RELACIONES DE ORDEN

- <u>Def</u>
  Sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria

  1. R es **antisimétrica** $\Longleftrightarrow$
     $\forall x, y \in A, xRy, yRx \Longrightarrow x = y$

     Ej. A = {1, 2, 3, 4} R1 = {(1, 1),(1, 2),(1, 3),(2, 2)} no es simétrica pero sí es antisimétrica.

     R2 = {(1, 1),(1, 2),(2, 1),(2, 2)} es simétrica pero no es antisimétrica.

     R3 = $\emptyset$ es simétrica y antisimétrica.
  2. R es **antirreflexiva** $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in A, x \not R x$

     Ej. A = {1, 2, 3, 4} R1 = {(1, 2),(1, 3),(3, 1)} es antirreflexiva.

     R2 = {(1, 1),(2, 2),(2, 1),(3, 3)} no es reflexiva ni antirreflexiva.

     R1 = {(1, 1),(1, 3),(2, 2),(3, 3),(4, 4)} es reflexiva pero no es antirreflexiva
  3. R es **conexa** $\Longleftrightarrow \forall x, y \in A, x \neq y \Longrightarrow xRy$ o yRx.

     Ej. A = {1, 2, 3, 4} R1 = {(1, 2),(1, 3),(3, 1),(3, 2),(4, 1),(4, 2),(4, 3)} es conexa.

     R2 = {(1, 1),(2, 2),(2, 1),(3, 3)} no es conexa.

  Reflexiva: $\forall x \in A, xRx$

  No reflexiva: $\exists x \in A, x \not R x$

  Antirreflexiva: $\forall x \in A, x \not R x$

  En general: No reflexiva $\neq$ antirreflexiva.

- <u>Def</u>
  Sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

  R es un **orden parcial** $\Longleftrightarrow$ R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

  Ej. A ={1, 2, 3} R1 = {(1, 1),(1, 3),(2, 2),(3, 2),(1, 2),(3, 3)} es un orden parcial.

  R es un **orden estricto** $\Longleftrightarrow$ R es antirreflexiva y transitiva.

  Ej. A = {1, 2, 3} R1 = {(1, 3),(3, 2),(1, 2)} es un orden estricto.

  Un conjunto A + orden parcial $R \Longrightarrow$ **conjunto parcialmente ordenado** (conj.p.o.) y lo denotamos por (A,R).

  Normalmente escribimos $a \sqsubseteq b$ y $(A, \sqsubseteq)$

  orden estricto - $(A, \sqsubset)$

- Ej.

  1. $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad xR_1y \Longleftrightarrow x \leq y$.
     Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}, x \leq x$
     Antisimétrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \leq y, y \leq x \Longrightarrow x = y$
     Transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, x \leq y, y \leq z \Longrightarrow x \leq z$
     También podemos definirlo en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
  2. $R_2 \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \quad xR_2y \Longleftrightarrow x/y$.
     Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}_+, x \ / \ x$
     Antisimétrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}_+, x \ / \ y, y \ / \ x \Longrightarrow x = y$ (porque $x, y > 0$)
     Transitiva: $\forall x, y, z \in \mathbb{N}_+, x \ / \ y, y \ / \ z \Longrightarrow x \ / \ z$
  3. $R_3 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad XR_3Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y$.
     Reflexiva: $\forall X \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$
     Antisimétrica: $\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \Longrightarrow \mathcal{X} = \mathcal{Y}$
     Transitiva: $\forall X, Y, Z \in \mathcal{P}(\mathcal{A}), \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{Z} \Longrightarrow \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$
  4. $R_4 \subseteq N^2 \times N^2$
     $(x, y)R_4(x', y') \Longleftrightarrow x \leq x', \ y \leq y'$.
     Reflexiva: $\forall (x, y) \in N^2, (x, y)R_4(x, y) \Longleftrightarrow x \leq x, y \leq y$
     Antisimétrica: $\forall (x, y), (x', y') \in N^2, (x, y)R_4(x', y'), (x', y')R_4(x, y) \Longleftrightarrow (x, y) = (x', y')$ (porque $x \leq x' \ x' \leq x$ y $y \leq y' \ y \leq y'$)
     Transitiva: $\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in N^2, (x, y)R_4(x', y'), (x', y')R_4(x'', y'') \Longleftrightarrow (x, y)R_4(x'', y'')$ (porque $x \leq x' \ x' \leq x''$ y $y \leq y' \ y' \leq y''$)
     $N = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

  Ordenes estrictos.

  1. $S_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad xS_1y \Longleftrightarrow x < y$.
     También podemos definirlo en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
  2. $S_2 \subseteq N^2 \times N^2$
     $(x, y)S_2(x', y') \Longleftrightarrow x < x', \ y < y'$.
     $N = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
  3. $S_3 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad XS_3Y \Longleftrightarrow X \subset Y$.
  4. $S_4 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad XS_4Y \Longleftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$. no es reflexiva $\Longrightarrow$ no es un orden
     $\emptyset \not R \emptyset$ ya que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$

- <u>Proposición</u>

  1. Sea $(A, \sqsubseteq)$ un conj. p.o., entonces
  $$\forall x, y \in A, \quad x \sqsubset y \iff x \sqsubseteq y,\ x \neq y$$
  es un orden estricto.
  2. Sea $(A, \sqsubset)$ un orden estricto, entonces
  $$\forall x, y \in A, \quad x \sqsubseteq y \iff x \sqsubset y \text{ o } x = y$$
  es un orden.

  Dem.

  1) Antirreflexiva: $\forall x \in A, x \not\sqsubset x$ se cumple porque no es cierto $x \neq x$

  Transitiva: $\forall x, y, z \in A, x \sqsubset y, y \sqsubset z \Longrightarrow x \sqsubset z \iff \forall x, y, z \in A, x \sqsubseteq y, x \neq y, y \sqsubseteq z, y \neq z, \Longrightarrow x \sqsubseteq z, x \neq z$

  No es evidente $x \neq z$. Supongamos $x = z$ entonces tendremos $x \sqsubseteq y, y \sqsubseteq z = x \Longrightarrow x = y$ porque $\sqsubseteq$ es antisimétrica al ser un orden parcial. Contradicción.

  2) Reflexiva: $\forall x \in A, x \sqsubseteq x \iff x \sqsubset x$ ó $x = x$ que se cumple ya que evidentemente $x = x$.

  Antisimétrica: $\forall x, y \in A, x \sqsubseteq y, y \sqsubseteq x \Longrightarrow x = y \iff \forall x, y \in A, x \sqsubset y$ ó $x = y, y \sqsubset x$ ó $y = x \Longrightarrow x = y$

  Supongamos que $x \neq y$ entonces $x \sqsubset y$ y $y \sqsubset x \Longrightarrow x \sqsubset x$ por ser $\sqsubset$ transitiva pero $x \sqsubset x$ no puede darse por ser antirreflexiva. $(\forall x \in A, x \not\sqsubset x)$

  Transitiva: $\forall x, y \in A, x \sqsubseteq y, y \sqsubseteq z \Longrightarrow x \sqsubseteq z \iff \forall x, y, z \in A, x \sqsubset y$ ó $x = y, y \sqsubset z$ ó $y = z \Longrightarrow x \sqsubset z$ ó $x = z$

- <u>Proposición</u>
  La relación inversa de un orden es también un orden.

  1. Sea $(A, \sqsubseteq)$ un conj.p.o., definimos
  $$\forall x, y \in A, \quad x \sqsupseteq y \iff y \sqsubseteq x$$
  Entonces $(A, \sqsupseteq)$ es un conj.p.o.
  2. Sea $(A, \sqsubset)$ un orden estricto, definimos
  $$\forall x, y \in A, \quad x \sqsupset y \iff y \sqsubset x$$
  $(A, \sqsupset)$ es un orden estricto.

  Dem.

  Reflexiva: $\forall x \in A, x \sqsupseteq x \iff \forall x \in A, x \sqsubseteq x$ que se verifica porque $\sqsubseteq$ es reflexiva.

  Antisimétrica: $\forall x, y \in A, x \sqsupseteq y, y \sqsupseteq x \Longrightarrow x = y \iff \forall x, y \in A, y \sqsubseteq x, x \sqsubseteq y \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow x = y$ porque $\sqsubseteq$ es antisimétrica.

  Transitiva: $\forall x, y, z \in A, x \sqsupseteq y, y \sqsupseteq z \Longrightarrow x \sqsupseteq z \iff \forall x, y, z \in A, y \sqsubseteq x, z \sqsubseteq y \Longrightarrow$
  $\Longrightarrow z \sqsubseteq x \Longrightarrow x \sqsupseteq z$

- Def.
  $(A, \sqsubseteq)$ conj.p.o. + $\sqsubseteq$ conexo $\Longrightarrow$ $(A, \sqsubseteq)$ **orden total** u **orden lineal**.

  $(A, \sqsubset)$ + $\sqsubset$ conexo $\Longleftrightarrow$ $(A, \sqsubset)$ **orden estricto lineal** u **orden estricto total**.

- Ej.1
  $R_1 \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad xR_1y \Longleftrightarrow x \leq y$
  orden total.

- Ej.2
  $R_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A}) \times \mathcal{P}(\mathcal{A}) \quad XR_2Y \Longleftrightarrow X \subseteq Y$ no es un orden total $\{0,1\} \not\subseteq \{1,2\}$
  $\{1,2\} \not\subseteq \{0,1\}$

  $\{0,1\}$ y $\{1,2\}$ son **incomparables**.
  En otro caso decimos que son **comparables**.

  Sea $(A, \sqsubseteq)$ un conj.p.o. Podemos representarlo gr´aficamente mediante lo que se conoce como **Diagrama de Hasse** Consiste en un conjunto de puntos conectados por segmentos. Los puntos son los elementos del conjunto y cada segmento ascendente entre x e y se interpreta que representa $x \sqsubseteq y$. Los segmentos que se deducen por transitividad no se dibujan.

- Ej.
  Sea $(A, \sqsubseteq)$ un conj.p.o. $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

  $x \sqsubseteq y \iff x \;/\; y$

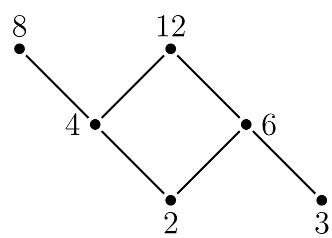


Diagrama de Hasse

- Proposición

  Sea $R \subseteq A \times A$ un orden parcial y sea $S \subseteq A$. La **restricción** de R a S se define como

  $$R \upharpoonright S = R \cap (S \times S)$$

  $(S, R \upharpoonright S)$ es un conj.p.o.

  Ej. Sea $(A, \sqsubseteq)$ un conj.p.o. A = {2, 3, 4, 6, 8, 12} y sea S = {2, 3, 4, 12}

  $x \sqsubseteq y \Longleftrightarrow x \;/\; y$

  $R \upharpoonright S = R \cap (S \times S) = \{(2,2), (3,3), (4,4), (12,12), (2,4), (2,12), (3,12), (4,12)\}$

- <u>Def.</u>
  Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ conj.p.o. y sea $f : A \longrightarrow B$ una función

  1. f es **monótona** $\Longleftrightarrow$
     $\forall x, y \in A, \quad x \sqsubseteq_A y \implies f(x) \sqsubseteq_B f(y)$
  2. f **preserva el orden** $\Longleftrightarrow$
     $\forall x, y \in A, \quad x \sqsubseteq_A y \iff f(x) \sqsubseteq_B f(y)$
  3. f es un **isomorfismo de orden** $\Longleftrightarrow$
     f es biyectiva y preserva el orden.

  $((A, \sqsubseteq_A) \simeq (B, \sqsubseteq_B))$ (**isomorfos**).

  Si $(B, \sqsubseteq_B) = (A, \sqsubseteq_A)$ (**automorfismo**).

- <u>Ej.</u>

  1. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$
     $f(X) = \{x^2 | x \in X\}$
     f es monotona.
     $X \subseteq Y \implies f(X) \subseteq f(Y)$
     Pero $f(X) \subseteq f(Y)$ no implica $X \subseteq Y$.
     $X = \{-2, 3\} \quad Y = \{-4, 2, 3\}$
     $f(X) = \{4, 9\} \subseteq f(Y) = \{16, 4, 9\}$ pero $X \not\subseteq Y$
  2. Sea $A = \{2n | n \in \mathbb{N}\} \quad B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$
     $f : A \longrightarrow B$
     $2n \longrightarrow 2n + 1$

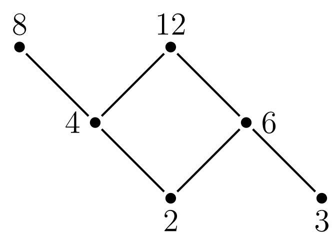
     $(A, \leq) \simeq (B, \leq)$
     $x \leq y \iff 2x + 1 \leq 2y + 1$

ELEMENTOS EXTREMOS Y EXTREMALES

- Def.
  Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj.p.o. y $S \subseteq A$. Decimos que un elemento $x \in S$ es

  1. **maximal** en $S \iff \nexists y \in S$ tal que $x \sqsubset y$.
  2. el **máximo** de S $(max(S)) \iff y \sqsubseteq x,\ \forall y \in S$.
  3. **minimal** en $S \iff \nexists y \in S$ tal que $y \sqsubset x$.
  4. el **mínimo** de S $(min(S))\iff x \sqsubseteq y,\ \forall y \in S$.

- Ej.
  $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\} \qquad x \sqsubseteq y \iff x/y$



2, 3 elementos minimales

8, 12 elementos maximales.

No hay máximo ni mínimo.

- Prop.
  Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj.p.o. y $S \subseteq A$.

  1. **máximo** de $S \Longrightarrow$ maximal en S pero maximal en $S \not\Longrightarrow$ máximo de S.
  2. si S tiene un elemento máximo es único.
  3. **mínimo** de $S \Longrightarrow$ minimal en S pero minimal en $S \not\Longrightarrow$ mínimo de S.
  4. si S tiene un elemento mínimo es único.

  Dem.

  1. Sea $x \in S$ máximo $\Longrightarrow\ y \sqsubseteq x,\ \forall y \in S$. Supongamos x no es un elemento maximal, entonces existe $y_0 \in S$ tal que $x \sqsubset y_0$ como $y_0 \sqsubseteq x \implies x = y_0$ por la propiedad antisimétrica. Contradicción. En el ejemplo, 8, 12 son maximales pero ni 8 ni 12 son máximos. ($8 \not\sqsubseteq 12 \quad 12 \not\sqsubseteq 8$)
  2. Supongamos x, y son ambos máximos de S, entonces $x \sqsubseteq y$ ya que y es máximo y $y \sqsubseteq x$ ya que x es máximo, luego $x = y$ por la propiedad antisimétrica.

     Análogamente 3) y 4).

- <u>Teorema</u>
  Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ conj.p.o. y sea f un isomorfismo de orden.
  $\forall x \in A$

  1. $x = max(A) \iff f(x) = max(B)$
  2. x es maximal en $A \iff f(x)$ es maximal en B.
  3. $x = min(A) \iff f(x) = min(B)$
  4. x es minimal en $A \iff f(x)$ es minimal en B.

  Dem.
  2)
  $\Longrightarrow$)
  Supongamos x maximal en A. Supongamos $f(x)$ no es maximal en B, entonces existe $z \in B$ tal que $f(x) \sqsubset z$. $z = f(y)$ para algún $y \in A$ ya que f es suprayectiva, luego $x \sqsubset y$ pues f preserva el orden, luego x no es maximal. Contradicción.

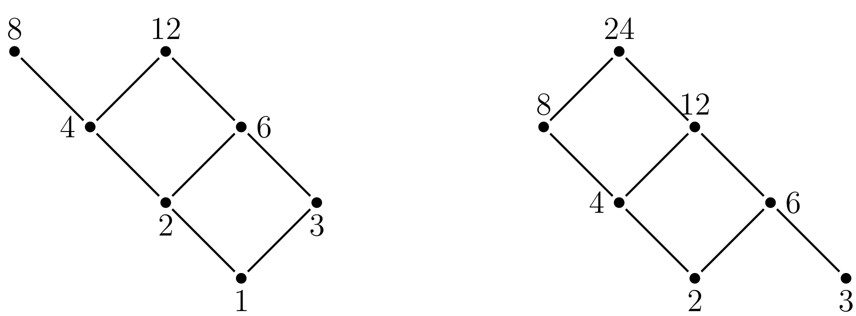
  $\Longleftarrow$)
  Supongamos ahora que $f(x)$ es maximal en B. Supongamos x no es maximal en A, entonces existe $y \in A$ tal que $x \sqsubset y$, y como f es inyectiva $f(x) \neq f(y)$ y $f(x) \sqsubset f(y)$ ya que f preserva el orden, luego $f(x)$ no es maximal en B. Contradicción.

- <u>Ej.1</u>
  $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$ no son isomorfos.

  $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo, el 0 y $\mathbb{Z}$ no.

- <u>Ej.2</u>
  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ $B = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

  $x \sqsubseteq_A y \iff x/y \qquad x \sqsubseteq_B y \iff x/y$



  $min(A)$ $\nexists max(A)$ $\quad max(B)$ $\nexists min(B)$.

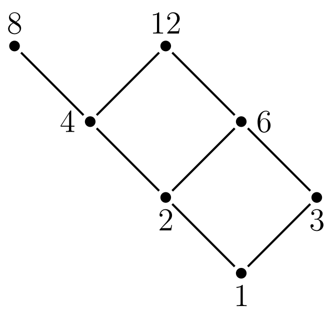
  $(A, \sqsubseteq_A) \not\cong (B, \sqsubseteq_B)$

COTAS: INFIMOS Y SUPREMOS

- Def.
Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj.p.o. y $S \subseteq A$.

  1. $x \in A$ es una **cota superior** de $S \iff \forall u \in S,\ u \sqsubseteq x$.
     $Sup(S) = \{x \in A | x \text{ cota superior de } S\}$.
  2. Si $\exists min(Sup(S))$ en A se llama **supremo** de S. ($sup(S) = \sqcup S$.) Tiene que cumplir:
     a) $\forall y \in S, y \sqsubseteq_A x$ (x es cota superior de S)
     b) $x \sqsubseteq_A z$ si z es cota superior de S (la menor de las cotas superiores).
  3. $x \in A$ es una **cota inferior** de $S \iff \forall u \in S,\ x \sqsubseteq u$.
     $Inf(S) = \{x \in A | x \text{ es cota inferior de } S\}$.
  4. Si $\exists max(Inf(S))$ en A se llama **ínfimo** de S. ($inf(S) = \sqcap S$.) Cumple:
     a) $\forall y \in S, x \sqsubseteq_A y$ (x es cota inferior de S)
     b) $z \sqsubseteq_A x$ si z es cota inferior de S (la mayor de las cotas inferiores).

- Ej.
$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\} \qquad x \sqsubseteq y \iff x/y$



Let $S = \{4, 6\} \quad \sqcup S = 12 \notin S \quad \sqcap S = 2 \notin S$

S no tiene máximo ni mínimo.

Sea $S = \{8, 12\} \quad \nexists \sqcup S \quad \sqcap S = 4 \notin S$

- Ej.
Sea $S = \{s_n | n \in \mathbb{N}\}$ donde s_n es una aproximación de π y s_n tiene n decimales.

$s_0 = 3$

$s_1 = 3{,}1 \qquad \sqcup S = \pi \quad \sqcap S = 3$

$s_2 = 3{,}14$

$\vdots$

- Prop.

  Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj.p.o. y $S \subseteq A$.

  1. Si S tiene máximo x, $\sqcup S = x$
  2. Si S tiene mínimo y, $\sqcap S = y$

  Dem.

  1. $y \sqsubseteq x, \ \forall y \in S$

     Sea z una cota superior de S, como $x \in S, x \sqsubseteq z$. Luego $x = \sqcup S$
  2. Análogo.

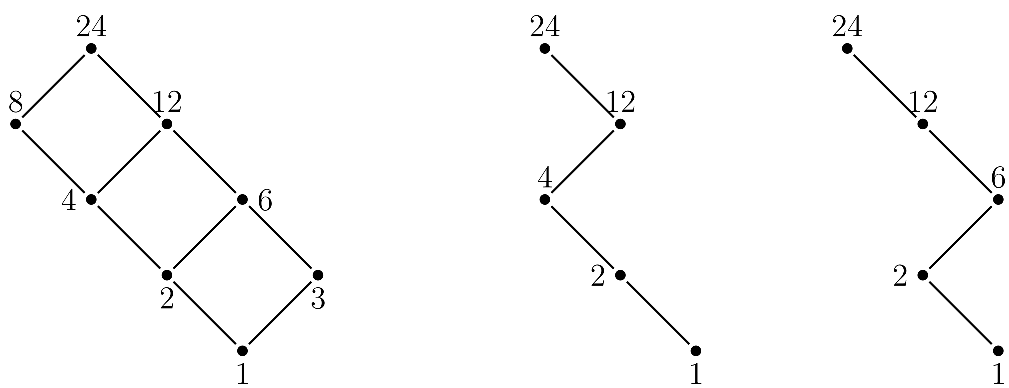
  Cadenas en un conj.p.o.

  Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj. p.o. y $S \subseteq A$.
  S es una **cadena** si la restricción de $\sqsubseteq$ a S ($\sqsubseteq \cap S \times S$) es un orden lineal.

  $$\forall x, y \in S, \ x \sqsubseteq y \text{ o } y \sqsubseteq x$$

- Ej.1

  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$



  $S_1 = \{1, 2, 4, 12, 24\}$ $\quad$ $S_2 = \{1, 2, 6, 12, 24\}$ son cadenas.

- Ej.2

  $S = \{P_n | n \in \mathbb{N}\}$ es una cadena en $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$

  $\{0\} \subseteq \{0, 2\} \subseteq \{0, 2, 4\} \subseteq \cdots$
  $P_0 \quad P_1 \quad P_2$

  S es una cadena infinita.

Extensión de un orden parcial

- Def. Sea $(A, \sqsubseteq_A)$ un conj. p.o., un orden $\leq$ sobre A se dice que es una **extensión total** de $\sqsubseteq$ si cumple:

  1. $\leq$ es un orden lineal
  2. $\forall x, y \in A,\ x \sqsubseteq y \implies x \leq y$

  Construir una extensión total $\leq$ de un orden parcial $\sqsubseteq$ dado, sobre un conjunto **finito** A, se conoce como **ordenación topológica** de A.

- Algoritmo de Ordenación Topológica.

  $(A, \sqsubseteq_A)$ conj. finito p.o. $\quad A = \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$

  (0) a_0 es cualquier elemento minimal de A.

  (1) a_1 es cualquier elemento minimal de $A - \{a_0\}$.

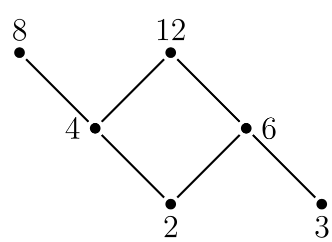
  $\vdots$

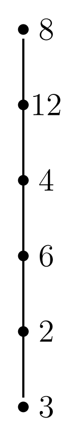
  (i) a_i es un elem. minimal de $A - \{a_0, a_1, \ldots a_{i-1}\}$.

  $\vdots$

  El proceso termina cuando todo elemento de A ha sido elegido.
  orden total: $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1}$.

- Ej.





$\langle 3, 2, 6, 4, 12, 8 \rangle$, $\qquad \langle 2, 4, 8, 3, 6, 12 \rangle$ también es posible.