

$y_2(t, C_1, C_2, C_3) = y_1' - 2y_1 = C_2e^{3t}\cos t + C_3e^{3t}\sin t - C_2e^{3t}\sin t + C_3e^{3t}\cos t$