Tema 1

Los números complejos

Los coeficientes y las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, las elementos de las matrices o las coordenadas de los vectores son números. Hasta ahora esos números con los que has trabajado eran números reales y también lo serán en buena parte de esta asignatura. Sin embargo, en algunas situaciones que se nos presentarán y para muchos otros propósitos que se escapan de los objetivos de la asignatura, es necesario considerar un conjunto de números mayor que el de los números reales. Por ejemplo, en el tema 6, a la hora de estudiar matrices con elementos reales, definiremos un polinomio que, por tener coeficientes reales, no siempre tendrá raíces. En este sentido, recuerda que, cuando intentamos resolver ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales, algunas veces nos encontramos con raíces cuadradas de números negativos y, en ese caso, no podemos resolver dichas usando solo números reales. Para poder resolver estas ecuaciones definimos los números complejos.[1]

1.1 Definición

Como decíamos, para resolver ecuaciones de segundo grado con coeficientes reales, el conjunto de números reales se nos queda pequeño, ya que existen ecuaciones de segundo grado que no tienen soluciones reales:

Ejemplo 1.1.1. Consideremos el polinomio $p(X) = X^2 + X + 1$ y calculemos sus raíces. Según la fórmula que conocemos, estas son $x_1 = -1 + \sqrt{-3}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{-3}$. El número $\sqrt{-3}$ no es un número real, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo pero, como la raíz cuadrada se distribuye sobre el producto, podemos dar otro

[1]Como los números reales se pueden sumar y multiplicar y esa suma y ese producto cumplen ciertas propiedades, decimos que el conjunto de números reales es un *cuerpo*. Los números complejos también son un cuerpo. En realidad, la mayor parte del Álgebra Lineal que veremos en esta asignatura y otra mucha Álgebra Lineal que no veremos se puede hacer con un cuerpo arbitrario, pero usaremos los números reales (y, cuando sea necesario, los complejos), porque resultan más familiares. De hecho, existen muchos otros cuerpos, algunos que ya conoces, como el de los números racionales, y otros más “exóticos”, como los cuerpos finitos. Estos últimos son importantes, por ejemplo, en la criptografía moderna.

paso para aislar aún más el problema, escribiendo $x_1 = -1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$. El problema es, pues, que $\sqrt{-1}$ no es un número real.

El ejemplo 1.1.1 sugiere que, para conseguir que todas los polinomios de grado 2 tengan raíces, podemos empezar añadiendo al conjunto **R** de los números reales un elemento nuevo, que llamaremos i, que jugará el papel de raíz cuadrada de -1. Es decir, por definición, i va a cumplir $i^2 = -1$. Con este nuevo número, en el ejemplo 1.1.1 las raíces de $p(X)$ serían $x_1 = -1 + \sqrt{3}\, i$ y $x_2 = -1 - \sqrt{3}\, i$, que son expresiones de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales. Teniendo en cuenta la fórmula para calcular las raíces de un polinomio de grado 2, tales expresiones serán suficientes para que todos esos polinomios tengan solución. Todo esto motiva la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Un número complejo z es una expresión

$$z = a + bi, \tag{1.1.2.1}$$

donde a y b son números reales.

Decimos que (1.1.2.1) es la *expresión binomial* de z. Al conjunto de los números complejos lo denotamos **C**. Si $b = 0$ escribimos $z = a$ y en ese caso z es un número real. Así pues **R** está contenido en **C**. Si $a = 0$, escribimos $z = bi$ y en ese caso decimos que z es un número *imaginario puro*. Escribimos también $a - bi := a + (-b)$.

Dado un número complejo $z = a + bi$, llamamos a a la parte real de z y la denotamos como Rez. De igual forma, llamamos a b la parte imaginaria de z y la denotamos como Imz. Dos números complejos son iguales si y solo si tienen la misma parte real y tienen la misma parte imaginaria, es decir, $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Suma de números complejos: Dados $z = a + bi$ y $z' = c + di$, definimos su suma como

$$z + z' = (a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i.$$

La suma de números complejos cumple las propiedades asociativa y conmutativa y tiene un (único) elemento neutro, que es $0 = 0 + 0i$. Además, cada número complejo tiene un (único) *opuesto* (es decir, para cada $z = a + bi$, el número complejo $w = -a - bi$ cumple $z + w = 0$; w se le llama el opuesto de z y se denota $-z$).

Producto de números complejos: Dados $z = a + bi$ y $z' = c + di$, definimos su producto como

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{1.1.2.2}$$

Observa que de (1.1.2.2) se sigue $i^2 = -1$. El producto cumple las propiedades conmutativa y asociativa y la distributiva respecto de la suma. De hecho, usando esas propiedades, la conmutativa y la asociativa de la suma y que $i^2 = -1$, podemos recuperar la fórmula (1.1.2.2).

Ejemplo 1.1.3. Sean $z_1 = 2 - 3i$ y $z_2 = \frac{1}{2} + 5i$. Entonces, según la definición del producto de números complejos,

$$z_1 \cdot z_2 = \left(2\frac{1}{2} - (-3)5\right) + \left(2 \cdot 5 + (-3)\frac{1}{2}\right)i = 16 + \frac{17}{2}i.$$

Por otra parte, si usamos la propiedad distributiva (y las propiedades conmutativa y asociativa de suma y producto) y la regla $i^2 = -1$ para calcular $z_1 \cdot z_2$, llegamos al mismo resultado:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 - 3i)\left(\frac{1}{2} + 5i\right) = 2\frac{1}{2} + 2(5i) + (-3i)\frac{1}{2} + (-3i)(5i) =$$
$$1 + 10i - \frac{3}{2}i - 15i^2 = 11 + 10i - \frac{3}{2}i - 15(-1) = 16 + \frac{17}{2}i.$$

El producto tiene un (único) elemento neutro, que es $1 = 1 + 0i$. Además, cada número complejo distinto de 0 tiene un (único) *inverso*. En efecto, para cada $z = a + bi \neq 0$, se sigue de manera inmediata de la definición del producto que el número complejo

$$\omega = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}i$$

(observa que $a^2 + b^2 = 0$ si y solo si $z = 0$) cumple $z \cdot \omega = 1$. A ω se le llama el inverso de z y se denota z^{-1}. Dividir un número complejo z por otro número complejo z' no nulo es multiplicar z por z'^{-1}, es decir

$$\frac{z}{z'} = z \cdot z'^{-1}.$$

Ejemplo 1.1.4. (1) El inverso de i es $-i$.

(2) El inverso de $1 + i$ es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

(3) $\frac{2+3i}{-1+4i} = \frac{(2+3i)(-1-4i)}{17} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i$.

Como la suma de números complejos cumple la propiedad asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro y tiene elemento opuesto, el producto de números complejos cumple la propiedad asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro, tiene elemento inverso y cumple la propiedad distributiva respecto de la suma, el conjunto **C** de los números complejos es un *cuerpo conmutativo*.

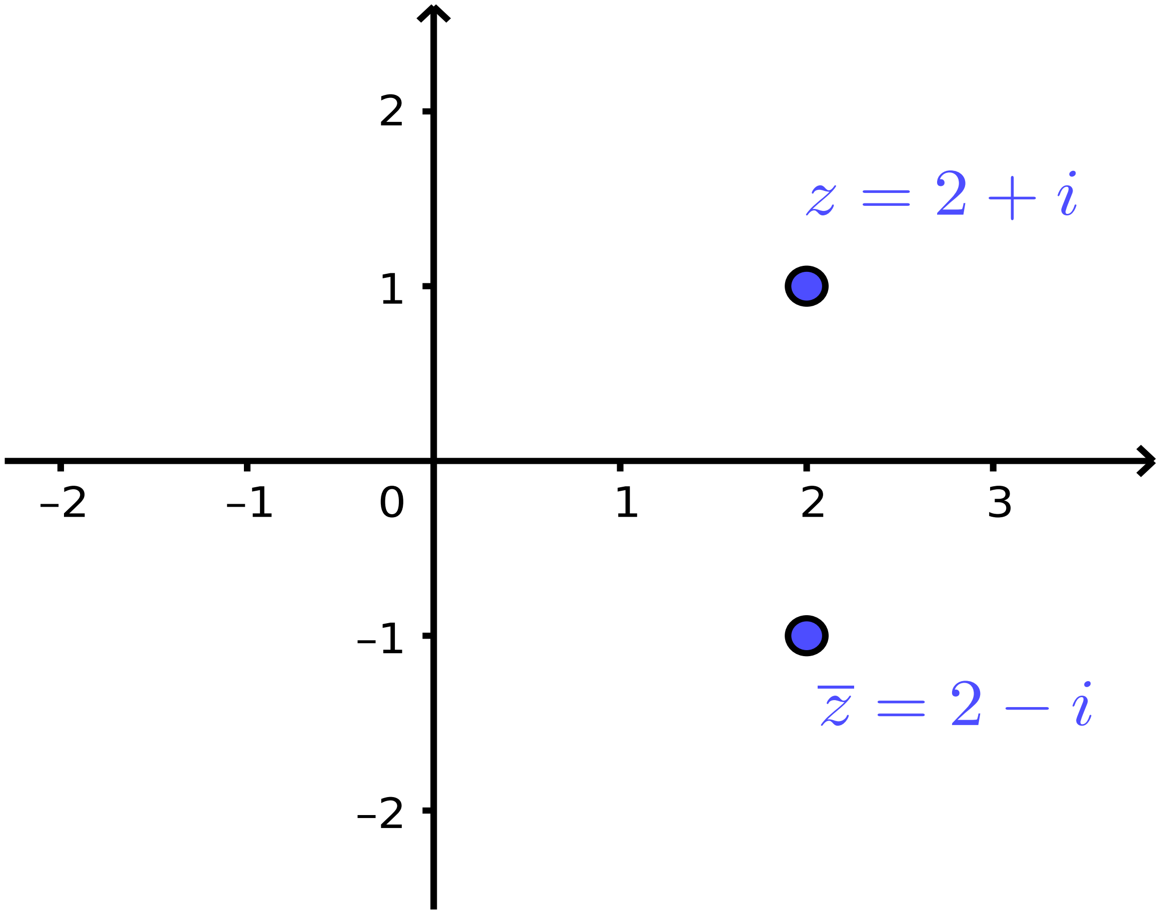
1.2 Conjugación, módulo y argumento

Podemos identificar **C** con $\mathbf{R}^2$, identificando el número complejo $z = a + bi$ con el punto (a, b) de $\mathbf{R}^2$.

Conjugado de un número complejo: Dado $z = a + bi$, definimos el *conjugado* de z como

$$\overline{z} = a - bi.$$

Figura 1.1:



Geométricamente, $\overline{z}$ corresponde al punto de $\mathbf{R}^2$ que es el simétrico de (a, b) con respecto al eje X (véase la figura 1.1).

Es fácil ver que el conjugado tiene las siguientes propiedades:

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(2) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(3) $\overline{\overline{z}} = z$.

(4) $\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.

(5) $\mathrm{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

(6) $z = \overline{z}$ si y solo si z es un número real.

Módulo de un número complejo: Definimos el *módulo* de z y lo denotamos por $|z|$ a

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observa que, para todo $z \in \mathbf{C}$, $|z| \geq 0$ y que $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

Observa que $|z|$ es la distancia del punto (a, b) al origen de coordenadas $(0, 0)$ del plano real. En particular, los números complejos z que cumplen $|z| = 1$ corresponden a los puntos del plano real que están en la circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

Observa que, si $z = a + bi$, entonces $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, por lo que

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}, \tag{1.2.0.1}$$

y, si $z \neq 0$,

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Por tanto, de (1.2.0.1) se sigue que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. En efecto,

$$|z \cdot w| = \sqrt{(z \cdot w)\overline{(z \cdot w)}} = \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \cdot \sqrt{w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w|.$$

Argumento de un número complejo: Si $z \neq 0$, definimos el *argumento* de z como el ángulo θ, contado en sentido antihorario, que forma el vector $(1, 0)$ con el vector (a, b). Si θ es el argumento de z, entonces, para cualquier número entero m, $\alpha + 2m\pi$ también es el argumento de z, ya que θ y $\theta + 2m\pi$ corresponden al mismo ángulo. Un número complejo no nulo está determinado por su módulo y su argumento. Si z tiene módulo ρ y argumento θ decimos que (ρ, θ) son sus *coordenadas polares*.

Observa que z es un número real positivo si y solo si tiene argumento 0 (o $2m\pi$, para cualquier entero m). En ese caso $z = |z|$.

Observa que $|z| = |\overline{z}|$ y que, si θ es el argumento de z, entonces $-\theta$ es el argumento de $\overline{z}$.

Paso de coordenadas polares a forma binomial: Si el vector (a, b) de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen forma un ángulo θ con el vector $(1, 0)$, entonces $(a, b) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Por tanto, si un número complejo no nulo z tiene módulo ρ y argumento θ, entonces

$$z = \rho(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, i),$$

es decir,

$$\operatorname{Re} z = \rho\cos\theta\,, \quad \operatorname{Im} z = \rho\operatorname{sen}\theta. \tag{1.2.0.2}$$

Paso de forma binomial a coordenadas polares: Dado el número complejo no nulo $z = a + bi$, ya sabemos que su módulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Por otra parte, la tangente α del ángulo que forma el vector (a, b) de $\mathbf{R}^2$ con el vector $(1, 0)$ es el número real b/a, si $a \neq 0$. Entonces, para calcular el argumento de z, hallamos el arcotangente de b/a, pero debemos tener en cuenta que la tangente del ángulo que forma el vector $(-a, -b)$ con el vector $(1, 0)$ es también α, por lo que la fórmula precisa para calcular el argumento de z es la siguiente. En primer lugar, convendremos en usar la determinación del arco tangente cuyos valores están entre $(-\pi/2, \pi/2)$. Entonces

$$
\begin{array}{ll}
\arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{si } z \text{ está en el primer o cuarto cuadrante, es decir, si } a > 0; \\
\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0; \\
\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{si } z \text{ está en el segundo o tercer cuadrante, es decir, si } a < 0; \\
-\frac{\pi}{2}, & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0.
\end{array}
$$

Otra forma de hallar el argumento de un número complejo no nulo escrito en forma binomial es la siguiente: Si $z = a + bi$ tiene argumento θ, de (1.2.0.2) se sigue

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{1.2.0.3}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \tag{1.2.0.4}$$

por tanto, el argumento de z es el único θ, entre 0 y 2π, por ejemplo, que cumple (1.2.0.3).

Ejemplos 1.2.1. (1) Calculamos el módulo y el argumento de $z = -\sqrt{3} + i$. El módulo de z es $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. Entonces $z = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$. Entonces, si el argumento de z es θ, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, por lo que $\theta = 5\pi/6$.

(2) Si z tiene módulo 1 y argumento $\frac{3\pi}{2}$, entonces $z = \cos\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} \cdot i = -i$.

(3) Si z tiene módulo $6\sqrt{2}$ y argumento $-\frac{\pi}{4}$, entonces $z = 6\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4}) \cdot i) = 6 - 6i$.

Coordenadas polares del producto:

Sean ρ_1 y θ_1 el módulo y el argumento de z_1 y sean ρ_2 y θ_2 el módulo y el argumento de z_2. Entonces, usando las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1$$
$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2$$

para el seno y el coseno de la suma de ángulos y recordando que $i^2 = -1$, obtenemos

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_1\, i) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\, i) = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\, i),$$

por lo que el módulo de $z_1 \cdot z_2$ es $\rho_1\rho_2$ (como ya sabíamos) y el argumento de $z_1 \cdot z_2$ es $\theta_1 + \theta_2$.

Geométricamente, si z_2 es número complejo de módulo 1 (es decir, corresponde a un punto de la circunferencia de radio 1 centrada en el origen) y argumento θ_2, el producto $z_1 \cdot z_2$ corresponde al vector de $\mathbf{R}^2$ que resulta de girar el vector correspondiente z_1 un ángulo θ_2.

El cálculo anterior del módulo y el argumento del producto nos permite calcular de manera fácil la potencia de un número complejo: sea n un número natural; si z tiene módulo ρ y argumento θ, entonces z^n tiene módulo ρ^n y argumento $n\theta$.

Si $z \neq 0$ y ρ y θ son, respectivamente, el módulo y el argumento de z, y si w tiene módulo ρ^{-1} y argumento $-\theta$, entonces $z \cdot w$ tiene módulo 1 y argumento 0, es decir, $z \cdot w = 1$. Por tanto, el inverso z^{-1} de z tiene módulo ρ^{-1} y argumento $-\theta$.

De lo anterior se sigue que el cociente z_1/z_2 tiene módulo ρ_1/ρ_2 y argumento $\theta_1 - \theta_2$.

Coordenadas polares del conjugado: Sea $z \neq 0$ y sean ρ y θ, respectivamente, el módulo y el argumento de z. Como $\overline{z}$ es, en la representación gráfica de los números complejos, el simétrico de z respecto del eje de abscisas, es claro que el módulo de $\overline{z}$ es ρ y el argumento de $\overline{z}$ es $-\theta$.

Forma exponencial de un número complejo: Igual que para números reales se define la función exponencial $y = e^x$, para números complejos también se puede definir la función exponencial. Un resultado de análisis complejo, la fórmula de Euler, afirma que, dado un número real θ,

$$e^{\theta i} = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\, i.$$

De esto se deduce que, si el número complejo z tiene módulo ρ y argumento θ,

$$z = \rho e^{\theta i} \tag{1.2.1.1}$$

A (1.2.1.1) se la llama *forma exponencial* de z. Para más detalles, resuelve el ejercicio 1.14.

Las reglas para multiplicar potencias implican

$$\begin{aligned}
(\rho_1 e^{\theta_1 i}) \cdot (\rho_2 e^{\theta_2 i}) &= \rho_1\rho_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i} \\
(\rho e^{\theta i})^n &= \rho^n e^{n\theta i} \quad (n \in \mathbf{N}) \\
(\rho e^{\theta i})^{-1} &= \rho^{-1} e^{-\theta i} \\
\frac{\rho_1 e^{\theta_1 i}}{\rho_2 e^{\theta_2 i}} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i},
\end{aligned}$$

que son equivalentes a las fórmulas para las coordenadas polares del producto, las potencias, el inverso y el cociente vistas en el apartado anterior.

1.3 Raíces complejas de un polinomio

Raíces enésimas: Dado un número complejo no nulo z y un número natural n, queremos hallar todos los números complejos w tales que $w^n = z$. A esos w les llamamos *raíces n-ésimas* de z en $\mathbf{C}$.

Abordamos primero el problema para $z = 1$. Si w es un número complejo con módulo η y argumento φ tal que $w^n = 1$, entonces $\eta^n = 1$ y $n\varphi$ es de la forma $2m\pi$ para algún número entero m. Como η es un número real positivo, $\eta = 1$. Por otra parte, $\varphi = 2\frac{m}{n}\pi$. Si q es el cociente entero de dividir m entre n y k es el resto, entre 0 y $n-1$, de dicha división (es decir, $m = nq + k$), entonces $\varphi = 2q\pi + 2\frac{k}{n}\pi$, por lo que $2\frac{k}{n}\pi$ es también el argumento de w. De esto se deduce que 1 tiene exactamente n raíces n-ésimas complejas y que estas tienen todas módulo 1 y argumentos $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$. En notación exponencial, las raíces n-ésimas de la unidad son

$$1, e^{\frac{2\pi}{n}i}, e^{\frac{4\pi}{n}i}, \dots, e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i},$$

(para más detalles, resuelve el ejercicio 1.9 a)). Geométricamente, las raíces n-ésimas de la unidad se corresponden con los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia con centro 0 y radio 1, siendo 1 uno de los vértices de dicho polígono (lo puedes ver, para $n = 5$, en la figura 1.2).

Ejemplo 1.3.1. Las raíces quintas de 1 son

$$1, e^{\frac{2\pi}{5}i}, e^{\frac{4\pi}{5}i}, e^{\frac{6\pi}{5}i}, e^{\frac{8\pi}{5}i}.$$

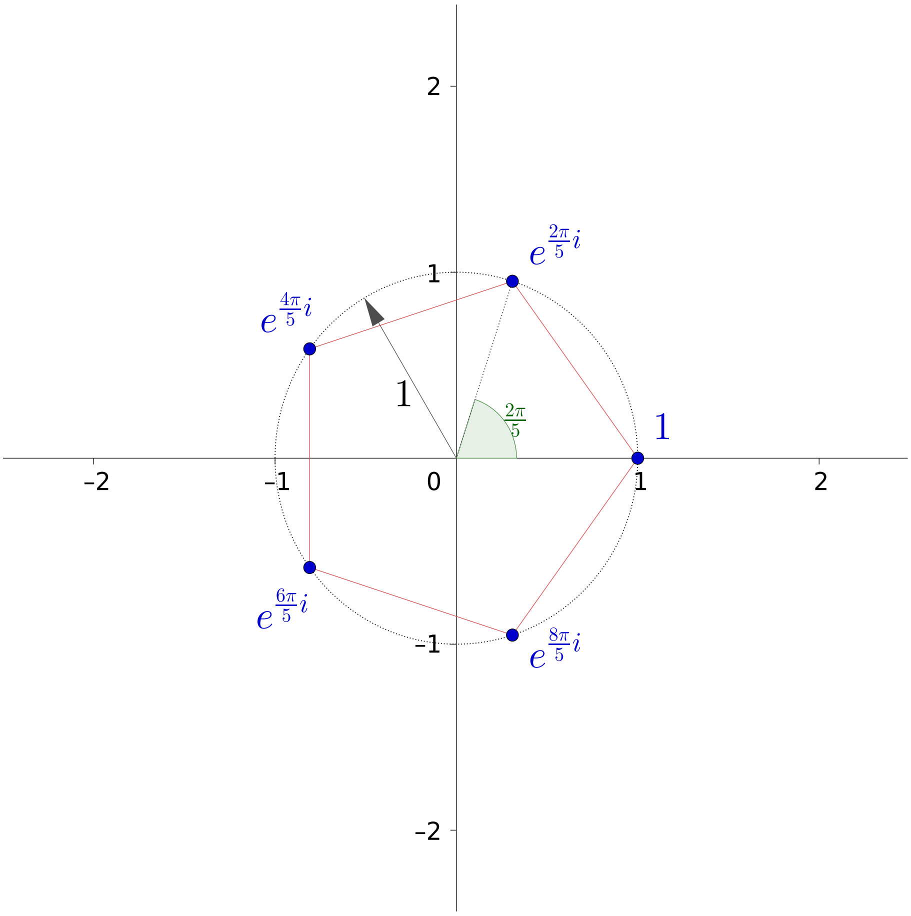
(véase la figura 1.2).

Sea z un número complejo no nulo cualquiera, sea ρ su módulo y sea θ su argumento. Si w tiene módulo $\sqrt[n]{\rho}$ (donde $\sqrt[n]{\rho}$ es el único número real positivo cuyo potencia n-ésima es ρ) y argumento $\frac{\theta}{n}$, es claro que $w^n = z$. Razonando como en el párrafo anterior, vemos que z tiene n raíces n-ésimas complejas, todas con módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y con argumentos $\frac{\theta}{n}, \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}, \frac{\theta}{n}+\frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{\theta}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}$. Geométricamente, las raíces n-ésimas de z se corresponden con los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en la circunferencia con centro 0 y radio $\sqrt[n]{\rho}$, que tiene como uno de los vértices el punto que corresponde al número complejo de módulo $\sqrt[n]{\rho}$ y argumento $\frac{\theta}{n}$ (lo puedes ver, para las raíces cuartas de $z = -8 + 8\sqrt{3}i = 16e^{\frac{2\pi}{3}}$, en el ejemplo 1.3.2 (2) y la figura 1.3).

Ejemplo 1.3.2. (1) Calculamos las raíces quintas de -1. Como -1 tiene módulo 1 y argumento π, una raíz quinta de -1 es el número complejo de módulo 1 y argumento $\pi/5$. Según lo visto en el párrafo anterior, las raíces quintas de 1 son los números complejos con módulo 1 y argumentos $\pi/5$, $3\pi/5$, π, $7\pi/5$ y $9\pi/5$ (observa que entre las cinco raíces quintas de -1 se encuentra -1). Por tanto, en forma exponencial, las raíces quintas de -1 son

$$e^{\frac{\pi}{5}i}, e^{\frac{3\pi}{5}i}, e^{\pi i} = -1, e^{\frac{7\pi}{5}i}, e^{\frac{9\pi}{5}i}.$$

Figura 1.2:

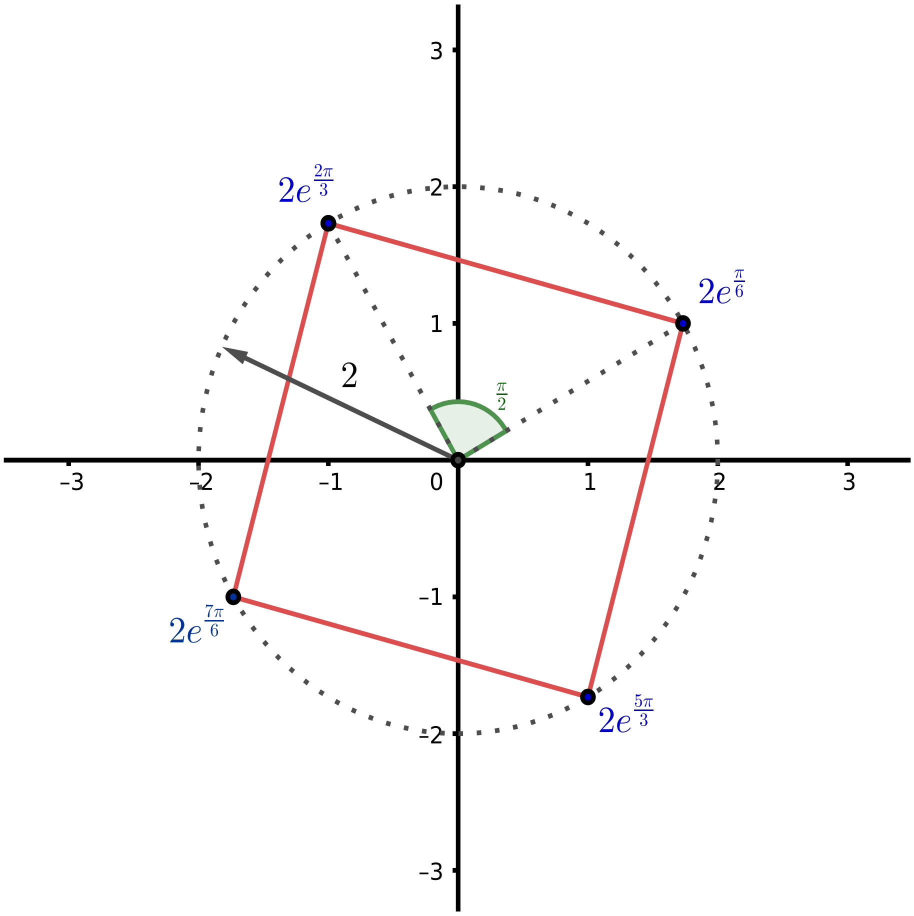


(2) Calculamos las raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}i$. Observamos que $-8+8\sqrt{3}i$ tiene módulo 16 y argumento $2\pi/3$, por lo que una raíz cuarta de $-8+8\sqrt{3}i$ es el número complejo de módulo 2 y argumento $\pi/6$. Según lo visto en el párrafo anterior, las raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}i$ son los números complejos de módulo 2 y argumentos $\pi/6, 2\pi/3, 7\pi/6, 5\pi/3$, ya que $\pi/6+2\pi/4 = 2\pi/3$, $\pi/6+4\pi/4 = 7\pi/6$ y $\pi/6+6\pi/4 = 5\pi/3$. Por tanto, las raíces cuartas de $-8+8\sqrt{3}i$ son $\sqrt{3}+i, -1+\sqrt{3}i, -\sqrt{3}-i, 1-\sqrt{3}i$.

Teorema fundamental del Álgebra: Introducir el número i permite resolver, en $\mathbf{C}$, cualquier ecuación polinómica de grado 2 con coeficientes reales. Lo mismo es cierto para ecuaciones polinómicas de grado arbitrario:

Teorema 1.3.3. *Sea n un número natural. Sea $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polinomio de grado n (es decir, $a_n \neq 0$) con coeficientes complejos (es decir, $a_n, a_{n-1}X^{n-1}, \ldots, a_1, a_0$*

Figura 1.3:



son números complejos). Entonces $p(X)$ tiene al menos una raíz compleja, es decir, existe un número complejo z tal que

$$p(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

El teorema 1.3.3 se llama teorema fundamental del Álgebra. Recordemos que z es raíz del polinomio $p(X)$ si y solo si existe otro polinomio $q(X)$ (con coeficientes complejos) tal que $p(X) = (X - z) \cdot q(X)$. Diremos que z es una raíz de $p(X)$ de multiplicidad n si el polinomio $(X - z)^n$ divide a $p(X)$ pero $(X - z)^{n+1}$ no. Entonces, aplicando repetidamente el teorema 1.3.3 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.3.4. *Sea n un número natural. Sea $p(X)$ un polinomio de grado n con coeficientes complejos.*

(1) El polinomio $p(X)$ es el producto de n polinomios de grado 1 con coeficientes complejos.

(2) La suma de las multiplicidades de las raíces complejas de $p(X)$ es n.

Ejemplo 1.3.5. Vamos a hallar las raíces complejas del polinomio $p(z) = z^3 - z^2 - z - 2$. Observamos que 2 es una raíz de $p(z)$ (recuerda que las posibles raíces racionales de un polinomio mónico con ceoficientes enteros son los divisores enteros de su término independiente). Vemos que el cociente de dividir $p(z)$ entre $z-2$ es z^2+z+1. Resolviendo la ecuación de segundo grado $z^2 + z + 1 = 0$ vemos que $p(z)$ tiene también como raíces $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (por cierto, según se deduce del ejercicio 1.11 b), $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ son las raíces cúbicas de la unidad distintas de 1).

Entonces $p(z)$ factoriza como producto de factores lineales:

$$z^3 - z^2 - z - 2 = (z-2)\left(z - \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z - \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right). \tag{1.3.5.1}$$

En cambio, la factorización de $p(z)$ como producto de polinomios, con coeficientes reales, del menor grado posible es

$$z^3 - z^2 - z - 2 = (z-2)(z^2 + z + 1),$$

donde $z^2 + z + 1$ es el producto de los dos últimos factores de (1.3.5.1).

Observamos por último que las raíces $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de $p(z)$ son conjugadas. Como se ve en el lema 1.3.6, esto no es casualidad.

En el ejercicio 1.16 a) se pide demostrar el siguiente resultado:

Lema 1.3.6. *Si $p(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales (es decir, $a_n, a_{n-1}X^{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales) y el número complejo es una raíz de $p(X)$, demuestra que $\overline{z}$ es también una raíz de $p(X)$.*

Observación 1.3.7. Sea $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$). Entonces el polinomio $(X - z) \cdot (X - \overline{z})$ tiene coeficientes reales. En efecto,

$$(X - z) \cdot (X - \overline{z}) = (X - (a + bi)) \cdot (X - (a + bi)) =$$
$$((X - a) + bi) \cdot ((X - a) - bi) = (X - a)^2 + b^2 = X^2 - 2aX + (a^2 + b^2) = X^2 - 2\mathrm{Re}zX + |z|^2.$$

Como consecuencia del corolario 1.3.4, del lema 1.3.6 y de la observación 1.3.7, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.3.8. *Un polinomio de grado positivo con coeficientes reales es el producto de polinomios, con coeficientes reales, de grados* 1 *y* 2.