FORMACIÓN UNIVERSITARIA

Tel: 91 399 45 49
: 615 29 80 22
www.mathsinformatica.com
academia@mathsinformatica.com

TEMA 2.1. SUCESIONES

DEFINICIÓN. Una sucesión de números reales es una aplicación

$$f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$$
$$n \to f(n) = x_n$$

NOTACIÓN

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales.

$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \ldots\}$

Ejemplo:

a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \ldots\right\}$

b) $\left(\sqrt[n]{2}\right)_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}, \ldots\right\}$

c) $x_0 = 2$

$x_n = \dfrac{x_{n-1} + 2}{2x_{n-1}}$ $\quad n \geq 1$ Se trata de una sucesión recurrente

DEFINICIÓN: SUCESIONES CONVERGENTES. Una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ se dice convergente a $L \in \mathbf{R}$ y se escribe $\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = L} \in \mathbf{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$?, $\exists n_0$ / si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - L| < \varepsilon$

CONVERGE $\Longleftrightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} L$

por ello L tiende a 0

Ejemplo: $\quad \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \to 0$

Tenemos que probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ / si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| < \varepsilon$

$\exists n_0 \in N$ / $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0$$

por todo $n \geq n_0$, entonces $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \overbrace{|x_n - 0|}^{\text{ecuación}} = \frac{1}{n} < \varepsilon$

PROPOSICIÓN. Si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$, tiene límite, éste es único.

PROPIEDADES:

1) Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ se dice creciente si $\boxed{x_n \leq x_{n+1}}$ $\forall n \geq 1$

2) Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ se dice decreciente si $\boxed{x_{n+1} \leq x_n}$ $\forall n \geq 1$

Ejemplo: $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente $2 < 2^2 < 2^3 < \ldots$

$\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \ldots$

$a_n \leq a_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} f(x) \neq \infty$

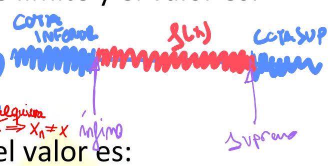
PROPOSICIÓN:

1) Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ creciente y $\underbrace{\text{acotada superiormente}}$ tiene límite y el valor es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \,;\, n \geq 1\}$$

acotada superior ?

Sí, porque x_n es una sucesión cualquiera en la cual asumimos que lo esta $\Rightarrow x_n \neq x$



2) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ decreciente y $\boxed{\text{acotada inferiormente}}$ tiene límite y el valor es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = Inf\{x_n \,;\, n \geq 1\}$$

el límite de la sucesión es igual al ínfimo!

OPERACIONES CON SUCESIONES

Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \to x$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \to y$ con $x, y \in \mathbf{R}$

a) $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \to x + y$

b) $(\lambda x_n)_{n=1}^{\infty} \to \lambda x$

c) $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty} \to xy$

d) Si $y_n \to y \neq 0$ entonces $\left(\frac{1}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty} \to \frac{1}{y}$

c) Si $y_n \to y \neq 0$ entonces $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty} \to \frac{x}{y}$

?

$\sup = \lim_{n\to\infty} a_n$

¿$\sup \in a_n$? NO!

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sup} \in \text{Cotas superiores} \\ \text{Inf} \in \text{Cotas inferiores}\end{array}}$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{2n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{2}{1+{}^{1}\!/_{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \to \left(\frac{2}{1+0}\right)^{\infty} = 2^{\infty} = \infty$

b) $x_0 = 2$ y $x_n = \frac{(x_{n-1})^2 + 2}{2x_{n-1}}$ $\quad n \geq 1$

existe un límite x_n = límite $x_{n-1} = L$

Si $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = l$ Tomamos límites:

$$l = \frac{l^2+2}{2l} \to 2l^2 = l^2 + 2\,;\; l^2 = 2\,;\; l = \sqrt{2}$$

PROPOSICIÓN

1) Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente, entonces está acotada:

$(\exists M > 0 \,/\, |x_n| \leq M \;\forall n \in N)$

2) Si $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ entonces $|x_n| \to |x|$

Tel: 91 399 45 49
: 615 29 80 22
www.mathsinformatica.com
academia@mathsinformatica.com

3) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones convergentes / $x_n \leq y_n \quad \forall n \in N$;
($x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ y $y_n \to y$) se tiene que $x \leq y \ \forall n \in N$

4) Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ son tres sucesiones que cumplen que:
$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \forall n \in N$
Si $x_n \to a$ y $z_n \to a$, entonces $\exists \lim\limits_{x\to\infty} y_n = a$

CÁLCULO DE LÍMITES

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+n+7}{2n^3+n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3}{2n^3} = \dfrac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$$= \lim_{n\leftarrow\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

REGLA: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ siendo f continua. Se puede usar la regla de L'Hôpital.

CRITERIO DEL SANDWICH

Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ tres sucesiones que cumplen: $(a_n) \leq (b_n) \leq (c_n)$ y
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

CRITERIO DE STOLZ

Sea el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\infty}{\infty}$

se cumple: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$

Se suele emplear cuando a_n y/o b_n viene dada como suma infinita de términos.

EJERCICIOS EXAMEN

1. Parcial MMI Febrero 2012. Calcula el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

2. Final MMI Junio 2012. Calcular el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^{2n}$

3. Examen Septiembre 2011. Cálculo (Sistemas). Siendo b un número real calcula el siguiente límite: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n-b+1}{7n+11}\right)^{2n}$

4. Examen Febrero 2011. Cálculo (Sistemas). Sea A un número real cualquiera. Calcula el valor de: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+A+3}{3n+3}\right)^{3n}$

5. Parcial MMI Febrero 2017. Se define el número real e como $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Calcula el límite de $\left(\left(1+\dfrac{1}{n+3}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$

6. Parcial MMI Febrero 2013. Se considera la sucesión (x_n) definida por:
$x_1=\sqrt{3}, x_{n+1}=\sqrt{3+x_n}$ para $n\geq 1$.

a) Demuestra que (x_n) es monótona creciente y acotada superiormente.
b) Calcula $\lim x_n$.

7. Parcial MMI Febrero 2015. Definimos $x_1=\sqrt{2}$ y $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Prueba que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada. Calcula su límite.

8. Final MMI Junio 2011, Junio 2013, Febrero 2014 y Cálculo Enero 2021. Calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

9. MMI Septiembre 2016, Septiembre 2017, Parcial Enero 2019, Cálculo Enero 2022. Calcula el límite: $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{(n^2+1)}+\dfrac{n-1}{(n^2+2)}+\ldots+\dfrac{n-1}{(n^2+n)}$

10. Final MMI Junio 2015. Calcula el límite $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2-1}\right)$

11. Cálculo Julio 2021. Comprueba que la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por recurrencia por

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{4-a_n} \end{cases}$$

es convergente. Calcula su límite

12. Parcial MMI Enero 2018, Febrero 2016 y Extraordinaria Junio 19. Determina si la sucesión siguiente converge o no: $a_{n+1} = a_n \dfrac{n}{n+7}$ con $a_1 = 7$

13. Cálculo Extraordinaria Junio 2022. Estudiar la convergencia de la sucesión recurrente definida por $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n+1}$, con $a_1 = 2$.

En caso de que sea convergente, calcular el valor límite.

14. Final MMI Junio 2018. Sea a_n el número de instrucciones de un determinado algoritmo para su ejecución sobre *n* datos de entrada. Se sabe que dicho algoritmo actúa de la siguiente manera:

1) Con sólo un dato de entrada resuelve el problema usando una instrucción.
2) Con n datos de entrada una 4*n* instrucciones para reducir el problema a $n-1$ datos y se ejecuta sobre ellos el mismo algoritmo.

Se pide:
a) Definir la sucesión recurrente $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
b) Estudiar la monotonía y acotación de la misma.
c) Probar por inducción que $|a_n - 2n^2| < 2n$ para todo n.
d) Deducir que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2n^2} = 1$