EXAMEN de Matemática Discreta y Lógica Matemática

(Parcial Febrero 2017)

NOMBRE:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,12 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa.
- En cada una de las preguntas a desarrollar aparece la puntuación máxima que puede obtenerse al responderlas. La mínima puntuación que puede obtenerse en estas preguntas es 0 .

---

1. Dadas las dos siguientes afirmaciones:

   $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$ $\qquad$ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

   ☐ Ambas son ciertas.
   ☐ Ambas son falsas.
   ☐ Solamente es cierta la primera.
   ☐ Solamente es cierta la segunda.

2. Sea la familia de conjuntos:

   $A_k = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| \leq k\} \quad k \in \mathbb{N}$

   Indica la respuesta correcta:

   ☐ $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ y $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.
   ☐ $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$ y $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$.
   ☐ $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$ y $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$.
   ☐ $\bigcup\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$ y $\bigcap\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0\}$.

3. Dados los conjuntos

   $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \times \{0, 1\}$ $\qquad$ $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

   ☐ Los tres son numerables.
   ☐ Solamente el primero es numerable.
   ☐ Solamente el segundo es numerable.
   ☐ Solamente el primero y el segundo son numerables.

4. Dados los conjuntos

   $\{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ $\qquad$ $(\{a, b, c\} \longrightarrow \{0, 1\})$ $\qquad$ $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$

   ☐ Solamente los dos primeros son finitos.
   ☐ Los tres son finitos, y todos tienen el mismo tamaño.
   ☐ Los tres son finitos, y solamente dos tienen el mismo tamaño.
   ☐ Los tres son finitos, y tienen tamaño distinto dos a dos.

5. Sea S el conjunto de subconjuntos no vacíos de cardinal impar de $\{a, b, c, d, e, f\}$. Definimos el orden parcial R en S como sigue:

$$XRY \iff (X = \{a\} \text{ y } a \notin Y) \text{ ó } (X \subseteq Y)$$

☐ (S, R) tiene máximo y mínimo.

☐ (S, R) tiene máximo pero no tiene mínimo.

☐ (S, R) no tiene máximo pero tiene mínimo.

☐ (S, R) no tiene máximo ni mínimo.

6. Sobre el conjunto $\{0, 1\}$ se define la relación binaria $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ entonces:

☐ es una relación de equivalencia.

☐ es un orden parcial.

☐ es un orden estricto.

☐ Ninguna de las anteriores afirmaciones es cierta.

---

7. [**1.5 puntos**] Dada la siguiente sucesión recurrente:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ a_{n/2}a_{n/2} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ par} \\ 2a_{n-1} & \text{si } n > 0 \quad n \text{ impar} \end{cases}$$

Demuestra por inducción que para todo $n \geq 0$ se cumple $a_n = 2^n$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p es primo y se verifica $p|a$ y $p|a^2 + b^2$ demuestra:

   a) [**0.25 puntos**] $p|a^2$

   b) [**0.75 puntos**] $p|b$.

9. Sobre el conjunto $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid X \text{ es finito}\}$ se define la relación binaria

$$XRY \iff |Y| = |X| + 5k, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{Z} \qquad (|A| \text{ es el cardinal de } A)$$

   a) [**1 punto**] Demuestra que R es de equivalencia sobre $\mathcal{F}$.

   b) [**0.5 puntos**] Da dos elementos distintos de $\mathcal{F}$ que estén relacionados y dos que no lo estén.

   c) [**0.5 puntos**] Describe la clase de equivalencia de $\{1\}$ y del $\emptyset$.

   d) [**0.5 puntos**] ¿Cuántas clases de equivalencia distintas hay?

10. [**2 puntos**] Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función biyectiva. Estudia si la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definida como $f(n) = (g(n), 2g(n))$ es inyectiva y/o suprayectiva. En caso afirmativo demuéstralo formalmente y en caso negativo da un contraejemplo.
