

EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Febrero 2016)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las ocho primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,75 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,25 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

1. Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, entonces:

☐ $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = \emptyset$

☐ $(A \setminus B) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

☐ $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

☐ $(A \setminus \emptyset) \cup (B \setminus \emptyset) = A$

2. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a|c$ y $b|c$ y $\text{m.c.d.}(a, b) = 1$ entonces

☐ $a \cdot b | c$

☐ $a \cdot b | c$ sólo si a y b son primos.

☐ $a \cdot b | c$ sólo si $a + b$ es primo.

☐ $a \cdot b \nmid c$

$a|c$ y $b|c$
 $d = \text{m.c.d.}(a, b) = 1 \rightarrow s \frac{c}{k_1} + \frac{c}{k_2} t = 1$
 $c = ak_1$
 $c = bk_2$ $\{ [ak_1 = bk_2] \} \quad c \left(\frac{s}{k_1} + \frac{t}{k_2} \right) = 1$

3. ¿Cuál de las tres definiciones de la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es la definición recursiva correcta?

☐ $f(0) = 0; f(n) = 3f(n-2) \ (n \geq 2)$

☒ $f(0) = 0; f(n) = 3f(n-1) + 2f(n-2) \ (n \geq 2)$

☐ $f(0) = 0; f(2n) = 4f(n) \ (n \geq 1); f(2n+1) = 4f(n) + 3 \ (n \geq 0)$

☐ Ninguna lo es.

4. Sean $f : A \rightarrow B$ una función inyectiva y $\hat{f} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ definida como:

$$\hat{f}(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

Indica la respuesta correcta:

☐ \hat{f} puede no ser inyectiva ni suprayectiva.

☐ \hat{f} es inyectiva pero puede no ser suprayectiva.

☐ \hat{f} no es inyectiva pero puede ser suprayectiva.

☐ \hat{f} es siempre biyectiva.

5. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, podemos afirmar que:

- ☐ f no puede ser suprayectiva.
☐ f no puede ser inyectiva.
☐ f no puede ser total.
☐ No tenemos información suficiente para conocer la respuesta correcta.

6. Sea \mathcal{C} la familia de conjuntos definida como:

$$\mathcal{C} = \{\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \mid m \in \mathbb{N}, m \leq 5\}$$

Indica la respuesta correcta:

- ☐ \mathcal{C} es un conjunto finito y $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{N}$.
☐ \mathcal{C} es un conjunto infinito numerable y $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{N}$.
☐ \mathcal{C} es un conjunto finito y $\bigcup \mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
☐ \mathcal{C} es un conjunto infinito numerable y $\bigcup \mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

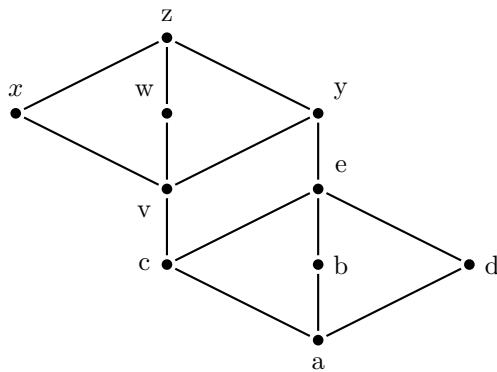
7. Sea $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definimos la función $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ tal que:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ \text{número de factores primos distintos que tiene } n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $R \subseteq X \times X$ la relación binaria definida por $xRy \Leftrightarrow f(x) < y, \forall x, y \in X$. Indica la respuesta correcta:

- ☐ R es reflexiva.
☐ R es antirreflexiva.
☐ R es conexa.
☐ Ninguna de las anteriores.

8. Dado el siguiente diagrama de Hasse, indica la respuesta correcta.



- ☐ $\sqcap(e, x) = b$ y $\sqcup(d, v) = y$.
☐ $\sqcap(e, x) = b$ y $\sqcup(d, v) = z$.
☐ $\sqcap(e, x) = c$ y $\sqcup(d, v) = y$.
☐ $\sqcap(e, x) = c$ y $\sqcup(d, v) = z$.

9. [1,5 puntos] Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{3, 4\}$. Definimos la relación R en $\mathcal{P}(A)$ como:

$$XRY \iff B \cup X = B \cup Y, \quad X, Y \subseteq A$$

- a) Demuestra que R es de equivalencia sobre $\mathcal{P}(A)$.
b) Determina la clase de equivalencia de $\{1, 3\}$.
10. [1 punto] Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva. Estudia si la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = 2f(x) + 3$ es biyectiva o no. En caso afirmativo demuéstralo formalmente y en caso negativo da un contraejemplo.
11. [1,5 puntos] Demostrar por inducción que $\forall n \geq 0$ se verifica $a_n = 3 + n(n-1)^2$ donde:

$$a_0 = 3$$

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1)^2 - n + 1 \quad \text{si } n \geq 1 \quad (H1)$$

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1)^2 - n + 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{H.i.P} \equiv p(k) \equiv a_n = 3 + n(n-1)^2$$

$$\text{Tej.s} \equiv p(k+1) \equiv a_{n+1} = 3 + (n+1)n^2$$

$$a_{k+1} = \underbrace{a_k}_{\substack{\uparrow \\ 3 + k(k-1)^2}} + 3(k)^2 - (k+1) + 1$$

$$3 + k(k-1)^2 + 3k^2 - k$$

$$3 + k[(k-1)^2 + 3k - 1]$$

$$3 + k[k^2 - 2k + 1 + 3k - 1]$$

$$3 + k^2[k+1] = 3 + k^2(k+1)$$