CONJUNTOS

- Def
  Un conjunto es una colección de objetos.

  Los objetos se llaman elementos del conjunto. Escribimos $a \in A$ cuando a es un elemento de A, y $a \notin A$ en caso contrario.

  Podemos describir un conjunto de varias formas:

  - Listando todos sus elementos cuando es posible.
    $A = \{a, b, c, d\} \quad a \in A, \quad f \notin A$
    $B = \{\{0, 1\}, 1, \{1, 2\}\}$
    $\{0, 1\} \in B, \quad 1 \in B, \quad \{1, 2\} \in B.$

  - Usando una propiedad P. Caracterizamos los elementos del conjunto señalando la propiedad o propiedades que tienen que cumplir para ser miembros.

    $\mathbb{R} = \{x | x \text{ es un número real}\}$
    $O = \{x | x \text{ es un entero impar menor que } 10\}$

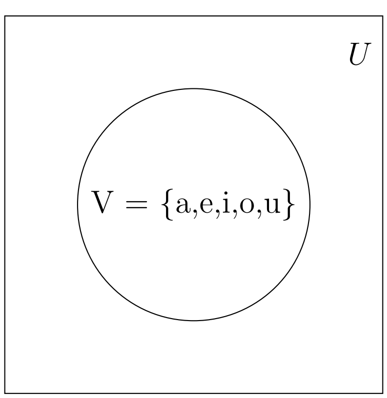
- Def.
  $A = B \iff (\forall x,\ x \in A \text{ sii } x \in B.)$

  Así $\{3, 5, 7\} = \{7, 5, 3\} = \{3, 5, 5, 7\}$

  Representación Gráfica. Diagramas de Venn.

  En los diagramas de Venn el conjunto universal U, que contiene todos los elementos que estemos considerando, se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo utilizamos círculos para representar los conjuntos.

- Ej.
  $V = \{a, e, i, o, u\} \quad U = \{a, \ldots, z\}$



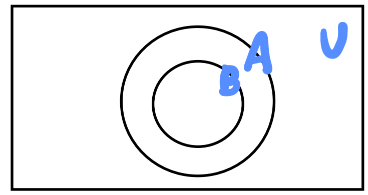
Hay un conjunto especial sin elementos. Se le llama **conjunto vacío** y se representa por $\emptyset$ o $\{\}$.

$A \subseteq B \rightarrow$ SUBCONJUNTO $A = B$ o $A \neq B$
$A \subset B \rightarrow$ SUBCONJUNTO $A \neq B$
$A \in B \rightarrow$ PERTENECE

- Def.
  A es un **subconjunto** de B $(A \subseteq B) \iff$
  $\forall x (x \in A \implies x \in B)$.

  $A \subsetneq B$ o $A \subset B$ si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$. $\{1, 2\} \subsetneq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

- Proposición
  Sean A, B, C conjuntos. U conjunto universal.



$B \subset A$ y $B \subseteq A$

pero $A \not\subset A$

Conjunto vacío pertenece a cualquier conj

1. $A \subseteq A$
2. $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq U$ $\rightarrow$ $\boxed{\emptyset A \; U}$
3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ ✓
4. $A \not\subset A$
5. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \implies A = B$ $(A \subset B$ y $B \subset A$, A y $B = \emptyset)$
6. Si $A \subset B \implies B \not\subseteq A$
7. Si $A \subseteq B$ y $B \subset C \implies A \subset C$
8. Si $A \subset B$ y $B \subseteq C \implies A \subset C$

Dem.

(6) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C \implies A \subset C$

$$\forall x \; x \in A \underset{\substack{\uparrow \\ A \subseteq B}}{\implies} x \in B \underset{\substack{\uparrow \\ B \subset C}}{\implies} x \in C$$

Para demostrar $A \subset C$ tenemos que encontrar un $x \in C$ tal que $x \notin A$. Como $B \subset C$, existe un $x_0 \in C$ tal que $x_0 \notin B$ y como $A \subseteq B$ $x_0 \notin A$ ya que si $x_0 \in A \implies x_0 \in B$ $(A \subseteq B \iff \forall x \; x \in A \implies x \in B)$. Luego $x_0 \in C$ y $x_0 \notin A \implies A \subset C$.

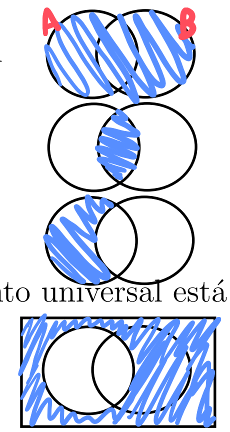
(7) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C \implies A \subset C$

$$\forall x \; x \in A \underset{\substack{\uparrow \\ A \subset B}}{\implies} x \in B \underset{\substack{\uparrow \\ B \subseteq C}}{\implies} x \in C$$

Para demostrar $A \subset C$ tenemos que encontrar un $x \in C$ tal que $x \notin A$. Como $A \subset B$, existe un $x_0 \in B$ tal que $x_0 \notin A$ y como $B \subseteq C$ se verifica $\forall x \; x \in B \implies x \in C$, luego $x_0 \in C$ pero $x_0 \notin A$. Por tanto $A \subset C$.

- Operaciones de conjuntos
  Sean A, B conjuntos. Definimos la

  1. **Unión** $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$
  2. **Intersección**
     $A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$
  3. **Diferencia**
     $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$
  4. **Complementario** de A (El conjunto universal está especificado)
     $\overline{A} = \{x \in U | x \notin A\} = U \setminus A.$



- Def.
  A, B se dicen **disjuntos** sii $A \cap B = \emptyset$ → no hay interjección entre A y B

- Def.
  Dado un conjunto A, el conjunto **Partes de A** se define como $\mathcal{P}(A) = \{S | S \subseteq A\}$

- Ej.
  $A = \{0, 1\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

- Productos Cartesianos

  Los elementos de un conjunto no están ordenados, pero en algunos casos el orden es importante.

- Def.
  La n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la colección ordenada cuyo primer elemento es a_1, a_2 es su segundo elemento ... y a_n es el n-ésimo elemento.

  tupla = colección

  $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \iff a_i = b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$ → son iguales si y solo si todos los elementos entre series son iguales.

  Si $n = 2$ hablamos de pares ordenados

  $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2$

- Def.
  Sean A, B conjuntos. Definimos el **Producto Cartesiano**
  $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$

- Ej
  $A = \{\overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{2}\} \qquad B = \{\overset{b_1}{a}, \overset{b_2}{b}, \overset{b_3}{c}\}$

  $A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$

  $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

  no es commutativa

  $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2) \ldots\}$

  $(a_n, b_1), (a_{n+1}, b_1)$

  1) mantiene b, cambia a
  2) cambia b

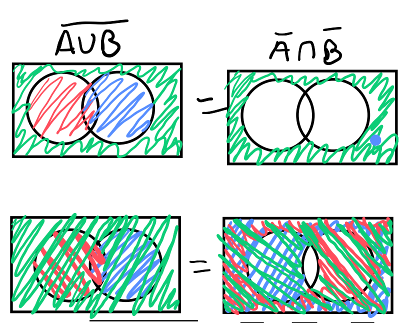
$\emptyset \times B = \emptyset = B \times \emptyset = \emptyset \times \emptyset$ → conj vacío → anula cualquier ecuación

Si $A = B$ $\quad A \times B = A \times A = A^2 = \{(a,b) | a \in A,\ b \in A\}$

- Def.
  Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$conjuntos. Definimos el **Producto Cartesiano** de los conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ como
  $A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$

- LEYES ALGEBRAICAS DE BOOLE (no usan · y +)
  Sea U un conjunto universal y sean A, B, C subconjuntos de U. Se verifican las propiedades:

  1. Asociatividad (es parèntesi son irrelevants)
     $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
     $A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
  2. Commutatividad (se poden girar)
     $A \cup B = B \cup A$
     $A \cap B = B \cap A$
  3. Distributividad $x(y+z) = xy + xz$
     $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
     $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  4. Idempotencia (un amb un mateix, és ell mateix)
     $A \cup A = A$
     $A \cap A = A$
  5. Complementación
     $A \cup \overline{A} = U$ → $\overline{A} = 1 - A$
     $A \cap \overline{A} = \emptyset$
     $\overline{\overline{A}} = A$ → $\overline{\overline{A}} = \overline{(1 - A)} = \cancel{1} - (\cancel{1} - A) = A$
  6. Leyes de Absorción
     $A \cap (A \cup B) = A$
     $A \cup (A \cap B) = A$
  7. $\emptyset$ y U
     $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
     $A \cup U = U \qquad A \cap U = A$
  8. De Morgan
     $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
     $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$



Dem.
Leyes de De Morgan.
Demostramos $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ probando $\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$

1. $\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
   Supongamos $x \in \overline{(A \cup B)}$, luego $x \notin A \cup B$ por tanto $x \notin A$ y $x \notin B \implies x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B} \implies x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$
   Supongamos ahora $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Se tiene $x \in \overline{A} \implies x \notin A$ y $x \in \overline{B} \implies x \notin B$ luego $x \notin A \cup B \implies x \in \overline{(A \cup B)}$.

Propiedades Adicionales

1. $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
   $A \subseteq B \Longrightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
2. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$
   $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

- UNIONES, INTERSECC. GENERALIZADAS
- Def.
  Una familia o colección de conjuntos es un conjunto $\mathcal{C}$ cuyos elementos son conjuntos.
- Ej.
  $M_k = \{n \cdot k | n \in \mathbb{N}\}$
  $M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$
  $M_3 = \{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

  $\mathcal{C} = \{M_k | k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \ldots M_k, \ldots\}$
- Def.
  La **unión de una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos** se define como
  $\bigcup \mathcal{C} = \{x | x \in C, \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}$
  La **intersección de una colección $\mathcal{C}$ de conjuntos** se define como
  $\bigcap \mathcal{C} = \{x | x \in C, \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}$

  $\mathcal{C} = \{M_k | k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \ldots M_k, \ldots\}$
  $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{k \geq 2} M_k = \mathbb{N} \setminus \{1\}$
  $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{k \geq 2} M_k = \{0\}$