Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Grado Ingeniería Informática - Doble Grado Informática-Economía

Examen final - Enero 2020

NOMBRE:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen dura **3 horas**.
- Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta de ellas respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa. Dejar **totalmente clara** la respuesta escogida, o que no queréis contestar una pregunta, sobre todo cuando haya alguna tachadura.
- Cada una de las preguntas a desarrollar restantes vale **1 punto**, salvo la séptima, que vale **2 puntos**.
- El examen se calificará, por tanto, sobre **9 puntos**. A la nota se le sumará la evaluación por curso (**entre 0 y 1 punto**).

---

1. Dados $a, b, d \in \mathbb{Z}$, si sabemos que $mcd(a,b) = 1$, entonces:

   ☐ Si además $d \mid b$, entonces $mcd(a,d) = 1$.

   ☐ Si además $d \mid b$, entonces $mcd(a,d) = d$.

   ☐ Si además $d \mid (a * b)$, entonces $mcd(a,d) = d$.

   ☐ Si además $d \mid a$, entonces $mcd(a,d) = 1$.

2. Dadas las dos siguientes afirmaciones:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B) \qquad\qquad \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

   ☐ Ambas son siempre ciertas.

   ☐ Ambas son siempre falsas.

   ☐ Solamente es cierta siempre la primera.

   ☐ Solamente es cierta siempre la segunda.

3. Consideremos el conjunto $A = \{\{1\}, \{1, 2, \{\}\}, 1\}$. Entonces:

   ☐ A tiene 5 elementos.

   ☐ $2 \in A$.

   ☐ $2 \notin A$, pero **existe** $X \in A \mid 2 \in X$. (o sea, 2 sí que pertenece a un elemento de A)

   ☐ $\{1\} \subseteq A$ **y** $\{\{1\}, 1\} \in A$.

4. Sea R la relación binaria sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $X R Y \Longleftrightarrow X \setminus Y = X$.

   ☐ R es reflexiva.

   ☐ R es simétrica.

   ☐ R es antirreflexiva.

   ☐ R es transitiva.

5. Sea $f : \{(X,Y) \,|\, X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \neq Y\} \to \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ definida por $f(X,Y) = |X \cap Y|$ (donde recordemos que $\aleph_0$ es el cardinal de los conjuntos numerables infinitos, o sea el de $\mathbb{N}$):

- [ ] f es inyectiva, pero **no** suprayectiva.
- [ ] f es suprayectiva, pero **no** inyectiva.
- [ ] f es biyectiva.
- [ ] f **no** es ni inyectiva, **ni** suprayectiva.

6. Considera los dos asertos siguientes:

   Si A es **no numerable** y B **numerable**, entonces $A \setminus B$ es **no numerable**.

   Toda familia (sea o no numerable) de conjuntos **numerables** tiene una **unión numerable**.

- [ ] Ambos son ciertos.
- [ ] Ambos son falsos.
- [ ] El primero es cierto y el segundo es falso.
- [ ] El primero es falso y el segundo es cierto.

7. Considerando la sucesión $(a_n \,|\, n \in \mathbb{N})$, definida recursivamente mediante:

$$a_1 = 20, \quad a_n = 5 * 4^n - a_{n-1}, \; para \;\; n \geq 2$$

   a) Razonando por inducción, demuestra que para todo $n \geq 1$, se tiene $10 \mid a_n$.
   b) Razonando por inducción, demuestra que $a_n = 4^{n+1} + 4 * (-1)^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.
   Indicación: Tened cuidado con lo que vale $(-1)^{n-1}$, según el valor de n.
   c) Concluye de lo anterior que para todo $n \geq 1$, $4^{n+1} + 4 * (-1)^{n-1}$ es múltiplo de 10.

8. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}_1$:

   a) Demuestra que $\quad a \,|\, c \;\wedge\; b \,|\, c \;\wedge\; \mathrm{mcd}(a,b) = 1 \implies (a * b) \,|\, c$.
   b) Prueba que la conclusión no tendría porqué darse, si **no** se tuviera la hipótesis $\mathrm{mcd}(a,b) = 1$.

9. En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, se define la relación $\quad xRy \iff x^2 - y^2 = x - y$:

   a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
   b) Calcular las clases de equivalencia de 0, de -1 y de 3.
   c) Enumerar (sin repeticiones) los elementos del conjunto cociente $\mathbb{Z}/R$.

10. Considera la función $f : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ dada por $f(x,y) = (x - 2 * y \,,\, 2 * x + y)$

   a) Estudia si f es **inyectiva**, justificando adecuadamente tu respuesta.
   b) Estudia si f es **sobreyectiva**, justificando adecuadamente tu respuesta.

11. Sea $(B, \sqsubseteq_B)$ un conjunto parcialmente ordenado cualquiera, y $f : A \longrightarrow B$ una función (total) **inyectiva**. Definimos una relación binaria R_f en A, tomando $\;x \, R_f \, y \iff f(x) \sqsubseteq_B f(y)$.

   a) Demuestra que R_f es siempre una relación de orden en A.
   b) Considera $B = \{1, 2, 3, 30, 42, 210\}$ ordenado por la relación de divisibilidad, y tomemos $A = \{1, 2, 29, 41, 209\}$, con $f : A \longrightarrow B$ la función $f(x) = x + 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de (A, R_f) y determina los elementos extremales (o sea discute si hay elementos minimales, maximales y mínimo y máximo de (A, R_f).
   Sugerencia: Aunque no se te pida "entregarlo", empieza por dibujarte el diagrama de Hasse de $(B, |)$ y luego trabaja a partir de él.