soluciones-practica-4-grupo-A.pdf

Infosalvada

Álgebra Lineal

1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática
Universidad Complutense de Madrid

SOLUCIONES PRÁCTICA 4 GRUPO A (1)

1) Usa Gauss para demostrar que $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y calcular A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 + F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = \frac{1}{3} F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

Como A es equivalente por filas a I_3,

$$\boxed{A \text{ es invertible y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

2) Escribe la matriz A del ejercicio 1 como producto de matrices elementales.

Forma 1: En el ejercicio 1 hemos visto que haciendo la siguiente cadena de operaciones elementales en filas: $F_1 \leftrightarrow F_3$; $F_3' = F_3 - 2F_1$;

$F_3' = F_3 - 4F_2$; $F_1' = F_1 + F_2$; $F_2' = F_2 + F_3$; $F_2' = \frac{1}{3}F_2$, pasamos de A a I_3

Eso quiere decir que

$$\underbrace{\left(E_2\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot E_{23}(1)\cdot E_{12}(1)\cdot E_{32}(-4)\cdot E_{31}(-2)\cdot E_{13}\right)}_{A^{-1}} A = I_3 ,$$

por lo que $A^{-1} = E_2\left(\frac{1}{3}\right)\cdot E_{23}(1)\cdot E_{12}(1)\cdot E_{32}(-4)\cdot E_{31}(-2)\cdot E_{13}$,

por lo que $\underline{A} = E_{13}^{-1}\cdot E_{31}(-2)^{-1}\cdot E_{32}(-4)^{-1}\cdot E_{12}(1)^{-1}\cdot E_{23}(1)^{-1}\cdot E_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} =$

$= E_{13}\cdot E_{31}(2)\cdot E_{32}(4)\cdot E_{12}(-1)\cdot E_{23}(-1)\cdot E_2(3) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Forma 2 : En el ejercicio 1 hemos visto que pasamos de A a I_3 haciendo la siguiente sucesión de operaciones elementales en filas:

$F_1 \Leftrightarrow F_3$; $F_3' = F_3 - 2F_1$, $F_3' = F_3 - 4F_2$; $F_1' = F_1 + F_2$; $F_2' = F_2 + F_3$; $F_2' = \frac{1}{3}F_2$.

Entonces, pasamos de I_3 a A haciendo las inversas de esas operaciones elementales, en sentido contrario, i.e, haciendo:

$F_2 = 3F_2'$; $F_2 = F_2' - F_3'$; $F_1 = F_1' - F_2'$; $F_3 = F_3' + 4F_2'$; $F_3 = F_3' + 2F_1'$; $F_1 \Leftrightarrow F_3'$. Entonces

$$\boxed{A} = E_{13}\cdot E_{31}(2)\cdot E_{32}(4)\cdot E_{12}(-1)\cdot E_{23}(-1)\cdot E_2(3)\cdot I_3 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra P invertible t.q.

$P \cdot B = B'$, donde $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\exists P$ invertible t.q. $P \cdot B = B'$ ssi B y B' son equivalentes por filas. Esto es equivalente a que B y B' sean equivalentes a la misma matriz escalonada reducida. Hacemos operaciones elementales en las filas de B hasta llegar a una matriz escalonada reducida y hacemos las mismas operaciones elementales a I_3:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right.}_{B} \underbrace{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{I_3} \xrightarrow[F_3' = F_3 - F_1]{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = -F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = -\frac{1}{2} F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2' = F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 - 2F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

↑ matriz escalonada reducida equiv. a B, i.e. forma de Hermite de B

Es fácil ver que podemos pasar de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a B'

haciendo operaciones elementales en filas:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = -F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$ Si tenemos P como $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$

tenemos que P es invertible (ya que se obtiene haciendo operaciones elementales a I_3) y $P \cdot B = P'$

4) P_1 y P_2 son dos matrices regulares $n \times n$. Demostrar que $\exists\, Q$ regular $n \times n$ tq $QP_1 = P_2$

Forma 1 – Como P_1 es regular, $\exists\, P_1^{-1}$. Tomamos $Q = P_2 P_1^{-1}$.

En ese caso Q es regular ya que, si denotamos $Q' = P_1 P_2^{-1}$, se tiene $Q \cdot Q' = (P_2 P_1^{-1})(P_1 \cdot P_2^{-1}) = P_2 (P_1^{-1} \cdot P_1) \cdot P_2^{-1} = P_2 \cdot I_n \cdot P_2^{-1} =$

$= P_2 \cdot P_2^{-1} = I_n$ y $Q' \cdot Q = (P_1 P_2^{-1})(P_2 P_1^{-1}) = P_1 (P_2^{-1} \cdot P_2) P_1^{-1} =$

$= P_1 I_n \cdot P_1^{-1} = P_1 \cdot P_1^{-1} = I_n$.

Por otra parte $Q \cdot P_1 = (P_2 P_1^{-1}) P_1 = P_2 (P_1^{-1} P_1) = P_2 \cdot I_n = P_2$, por lo que $QP_1 = P_2$ como queríamos.

Forma 2: Una matriz Q es regular ssi Q es producto de matrices elementales. Entonces $\exists Q$ regular tq $Q \cdot P_1 = P_2$ si y sólo si se puede pasar de P_1 a P_2 haciendo oper. elementales en filas, es decir, si P_1 y P_2 son equivalentes por filas. Por otra parte, como P_1 es regular, existe una sucesión de operaciones elementales que transforman P_1 en I_n. Como P_2 es regular, existe una sucesión de operaciones elementales que transforman P_2 en I_n. Haciendo las inversas de estas operaciones elementales en orden contrario, pasamos de I_n a P_2, por lo que podemos pasar de P_1 a I_n y luego de I_n a P_2 haciendo operaciones elementales, por lo que P_1 y P_2 son equivalentes por filas.

---

5) Usa determinantes para decidir para qué valores de m el sistema

$$(*) \quad \left.\begin{array}{r} -2x + y + z = 0 \\ mx + 2y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array}\right\}$$

tiene más soluciones que la trivial $(0,0,0)$

El sistema $(*)$ es homogéneo por lo que siempre tiene solución (al menos, la trivial)

Su matriz asociada es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y sea A' su matriz ampliada. Calculamos el determinante de A.

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 + 1 + m + 2 - 2 + m = 2m + 5.$$

Entonces $\det A = 0$ ssi $2m+5=0 \iff m = -\frac{5}{2}$

$\det A \neq 0$ ssi $2m+5 \neq 0 \iff m \neq -\frac{5}{2}$

Como $(*)$ siempre tiene solución, por Rouché, $rg\, A = rg\, A'$.

Entonces

$\boxed{m = -\frac{5}{2}} \iff \det A = 0 \iff rg\, A = rg\, A' < 3 \iff (*)$ es S.C.I

$\iff (*)$ tiene más soluciones que la trivial.