EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Parcial Febrero 2018)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

---

1. Dadas las dos siguientes afirmaciones:

   $6 \big| a^2 \Longrightarrow 6 \big| a$ $\qquad$ $4 \big| a^2 \Longrightarrow 4 \big| a$

   - [ ] Ambas son ciertas.
   - [ ] Ambas son falsas.
   - [ ] Solamente es cierta la primera.
   - [ ] Solamente es cierta la segunda.

2. Dadas las dos siguientes afirmaciones, donde $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$:

   $(A \setminus (B \cup C)) \cup B = (A \setminus C) \cup B$ $\qquad$ $A \oplus B = \emptyset \Longrightarrow A = B$

   - [ ] Ambas son ciertas.
   - [ ] Ambas son falsas.
   - [ ] Solamente es cierta la primera.
   - [ ] Solamente es cierta la segunda.

3. Sean las familias de conjuntos:

   $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq k\}$ $\qquad$ $B_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$

   Indica la respuesta correcta:

   - [ ] $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ y $\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.
   - [ ] $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ y $\bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.
   - [ ] $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ y $\bigcap\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.
   - [ ] $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$ y $\bigcup\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

4. Sea $f : \{2n/n \in \mathbb{N}\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N}/n > 5\} \times \mathbb{Q}$, señala la respuesta correcta.

   - [ ] f puede ser suprayectiva pero no biyectiva.
   - [ ] f puede ser inyectiva pero no biyectiva.
   - [ ] f puede ser biyectiva.
   - [ ] Ninguna de las anteriores.

5. Definimos una relación R en $\mathbb{N}$ como sigue: $aRb \iff a+b$ es par.

   - ☐ R no es una relación de equivalencia.
   - ☐ R es una relación de equivalencia y $|A/R| = 1$
   - ☐ R es una relación de equivalencia y $|A/R| = 2$
   - ☐ R es una relación de equivalencia y $|A/R|$ es infinito.

6. Sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ se define la relación binaria $ARB \iff A \cap B = C$, siendo $C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ un conjunto fijado a priori. Entonces:

   - ☐ es una relación de equivalencia.
   - ☐ es un orden parcial.
   - ☐ es un orden estricto.
   - ☐ Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.

---

7. **[1.5 puntos]** Demuestra por inducción, indicando qué tipo de inducción usas, que para todo $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

8. **[1 punto]** Sea p un número primo y sean $a, b \in \mathbb{Z}$ siendo $a, b \geq 2$. Si $p \big| a^2$ y $p \big| b^3$, demuestra que $p \big| a+b$

9. **[3 puntos]** Definimos la relación R en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ como:

$$XRY \iff X \cap Y = X \quad X, Y \subseteq \mathbb{N}$$

   a) **[1 punto]** Demuestra que R es una relación de orden sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

   b) Definimos el conjunto $\mathcal{F}' = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| \text{ es impar}\}$ y consideramos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{F}', R)$

      1) **[1 punto]** Estudia sus elementos extremales.

      2) **[1 punto]** Sea $S = \{X \subseteq \{1,2,3,4,5\} \mid |X| = 1 \text{ o } |X| = 3\} \subseteq \mathcal{F}'$. Estudia los elementos extremales de S. Calcula las cotas superiores e inferiores de S y su supremo e ínfimo, si existen.

10. **[1.5 puntos]** Sea $g : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$$g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ (n+1)/2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Estudia si f es inyectiva y/o suprayectiva. En caso afirmativo demuéstralo formalmente y en caso negativo da un contraejemplo.
