Setul de probleme 1

soluţiile se primesc
miercuri 7 noiembrie între orele 12 şi 14, la cabinetul C-402

29 octombrie 2012

Problema 1. Fie $G = (V, E)$ un graf cu $V = \{1, \ldots, n\}$. Considerăm funcţia $f : V \to V$ definită de

$$f(v) = \min\{u|u \in V, d_G(v, u) \leq 2\}.$$

a) Demonstraţi că dacă există $vw \in E(G)$ astfel încât $f(v) \neq f(w)$ atunci G conţine graful P_4 ca subgraf indus.
b) Demonstraţi că dacă G este P_4-free atunci două vârfuri oarecare u şi v sunt în aceeaşi componentă conexă dacă şi numai dacă $f(u) = f(v)$.

(**2+2 = 4 puncte**)

Problema 2. Numim **graf bicolor** perechea (G, m), unde $G = (V(G), E(G))$ este un graf, iar $m : E(G) \to \{alb, verde\}$ este o funcţie care asociază fiecărei muchii $e \in E(G)$ o culoare $m(e) \in \{alb, verde\}$. Graful bicolor (G, m) este **verzui** dacă *în orice circuit al lui G numărul muchiilor verzi este par.*

a) Demonstraţi că dacă (K_n, m) este verzui atunci există mulţimile A şi B de vârfuri astfel încât $V(K_n) = A \dot{\cup} B$ (reuniune disjunctă) şi pentru orice muchie $e = uv \in E(K_n)$ avem:

$$m(e) = \begin{cases} alb & \text{dacă } u, v \in A \text{ sau } u, v \in B \\ verde & \text{altfel.} \end{cases}$$

b) Demonstraţi că dacă (G, m) este verzui şi $n = |G|$ atunci se pot adăuga muchii grafului G, extinzând colorarea m la aceste noi muchii, astfel încât să obţinem graful bicolor verzui (K_n, m).

c) Descrieţi un algoritm care primind la intrare graful bicolor (G, m) determină în timpul $O(|V(G)| + |E(G)|)$ dacă este sau nu verzui.

(**2+2+2 = 6 puncte**)

Problema 3. Există aplicaţii în care se dă un digraf $G = (V, E)$ şi $a : E(G) \to \mathbf{R}_+$ şi trebuie să răspundem repetat la întrebări de tipul: *Care este drumul minim dintre s şi t?* $(s, t \in V(G), s \neq t)$

Pentru situaţia când G este un digraf mare, se propune aplicarea algoritmului lui Dijkstra (costurile fiind nenegative) dar **bidirecţional**: se construieşte G' inversul lui G, în care orice arc $(i, j) \in E(G')$ are costul $a'_{ij} = a_{ji}$; se aplică apoi succesiv câte un pas al algoritmului lui Dijkstra pentru G, s şi functia de cost a şi apoi un pas pentru G', t şi funcţia de cost a'; la depistarea unui vârf u marcat definitiv (introdus în S) de cele două instanţe ale algoritmului lui Dijkstra, se transformă drumul de la t la u din G' depistat de a doua instanţă într-un drum D_1 în G de la u la t, şi se returnează drumul de la s la u depistat de prima instanţă si drumul D_1.

Daţi un contraexemplu pentru algoritmul propus!

(**2 puncte**)

Problema 4. Un *graf interval* este definit de o mulţime finită şi nevidă de intervale de pe axa reală. Pentru fiecare interval avem un vârf în graful interval şi două vârfuri sunt adiacente dacă intervalele corespunzătoare lor au intersecţia nevidă.

Descrieţi un algoritm care primind la intrare n intervale (închise) cu extremităţile numere întregi din intervalul $[1..2n]$ determină în timpul $O(n)$ componentele conexe ale grafului interval definit de acestea.

(**2 puncte**)

Precizări

1. Este încurajată asocierea în echipe formate din 2 studenţi care să realizeze în comun tema.
2. Depistarea unor soluţii copiate între echipe diferite conduce la anularea punctajelor tuturor acestor echipe.
3. Nu e nevoie să se rescrie enunţul problemelor. Nu uitaţi să treceţi numele şi grupele din care fac parte membrii echipei la începutul lucrarii.
4. Este încurajată redactarea latex a soluţiilor.
5. Nu se primesc soluţii prin e-mail.