NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

---

1. El conjunto resultado de evaluar la expresión conjuntista $(\emptyset \cup \{\, \{\emptyset\}, \{\, \{\emptyset\}, \emptyset \,\}\,\}) \cap (\, \{\emptyset\} \cup \{\, \{\emptyset\}\,\})$ es

   ☐ $\emptyset$

   ☐ $\{\emptyset\}$

   ☐ $\{\, \emptyset, \{\emptyset\,\}\,\}$

   ☐ Ninguna de las anteriores

2. Sea A un conjunto con $|A| = 10$ y sea R una relación de equivalencia sobre A. Sean $a, b, c \in A$ con $\Big|[a]\Big| = 3, \Big|[b]\Big| = 5$ y $\Big|[c]\Big| = 1$. El número de clases de equivalencia determinadas por R es

   ☐ 4

   ☐ 3

   ☐ 2

   ☐ 5

3. La función definida por $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2, f(n) = f(n-3)$, para $n \geq 3$, cumple que para todo $n \in \mathbb{N}$:

   ☐ $f(n) = n$ div 3

   ☐ $f(n) = n$

   ☐ $f(n) = n$ mod 3

   ☐ f no está bien definida

4. Si a y b son enteros positivos tales que $3a - 5b = 27$ entonces

   ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **no** puede ser 27

   ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **no** puede ser 13

   ☐ el $\text{mcd}(a, b)$ **puede** ser 14

   ☐ Ninguna de las afirmaciones anteriores es cierta

5. La relación R definida sobre $\mathbb{N}$ como:

   $$xRy \iff (x = y) \;\vee\; (x + y \text{ es impar})$$

   es

   ☐ relación de orden parcial

   ☐ relación de orden estricto

   ☐ no es ni relación de orden ni relación de equivalencia

   ☐ relación de equivalencia

- [ ] El segundo es el único no numerable
- [ ] El primero y el tercero son no numerables
- [ ] El tercero es el único numerable

7. (1,5 puntos) Considera la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_1$ definida recursivamente como sigue:

$$f(0) = 1, \;\; f(1) = 3,$$

$$f(n) = 6 * f(n-1) - 9 * f(n-2) + 3^n \qquad (n \geq 2)$$

Razonando por inducción, demuestra que $f(n) = \frac{3^n}{2}(n^2 - n + 2)$, para todo $n \geq 0$. Indica qué tipo de inducción utilizas y justifica los pasos de tu demostración, en especial **indica cuándo aplicas la hipótesis de inducción y por qué puedes aplicarla.**

8. (1 punto) Sean $a, b, c \in \mathbb{N}_1$. Demuestra que

$$c|a \wedge c|b \Longleftrightarrow c \,|\, \mathrm{mcd}(a, b)$$

(*Idea*: En uno de los sentidos conviene usar el teorema de Bézout).

9. (0,5 puntos) Demuestra que **no siempre** es cierto que

$$(A \oplus B) \setminus B \;\;=\;\; B \setminus (A \oplus B)$$

(Recuerda que dados dos conjuntos C y D, $\;C \oplus D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$)

10. (1,5 puntos) Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

    a) Define sobre él **dos** relaciones de equivalencia **distintas** que **no sean** ni la identidad $id_A = \{(a, a) \,/\, a \in A\}$, ni el total $A \times A$.

    b) Estudia si es verdadero o falso que la unión de dos relaciones de equivalencia **siempre** sigue siendo una relación de equivalencia.

11. (1 punto) Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 + \frac{2}{x}$. Estudia si f es inyectiva y/o suprayectiva.

12. (1,5 puntos) Sea la relación R definida sobre $\mathbb{N}_1$ como:

$$xRy \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } 5^k \cdot x = y$$

    a) Demuestra que R es una relación de orden parcial.

    b) Dado $S = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50\}$ dibuja un diagrama de Hasse que represente el orden parcial R restringido a S.

    c) Determina los elementos extremos y extremales en S.