

CONJUNTOS

■ Def

Un conjunto es una colección de objetos.

Los objetos se llaman elementos del conjunto. Escribimos $a \in A$ cuando a es un elemento de A , y $a \notin A$ en caso contrario.

Podemos describir un conjunto de varias formas:

- Listando todos sus elementos cuando es posible.

$$A = \{a, b, c, d\} \quad a \in A, \quad f \notin A$$

$$B = \{\{0, 1\}, 1, \{1, 2\}\}$$

$$\{0, 1\} \in B, \quad 1 \in B, \quad \{1, 2\} \in B.$$

- Usando una propiedad P . Caracterizamos los elementos del conjunto señalando la propiedad o propiedades que tienen que cumplir para ser miembros.

$$\mathbb{R} = \{x | x \text{ es un número real}\}$$

$$O = \{x | x \text{ es un entero impar menor que } 10\}$$

■ Def.

$$A = B \iff (\forall x, x \in A \text{ sii } x \in B.)$$

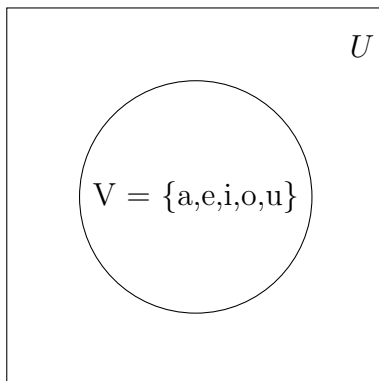
$$\text{Así } \{3, 5, 7\} = \{7, 5, 3\} = \{3, 5, 5, 7\}$$

Representación Gráfica. Diagramas de Venn.

En los diagramas de Venn el conjunto universal U , que contiene todos los elementos que estemos considerando, se representa por un rectángulo. Dentro del rectángulo utilizamos círculos para representar los conjuntos.

■ Ej.

$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad U = \{a, \dots, z\}$$



Hay un conjunto especial sin elementos. Se le llama conjunto vacío y se representa por \emptyset o $\{\}$.

■ Def.

A es un **subconjunto** de B ($A \subseteq B$) $\iff \forall x(x \in A \implies x \in B)$.

$A \subsetneq B$ o $A \subset B$ si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$. $\{1, 2\} \subsetneq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \subseteq B \rightarrow$ SUBCONJUNTO $A=B$ o $A \neq B$
 $A \subset B \rightarrow$ SUBCONJUNTO $A \neq B$
 $A \in B \rightarrow$ PERTENECE

■ Proposición

Sean A, B, C conjuntos. U conjunto universal.

1. $A \subseteq A$ *conjunto vacío pertenece a cualquier conj*

2. $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq U \rightarrow$ QA y

3. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ ✓

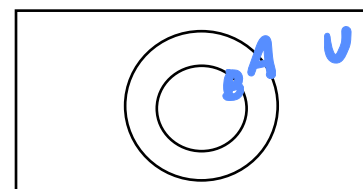
4. $A \not\subseteq A$ QA

5. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \implies A = B$ ($A \subset B$ y $B \subset A$, $A \cap B = \emptyset$)

6. Si $A \subset B \implies B \not\subseteq A$

7. Si $A \subseteq B$ y $B \subset C \implies A \subset C$

8. Si $A \subset B$ y $B \subseteq C \implies A \subset C$



$B \subset A$ y $B \subseteq A$

Dem.

(6) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C \implies A \subset C$

$$\begin{array}{ccc} \forall x \ x \in A & \implies & x \in B \implies x \in C \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \subseteq B & & B \subset C \end{array}$$

Para demostrar $A \subset C$ tenemos que encontrar un $x \in C$ tal que $x \notin A$.
 Como $B \subset C$, existe un $x_0 \in C$ tal que $x_0 \notin B$ y como $A \subseteq B$ $x_0 \notin A$
 ya que si $x_0 \in A \implies x_0 \in B$ ($A \subseteq B \iff \forall x \ x \in A \implies x \in B$).
 Luego $x_0 \in C$ y $x_0 \notin A \implies A \subset C$.

(7) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C \implies A \subset C$

$$\begin{array}{ccc} \forall x \ x \in A & \implies & x \in B \implies x \in C \\ \uparrow & & \uparrow \\ A \subset B & & B \subseteq C \end{array}$$

Para demostrar $A \subset C$ tenemos que encontrar un $x \in C$ tal que $x \notin A$.
 Como $A \subset B$, existe un $x_0 \in B$ tal que $x_0 \notin A$ y como $B \subseteq C$ se verifica
 $\forall x \ x \in B \implies x \in C$, luego $x_0 \in C$ pero $x_0 \notin A$. Por tanto $A \subset C$.

- Operaciones de conjuntos

Sean A, B conjuntos. Definimos la

1. **Unión** $A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$

2. **Intersección**

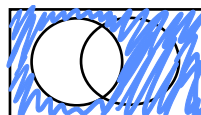
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

3. **Diferencia**

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

4. **Complementario** de A (El conjunto universal está especificado)

$$\overline{A} = \{x \in U | x \notin A\} = U \setminus A.$$



- Def.

A, B se dicen **disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$

- Def.

Dado un conjunto A , el conjunto **Partes de A** se define como $\mathcal{P}(A) = \{S | S \subseteq A\}$

- Ej.

$$A = \{0, 1\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

- Productos Cartesianos

Los elementos de un conjunto no están ordenados, pero en algunos casos el orden es importante.

- Def.

La **n-tupla** ordenada (a_1, a_2, \dots, a_n) es la colección ordenada cuyo primer elemento es a_1 , a_2 es su segundo elemento ... y a_n es el n-ésimo elemento.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \iff a_i = b_i \quad \forall 1 \leq i \leq n \rightarrow \text{son iguales si y solo si todos los elementos en orden son iguales.}$$

Si $n = 2$ hablamos de pares ordenados

$$(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a_1 = b_1 \text{ y } a_2 = b_2$$

- Def.

Sean A, B conjuntos. Definimos el **Producto Cartesiano**

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\}$$

- Ej

$$A = \{1, 2\} \quad B = \{a, b, c\}$$

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2) \dots\}$$

$$(a_n, b_1), (a_{n+1}, b_1^3)$$

1) mantiene b, cambia a

2) cambia b

no es conmutativa

$\emptyset \times B = \emptyset = B \times \emptyset = \emptyset \times \emptyset$ \rightarrow conj vacío \rightarrow omite cualquier ecuación

Si $A = B$ $A \times B = A \times A = A^2 = \{(a, b) | a \in A, b \in A\}$

■ Def.

Sean A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos. Definimos el **Producto Cartesiano** de los conjuntos A_1, \dots, A_n como

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i \quad i = 1, 2, \dots, n\}$$

■ LEYES ALGEBRAICAS DE BOOLE

Sea U un conjunto universal y sean A, B, C subconjuntos de U . Se verifican las propiedades:

1. Asociatividad *(es paréntesis son irrelevantes)*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$$

2. Conmutatividad *(se pueden girar)*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

3. Distributividad *$x(y+z) = xy + xz$*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Idempotencia *(una por una matrix, en ella matrix)*

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

5. Complementación

$$A \cup \bar{A} = U \quad \bar{\bar{A}} = 1 - A$$

$$A \cap A = \emptyset$$

$$\bar{\bar{A}} = A \quad \bar{\bar{\bar{A}}} = \overline{(1 - A)} = 1 - (1 - A) = A$$

6. Leyes de Absorción

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

7. \emptyset y U

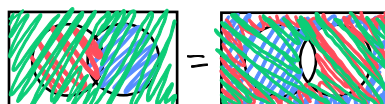
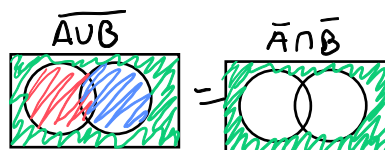
$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U \quad A \cap U = A$$

8. De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



Dem.

Leyes de De Morgan.

Demostramos $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ probando $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$ y $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

1. $\overline{(A \cup B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$
 Supongamos $x \in \overline{(A \cup B)}$, luego $x \notin A \cup B$ por tanto $x \notin A$ y $x \notin B \implies x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B} \implies x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
2. $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$
 Supongamos ahora $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Se tiene $x \in \overline{A} \implies x \notin A$ y $x \in \overline{B} \implies x \notin B$ luego $x \notin A \cup B \implies x \in \overline{(A \cup B)}$.

Propiedades Adicionales

1. $A \subseteq B \implies A \cup C \subseteq B \cup C$
 $A \subseteq B \implies A \cap C \subseteq B \cap C$
2. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$
 $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

■ UNIONES, INTERSECC. GENERALIZADAS

■ Def.

Una familia o colección de conjuntos es un conjunto \mathcal{C} cuyos elementos son conjuntos.

■ Ej.

$$\overline{M}_k = \{n \cdot k | n \in \mathbb{N}\}$$

$$M_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$\mathcal{C} = \{M_k | k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \dots, M_k, \dots\}$$

■ Def.

La **unión de una colección \mathcal{C} de conjuntos** se define como

$$\bigcup \mathcal{C} = \{x | x \in C, \text{ para algún } C \in \mathcal{C}\}$$

La **intersección de una colección \mathcal{C} de conjuntos** se define como

$$\bigcap \mathcal{C} = \{x | x \in C, \text{ para todo } C \in \mathcal{C}\}$$

$$\mathcal{C} = \{M_k | k \geq 2\} = \{M_2, M_3, M_4, \dots, M_k, \dots\}$$

$$\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{k \geq 2} M_k = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{k \geq 2} M_k = \{0\}$$