

soluciones-practica-4-grupo-A.pdf



Infosalvada



Álgebra Lineal



1º Grado en Ingeniería Informática



**Facultad de Informática
Universidad Complutense de Madrid**

WUOLAH + BBVA

Hazte **cliente de BBVA y...**
ahórrate 6 meses
de suscripción

BOOM

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

NETFLIX

Spotify

HBOmax

Disney+

PlayStation Plus

DAZN

Promoción solo para nuevos clientes de BBVA. Válida hasta el 30/06/2023. Estas empresas no colaboran en la promoción.

Abre tu cuenta



SOLUCIONES PRÁCTICA 4 GRUPO A (1)

1) Usa Gauss para demostrar que $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ es

invertible y calcular A^{-1} .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1' = F_1 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2' = F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2' = \frac{1}{3}F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right)$$

Caso A es equivalente por filas a I_3 ,

$$A \text{ es invertible y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

2) Escribe la matriz A del ejercicio 1 como producto de matrices elementales.

Forma 1: En el ejercicio 1 hemos visto que haciendo la siguiente cadena de operaciones elementales en filas: $F_1 \leftrightarrow F_3$; $F_3' = F_3 - 2F_1$;

$$F_3' = F_3 - 4F_2; F_1' = F_1 + F_2; F_2' = F_2 + F_3; F_2' = \frac{1}{3}F_2, \text{ pasamos de } \Delta \text{ a } I_3 \quad (2)$$

Eso puede decirse que

$$\left(E_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot E_{23}(1) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{32}(-4) \cdot E_{31}(-2) \cdot E_{13} \right) \Delta = I_3$$

Δ^{-1}

por lo que $\Delta^{-1} = E_2\left(\frac{1}{3}\right) \cdot E_{23}(1) \cdot E_{12}(1) \cdot E_{32}(-4) \cdot E_{31}(-2) \cdot E_{13}$,

por lo que $\Delta = E_{13}^{-1} \cdot E_{31}(-2)^{-1} \cdot E_{32}(-4)^{-1} \cdot E_{12}(1)^{-1} \cdot E_{23}(1)^{-1} \cdot E_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$$= E_{13} \cdot E_{31}(2) \cdot E_{32}(4) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_{23}(-1) \cdot E_2(3) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Forma 2: En el ejercicio 1 hemos visto que pasamos de Δ a I_3

haciendo la siguiente sucesión de operaciones elementales en filas:

$$F_1 \leftrightarrow F_3; F_3' = F_3 - 2F_1; F_3' = F_3 - 4F_2; F_1' = F_1 + F_2; F_2' = F_2 + F_3; F_2' = \frac{1}{3}F_2.$$

Entonces, pasamos de I_3 a Δ haciendo las inversas de esas operaciones elementales, en sentido contrario, i.e., haciendo:

$$F_2 = 3F_2'; F_2 = F_2 - F_3'; F_1 = F_1 - F_2'; F_3 = F_3 + 4F_2'; F_3 = F_3 + 2F_1'; F_1 \leftrightarrow F_3'. \text{ Entonces}$$

$$\Delta = E_{13} \cdot E_{31}(2) \cdot E_{32}(4) \cdot E_{12}(-1) \cdot E_{23}(-1) \cdot E_2(3) \cdot I_3 =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$



Hazte cliente de BBVA y ... **ahórrate 6 meses** **de suscripción**

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

NETFLIX**HBOmax** **Spotify** **PlayStation.Plus**[Abre tu cuenta](#)

(3)

5) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra P invertible $\neq I_3$

$$P \cdot B = B', \text{ donde } B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\exists P$ invertible $\neq I_3$ $P \cdot B = B'$ ssi B y B' son equivalentes por filas. Esto es equivalente a que B y B' sean equivalentes a la misma matriz escalonada reducida. Hacemos operaciones elementales en las filas de B hasta llegar a una matriz escalonada reducida y hacemos las mismas operaciones elementales a I_3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{T_2' = T_2 - T_1 \\ T_3' = T_3 - T_1}]{\substack{B \\ I_3}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{T_2' = T_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{T_3' = T_3 + 2T_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{T_3' = -\frac{1}{2}T_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{T_2' = T_2 + 2T_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{T_1' = T_1 - 2T_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

\uparrow matriz escalonada reducida equiv. a B , es forma de Hermite de B

Hazte cliente de BBVA y ...

ahórrate 6 meses de suscripción

WUOLAH
+ BBVA

NETFLIX

Spotify

HBOmax

Disney+

PlayStation Plus

DAZN

Ahora, si te abres una Cuenta Online en BBVA, te reembolsamos una de estas suscripciones durante 6 meses (hasta 9,99€/mes) al pagarla con tu tarjeta Aqua Débito

Promoción solo para nuevos clientes de BBVA. Válida hasta el 30/06/2023. Estas empresas no colaboran en la promoción.

1/6

Este número es indicativo del riesgo del producto, siendo 1/6 indicativo de menor riesgo y 6/6 de mayor riesgo.

BBVA está adherido al Fondo de Garantía de Depósitos de Entidades de Crédito de España. La cantidad máxima garantizada es de 100.000 euros por la totalidad de los depósitos constituidos en BBVA por persona.

Es fácil ver que podemos pasar de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a B'

(4)

haciendo operaciones elementales en filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3' = -F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right). \text{ Si tenemos } P \text{ como } P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que P es invertible (ya que se obtiene haciendo operaciones elementales a I_3) y $P \cdot B = P'$

4) P_1 y P_2 son dos matrices regulares $n \times n$. Demuestra que $\exists Q$ regular $n \times n$ y $Q P_1 = P_2$

Forma 1 - Como P_2 es regular, $\exists P_2^{-1}$. Tomamos $Q = P_2 P_1^{-1}$.

En ese caso Q es regular ya que, si denotamos $Q' = P_1 P_2^{-1}$, se tie-

$$\begin{aligned} \text{he } Q \cdot Q' &= (P_2 P_1^{-1})(P_1 P_2^{-1}) = P_2 (P_1^{-1} P_1) P_2^{-1} = P_2 \cdot I_n \cdot P_2^{-1} = \\ &= P_2 \cdot P_2^{-1} = I_n \text{ y } Q' \cdot Q = (P_1 P_2^{-1})(P_2 P_1^{-1}) = P_1 (P_2^{-1} P_2) P_1^{-1} = \\ &= P_1 I_n P_1^{-1} = P_1 P_1^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

WUOLAH

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.



Abre tu cuenta



WUOLAH
+ BBVA

Por otra parte $Q \cdot P_1 = (P_2 P_1^{-1}) P_1 = P_2 (P_1 P_1^{-1}) = P_2 \cdot I_n = P_2$,
 por lo que $Q P_1 = P_2$ como queríamos. (5)

Forma 2: Una matriz Q es regular ssi Q es producto de matrices elementales. Entans $\exists Q$ regular \Leftrightarrow

$Q \cdot P_1 = P_2$ si y ssi si se puede pasar de P_1 a P_2 haciendo oper. elementales en filas, es decir, si P_1 y P_2 son equivalentes por filas. Por otra parte, como P_1 es regular, existe una sucesión de operaciones elementales que transforman P_1 en I_n . Como P_2 es regular, existe una sucesión de operaciones elementales que transforman P_2 en I_n . Haciendo las inversas de estas operaciones elementales en orden contrario, pasamos de I_n a P_2 , por lo que podemos pasar de P_1 a I_n y luego de I_n a P_2 haciendo operaciones elementales, por lo que P_1 y P_2 son equivalentes por filas.

5) Usa determinantes para decidir para qué valores de m el sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ (*) \quad mx + 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{tiene más soluciones}$$

que la trivial $(0, 0, 0)$

(6)

El sistema (*) es homogéneo por lo que siempre tiene solución (al menos, la trivial)

Su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea A' su

matriz ampliada. Calculamos el determinante de A :

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 + 1 + m + 2 - 2 + m = 2m + 5.$$

$$\text{Entonces } \det A = 0 \text{ ssi } 2m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$\det A \neq 0 \text{ ssi } 2m + 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{5}{2}$$

Como (*) siempre tiene solución, por Rouché, $\text{rg } A = \text{rg } A'$.

Entonces

$$\boxed{m = -\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \text{rg } A = \text{rg } A' < 3 \Leftrightarrow (*) \text{ es S. c. I} \\ \Leftrightarrow (*) \text{ tiene más soluciones que la trivial.}$$