EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Febrero 2016)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las ocho primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,75 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,25 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

1. Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces:

   ☐ $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = \emptyset$

   ☐ $(A \setminus B) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

   ☐ $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

   ☐ $(A \setminus \emptyset) \cup (B \setminus \emptyset) = A$

2. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a|c$ y $b|c$ y m.c.d.$(a, b) = 1$ entonces

   ☐ $a \cdot b \big| c$

   ☐ $a \cdot b \big| c$ sólo si a y b son primos.

   ☐ $a \cdot b \big| c$ sólo si $a + b$ es primo.

   ☐ $a \cdot b \nmid c$

3. ¿Cuál de las tres definiciones de la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es la definición recursiva correcta?

   ☐ $f(0) = 0;\ f(n) = 3f(n-2)\ (n \geq 2)$

   ☐ $f(0) = 0;\ f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-2)\ (n \geq 2)$

   ☐ $f(0) = 0;\ f(2n) = 4f(n)\ (n \geq 1);\ f(2n+1) = 4f(n) + 3\ (n \geq 0)$

   ☐ Ninguna lo es.

4. Sean $f : A \longrightarrow B$ una función inyectiva y $\hat{f} : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ definida como:

   $$\hat{f}(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

   Indica la respuesta correcta:

   ☐ $\hat{f}$ puede no ser inyectiva ni suprayectiva.

   ☐ $\hat{f}$ es inyectiva pero puede no ser suprayectiva.

   ☐ $\hat{f}$ no es inyectiva pero puede ser suprayectiva.

   ☐ $\hat{f}$ es siempre biyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, podemos afirmar que:

☐ f no puede ser suprayectiva.

☐ f no puede ser inyectiva.

☐ f no puede ser total.

☐ No tenemos información suficiente para conocer la respuesta correcta.

6. Sea $\mathcal{C}$ la familia de conjuntos definida como:

$$\mathcal{C} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}, m \leq 5\}$$

Indica la respuesta correcta:

☐ $\mathcal{C}$ es un conjunto finito y $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{N}$.

☐ $\mathcal{C}$ es un conjunto infinito numerable y $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{N}$.

☐ $\mathcal{C}$ es un conjunto finito y $\bigcup \mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

☐ $\mathcal{C}$ es un conjunto infinito numerable y $\bigcup \mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

7. Sea $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definimos la función $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ tal que:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \text{número de factores primos distintos que tiene } n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R \subseteq X \times X$ la relación binaria definida por $xRy \Leftrightarrow f(x) < y$, $\forall x, y \in X$. Indica la respuesta correcta:

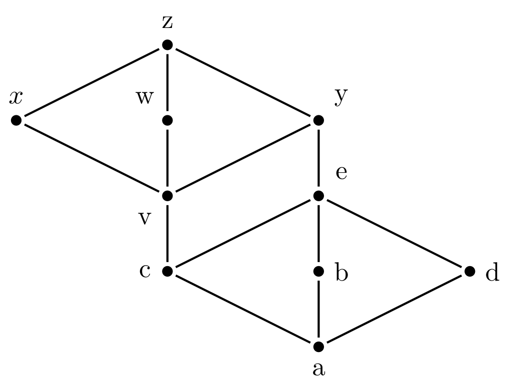
☐ R es reflexiva.

☐ R es antirreflexiva.

☐ R es conexa.

☐ Ninguna de las anteriores.

8. Dado el siguiente diagrama de Hasse, indica la respuesta correcta.



☐ $\sqcap(e, x) = b$ y $\sqcup(d, v) = y$.

☐ $\sqcap(e, x) = b$ y $\sqcup(d, v) = z$.

☐ $\sqcap(e, x) = c$ y $\sqcup(d, v) = y$.

☐ $\sqcap(e, x) = c$ y $\sqcup(d, v) = z$.

9. **[1,5 puntos]** Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{3,4\}$. Definimos la relación R en $\mathcal{P}(A)$ como:

$$XRY \Longleftrightarrow B \cup X = B \cup Y, \quad X, Y \subseteq A$$

   a) Demuestra que R es de equivalencia sobre $\mathcal{P}(A)$.

   b) Determina la clase de equivalencia de $\{1,3\}$.

10. **[1 punto]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función biyectiva. Estudia si la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = 2f(x) + 3$ es biyectiva o no. En caso afirmativo demuestralo formalmente y en caso negativo da un contraejemplo.

11. **[1,5 puntos]** Demostrar por inducción que $\forall n \geq 0$ se verifica $a_n = 3 + n(n-1)^2$ donde:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_n &= a_{n-1} + 3(n-1)^2 - n + 1 \quad \text{si } n \geq 1 \end{aligned}$$