T7: Integrales impropias. Aplicaciones de la integral

Sea $f: [a, \infty)$ $(-\infty, a]$ $: \exists \int_a^M f \,/\, \int_M^a f$

Integral de primera especie (desde $[0, +\infty)$ o $(-\infty, 0]$)

Si $\lim_{M \to \infty} \int_a^M f = L$, la integral converge

Integral de primera especie (desde $(-\infty, +\infty)$)

Si $\exists c \in \mathbb{R} : \int_{-\infty}^c f$ y $\int_c^\infty f$ convergen

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$$

Criterios de comparacion

- Por mayorante: $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrables en $[a, M]$

  $\exists x_0 : 0 \leq f(x) \leq g(x)$

  Si $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge

  Si $\int_a^\infty g$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ diverge

- Por límite: f, g NO negativas en $[a, \infty)$

  Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$

  - Si $L \neq 0$ $\int_a^\infty f$ y $\int_a^\infty g$ tienen el mismo carácter
  - Si $L = 0$ y $\int_a^\infty g$ converje entonces $\int_a^\infty f$ converge

- Criterio integral de convergencia de series

  $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converje $\Leftrightarrow \int_1^\infty f$ converge

Integral de segunda especie

f es integrable en $[a, c]$ con $a \leq c \leq b$ $\left(\exists \int_a^c f\right)$

$\int_a^b f = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f$. Si $\lim_{c \to b^-} \int_a^c f = L$, converge

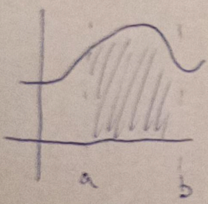
f es integrable en $[c, b]$ con $a \leq c \leq b$ $\left(\exists \int_c^b f\right)$

$\int_c^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f$. Si existe, converge

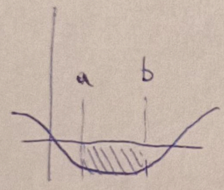
f es integrable en $[a,b] \setminus \{c\}$

$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Si existen, converge

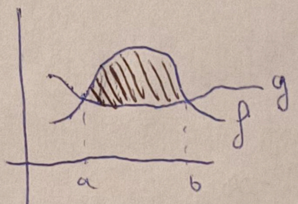
APLICACIONES



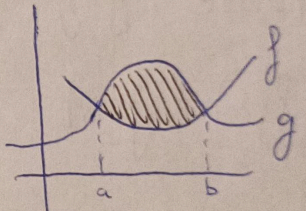
$A = \int_a^b f$



$A = -\int_a^b f$



$A = \int_a^b f - g$



$A = \int_a^b g - f$

Volumen sólidos revolución

$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$

Área sólido revolución

$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$