T3: Funciones reales. Límites. Continuidad

Función par: $f(-x) = f(x)$ (gráfica simétrica respecto de OY)

Función impar: $f(-x) = -f(x)$ (gráfica idéntica respecto del origen de coordenadas

- Funciones acotadas
  - Inf: $\exists m : m \leq f(x) \rightarrow$ cota inf
  - Sup: $\exists M : M \geq f(x) \rightarrow$ cota sup

Límite: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Si para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$\forall x : 0 < |x-a| < \delta : |f(x) - L| < \varepsilon$

-> Regla del sandwitch **IMPORTANTE**

Si $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$

$\forall x \in (m,n)$ y $a \in (m,n)$ con $\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_2(x)$

Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} f_1(x)$ //

Límite: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Si para todo $M > 0$, $\exists \delta > 0$:

$\forall x : 0 < |x-a| < \delta \rightarrow f(x) \geq M$

Límite: $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Si para todo $M < 0$, $\exists \delta > 0$:

$\forall x : 0 < |x-a| < \delta \rightarrow f(x) \leq M$

Límite : $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Si para todo $\varepsilon > 0, \exists k > 0$:

$\forall x > k : |f(x) - L| < \varepsilon$

Límite : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

Si para todo $\varepsilon > 0, \exists k > 0$:

$\forall x < k : |f(x) - L| < \varepsilon$

Funciones continuas

f es continua en a

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \exists f(a) \\ \text{Si } \exists \lim_{x \to a} f(x) \end{array}\right\} \; f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

1)

SUPREMO $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$: $\exists x_0 \in [a,b]$: x_0 es un máximo de f

INFIMO $\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$: $\exists x_0 \in [a,b]$: x_0 es un mínimo de f

2) f tiene máximo y mínimo en $[a,b]$

3) Bolzano

Si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ o al revés, $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$

4) Valores intermedios de Darboux

$x_0, x_1 \in [a,b]$; $f(x_0) < f(x_1)$ (o al reves)

$\exists x \in (x_0, x_1) : f(x) = h$; $f(x_0) < h < f(x_1)$