Cursul 9

Ecuaţii liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi

§1 Ecuaţii omogene. Considerăm ecuaţia de ordinul n liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t) = 0, \qquad \text{(E.L.O*)}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$; vom arăta că determinarea unui sistem fundamental de soluţii se reduce la rezolvarea ecuaţiei polinomiale

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0. \qquad (1)$$

Să observăm, pentru început, că o funcţie de forma $y(t) = e^{\lambda t}$ verifică ecuaţia (E.L.O*) dacă şi numai dacă

$$(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda t} = 0,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, adică dacă şi numai dacă $P(\lambda) = 0$. Din acest motiv ecuaţia polinomială (1) se numeşte *ecuaţia caracteristică* ataşată ecuaţiei (E.L.O*), $P(\lambda)$ se numeşte *polinomul caracteristic* ataşat ecuaţiei, iar rădăcinile sale se numesc *rădăcini caracteristice*.

Mai mult, să observăm că şi în cazul unei rădăcini caracteristice complexe, $\lambda \in \mathbb{C}$, funcţia $z(t) = e^{\lambda t}$ verifică ecuaţia (E.L.O*) considerată pentru funcţii de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{C}$, deoarece şi în acest caz avem

$$z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n z(t) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n)e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t} = 0.$$

Deoarece coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt reali, rezultă imediat că atât partea reală, cât şi partea imaginară a funcţiei $z(t) = e^{\lambda t}$ verifică exact aceeaşi ecuaţie, şi am arătat astfel că, dacă $\lambda = a + ib$ cu $b \neq 0$ este o rădăcină caracteristică, atunci funcţiile

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\, e^{(a+ib)t} = e^{at}\cos bt$$

şi

$$y_2(t) = \mathrm{Im}\, e^{(a+ib)t} = e^{at}\sin bt$$

sunt soluţii ale ecuaţiei (E.L.O*).

Aceste observaţii ne permit ca, în cazul în care polinomul caracteristic are numai rădăcini simple, să determinăm exact n soluţii ale ecuaţiei (E.L.O*) care, conform teoremei următoare, formează un sistem fundamental de soluţii. Teorema precizează şi ce se întâmplă în cazul rădăcinilor multiple.

Teorema de generare a unui sistem fundamental de soluţii. *Presupunem că am reuşit să determinăm toate rădăcinile polinomului caracteristic ataşat ecuaţiei* (E.L.O*). *Atunci, ataşând fiecărei rădăcini reale $\lambda \in \mathbb{R}$, de multiplicitate m, funcţiile*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t},$$

şi ataşând fiecărei perechi de rădăcini complexe conjugate $\lambda_{1,2} = a \pm ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, de multiplicitate m, funcţiile

$$e^{at}\cos bt,\ te^{at}\cos bt,\ t^2e^{at}\cos bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\cos bt,$$

şi

$$e^{at}\sin bt,\ te^{at}\sin bt,\ t^2e^{at}\sin bt,\ \ldots,\ t^{m-1}e^{at}\sin bt,$$

obţinem un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (E.L.O*).

Demonstraţie. Deoarece polinomul caracteristic are coeficienţi reali, rădăcinile din $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ apar în perechi complex conjugate, şi cum suma multiplicităţilor tuturor rădăcinilor este n, deducem imediat că în urma aplicării procedeului din enunţul teoremei se obţine un sistem format din exact n funcţii, notat în continuare cu

$$\mathcal{F} = \{y_1(t),\ y_2(t),\ \ldots,\ y_n(t)\}.$$

Vom arăta că elementele lui $\mathcal{F}$ formează un sistem de generatori pentru spaţiul vectorial $\mathcal{S}_n$ al soluţiilor ecuaţiei omogene (E.L.O*). În acest caz, deoarece $\dim(\mathcal{S}_n) = n$, va rezulta că $\mathcal{F}$ formează o bază în $\mathcal{S}_n$, adică un sistem fundamental de soluţii.

Ştim că, prin intermediul transformării

$$x_1 = y,\ x_2 = y',\ \ldots, x_n = y^{(n-1)}$$

ecuaţia (E.L.O*) este echivalentă cu sistemul liniar omogen

$$x'(t) = Ax(t), \tag{S.L.O*}$$

cu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Sistemul de mai sus având coeficienţii constanţi, soluţia sa generală este dată de formula

$$x(t) = e^{tA}c,$$

cu c un vector coloană format din n constante arbitrare. Rezultă că $y = x_1(t)$, prima componentă a vectorului $x = x(t)$, este o combinaţie liniară a componentelor aflate pe prima linie în matricea e^{tA}. Am arătat astfel că orice soluţie a ecuatiei (E.L.O*), $y \in \mathcal{S}_n$, este o combinaţie liniară de componente din e^{tA}.

Să observăm acum, prin calcul direct, dezvoltând determinantul după ultima linie, că polinomul caracteristic ataşat matricei A, $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ are forma

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n,$$

adică el coincide cu polinomul $P(\lambda)$ ataşat ecuaţiei (E.L.O*) şi, prin urmare, rădăcinile caracteristice ataşate matricei A sunt exact cele ataşate ecuaţiei omogene (E.L.O*), cu aceleaşi ordine de multiplicitate. Din teorema de structură a matricei e^{tA} urmează atunci că fiecare componentă a sa este o combinaţie liniară de funcţii din $\mathcal{F}$.

Am arătat că $\mathcal{F}$ este un sistem de generatori format din n elemente al spaţiului liniar n dimensional $\mathcal{S}_n$ şi, prin urmare, este o bază în acest spaţiu.

Exemplu. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y^{\mathrm{v}} + 3y^{\mathrm{iv}} + 5y''' + 5y'' + 3y' + y = 0. \tag{2}$$

Rezolvare. Ataşăm ecuaţia caracteristică

$$P(\lambda) = \lambda^5 + 3\lambda^4 + 5\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0,$$

care este o ecuaţie reciprocă de grad 5, prin urmare admite rădăcina $\lambda_1 = -1$. După împărţirea la $\lambda + 1$, cu schema lui Horner, bineînţeles, se obţine o ecuaţie reciprocă de grad 4 care se rezolvă cu substituţia $\mu = \lambda + \frac{1}{\lambda}$. În final, avem descompunerea

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)^2.$$

Aplicăm algoritmul de generare a unui sistem fundamental de soluţii:

Rădăcina reală $\lambda_1 = -1$ are multiplicitatea $m = 1$, ea generează soluţia

$$y_1(t) = e^{-t}.$$

Perechea de rădăcini complexe conjugate $\lambda_{2,3} = \lambda_{4,5} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ are $m = 2$ şi generează soluţiile

$$y_2 = e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_3 = te^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_4 = e^{-\frac{t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ y_5 = te^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Obţinem soluţia generală a ecuaţiei (2) sub forma

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \left((c_2 + c_3 t) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + (c_4 + c_5 t) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

§2 Ecuaţii neomogene. Fie $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ şi $f \in C^0(\mathbb{I})$ o funcţie continuă pe $\mathbb{I}$, cu valori reale sau complexe. Ecuaţiei liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t), \tag{E.L.N*}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, îi ataşăm ecuaţia omogenă corespunzătoare

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0, \tag{E.L.O*}$$

şi *operatorul diferenţial* $L : C^n(\mathbb{I}) \to C^0(\mathbb{I})$ definit prin

$$(Ly)(t) = y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n y(t),$$

pentru orice $y \in C^n(\mathbb{I})$. Cu ajutorul acestuia ecuaţia (E.L.N*) poate fi scrisă sub forma operatorială

$$Ly = f,$$

cu $y \in C^n(\mathbb{I})$.

Aici am notat cu $C^n(\mathbb{I})$ unul din spaţiile $C^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ sau $C^n(\mathbb{I}, \mathbb{C})$, după cum considerăm cadrul de lucru.

Este uşor de văzut că operatorul L este liniar, iar spaţiul liniar $\mathcal{S}_n$ al soluţiilor ecuaţiei (E.L.O*) este chiar nucleul acestuia

$$\mathcal{S}_n = \operatorname{Ker} L \subset C^n(\mathbb{I}).$$

Ştim că, după aflarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă (E.L.O*), rezolvarea ecuaţiei neomogene se reduce la aflarea unei soluţii particulare $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ pentru (E.L.N*). Aceasta poate fi aflată, pentru orice funcţie continuă f, prin metoda variaţiei constantelor. Totuşi, dacă f este un cvasipolinom, adică o funcţie de forma

$$f(t) = e^{at}(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt)$$

cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ funcţii polinomiale în variabila t, se poate determina o soluţie particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ căutând-o tot sub forma unui cvasipolinom, după cum vom justifica în continuare.

Să observăm că L aplicat unei funcţii de forma $y(t) = t^k e^{\lambda t}$ are ca rezultat

$$(Ly)(t) = (t^k e^{\lambda t})^{(n)} + a_1(t^k e^{\lambda t})^{(n-1)} + \cdots + a_n t^k e^{\lambda t} = P_k(t)e^{\lambda t},$$

unde $P_k(t)$ este un polinom de grad mai mic sau egal decât k. Din liniaritatea lui L urmează imediat că L aplicat unei funcţii de forma $y(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ cu $Q(t) = b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \cdots + b_k$ are ca rezultat tot o funcţie de forma $P_k(t)e^{\lambda t}$.

Aceste considerente ne sugerează ca, în cazul în care termenul liber al ecuaţiei (E.L.N*) are forma

$$f(t) = P_k(t)e^{\lambda t} \tag{3}$$

cu $P_k(t)$ un polinom de grad k, să căutăm o soluţie particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ tot de aceeaşi formă, adică

$$\tilde{y}(t) = Q_h(t)e^{\lambda t}$$

cu $Q_h(t)$ un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi având gradul h "suficient de mare".

Mai precis, se poate demonstra că totdeauna există o astfel de soluţie particulară de forma

$$\tilde{y}(t) = t^m Q_k(t)e^{\lambda t} \tag{4}$$

unde m este ordinul de multiplicitate al lui λ în ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei omogene (E.L.O*), iar $\operatorname{grad} Q_k = k = \operatorname{grad} P_k$. Aici se consideră că $m = 0$ dacă λ nu este rădăcină caracteristică.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$y'' - 4y = (8t + 6)e^{2t}. \tag{5}$$

Rezolvare. Ecuaţia diferenţială liniară omogenă corespunzătoare

$$Ly = y'' - 4y = 0,$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -2$ şi $\lambda_2 = 2$, deci soluţia sa generală este

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t}$$

Deoarece termenul liber
$$f(t) = (8t + 6)e^{2t}$$
este de forma $f(t) = P_1(t)e^{\lambda t}$ cu $\lambda = 2$ rădăcină caracteristică cu multiplicitatea $m = 1$, vom căuta soluţia particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ sub forma
$$\tilde{y}(t) = t(At + B)e^{2\lambda}.$$
Derivând şi introducând în ecuaţie se obţine
$$L\tilde{y} = \tilde{y}'' - 4\tilde{y} = \big(8At + (2A + 4B)\big)e^{2t},$$
de unde, prin identificarea coeficienţilor, rezultă sistemul triunghiular
$$\begin{cases} 8A & = 8 \\ 2A + 4B & = 6, \end{cases}$$
cu soluţia $A = 1$, $B = 1$.

Am găsit
$$\tilde{y}(t) = t(t + 1)e^{2\lambda t},$$
şi, în consecinţă, soluţia generală a ecuaţiei (5) este
$$y_{S.G.N} = y_{S.G.O}(t) + \tilde{y}_{S.P.N}(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + t(t + 1)e^{2\lambda t}.$$

Toată discuţia de până acum este valabilă şi în $C^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, şi în $C^n(\mathbb{I}, \mathbb{C})$. Să observăm că, deoarece coeficienţii a_i sunt reali, operatorul diferenţial L are proprietatea
$$\begin{aligned} Ly = L(u + iv) &= (u + iv)^{(n)} + a_1(u + iv)^{(n-1)} + \cdots + a_n(u + iv) \\ &= u^{(n)} + iv^{(n)} + a_1(u^{(n-1)} + iv^{(n-1)}) + \cdots + a_n(u + iv) \\ &= Lu + iLv, \end{aligned}$$
pentru orice $y = u + iv \in C^n(\mathbb{I}, \mathbb{C})$, adică
$$\operatorname{Re} Ly = L\operatorname{Re} y \;\text{ şi }\; \operatorname{Im} Ly = L\operatorname{Im} y,$$
pentru orice $y \in C^n(\mathbb{I}, \mathbb{C})$. Prin urmare, din $Ly = f(t)$ rezultă
$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} Ly = L\operatorname{Re} y,$$
adică, dacă $y = y(t)$ este o soluţie a ecuaţiei (E.L.N*) cu termenul liber $f(t)$, atunci partea reală a sa este o soluţie a ecuaţiei (E.L.N*) cu termenul liber $\operatorname{Re} f(t)$.

Să observăm că pentru $f(t)$ de forma (3) cu $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, avem
$$\operatorname{Re} f(t) = \operatorname{Re} P_k(t)e^{(a+ib)t} = e^{at}\big(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt\big)$$
cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali. Analog, pentru $y = \tilde{y}(t)$ de forma (4) avem
$$\operatorname{Re} \tilde{y}(t) = \operatorname{Re} t^mQ_k(t)e^{(a+ib)t} = t^me^{at}\big(Q_k^1(t)\cos bt + Q_k^2(t)\sin bt\big)$$

cu $Q_k^1(t)$ şi $Q_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali.

În concluzie, considerând numai soluţii cu valori reale, dacă termenul liber are forma

$$f(t) = e^{at}(P_k^1(t)\cos bt + P_k^2(t)\sin bt) \tag{6}$$

cu $P_k^1(t)$ şi $P_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali de grad mai mic sau egal cu k, atunci ecuaţia (E.L.N*) admite o soluţie particulară de forma

$$\tilde{y}(t) = t^m e^{at}\big(Q_k^1(t)\cos bt + Q_k^2(t)\sin bt\big) \tag{7}$$

cu $Q_k^1(t)$ şi $Q_k^2(t)$ polinoame cu coeficienţi reali de grad cel mult k, unde m este ordinul de multiplicitate al numărului complex $\lambda = a+ib$ în ecuaţia caracteristică.
Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$y'' - y = -2t\sin t. \tag{8}$$

Rezolvare. Ecuaţia omogenă

$$y'' - y = 0,$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 1$, deci soluţia sa generală este

$$y_{S.G.O}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t.$$

Termenul liber

$$f(t) = -2t\sin t$$

este un cvasipolinom de forma (6), cu numărul complex ataşat $\lambda = a + bi = i$ şi cu gradul maxim $k = 1$. Deoarece $\lambda = i$ nu este rădăcină caracteristică, avem $m = 0$. Căutăm soluţia particulară $y = \tilde{y}_{S.P.N}(t)$ sub forma (7) care devine

$$\tilde{y}(t) = (At + B)\sin t + (Ct + D)\cos t.$$

Efectuând calculele necesare, obţinem

$$(L\tilde{y})(t) = \tilde{y}''(t) - \tilde{y}(t) = (-2At - 2B - 2C)\sin t + (-2Ct - 2D + 2A)\cos t,$$

de unde, prin identificarea coeficienţilor, obţinem sistemul

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ -2B - 2C = 0 \\ -2C = 0 \\ -2D + 2A = 0, \end{cases}$$

cu soluţia $A = D = 1$ şi $B = C = 0$. Am găsit soluţia particulară

$$\tilde{y}(t) = t\sin t + \cos t,$$

astfel că soluţia generală a ecuaţiei (8) are forma

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + t\sin t + \cos t,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

§3 Ecuaţii Euler. Ecuaţia

$$t^n y^{(n)} + a_1 t^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t), \qquad \text{(E. Euler)}$$

cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, numită *ecuaţia lui* EULER se transformă într-o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi prin *schimbarea de argument* $t = e^s$.

Definim $\tilde{y}(s) = y(e^s)$ pentru orice $s \in \mathbb{R}$. Din echivalenţa

$$t = e^s = t(s) \;\Leftrightarrow\; s = \ln t = s(t),$$

rezultă $\tilde{y}(s(t)) = \tilde{y}(\ln t) = y(t)$ pentru orice $t > 0$.

Derivatele lui y în raport cu t le vom calcula "prin s", ţinând cont că

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{t} = t^{-1}.$$

Avem

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\frac{1}{t} = t^{-1}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t)).$$

Mai departe:

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{-1}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right) = -t^{-2}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t)) + t^{-1}\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t))\frac{ds}{dt}(t) =$$

$$= t^{-2}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right).$$

Încă un pas:

$$\frac{d^3y}{dt^3}(t) = \frac{d}{dt}\left(t^{-2}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right)\right) =$$

$$-2t^{-3}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right) + t^{-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) - \frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right)\frac{ds}{dt} =$$

$$= t^{-3}\left(\frac{d^3\tilde{y}}{ds^3}(s(t)) - 3\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2}(s(t)) + 2\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right).$$

Se poate arăta, prin inducţie, că există constantele α_{jk} astfel încât

$$\frac{d^ky}{dt^k}(t) = t^{-k}\left(\alpha_{1k}\frac{d^k\tilde{y}}{ds^k}(s(t)) + \alpha_{2k}\frac{d^{k-1}\tilde{y}}{ds^{k-1}}(s(t)) \cdots + \alpha_{kk}\frac{d\tilde{y}}{ds}(s(t))\right),$$

pentru orice $k \geq 1$. Este clar că, înlocuind în ecuaţia (E. Euler) produsele $t^k\dfrac{d^ky}{dt^k}$ cu combinaţii liniare de derivate $\dfrac{d^h\tilde{y}}{ds^h}$, obţinem o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi în funcţia necunoscută $\tilde{y}(s)$, având termenul liber $\tilde{f}(s) = f(e^s)$. După rezolvarea acesteia obţinem soluţia generală sub forma

$$\tilde{y}(s) = c_1\varphi_1(s) + \cdots + c_n\varphi_n(s) + \tilde{\varphi}_{SPN}(s)$$

şi revenim în argumentul t astfel

$$y(t) = \tilde{y}(s(t)) = \tilde{y}(\ln t) = c_1\varphi_1(\ln t) + \cdots + c_n\varphi_n(\ln t) + \tilde{\varphi}_{SPN}(\ln t),$$

pentru orice $t > 0$.

Observaţie. Consideraţii analoage arată că şi ecuaţiile de forma

$$(\alpha t + \beta)^n y^{(n)} + (\alpha t + \beta)^{n-1} a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(t),$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sunt reductibile la ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare cu coeficienţi constanţi.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$(t+3)^3 y''' + (t+3)y' - y = 3(t+3)^4. \tag{9}$$

Rezolvare. Efectuăm substituţia $t + 3 = e^s \Leftrightarrow s = \ln(t + 3)$. Derivatele în raport cu t le notăm cu prim iar pe cele în raport cu s le notăm cu punct. Avem

$$s' = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{t+3} = (t+3)^{-1}$$

şi prin urmare

$$y' = \frac{d}{dt}y = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{y}s' = (t+3)^{-1}\dot{y}.$$

Mai departe

$$y'' = \frac{d}{dt}\big((t+3)^{-1}\dot{y}\big) = -(t+3)^{-2}\dot{y} + (t+3)^{-1}\ddot{y}s' = (t+3)^{-2}(\ddot{y} - \dot{y})$$

şi

$$y''' = \frac{d}{dt}\big((t+3)^{-2}(\ddot{y} - \dot{y})\big) = -2(t+3)^{-3}(\ddot{y} - \dot{y}) + (t+3)^{-2}(\dddot{y} - \ddot{y})s' =$$

$$= (t+3)^{-3}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}).$$

Înlocuim în ecuaţia (9) şi obţinem ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 3e^{4s}. \tag{10}$$

Ecuaţia omogenă ataşată

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 3\dot{y} - y = 0$$

are ecuaţia caracteristică

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

cu rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, deci ecuaţia omogenă are soluţia generală

$$y_{SGO} = (c_1 + c_2 s + c_3 s^2)e^s.$$

Cvasipolinomul $f(s) = 3e^{4s}$ are ataşat numărul complex $\lambda = 4 + 0i$ care, nefiind rădăcină caracteristică, are multiplicitatea $m = 0$, prin urmare căutăm pentru ecuaţia neomogenă o soluţie particulară de forma

$$\bar{y}(s) = Ae^{4s}$$

şi, după câteva calcule, găsim

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{9}e^{4s}.$$

Ecuaţia (10) are soluţia generală

$$y = (c_1 + c_2 s + c_3 s^2)e^s + \frac{1}{9}e^{4s},$$

iar ecuaţia iniţială are soluţia

$$y = \big(c_1 + c_2 \ln(t+3) + c_3 \ln^2(t+3)\big)(t+3) + \frac{1}{9}(t+3)^4.$$

Soluţii analitice pentru ecuaţii diferenţiale liniare

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots a_n(t)y = f(t), \tag{11}$$

şi presupunem că funcţiile $a_1, a_2, \dots, a_n, f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt analitice într-un $t = t_0$ din intervalul deschis $\mathbb{I}$.

Amintim că o funcţie $y : I \to \mathbb{R}$ este *analitică* pe intervalul deschis I dacă este indefinit derivabilă pe I şi dezvoltabilă în serie Taylor în orice punct din I. Avem următoarea caracterizare: o funcţie indefinit derivabilă este analitică pe I dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset I$ există $M > 0$ şi $a > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{y^{(n)}(t)}{n!}\right| \le Ma^n$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $t \in K$.

Spunem că $y : I \to \mathbb{R}$ este *analitică în* $t_0 \in I$ dacă este indefinit derivabilă pe o vecinătate a lui t_0 şi dezvoltabilă în serie Taylor în t_0, altfel spus y este suma unei serii de puteri de forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n (t - t_0)^n,$$

cu raza de convergenţă $\rho > 0$, caz în care ea este analitică pe întreg domeniul de convergenţă $(t_0 - \rho, t_0 + \rho) \cap I$.

Pentru a simplifica expunerea vom considera ecuaţii de ordin doi omogene, cazul general fiind similar. Considerăm ecuaţia

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{12}$$

cu p şi q funcţii analitice într-un $t = t_0$ şi ataşăm ecuaţiei condiţiile iniţiale

$$y(t_0) = \xi_0, \quad y'(t_0) = \xi_1. \tag{13}$$

Teorema 1 *Dacă p şi q sunt funcţii analitice în punctul $t = t_0$, atunci unica soluţie a problemei Cauchy* (12) *şi* (13) *este şi ea analitică în $t = t_0$.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, considerăm $t_0 = 0$ şi, pentru funcţiile p şi q, folosim dezvoltările

$$p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n. \tag{14}$$

Vom rezolva problema Cauchy (12) şi (13) căutând soluţia sub forma

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{15}$$

Vom presupune, pentru început, că aceste trei serii de puteri sunt convergente cel puţin pe un interval comun $(-\rho, \rho)$, cu $\rho > 0$. Pe acest interval avem

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \tag{16}$$

şi

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n. \tag{17}$$

Introducând dezvoltările (14), (15), (16) şi (17) în ecuaţia (12) şi ordonând după puterile lui t, obţinem că

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right] t^n = 0$$

pentru orice $t \in (-\rho, \rho)$ şi, în consecinţă, toţi coeficienţii seriei de puteri de mai sus sunt nuli. Rezultă următoarele relaţii de recurenţă:

$$a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) a_{k+1} p_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k q_{n-k} \right], \tag{18}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece primii doi coeficienţi sunt determinaţi de condiţiile iniţiale, mai precis $a_0 = y(t_0) = \xi_0$ şi $a_1 = y'(t_0) = \xi_1$, urmează că soluţia problemei Cauchy (12) şi (13) este perfect determinată de relaţiile de mai sus. Mai rămâne de arătat doar că seria de puteri (15), cu coeficienţii a_n astfel calculaţi, are raza de convergenţă nenulă.

Fixăm în mod arbitrar un $R > 0$ strict mai mic decât raza de convergenţă minimă a seriilor de puteri (14). În acest caz, seriile numerice $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n R^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n R^n$ sunt absolut convergente, de unde rezultă că şirurile $p_n R^n$ şi $q_n R^n$ tind la zero, deci sunt mărginite: există $M > 0$ astfel încât

$$| p_n | \leq \frac{M}{R^n} \text{ şi } | q_n | \leq \frac{M}{R^n}, \tag{19}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Vom arăta, prin inducţie după n, că există un $P > 0$ astfel încât

$$| a_n | \leq \frac{P^n}{R^n} \tag{20}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat arbitrar, presupunem că pentru $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ avem

$$| a_k | \leq \frac{P^k}{R^k}, k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

şi arătăm (20) pentru a_{n+2}. Avem

$$| a_{n+2} | \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) \mid a_{k+1} \| p_{n-k} \mid + \sum_{k=0}^{n} \mid a_k \| q_{n-k} \mid \right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) \frac{P^{k+1}}{R^{k+1}} \frac{M}{R^{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k}{R^k} \frac{M}{R^{n-k}} \right]$$

$$\leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{R^{n+2}} \left[MR \sum_{k=0}^{n} (n+1) P^{k+1} + MR^2 \sum_{k=0}^{n} P^k \right]$$

$$\leq \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{k=n+1} P^k}{R^{n+2}} \leq \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{P^{n+2}}{R^{n+2}},$$

valabilă pentru orice $P > 2$. Cum

$$\lim_{n \to \infty} \frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} = 0,$$

rezultă că există un $n_0 \in \mathbb{N}$ care nu depinde de P astfel încât

$$\frac{MR(n+1) + MR^2}{(n+2)(n+1)} \leq 1,$$

pentru orice $n \geq n_0$ şi, prin urmare, dacă $n \geq n_0$ atunci din ipoteza

$$| a_k | \leq \frac{P^k}{R^k}, \text{ pentru orice } k = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

urmează că

$$| a_{n+2} | \leq \frac{P^{n+2}}{R^{n+2}}.$$

Alegem acum $P > 2$ suficient de mare astfel încât să avem

$$|a_k| \leq \frac{P^k}{R^k} \text{ pentru } k = 0, 1, 2, ..., n_0 + 1,$$

şi atunci rezultă, prin inducţie, că (20) are loc pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Conform formulei Cauchy-Hadamard vom avea pentru raza de convergenţă ρ_0 a seriei de puteri (15) estimarea

$$\frac{1}{\rho_0} = \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{P}{R}$$

şi, prin urmare, $\rho_0 \geq \dfrac{R}{P} > 0$.

Exemplu. Vom aplica metoda seriilor de puteri pentru *ecuaţia lui Airy*, una dintre cele mai simple ecuaţii liniare de ordin doi cu coeficienţi neconstanţi:

$$y'' - ty = 0. \tag{21}$$

Deşi foarte simplă, ecuaţia este importantă în aplicaţii, ea apare în studiul fenomenului de difracţie, de exemplu, şi nu poate fi integrată prin metode elementare.

Căutăm soluţii sub forma

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots . \tag{22}$$

Derivăm

$$y'(t) = 1a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + \cdots$$
$$y''(t) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 t + 3 \cdot 4a_4 t^2 + 4 \cdot 5a_5 t^3 + 5 \cdot 6a_6 t^t \cdots$$

şi comparăm seria lui $y''(t)$ cu seria

$$ty(t) = 0 + a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5 + \cdots .$$

Obţinem relaţiile

$$\begin{array}{rcl} 1 \cdot 2\, a_2 & = & 0 \\ 2 \cdot 3\, a_3 & = & a_0 \\ 3 \cdot 4\, a_4 & = & a_1 \\ 4 \cdot 5\, a_5 & = & a_2 \\ 5 \cdot 6\, a_6 & = & a_3 \\ 6 \cdot 7\, a_7 & = & a_4 \\ \cdots\cdots & & \cdots \end{array}$$

de unde, din aproape în aproape, deducem

$$\begin{array}{lcl}
a_2 & = & 0 \\
a_3 & = & \dfrac{a_0}{2\cdot 3} \\
a_4 & = & \dfrac{a_1}{3\cdot 4} \\
a_5 & = & \dfrac{a_2}{4\cdot 5} = 0 \\
a_6 & = & \dfrac{a_3}{5\cdot 6} = \dfrac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)} \\
a_7 & = & \dfrac{a_4}{6\cdot 7} = \dfrac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)} \\
a_8 & = & \dfrac{a_5}{7\cdot 8} = 0 \\
a_9 & = & \dfrac{a_6}{8\cdot 9} = \dfrac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)(8\cdot 9)} \\
\ldots & & \ldots
\end{array}$$

Se observă că, pentru orice $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{array}{l}
a_{3k-1} = 0, \\
a_{3k} = \dfrac{1}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}\cdot a_0, \\
a_{3k+1} = \dfrac{1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots((3k)\cdot(3k+1))}\cdot a_1.
\end{array}$$

Introducem aceste relaţii în seria (22) şi schimbăm ordinea de sumare astfel încât să apară factorii a_0 şi a_1. Obţinem soluţia generală a ecuaţiei (21) sub forma

$$y(t) = a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t),$$

unde

$$y_1(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots((3k-1)\cdot(3k))}$$

şi

$$y_2(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k+1}}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots((3k)\cdot(3k+1))}.$$

Este uşor de văzut că seriile de puteri care definesc funcţiile de mai sus au raza de convergenţă infinită, deci $y = y_1(t)$ şi $y = y_2(t)$ sunt bine definite pentru orice t real. Mai mult, să remarcăm că $y = y_1(t)$ este soluţia ecuaţiei (21) cu datele iniţiale $y_1(0) = 1$ şi $y_1'(0) = 0$, iar $y = y_2(t)$ este soluţia cu datele $y_2(0) = 0$ şi $y_2'(0) = 1$ şi, prin urmare, ele formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia lui Airy.