EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Febrero 2014)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **2 horas**.
- Cada una de las ocho primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,75 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,25 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

1. Dados los siguientes asertos:

   (1) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

   ☐ Los dos asertos son ciertos.
   ☐ El primer aserto es cierto y el segundo falso.
   ☐ El primer aserto es falso y el segundo cierto.
   ☐ Los dos asertos son falsos.

2. Sea R una relación sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida como $XRY \iff X \cup Y = X$. Indica la respuesta correcta:

   ☐ R es una relación de equivalencia.
   ☐ R es un orden total.
   ☐ R es un orden parcial.
   ☐ Ninguna de las anteriores.

3. Sean a, $b \in \mathbb{N}$ tales que $m.c.d.(a, 4) = m.c.d.(b, 4) = 2$. Indica la respuesta correcta:

   ☐ $m.c.d.(a + b, 4) = 2$.
   ☐ $m.c.d.(a + b, 4) = 4$.
   ☐ $m.c.d.(a + b, 4) = 1$.
   ☐ Ninguna de las anteriores.

4. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una función definida como $f(X, Y) = X \cup Y$. Indica la respuesta correcta:

   ☐ f es inyectiva pero no biyectiva.
   ☐ f es suprayectiva pero no biyectiva.
   ☐ f es biyectiva.
   ☐ Ninguna de las anteriores.

5. Dados los siguientes conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\quad \mathbb{N} \cap [0,4]$, $\quad \mathbb{N} \times \mathbb{Q}$. Indica la respuesta correcta:

   - ☐ Los tres conjuntos son numerables.
   - ☐ Ninguno de los tres conjuntos es numerable.
   - ☐ El tercero es el único numerable.
   - ☐ El segundo y el tercero son numerables.

6. Sea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ un conjunto y $R \subseteq A \times A$ la relación de orden definida como:

$$x \; R \; y \Leftrightarrow 2 * x < y$$

   Indica la respuesta correcta:

   - ☐ Es un semirretículo superior, pero no es un semirretículo inferior.
   - ☐ Es un semirretículo inferior, pero no es un semirretículo superior.
   - ☐ Es un retículo.
   - ☐ Ninguna de las anteriores.

7. Sean a, b y c tres números naturales tales que a y b son primos y $a|bc$. Indica la respuesta correcta:

   - ☐ Siempre se da que $a|c$.
   - ☐ Si a y b son distintos, entonces $a|c$.
   - ☐ Si c es primo entonces $a|c$.
   - ☐ Ninguna de las anteriores es correcta.

8. Sea $R \subseteq \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}$ la relación binaria dada por

$$R = \{(0,0),(1,1),(1,0),(0,1),(2,2),(3,1),(1,3),(3,3),(3,0),(0,3)\}$$

   Indica la respuesta correcta:

   - ☐ R es una relación de equivalencia y da lugar a 3 clases de equivalencia.
   - ☐ R no es una relación de equivalencia.
   - ☐ R es una relación de equivalencia y da lugar a 2 clases de equivalencia.
   - ☐ R es una relación de equivalencia y da lugar a 1 clase de equivalencia.

9. **[2 puntos]** Demuestra por inducción que para todo número natural n, $n \geq 1$, se verifica $a_n = (1+n)\cdot 3^n$ donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ a_2 &= 27 \\ a_n &= 6 \cdot a_{n-1} - 9 \cdot a_{n-2} \quad \text{si } n \geq 3 \end{aligned}$$

10. **[2 puntos]** Sea $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ un conjunto ordenado donde la relación $\sqsubseteq$ se define como

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \iff x \leq x' \wedge y \leq y'$$

Demuestra que $\sqsubseteq$ es un orden. ¿Es $\sqsubseteq$ un orden total? ¿Es $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sqsubseteq)$ un retículo? Justifica tus respuestas.