EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Febrero 2013)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **2 horas**.
- Cada una de las ocho primeras preguntas son tipo test y tienen una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,75 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,25 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

1. Definimos la relación $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ del siguiente modo:

$$xRy \iff (x \cdot y = x) \qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

Indica la respuesta **correcta**:

☐ R es reflexiva

☐ R es antisimétrica

☐ R es antirreflexiva

☐ Ninguna de las respuestas anteriores

2. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ definida como $f(A) = (min(A))!$. Indica la respuesta **correcta**:

☐ f es inyectiva pero no biyectiva

☐ f es suprayectiva pero no biyectiva

☐ f es biyectiva

☐ Ninguna de las respuestas anteriores

3. Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dos funciones definidas como:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ f(2n) + 4 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq n \leq 1 \\ g(n-2) + 1 & \text{si } \exists k \geq 1 \,:\, n = 2k \\ g(n-1) + 2 & \text{si } \exists k \geq 1 \,:\, n = 2k + 1 \end{cases}$$

Indica la respuesta **correcta**:

☐ f está bien definida, pero g no lo está

☐ g está bien definida, pero f no lo está

☐ f y g están bien definidas

☐ f y g no están bien definidas

4. Sea $R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la relación binaria definida del siguiente modo:

$$A \, R \, B \iff min(A) \leq min(B) \qquad (A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

Dados los siguientes asertos, indica la respuesta **correcta**:
1. R es una relación de orden
2. R es una relación de equivalencia

- ☐ El primer aserto es cierto, pero el segundo es falso
- ☐ El segundo aserto es cierto, pero el primero es falso
- ☐ Los dos asertos son ciertos
- ☐ Los dos asertos son falsos

5. Sea A el conjunto $A = \{1, \{1, 2\}, \{2\}, \emptyset\}$. Dados los siguientes asertos, determina el enunciado **correcto**:
1. $\{1\} \in A$.
2. $\{1\} \subseteq A$.

- ☐ El primer aserto es cierto; el segundo es falso.
- ☐ El primer aserto es falso; el segundo es cierto.
- ☐ Los dos asertos son falsos.
- ☐ Los dos asertos son ciertos.

6. Dado un conjunto A no vacío y una relación de equivalencia sobre A que cumple la propiedad conexa. ¿Cuántas clases de equivalencia tiene el conjunto cociente A/R?

- ☐ No tiene ninguna
- ☐ Tiene necesariamente una
- ☐ Puede tener una o más de una
- ☐ Tiene necesariamente más de una

7. Dado el siguiente conjunto ordenado $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24, 30, 60\}$ con el orden de la divisibilidad. Indica cuál de los siguientes subconjuntos de A **es** un retículo.

- ☐ $\{2, 4, 6, 8\}$
- ☐ $\{2, 3, 4, 6, 12\}$
- ☐ $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- ☐ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

8. Sea $f : \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primo}\} \times \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Indica la respuesta **correcta**:

- ☐ f puede ser suprayectiva pero no puede ser biyectiva
- ☐ f puede ser inyectiva pero no puede ser biyectiva
- ☐ f puede ser biyectiva
- ☐ Ninguna de las respuestas anteriores

9. **[0,75 puntos]** Dado el conjunto $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) |\ X \text{ finito y } |X| \text{ primo}\}$ con el orden de inclusión, indica cuáles son sus elementos **extremos** y **extremales**, en el caso de que existan. Esto es, indica su máximo y mínimo, si los hay, o los elementos minimales y maximales que haya. Justifica tu respuesta utilizando únicamente el espacio reservado para ello.

10. **[0,75 puntos]** Sea $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos p_n como el mayor factor primo de n. Sea R la relación binaria sobre el conjunto A definida del siguiente modo:

$$x \, R \, y \iff p_x \leq p_y$$

Estudia si R es de orden. Demuéstralo formalmente si es cierto y da un contraejemplo si es falso. Justifica tu respuesta utilizando únicamente el espacio reservado para ello.

11. **[2,5 puntos]** Demuestra utilizando **inducción simple** que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{i!} = \frac{n!-1}{n!}$$

Justifica tus pasos. (Puedes utilizar el reverso de la página si lo precisas.)

$$P(K) \equiv \sum_{i=1}^{K} \frac{i-1}{i!} = \frac{K!-1}{K!}$$

$$P(K+1) \equiv \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \frac{i-1}{i!}}_{H.I} + \frac{K+1-1}{(K+1)!} = \frac{K!-1}{K!} + \frac{K}{(K+1)!} = \frac{(K+1)(K!-1)+K}{(K+1)!} = \frac{(K+1)!-1}{(K+1)!}$$

$$\frac{K!(K+1) \cancel{-(K+1)} + \cancel{K}}{(K+1)!} = \frac{(K+1)!-1}{(K+1)!} \quad //$$