

EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Febrero 2015)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **2 horas**.
- Cada una de las ocho primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,75 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,25 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

1. La relación R , definida en el conjunto \mathbb{N}_1 de los números naturales positivos por la condición $xRy \Leftrightarrow \text{mcd}(x, y) = 1$, es:

- ☐ Reflexiva.
- ☐ Simétrica.
- ☐ Transitiva.
- ☐ Antirreflexiva.

2. Si A, B, C y D son conjuntos cualesquiera, $(A \times C) \cap (B \times D)$ es igual a:

- ☐ $(A \cap B) \times (C \cap D)$.
- ☐ $(A \cap C) \times (B \cap D)$.
- ☐ $(A \cap D) \times (B \cap C)$.
- ☐ $(A \cup B) \times (C \cup D)$.

3. Sea $f : \mathbb{N}_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tal que $f(n) = \{p \mid p \text{ es un factor primo de } n\}$, donde \mathbb{N}_2 denota los números naturales mayores o iguales que 2 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- ☐ f no es inyectiva ni suprayectiva.
- ☐ f es inyectiva pero no suprayectiva.
- ☐ f no es inyectiva pero es suprayectiva.
- ☐ f es biyectiva.

4. Dados los siguientes conjuntos, $\{q \in \mathbb{Q} \mid 15 \geq q^2 \geq 0\}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid 2n^2 + 3n < 40\}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{Q} \cap [0, 2]$, indica la respuesta correcta:

- ☐ Solo es numerable el primer conjunto.
- ☐ Solo son numerables el segundo y el tercer conjuntos.
- ☐ Solo son numerables el primer, el segundo y el cuarto conjuntos.
- ☐ Todos los conjuntos son numerables.

5. Sea (A, \sqsubseteq) un conjunto ordenado tal que $A = \{0, 1, 3, 4, 6\}$ y para todo $x, y \in A$, $x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x = y$ o $y - x \geq 2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- ☐ (A, \sqsubseteq) es un retículo.
- ☐ (A, \sqsubseteq) es un semirretículo superior pero no un retículo.
- ☐ (A, \sqsubseteq) es un semirretículo inferior pero no un retículo.
- ☐ Ninguna de las anteriores.
6. Sea $R \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ una relación binaria definida como $(x, y) R (x', y') \Leftrightarrow x + y \leq x' + y'$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- ☐ R es una relación de equivalencia.
- ☐ R es una relación de orden.
- ☐ R es una relación de orden estricto.
- ☐ Ninguna de las anteriores.
7. Sean $A = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{3, 4\}\}$ y $B = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$ dos familias de conjuntos. Indica la respuesta correcta:
- ☐ $B \subseteq A$.
- ☐ $A \subseteq B$.
- ☐ $B \in A$.
- ☐ $\bigcup A = \bigcup B$.
8. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ tales que $a \mid b$ y $c \mid d$. Considera los asertos:
- Se cumple $a + c \mid b + d$.
 - Se cumple $a * c \mid b * d$.

Determina el enunciado correcto:

- ☐ El primer aserto siempre se cumple, pero el segundo algunas veces no se cumple.
- ☐ El segundo aserto siempre se cumple, pero el primero algunas veces no se cumple.
- ☐ Existen situaciones en que ninguno de los dos asertos se cumple.
- ☐ Los dos asertos siempre se cumplen.

9. [2 puntos] Demuestra por inducción, indicando si es simple o completa, que la función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente por

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f(1) &= 1 \\f(n) &= 5f(n-1) - 6f(n-2) \quad \text{para } n \geq 2\end{aligned}$$

cumple que $f(n) = 3^n - 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

10. [2 puntos] Sobre el conjunto \mathbb{Z} de los números enteros se define la relación R mediante:

$$x R y \iff x + 4y \text{ es múltiplo de } 5.$$

Demuestra que R es una relación de equivalencia. Indica cuáles son las clases de equivalencia de 0 y 2.