Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendente

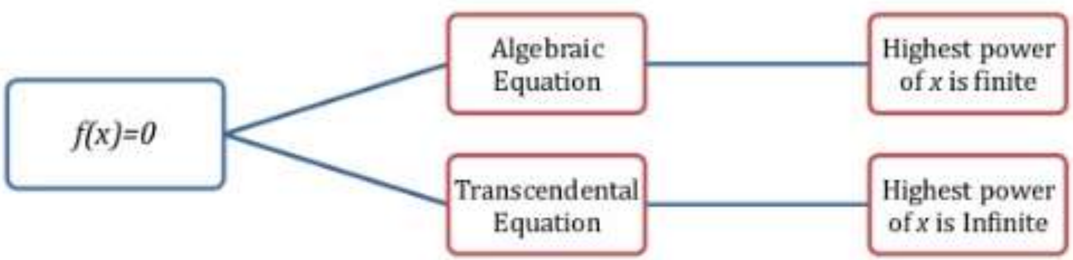
Cătălina Codreanu

Clasa a XII-a „B”

1. Separarea soluțiilor ecuațiilor algebrice și transcedente

Ecuații algebrice

- O ecuație care conține termeni algebrici.
- <u>Exemplu:</u> $x^4+x+1=0$, aici cea mai mare putere a lui x este finită



Ecuații transcendente

- O ecuație care conține raporturi trigonometrice, funcții exponențiale și funcții logaritmice.
- <u>Exemplu:</u> $e^x+2=0$, $\sin x+1=0$, $\log(1+x)=0$, aici cea mai mare putere a lui x este infinită

1. Separarea soluțiilor ecuațiilor algebrice și transcedente

Ce este o soluție a ecuației?

Orice valoare ξ, pentru care expresia f(ξ)=0 este adevărată, se numește zerou al funcției f(x) sau **soluție** a ecuației f(x)=0.

Rezolvarea prin metode numerice:

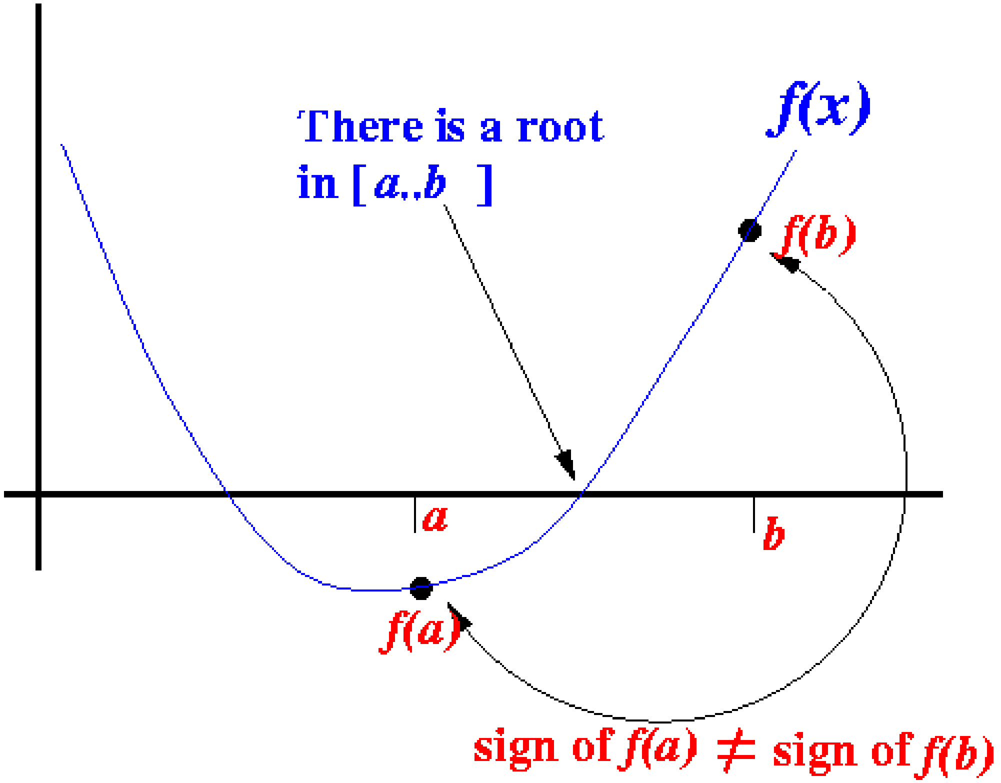
1. Separarea intervalelor pe care ecuația are o singură soluție.
2. Micșorarea pe cât mai mult posibil a fiecărui din aceste intervale (dacă se pune problema determinării tuturor soluțiilor) sau a unuia din ele (dacă trebuie de determinat doar una din soluții).

2. Metoda Bisecției

o metodă numerică din matematică folosită pentru a găsi o rădăcină a unei funcții date. Este o metodă simplă și robustă, însă înceată. Din acest motiv, este adesea folosită pentru a obține o aproximare brută a unei soluții care este apoi utilizată ca punct de plecare pentru metode mai rapide de convergență.

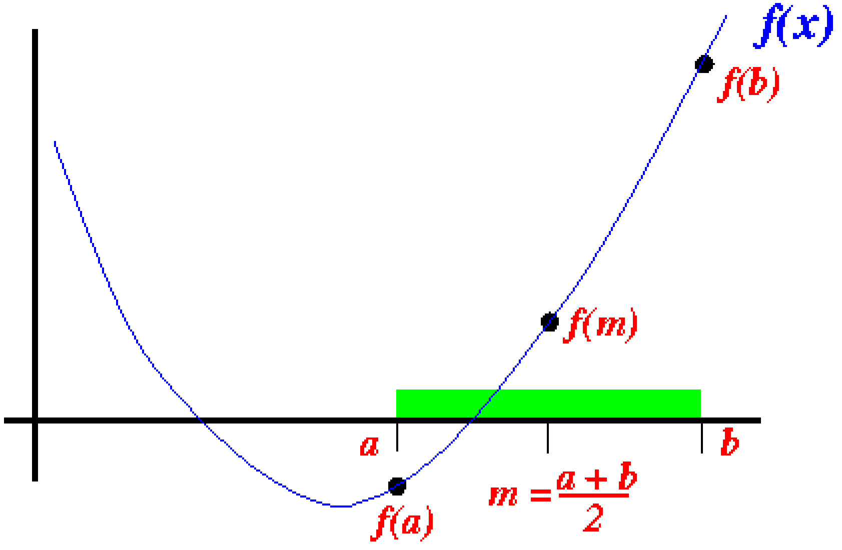
- Fie $f(x)=0$ și $f(a)*f(b)<0$

Atunci curba $y=f(x)$ traversează axa Ox între a și b, astfel încât există o rădăcină a ecuației între a și b.



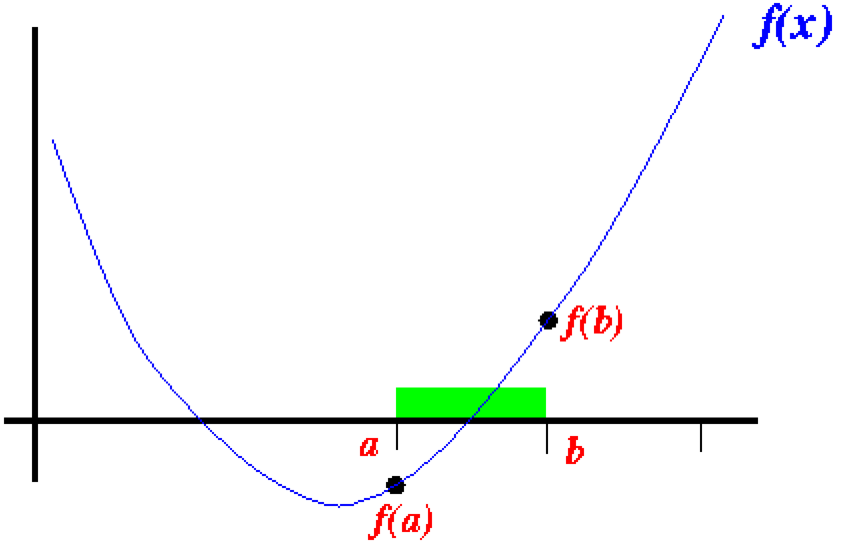
2. Metoda Bisecției

- Definim aproximarea inițială în felul următor: *m = (a+b)/2,* adică „tăiem" în două intervalul [a,b].
- Acum, dacă f(m)=0, atunci m este *soluția ecuației*.
- Dacă f(m)≠0, atunci f(m)<0 sau f(m)>0.



2. Metoda Bisecției

- Pentru că semnul lui m≠ semnul lui a, se creează un nou interval [a,b] (unde m=b), unde vom căuta soluția.
- Se va continua același procedeu de înjumătățire până f(m)=0



2. Metoda Bisecției. Metoda analitică

Fie f(x)= $x^2 - 5$ pe **[0, 4]**

Există o rădăcină între [0,4] deoarece:

$f(0) = 0^2 - 5 = -5$

$f(4) = 4^2 - 5 = 11$

Start: a = 0; f(a) = -5

b = 4; f(b) = 11

Iterația 1: m = (a + b)/2 = 2

$f(m) = 2^2 - 5 = -1$, Deoarece

f(m) < 0, vom schimba a cu m

a = 2; f(a) = -1

b = 4; f(b) = 11

Iterația 2: m = (a + b)/2 = 3

$f(m) = 3^2 - 5 = 4$ Deoarece

f(m) > 0, vom schimba b cu m

a = 2; f(a) = -1

b = 3; f(b) = 4

Iterația 3: m = (a + b)/2 = 2.5

$f(m) = 2.5^2 - 5 = 1.25$

Deoarece f(m) > 0, vom schimba b cu m

a = 2; f(a) = -1

b = 2.5; f(b) = 1.25

Și tot așa mai departe ....

2.Metoda Bisecției. Exemplu în Pascal

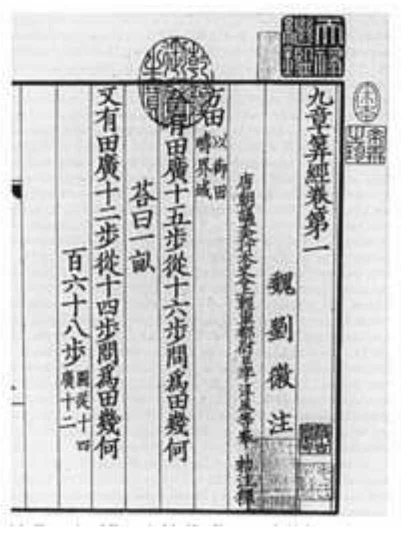
Să se determine o rădăcină a ecuației **$x^2 - 5 = 0$** pe segmentul **[0, 4]** pentru 16 divizări consecutive.

```
program bisectie;
var a,b,c: real;
i,n:integer;
function f(x:real):real;
begin f:=sqr(x)-5;
end;
Begin
 a:=0; b:=4; n:=16;
 for i:=1 to n do
begin
c:=(b+a)/2;
writeln(’i=’,i:3,’ x=’,c:10:8,’
f(x)=’,f(c):12:8); i
f f(c)=0 then break3
Else
 if f(c)*f(a)>0 then a:=c else b:=c;
end;
end.
```

3.Metoada Coardelor

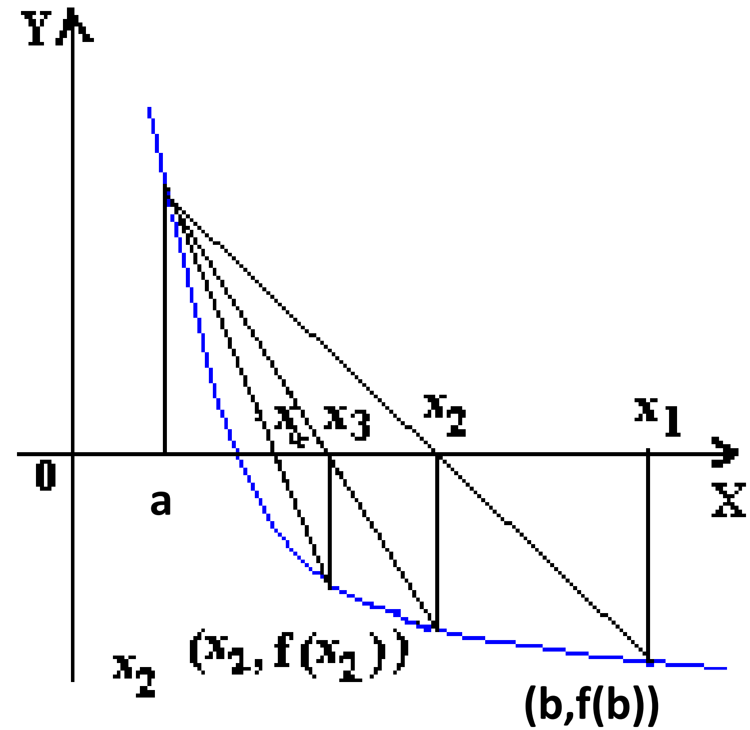
- Cele mai vechi documente care atestă cunoașterea și înțelegerea metodei falsei poziții datează cu aproximație din anul 200 î.Hr. și 200 î.Hr.. Metoda a fost găsită într-un text antic chinez numit „Nouă capitole despre arta matematicii”.

- În Occident, această metodă a fost utilizat pe scară largă de către matematicienii Fibonacci, Luca Pacioli și Robert Recorde.


九章算經卷第一
魏 劉徽 注
方田
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰百六十八步

3.Metoda coardelor *sau regula falsi*

O aproximare mai bună a lui c poate fi obținută luând linia dreaptă L care unește punctele (a, f (a)) și (b, f (b)) care intersectează axa Ox. Pentru a obține valoarea lui c putem echivala cele două expresii ale pantei m a liniei L.



$$m = \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)} = \frac{0 - f(b)}{(c-b)}$$

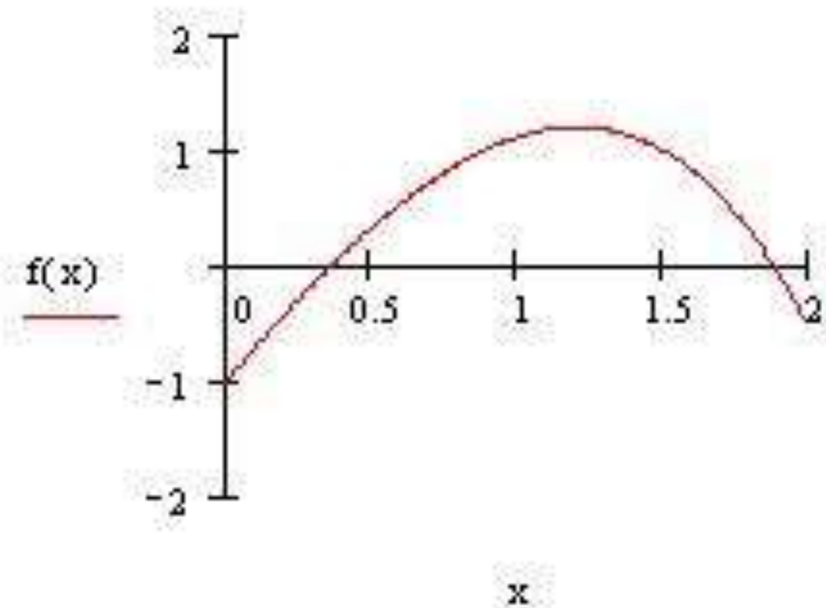
$$\Rightarrow (c-b) * (f(b)-f(a)) = -(b-a) * f(b)$$

f(a) * f(b) < 0 then b = c
> 0 then a = c
= 0 then c is the root.

3.Metoda Coardelor

- Aflați rădăcina ecuației

3x + sin(x) - exp(x) = 0.



- Din grafic este clar că există o rădăcină între 0 și 0,5 și, de asemenea, o altă rădăcină între 1,5 și 2.0. Acum, să luăm în considerare funcția f (x) în intervalul [0, 0,5] unde f (0) * f (0,5) este mai mic decât zero și să folosim schema regul-falsi pentru a obține soluția a f (x) = 0.

3.Metoda Coardelor

Deci, una dintre rădăcinile lui 3x + sin (x) - exp (x) = 0 este egală cu aproximativ 0,36.

Iterația nr.	a	b	c	f(a) * f(c)
1	0	0.5	0.376	1.38 (+ve)
2	0.376	0.5	0.36	-0.102 (-ve)
3	0.376	0.36	**0.36**	-0.085 (-ve)

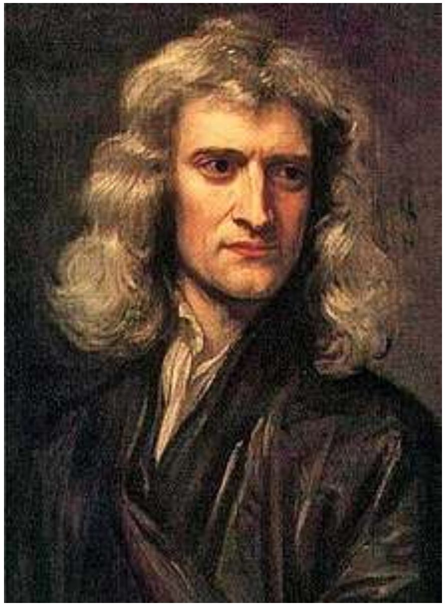
Să se calculeze soluția aproximativă a ecuației f(x)=0 pe segmentul [0,0.5] pentru 10 aproximări succesive.

```
program coardelor;
var a,b,e,c,x: real;
n,i: integer;
function f(x:real):real;
begin
f:=3*x+sin(x)-exp(x)ș
end;
begin a:=0; b:=0.5; n:=10;
c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
if f(c)*f(a)>0 then
begin e:=b; x:=a;
End;
else
begin
e:=a; x:=b; end;
for i:=1 to n do
begin x:= x-(f(x))/(f(e)-f(x))*(e-x);
writeln(x:10:8,' ',f(x):12:8);
end;
end.
```

4. Metoda Newton-Raphson

Numele "Metoda lui Newton" este derivat din faptul că Isaac Newton a descris un caz special al metodei în *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (scris în 1669, publicat în 1711 de către William Jones) și în *De metodis fluxionum et serierum infinitarum* (scrisă în 1671, tradus și publicat ca Metoda fluctuațiilor în 1736 de către John Colson). Cu toate acestea, metoda lui diferă substanțial de metoda modernă: Newton aplică metoda numai pentru polinoame.

În 1690, Joseph Raphson a publicat o descriere simplificată în *Analysis aequationum universalis.* Raphson prezenta metoda lui Newton ca o metodă pur algebrică și limita utilizarea sa la funcții polinomiale, dar el descrie metoda în termeni de aproximări succesive x_n în loc de mai complicata secvență de polinoame utilizate de Newton.



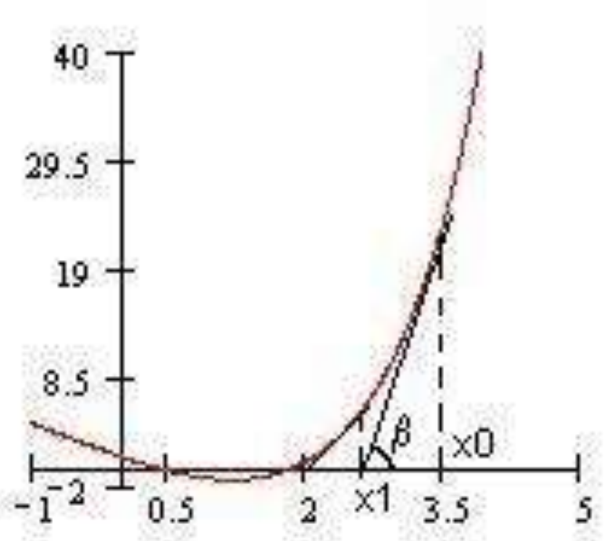
4.Metoda Newton-Raphson

Fie ecuația dată f (x) = 0, iar aproximația inițială pentru rădăcină este x_0. Tragem o tangentă la curba y = f (x) la x_0 și extindem tangenta până la axa Ox. Atunci punctul de intersecție a tangentei și axa Ox este următoarea aproximație pentru rădăcina lui f (x) = 0. Repetați procedura cu $x_0 = x_1$ până când aceasta converge. Dacă m este panta Tangentei la punctul x_0 și ß este unghiul dintre tangenta și axa Ox atunci

$$m = \tan \beta = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$(x_0 - x_1) * f'(x_0) = f(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$



4.Metoda Newton-Raphson

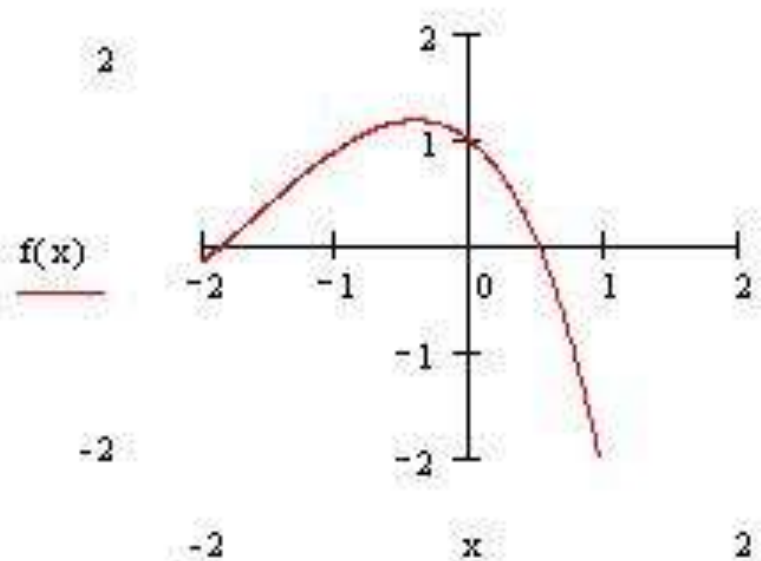
Această metodă poate fi generalizată ca un proces iterativ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Exemplu:</u> Aflați rădăcina ecuației **(cos[x])-(x * exp[x]) = 0**

Să presupunem ca X_0=2.0

i	0	1	2	3	4	5	6	7
X_i	2	1.34157	0.8477	0.58756	0.52158	0.51777	0.51776	**0.51776**



4.Metoda Newton-Raphson

Fie dată funcţia

f(x) = **cos(x)-(x * exp(x))**.

Să se scrie un program care va calcula soluţia ecuaţiei f(x) = 0 pe segmentul [0; 1] pentru 10 aproximări succesive

```
program Newton;
var a, b, x, c : real;
 i, n: integer;
function f(z:real):real;
 begin f:=cos(x)-(x*exp(x)); end;
function fd1(z:real):real;
Begin
 fd1:=sin(x)-(x*exp(x)-exp(x));
end;
begin a:=0; b:=1; n:=10; i:=0;
c:=a-(f(a))/(f(b)-f(a))*(b-a);
 if f(c)*f(a) then x:=a else x:=b;
while i<0 do
begin i:=i+1;
x:=x-f(x)/fd1(x);
writeln('i=',i:2,' x=',x:15:12, '
    f=',f(x):15:12);
 end;
end.
```

Mulțumesc pentru atenție!

Bibliografie

- Manual de informatică pentru clasa a XII-a (Anatol Gremalschi, Sergiu Corlat, Andrei Braicov)
- https://mat.iitm.ac.in/home/sryedida/public_html/caimna/transcendental/iteration%20methods/iteration.html
- https://www.slideshare.net/8laddu8/algebraictransdential-equations
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_tangentei
- https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method
- https://ro.wikipedia.org/wiki/Metoda_coardei
- https://mat.iitm.ac.in/home/sryedida/public_html/caimna/transcendental/bracketing%20methods/regula-falsi/regula-falsi.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/False_position_method
- https://en.wikipedia.org/wiki/Bisection_method
- http://www.mathcs.emory.edu/~cheung/Courses/170/Syllabus/07/bisection.html
- http://www.egyankosh.ac.in/bitstream/123456789/31287/1/Unit-9.pdf