Matemática Discreta-Hoja 4

1. Razona cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas:

   a) $1 \in \{1\}$ ✗ b) $\{1\} \subseteq \{1\}$ ✓ c) $\{1\} \in \{1\}$ ✗ d) $\emptyset \in \emptyset$
   e) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$ ✗ f) $\{1\} \in \{\{1\}\}$ ✓ g) $\emptyset \subseteq \emptyset$? h) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   i) $\emptyset \subseteq \{1\}$ ✓ j) $\emptyset \in \{1\}$ k) $\{\emptyset\} = \emptyset$ l) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

2. De las cuatro afirmaciones que se presentan, para A, B, C conjuntos cualesquiera no vacíos, demuestra que únicamente una es cierta y pon contraejemplos para las otras tres, que son falsas:

   a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \in C$.
   b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.
   c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$ entonces $A \in C$.
   d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$ entonces $A \subseteq C$.

   $B \cap (\overline{C \cup A})$
   $B \cap (\overline{C} \cap \overline{A})$
   $B \cap \overline{C} \cap \cancel{B \cap \overline{A}} \to B \cap \overline{C} \cap A$

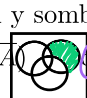
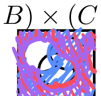
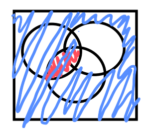
   $\{a,b\}$

=	$\{a,b..\}$	$\{\{a,b\}...\}$
$\subseteq$	✓	✗
$\in$	✗	✓

3. Sea $\mathrm{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$ $\mathrm{A} = \{1, 4, 7, 10\}$ $\mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\mathrm{C} = \{2, 4, 6, 8\}$. Enumera los elementos de:

   a) $B \cap (\overline{C \cup A})$ b) $\mathcal{P}(A - (B \cap C))$ c) $[((A - B) \times (C - B)) \times (A \cap C)] \cup [B \cap (\overline{C \cup A})]$

4. Dibuja un diagrama de Venn y sombrea el conjunto:

   a) $\overline{A} - B$  b) $B \cap (\overline{C \cup A})$  c) $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{C} - A)$  $= R$ d) $((C \cap A) - (\overline{B - A})) \cap C$ 

   $\emptyset \cap C = \emptyset$

5. Construye dos conjuntos A, B tales que $A \in B$ y $A \subseteq B$.

   $A = \{1, 2\}$ $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$

6. Dados los conjuntos $A = \{1, \{2\}\}$, $B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, enumera los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

   a) $A \cup B$ $\{1, \{2\}, 2, \{1,2\}\}$ b) $A \cap B$ $\{1\}$ c) $A \setminus B$ $\{\{2\}\}$ d) $B \setminus A$ $\{2, \{1,2\}\}$
   e) $\mathcal{P}(A)$ $\{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{1,\{2\}\}\}$ f) $B \cap \mathcal{P}(A)$ $\emptyset$ g) $A \times B$ h) $(A \times B) \cap (B \times A)$

   $\{(1,1), (\{2\},1), (1,2), (\{2\},2), (1,\{1,2\}), (\{2\},\{1,2\})\}$

7. Enumera los elementos de: $\mathcal{P}(\emptyset)$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

   $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

8. Dado un conjunto A, sea $A' = A \cup \{A\}$. Enumera los elementos de $\emptyset'$, $\emptyset''$, $\emptyset'''$.

9. Sean A, B, X conjuntos. Demuestra que las tres condiciones siguientes son equivalentes:

   a)$X \subseteq A \cup B$ b)$(X - A) \cap (X - B) = \emptyset$ c)$(X - A) \subseteq B$

10. Sean $A, B, C \neq \emptyset$, demuestra que:

$$\left.\begin{array}{l}(A \cap C) \subseteq (B \cap C) \\ \\ (A \cap \overline{C}) \subseteq (B \cap \overline{C})\end{array}\right\} \implies A \subseteq B$$

11. Usa las leyes de Boole para demostrar las afirmaciones siguientes:

    a) $\overline{(A \cup (B \cap C))} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ b) $\overline{((\overline{A \cup B}) \cap C)} = (\overline{C} \cup B) \cup A$
    c) $(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B$ d) $(\overline{A} \cup B) \cup B = A \cup B$
    e) $(\overline{\overline{A} \cup B}) \cup A = A$

12. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuestra las válidas y construye un contraejemplo para las falsas.

    a) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$ b) $(A \cap B) - C = A \cap (B - C) = (A - C) \cap B$
    c) $A - (B - C) = (A - B) - C$ d)$(A \times B) - (C \times D) = ((A - C) \times B) \cup (A \times (B - D))$

13. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, demuestra que

    a) $A \cup B = \mathcal{U}$ sii $\overline{A} \subseteq B$
    b) $A \cap B = \emptyset$ sii $\overline{A} \supseteq B$

14. Sean A, B, C conjuntos. ?'Podemos deducir $A = B$ si

    a) $A \cup C = B \cup C$?
    b) $A \cap C = B \cap C$?
    c) $A \cup C = B \cup C$ y $A \cap C = B \cap C$?

15. Sean $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$. Demuestra que $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ sii $C \subseteq A$.

16. Simplifica las expresiones siguientes usando las Leyes de Boole:

    a) $((A \cup B) \cap \overline{C \cup A}) \cup ((C \cap B) \cup A)$
    b) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup (A \cap B \cap \overline{C})$
    c) $\overline{\overline{(A \cup B) \cap C} \cup \overline{B}}$
    d) $(\overline{(\overline{A \cup \overline{C}}) \cap B)} \cup \overline{(A \cap (\overline{(C \cap \overline{B}})))} \cup C$

17. La *Diferencia Simétrica* de los conjuntos A y B se define como: $A \oplus B \stackrel{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A)$

    Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuestra las válidas y construye un contraejemplo para las falsas.

    a) $A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$
    b) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
    c) $A \oplus C = B \oplus C \Longrightarrow A = B$
    d) $A \subseteq B \implies A \oplus C \subseteq B \oplus C$

18. Definimos una sucesión de conjuntos:

    $$A_k = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \leq k\} \qquad \text{(para todo } k \in \mathbb{N})$$

    y un conjunto $B = \{\{m \in \mathbb{N} \mid m < n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$

    a) Enumera A_0, A_1 and A_2.
    b) Demuestra que $A_k \subseteq B$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
    c) Demuestra que $\emptyset \in A_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

19. Para todo $k \in \mathbb{N}$, sea

    $$A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\} \qquad B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$$

    Determina:

    $$\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad \bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$
    $$\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} \qquad \bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

20. Para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, sea

    $$A_k = \{k+1, k+2, k+3 \ldots\}$$

    Determina:

    a) $\bigcup\{A_k \mid 1 \leq k \leq 8\}$
    b) $\bigcap\{A_k \mid 3 \leq k \leq 12\}$
    c) $\bigcup\{A_k \mid k \geq 1\}$
    d) $\bigcap\{A_k \mid 1 \leq k\}$