RELACIONES

- Def
  Sean A, B conjuntos. Una relación R entre A y B es un subconjunto de $A \times B$.
  $R \subseteq A \times B$ Escribimos $(a,b) \in R \iff aRb \iff R(a,b)$

- Def.
  Una relación R sobre A es un subconjunto de $A \times A$: $R \subseteq A \times A$

- Ej.
  Sea $A = \{1,2,3,4\}$
  $R_0 = \{(a,b) | a \text{ divide a } b\}$
  $R_1 = \{(1,1), \ldots, (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$
  $R_2 = \{(a,b) | a > b\}$ $R_2 \subseteq A \times A$ $R_2 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
  $R_3 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $xR_3y \iff x \equiv_m y \iff \{(x,y) | \ m \ / \ (x-y)\}$

- Def.
  Sea $R \subseteq A \times B$ una relación entre A y B.
  $dom(R) = \{x \in A | \exists y \in B, (x,y) \in R\} \subseteq A$ (**dominio** de R).
  $ran(R) = \{y \in B | \exists x \in A, (x,y) \in R\} \subseteq B$ (**rango** de R).
  $dom(R_1) = \{1,2,3,4\}$ $ran(R_1) = \{1,2,3,4\}$
  $dom(R_2) = \{2,3,4\}$ $ran(R_2) = \{1,2,3\}$

- Combinando Relaciones
  Dadas $R, S \subseteq A \times B$ relaciones, entonces
  $R \cup S \subseteq A \times B$ $R \cap S \subseteq A \times B$ $\overline{R} = (A \times B) \setminus R \subseteq A \times B$, luego también son relaciones.

- Def.
  Sean A, B, C conjuntos y sean $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ relaciones, definimos
  $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\} \subseteq B \times A$ (**inversa** de R) $yR^{-1}x \iff xRy$
  $R \circ S = \{(x,z) | \exists y \in B, (x,y) \in R \land (y,z) \in S\} \subseteq A \times C$ (**composición** de R y S)
  $id_A = \{(x,x) | x \in A\}$ (**identidad** sobre A).

- Ej.
  $R = \{(2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4)\} \implies R^{-1} = \{(4,2), (6,2), (3,3), (6,3), (4,4)\}$
  $R = \{(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)\}$
  $S = \{(2,u), (4,s), (4,t), (6,t), (8,u)\}$
  $R \circ S$=$\{(1,u), (1,t), (2,s), (2,t), (3,s), (3,t), (3,u)\}$

- Propiedades
  $R \subseteq A \times B, \quad S \subseteq B \times C, \quad T \subseteq C \times D \; id_A = \{(x,x) | x \in A\} \subseteq A \times A$

  $id_B = \{(y,y) | y \in B\} \subseteq B \times B$

  1. Asociatividad
     $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$
  2. $id_A \circ R = R \circ id_B = R$
  3. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
     $x(R \circ S)^{-1} y \iff y(R \circ S)x \iff \exists z \, yRz, zSx \iff \exists z \, xS^{-1}z, zR^{-1}y \iff x(S^{-1} \circ R^{-1})y$

- Relaciones n-arias

- Def.
  $A_1, A_2, \ldots A_n$ sets. una (**relación n-aria** R) es cualquier subconjunto

  $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

- Ej
  $R = \{(a,b,c) | a < b < c\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $(1,2,3) \in R \quad (2,4,3) \notin R$

FUNCIONES

Una función es una relación especial R que verifique : $\forall x \in dom(R)\ \exists! y, xRy$.

- <u>Def.</u>
  Una **función** $f : X \longrightarrow Y$ es una relación de X en Y con las propiedades:

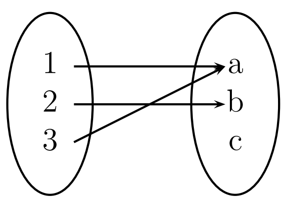
  1. dom(f) = X
  2. Si $(x, y),\ (x, y') \in f \implies y = y'$
     Escribimos $y = f(x)$.

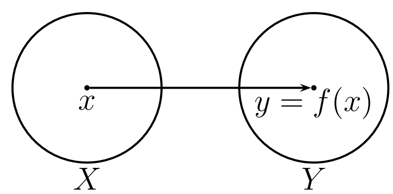
- <u>Ej</u>
  $f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\} \quad X = \{1, 2, 3\} \quad Y = \{a, b, c\}$ es una función de X en Y.

  $dom(f) = X \quad ran(f) = \{a, b\} \subseteq Y$

  $f = \{(1, a), (1, c), (2, b), (3, a)\}$ no es función ya que $(1, a), (1, c) \in f$.

Diagramas de flechas.





- <u>Def.</u>
  Decimos que $f : A - \longrightarrow B$ es una **función parcial** si $f \subseteq A \times B$ es una relación que verifica

  $dom(f) \subseteq A \quad ran(f) \subseteq B$

  Si $dom(f) = A$ decimos que es una **función total.**

- <u>Ej.1</u>
  $A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{a, b, c\}$

  $f = \{(1, a), (3, a)\}$ función parcial de A en B.
  $dom(f) = \{1, 3\} \subseteq A$

- <u>Ej.2</u>
  La función h definida recursivamente por: $h(0) = 1$
  $h(n) = 2 \cdot h(n - 2) \quad n \geq 2$

  es una función parcial $h : \mathbb{N} - \longrightarrow \mathbb{N}$

  $h(0) = 1$
  $h(1)$ no está defined.
  $h(2) = 2 \cdot h(0) = 2 \cdot 1 = 2$
  $h(3) = 2 \cdot h(1)$ no está definida.
  $h(4) = 2 \cdot h(2) = 2 \cdot 2 = 4$
  $h(5) = 2 \cdot h(5 - 2) = 2 \cdot h(3)$ no definida.

$dom(h) = \{2k | k \in \mathbb{N}\} \quad h(2k) = 2^k \ \ \forall k \in \mathbb{N}$

Hay funciones definidas por expresiones $\quad f(x) =$ expresión que depende de x.

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Ley de Igualdad

  $f = g \iff dom(f) = dom(g) = D$ y $\forall x \in D \ f(x) = g(x)$

- Ej.1
  $f(x) = x^2 - 1 \quad x \in \mathbb{R}$
  $g(x) = (x+1)(x-1) \quad x \in \mathbb{R}$

  Entonces $f = g$

- Ej.2
  $f(x) = (x+1) \quad x \in \mathbb{R} \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (función total)
  $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \in \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} - \longrightarrow \mathbb{R}$ (función parcial)
  $dom(g) = \mathbb{R} - \{1\} \neq dom(f) = \mathbb{R} \implies f \neq g$ pero $\forall x \in dom(g) \ g(x) = f(x)$.

- Funciones Especiales
  $id_A : A \longrightarrow A$
  $id_A(x) = x$

  $\emptyset : \emptyset \longrightarrow B \quad \emptyset : A - \longrightarrow B \quad (A \neq \emptyset)$

  Si $B = \emptyset$ tenemos la función parcial:
  $\emptyset : A - \longrightarrow \emptyset$ pero $f : A \longrightarrow \emptyset$ no existe.

- Operaciones de Funciones

- Def.
  Sea f una función y $A \subseteq dom(f)$.
  La restricción de f a A es la función g definida por:
  $g = f \restriction A \iff: dom(g) = A \quad g(x) = f(x) \ \forall x \in A$

- Ej.
  $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad f \restriction \mathbb{N} = id_{\mathbb{N}}$
  $\quad x \longrightarrow |x|$

- f, g funciones. Como son relaciones podemos definir su composición:

$$x(f \circ g)z \iff xfy, \ ygz \ \text{ para algún } y$$

$$(f \circ g)(x) = z = g(y) = g(f(x))$$

$x \in domf \quad z \in ran(f \circ g)$
$z \in ran(g) \quad y = f(x) \in ran(f) \cap dom(g)$

- <u>Teorema</u>
  Composición $f \circ g$, propiedades:

  1. $dom(f \circ g) = \{x \in dom(f) | f(x) \in dom(g)\}$
  2. $\forall x \in dom(f \circ g) \quad (f \circ g)(x) = g(f(x))$
  3. $ran(f \circ g) = ran(g \restriction ran(f) \cap dom(g))$

  Si $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ $f \circ g : A \longrightarrow C$
  $dom(f) = A \quad dom(g) = B \quad f(x) \in B$

  1. $dom(f \circ g) = \{x \in A | f(x) \in B\} = A$
  2. $ran(f \circ g) = ran(g \restriction ran(f) \cap dom(g)) = ran(g \restriction ran(f) \cap B) = ran(g \restriction ran(f))$

- <u>Propiedades</u>
  $f : A \longrightarrow B \quad g : B \longrightarrow C \quad h : C \longrightarrow D$

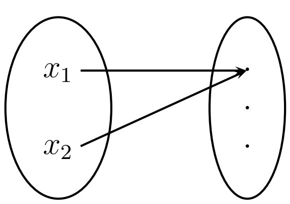
  1. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ asociatividad
  2. $id_A \circ f = f \circ id_B = f$

  R relación $\Longrightarrow R^{-1}$ es una relación
  f función $\not\Longrightarrow f^{-1}$ función(relación bien definida)

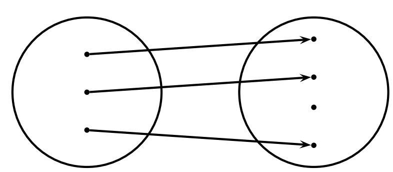
- <u>Def.</u>
  Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, decimos
  f **inyectiva** $\Longleftrightarrow f^{-1}$ function $\Longleftrightarrow \nexists x_1, x_2 \in dom(f),\ x_1 \neq x_2$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$

  $$\begin{aligned} f \text{ inyectiva} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \end{aligned}$$

  Gráficamente:

  f no es inyectiva

  f es inyectiva

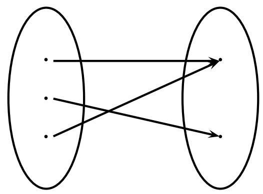
  Si f^{-1} es una función decimos que f es **invertible**.
  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ como relaciones.
  f, g inyectivas $\Longrightarrow g^{-1}, f^{-1}$ son funciones.

- <u>Def.</u>
  f **suprayectiva**(**sobreyectiva**) $\Longleftrightarrow ran(f) = B \quad (\Longleftrightarrow \forall y \in B,\ \exists x \in A$ t. q. $f(x) = y)$

- <u>Def.</u>
  f **biyectiva** $\Longleftrightarrow$ f inyectiva y suprayectiva.

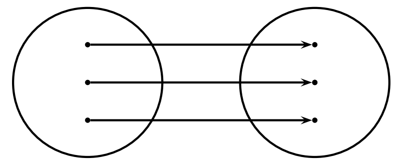
Gráficamente:

f es suprayectiva



f no es inyectiva

f es biyectiva



f es inyectiva y suprayectiva

- Ej.
  $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

  $f_1(x) = x^2 \qquad f_3(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x^2+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

  $f_2(x) = |x| \qquad f_4(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 2|x|-1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

  1. f_1 no es inyectiva ni suprayectiva.
     $f_1(2) = 4 = f_1(-2)$ y no existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f_1(a) = 3$
  2. f_2 no es inyectiva pero si suprayectiva.
     $f_2(2) = 2 = f_2(-2)$ y $\forall a \in \mathbb{N}$ existe un $b \in \mathbb{Z}$ tal que $f_2(b) = |b| = a$ $b = a$ o $b = -a$
  3. f_3 es inyectiva pero no es suprayectiva.
     $f_3(x_1) = f_3(x_2)$ (suponemos $x_1, x_2 \geq 0$) $\Longrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ ya que $x_1, x_2 \geq 0$.
     $f_3(x_1) = f_3(x_2)$ (suponemos $x_1 \geq 0, x_2 < 0$) $\Longrightarrow 2x_1^2 = 2x_2^2 + 1$ lo que es imposible ya que $2x_1^2$ es par y $2x_2^2 + 1$ es impar.
     $f_3(x_1) = f_3(x_2)$ (suponemos $x_1, x_2 \leq 0$) $\Longrightarrow 2x_1^2 + 1 = 2x_2^2 + 1 \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow x_1 = x_2$ ya que $x_1, x_2 \leq 0$.
     No es suprayectiva ya que no existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $f_3(a) = 2a^2 = 4 \Longrightarrow a^2 = 2$.
  4. f_4 es biyectiva.
     $f_4(x_1) = f_4(x_2)$ (suponemos $x_1, x_2 \geq 0$) $\Longrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.
     $f_4(x_1) = f_4(x_2)$ (suponemos $x_1 \geq 0, x_2 < 0$) $\Longrightarrow 2x_1 = 2|x_2| - 1$ lo que es imposible ya que $2x_1$ es par y $2|x_2| - 1$ es impar.
     $f_4(x_1) = f_4(x_2)$ (suponemos $x_1, x_2 \leq 0$) $\Longrightarrow 2|x_1| - 1 = 2|x_2| - 1 \Longrightarrow 2|x_1| = 2|x_2| \Longrightarrow x_1 = x_2$ ya que $x_1, x_2 \leq 0$.
     Es suprayectiva ya que $\forall a \in \mathbb{N}$ existe un $b \in \mathbb{Z}$ tal que $f_4(b) = a$

     $$f_4(b) = a = \begin{cases} 2b & \text{si } b \geq 0 \\ 2|b|-1 & \text{si } b < 0 \end{cases} \quad \text{luego } b = \begin{cases} \dfrac{a}{2} & \text{si } a \text{ es par} \\ -\dfrac{a+1}{2} & \text{si } a \text{ es impar} \end{cases}$$

- <u>Teorema</u>
  $f : A \longrightarrow B$ biyectiva $\Longrightarrow f^{-1} : B \longrightarrow A$ biyectiva.

  Dem.

  - f^{-1} es una función.
    f inyectiva $\Longrightarrow$ f^{-1} es una función.
    $dom(f^{-1}) = ran(f) = B$ (ya que f es suprayectiva.)
    $\forall y \in B, f^{-1}(y) =$ el único $x \in A$ tal que $f(x) = y$
  - f^{-1} es inyectiva $\quad f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \iff f(x) = y_1 = y_2$
  - f^{-1} es suprayectiva $\quad \forall x \in A, \exists y \in B \ f^{-1}(y) = x$
    $x \in A \implies$ existe $y = f(x) \in B$ y $f^{-1}(y) = x$

- <u>Teorema</u>

  Sea $f : A \longrightarrow B \quad g : B \longrightarrow C$

  1. f, g inyectiva $\implies$ $f \circ g$ inyectiva.
  2. f, g suprayectiva $\implies$ $f \circ g$ suprayectiva.
  3. f, g biyectiva $\implies$ $f \circ g$ biyectiva.

  Dem.

  1. $h = f \circ g$
     $$h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \underset{g \text{ iny.}}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2) \underset{f \text{ iny.}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$
  2. $h = f \circ g \quad f \circ g : A \longrightarrow C$
     $\forall z \in C, \exists x \in A \ h(x) = g(f(x)) = z$
     Como g es suprayectiva $\implies \forall z \in C, \exists y \in B \ g(y) = z$
     Como f es suprayectiva $\implies$ para $y \in B, \ \exists x \in A, \ f(x) = y$
     $z = g(y) = g(f(x)) = h(x)$
  3. 1) y 2)

  <u>Funciones n-arias</u>

- <u>Def.</u>
  $n \geq 2$, f **función n-aria** $\iff$
  f función, $dom(f) \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$

  $n = 2 \implies f$ es una **función binaria**.

  $f : A^n \longrightarrow A \implies f$ **operación n-aria**.

  $n = 2 \implies f$ **operación binaria**.

- <u>Ej.</u>
  $+, * : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$