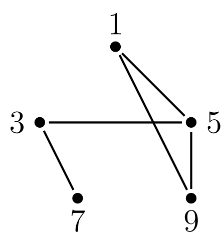
GRAFOS

- <u>Def</u>
  Un **grafo** G viene dado por dos conjuntos, $G = (V, E)$ donde $V =$ **vertices** (conj. finito), $E =$ **aristas**. Representamos las aristas $e \in E$ por un conjunto de dos vértices distintos, $e = \{v, w\} = \{w, v\}$ (par no ordenado). Decimos $v, w \in V$ $(v \neq w)$ son **vértices adyacentes** y que e **incide** en v y w.

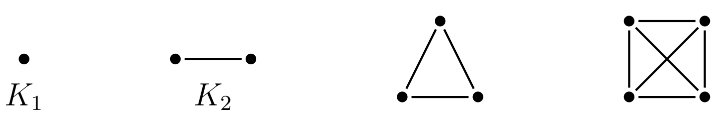
- <u>Ej.</u>
  $V = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
  $E = \{\{3, 7\}, \{5, 1\}, \{5, 9\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}\}$

  Gráficamente:



- <u>Def.</u> **Grafos Completos**.
  Llamamos $\mathbf{K}_n$ al **grafo completo de n vértices**, conectados dos a dos de todas las maneras posibles.

  Gráficamente:

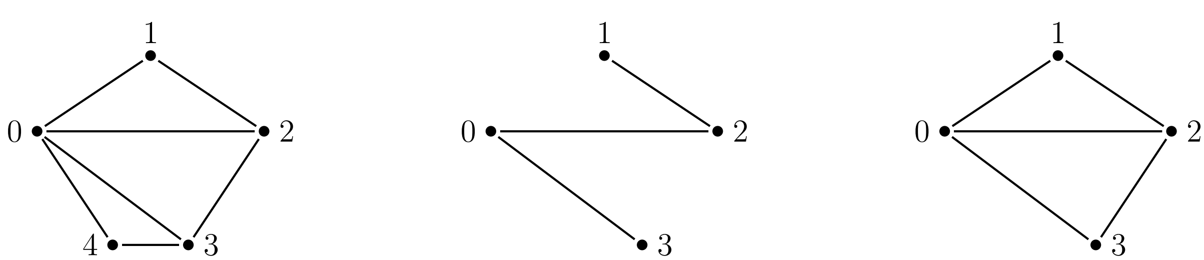


K_1 K_2 K_3 K_4

- <u>Def.</u> **Subgrafos**.
  Un grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es un **subgrafo** de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ sii $V_2 \subseteq V_1$ y $E_2 \subseteq E_1$. Si las aristas de G_1 que conectan vértices de G_2 están todas en G_2, decimos que G_2 es un **subgrafo completo** de G_1:

$$\{x, y\} \in E_1,\ x, y \in V_2 \Longrightarrow \{x, y\} \in E_2$$

- <u>Ej.</u>



G_1 G_2 G_3

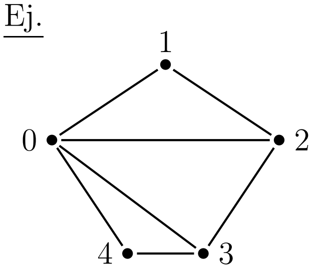
G_2 es un subgrafo de G_1 pero no es un subgrafo completo de G_1.

G_3 es un subgrafo completo de G_1.

- <u>Representación de Grafos</u>

  Tabla de Adyacencia, lista de vértices, cada vértice v_i almacena una lista de todos sus vértices adyacentes v_j.

- <u>Ej.</u>



G_1

Tabla de Adyacencia

0	1	2	3	4
1	0	2		
2	0	1	3	
3	0	2	4	
4	3	0		

Los vértices adyacentes del vértice 2 son los vértices 0, 1 y 3.

- Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

  Matriz de Adyacencia es la matriz $M_{n\times n}$

$$M[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si no hay arista de } v_i \text{ a } v_j \\ 1 & \text{si hay arista de } v_i \text{ a } v_j \end{cases}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

matriz de adyacencia de G_1. Es simétrica.

- <u>Def.</u>

  g(v), el **grado** de un vértice v, es el número de aristas que inciden en v.

- <u>Teorema</u> (del apretón de manos.)

$$\sum_{v\in V(G)} g(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

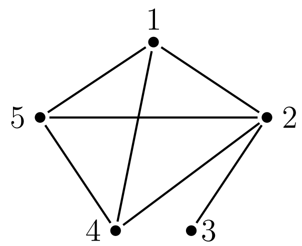
  Dem.

  Cada arista contribuye con 2 a la suma de los grados.

- <u>Corolario</u>

  El número de vértices de grado impar es par.

- Ej.



G_1

$gr(1) + gr(2) + gr(3) + gr(4) + gr(5) = 3 + 4 + 1 + 3 + 3 = 14 = 2 \cdot 7 = 2 \cdot |E|$

- Ej.

  Una empresa quiere establecer una red con sus 5 ordenadores conectando cada uno de ellos exactamente a otros 3. Es ello posible?

  De cada ciudad de un cierto país, parten 3 carreteras a otras tantas ciudades. ¿Puede tener dicho país 50 carreteras en total? Si nos dicen que hay 60 carreteras, ¿cuántas ciudades tiene el país?

  ¿Se pueden dibujar 9 segmentos en un papel de forma que cada uno de ellos corte exactamente a otros 3? ¿Y si en vez de 9, se quieren dibujar 6?

- Def.
  Un grafo es **regular de grado r** si todos sus vértices tienen grado r.

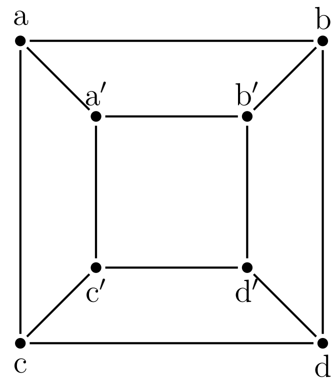
- Ej.

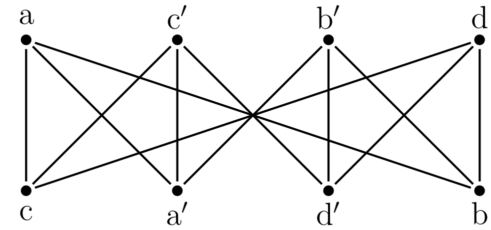
  K_n es regular de grado $n-1$.

Grafos Isomorfos

- Def.
  Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ decimos que son **isomorfos**, $G_1 \simeq G_2$, o que hay un **isomorfismo** entre ambos, si existe una biyección $b : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que

$$\forall x, y \in V_1,\ \{x, y\} \in E_1 \iff \{b(x), b(y)\} \in E_2$$





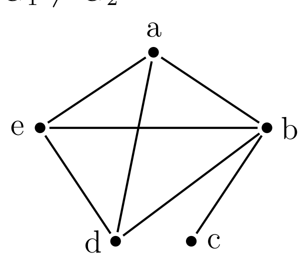
G_1 es isomorfo a G_2 Una posible biyección es: $b(\alpha) = \alpha$ $\alpha =$ a, b, c, d, a′, b′, c′, d′.

No suele ser fácil determinar si dos grafos son isomorfos, pero si

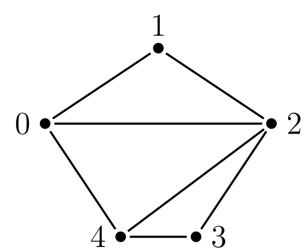
- Proposición

  1. tienen diferente número de vértices
     o
  2. tienen diferente número de aristas
     o
  3. tienen diferente número de vértices de un cierto grado n
     o
  4. si difieren en alguna propiedad preservada por isomorfismo, no pueden ser isomorfos.

- Ej.
  $G_1 \not\simeq G_2$



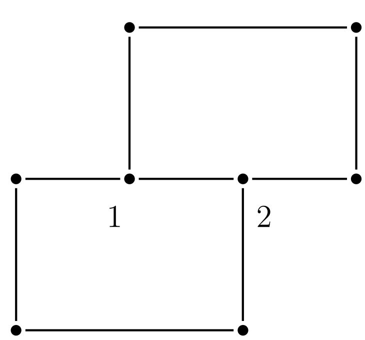
G_1



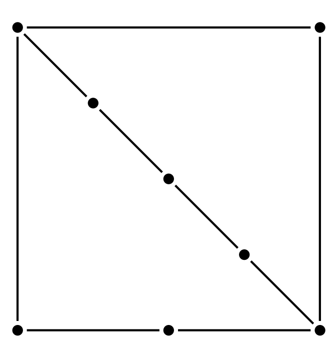
G_2

K_4 es un subgrafo de G_1. K_4 no es un subgrafo de G_2.

- $G_1 \not\simeq G_2$ porque 1, 2 son dos vértices adyacentes de grado 3 y G_2 no tiene dos vértices adyacentes de grado 3.



G_1



G_2

- Recorridos en un Grafo

  Muchas veces los grafos son utilizados en problemas de rutas.

  Vértices $\Longleftrightarrow$ ciudades o intersecciones, aristas $\Longleftrightarrow$ carreteras o conexiones.

- Def.
  Sea $G = (V, E)$ un grafo.

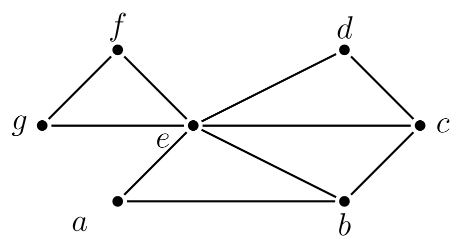
  Un **recorrido** en G es una sucesión de vértices $v_0, \ldots, v_n$ donde v_i y v_{i+1} son adyacentes para $0 \leq i \leq n-1$. Si todos los vértices son distintos entre sí, decimos que es un **camino**.

  Decimos que el recorrido visita los vértices v_i $(0 \leq i \leq n)$ y que $\{v_i, v_{i+1}\}$ son las aristas del recorrido. Si n es el número de aristas, n es la **longitud** del recorrido.

  Un **circuito** en G es un recorrido $v_0, \ldots, v_n$ tal que $v_0 = v_n$.

  Un **ciclo** in G es un camino $v_0, \ldots, v_n$ tal que $v_0 = v_n$. Un ciclo se llama trivial si $n = 0$ o $n = 2$. $v_0, v_1, v_2 = v_0$

- Ej.



$geabcdef$ $\quad$ $defgedegea$ recorridos.

$geabcd$ $\quad$ $gfebc$ caminos.

$geabefg$ $\quad$ $geabedceg$ circuitos.

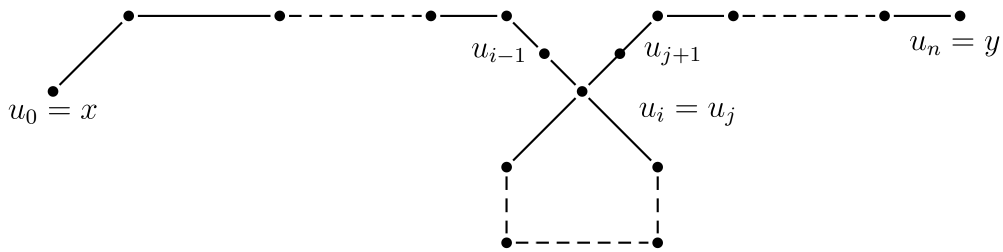
$gefg$ $\quad$ $eabcde$ ciclos.

- Components Conexas de un grafo. Grafos Conexos.

- Def.
  Sea $G = (V, E)$ un grafo. Dos vértices $x, y \in V$ están **conectados** por un recorrido $v_0, \ldots, v_n$ si $v_0 = x$ y $v_n = y$

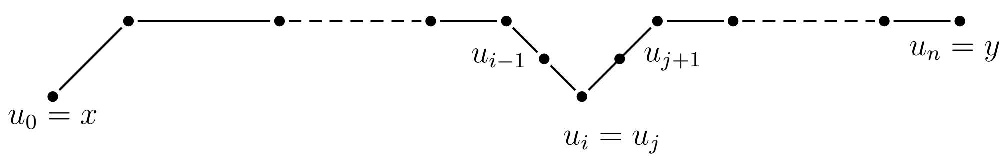
- Lema 1
  Sea $G = (V, E)$ un grafo. Dos vértices $x, y \in V$ están conectados por un recorrido sii x, y están conectados por un camino.
  Dem.
  $\Longleftarrow)$ Trivial porque todo camino es un recorrido.

  $\Longrightarrow)$ Suponemos $x \neq y$. Si $x = y$ es trivial. Sea $x = u_0, u_1, \ldots, u_n = y$ un recorrido, si no fuese un camino $\Longrightarrow \exists i, j \;\; 0 \leq i < j \leq n \quad u_i = u_j$.



Podemos considerar un recorrido más corto entre x e y:

$$x = u_0, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n = y$$



Repitiendo el proceso obtendremos un camino entre x e y.

- Def.
  Sea $G = (V, E)$ un grafo. Definimos una relación C como sigue:

  $$xCy \iff x, y \text{ están conectados por un camino.}$$

- Lema 2
  C es una relación de equivalencia.

  Dem.
  C claramente es reflexiva y simétrica. Veamos que es transitiva.

  $\forall x, y, z \in V,\ xCy,\ yCz \implies xCz$

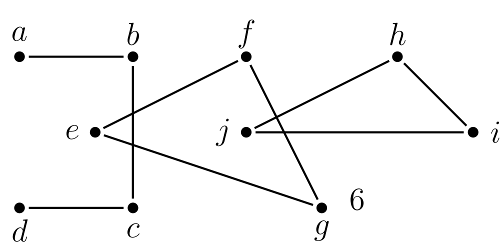
  Hay un camino $x = v_0, v_1, \ldots, v_n = y$ entre x e y y otro camino $y = u_0, u_1, \ldots, u_m = z$ uniendo y y z. Por tanto, hay un recorrido (puede haber vértices repetidos) entre x y z, $x = v_0, v_1, \ldots, v_n = y = u_0, \ldots, u_m = z$. Aplicando el lema 1 existe un camino entre x y z, es decir xCz.

- Def.
  Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $x \in V$. La clase de equivalencia de x, $[x]_C$, determinada por C

  $$[x]_C = \{y \in V | xCy\}$$

  la llamamos **componente conexa** de x. El subgrafo completo (vértices + aristas) correspondiente a dicha clase de equivalencia también se llama **componente conexa** de x.

- Ej.



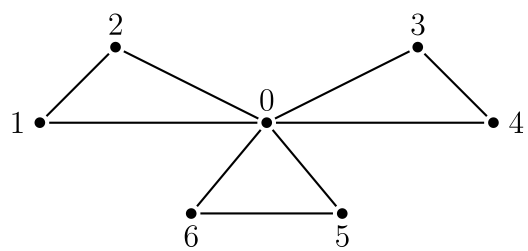
Este grafo tiene tres componentes conexas: $[a] = \{a, b, c, d\}$ $[e] = \{e, f, g\}$ $[h] = \{h, i, j\}$.

- Def.
  Si un grafo $G = (V, E)$ tiene una única componente conexa decimos que es **conexo**.

  Dos vértices cualesquiera de un grafo conexo están unidos por un camino.

  Si un grafo es conexo existe un recorrido $v_0, \ldots, v_n$ que visitará todos los vértices de G.

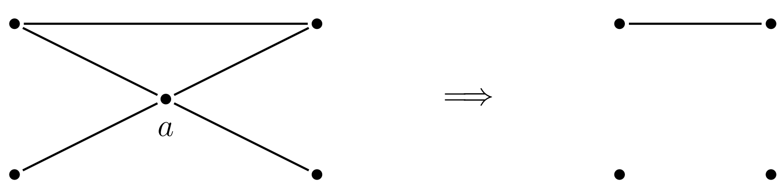
- Ej.



  Recorrido que visita todos los v de G:
  0, 1, 2, 0, 3, 4, 0, 5, 6

- Def.
  Un **punto de corte** de un grafo $G = (V, E)$ es un vértice $v \in V$ tal que si lo eliminamos junto con las aristas incidentes en él obtenemos un subgrafo con más componentes conexas que G.

- Ej.

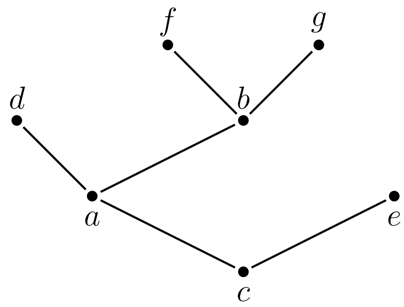


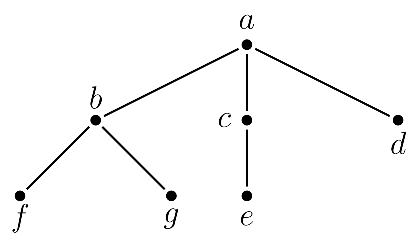
  1 componente conexa   3 componentes conexas

  a es un punto de corte

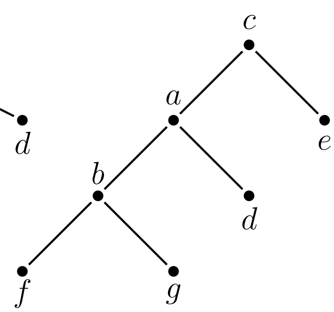
- Def.
  Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos.

- Def.
  Un **árbol con raíz** es un árbol con un vértice *especial* x_0, llamado raíz, que se distingue de los demás. (Podemos escoger cualquier vértice como ese vértice especial).





Raíz a

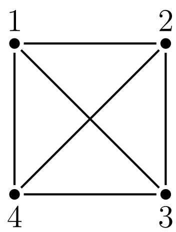


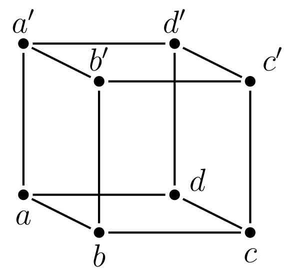
Raíz c

Los tres grafos, como grafos, son isomorfos ya que se trata de un mismo grafo. Sin embargo, como árboles, los dos últimos grafos no son árboles isomorfos ya que en la biyección entre los vértices b(raíz de A_1) = raíz de A_2 y raíz de $A_1 = a$ es de grado 3 y raíz de $A_2 = c$ es de grado 2.

- Grafos Hamiltonianos

- Def.
Un **ciclo hamiltoniano** es un ciclo que visita todos los vértices de un graph. Un grafo es hamiltoniano si contiene un ciclo hamiltoniano.





K_4 $\qquad$ Q_3 (A cube)

1, 2, 3, 4, 1 $\qquad$ $a, b, c, d, d', c', b', a', a$

Ciclos Hamiltonianos.

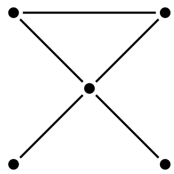
Buscar un ciclo hamiltoniano en un grafo se corresponde con muchos problemas prácticos. Por ejemplo, el problema del vendedor ambulante:
visita un número finito de ciudades sin repetir ninguna $\Longrightarrow$ Grafo Hamiltoniano.

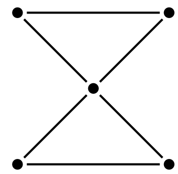
Los mejores algoritmos conocidos para encontrar un ciclo Hamiltoniano en un grafo o demostrar que no existe son de complejidad exponencial en el número de v del grafo en el peor de los casos.

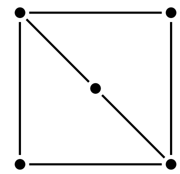
- Condiciones necesarias para que un grafo sea Hamiltoniano.

  - G tiene que ser conexo
  - G no puede tener vértices de grado 1 y todos son de grado ≥ 2
  - G no puede tener puntos de corte

- Estas condiciones **no son suficientes**:


(1)


(2)


(3)

(1) Conexo pero no Hamiltoniano
(2) Conexo, sin v de gr 1, no Hamiltoniano
(3) Conexo, sin v de gr 1, sin puntos de corte, no Hamiltoniano

- <u>Condiciones suficientes grafo Hamiltoniano.</u>

- <u>Teorema</u>(Dirac)
  Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con $n = |V| \geq 3$. Si $\forall v \in V \; deg(v) \geq \dfrac{n}{2}$ entonces G es Hamiltoniano.

  El teorema de Dirac es consecuencia del teorema de Ore.

- <u>Teorema</u>(Ore)
  Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo con $n = |V| \geq 3$. Si $deg(u) + deg(v) \geq n$ para cada par de vértices u, v **no adyacentes** de G, entonces G es Hamiltoniano.

  Dem.
  Si $n = 3$ el único grafo que verifica las hipótesis del teorema es K_3. Es Hamiltoniano.

  Sea $n \geq 4$ y supongamos que G verifica las hipótesis pero que no es Hamiltoniano. Si añadimos aristas al grafo, se siguen cumpliendo las hipótesis. Aañadimos aristas a G hasta obtener el grafo $G' = (V, E')$ que verifica que no es Hamiltoniano, pero si añadimos alguna arista más, entonces se convierte en Hamiltoniano.

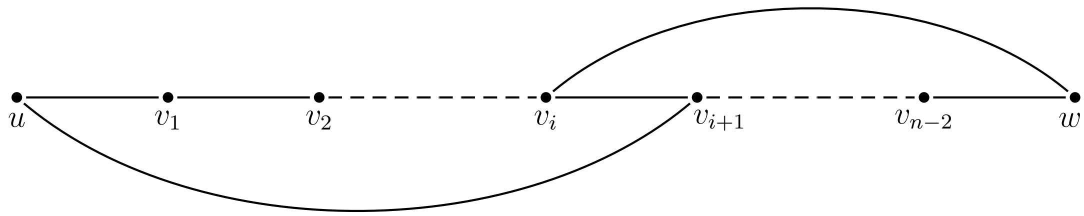
  Sea $e = \{u, w\} \in V \times V$ una arista $\notin E'$. $G' \cup \{e\}$ contiene un ciclo Hamiltoniano: $u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = w, u$ (utilizando e)

  Consideramos el recorrido $P : u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = w$ longitud $= n - 1$ y $\forall v \in V \;\; v \in P$

  Sea

  - $E_u = \{\{v_i, v_{i+1}\} | \{u, v_{i+1}\} \in E\}$
  - $E_w = \{\{v_i, v_{i+1}\} | \{v_i, w\} \in E\}$

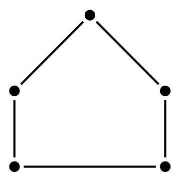
  Aplicando la hipótesis del teorema, obtenemos $|E_u| + |E_w| \geq n$ luego, existe una arista $\{v_i, v_{i+1}\} \in E_u \cap E_w$. $i \neq 0$ y $i \neq n-2$, ya que $\{u, w\} \notin E$.



Hemos encontrado un ciclo Hamiltoniano en G'

- Estas condiciones **no son necesarias**.

- Ej.



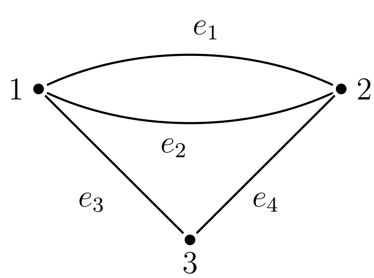
Es Hamiltoniano pero no verifica las hipótesis de los teoremas de Dirac y Ore.

- MULTIGRAFOS

- Def.
Un multigrafo $G = (V, E, I)$ V = vértices, E = aristas e I = relación de incidencia
$I \subseteq V \times E \times V$ tal que:

  1. $\forall x \in V, \forall e \in E$ $(x, e, x) \notin I$ (no se admiten bucles)
  2. $\forall x, y \in V, e \in E$ si $(x, e, y) \in I \implies (y, e, x) \in I$ (aristas no orientadas)

- Ej.



$V = \{1, 2, 3\}$ $\quad E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
$I = \{(1, e_1, 2), (2, e_1, 1), (1, e_2, 2), (2, e_2, 1), (1, e_3, 3), (3, e_3, 1), (2, e_4, 3), (3, e_4, 2)\}$
$g(1) = g(2) = 3$ $g(3) = 2$.

- <u>Def.</u>
  - Un **recorrido** en un multigrafo es una sucesión de vértices y aristas $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ tal que $\forall 1 \leq i \leq n$ se verifica $(v_{i-1}, e_i, v_i) \in I$
  - Un **camino** en un multigrafo es un recorrido $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ tal que $v_i \neq v_j$ si $i \neq j$ for $0 \leq i, j \leq n$
  - Un recorrido tal que $v_0 = v_n$ se llama **circuito**.
  - Un camino tal que $v_0 = v_n$ se llama **ciclo**.
  - Sea $G = (V, E, I)$ un multigrafo. Definimos la relación $C \subseteq V \times V$

    $$xCy \iff x, y \text{ conectados por un camino.}$$

    C relación de equivalencia, $\Longrightarrow$ clases equivalencia = componentes conexas de un multigrafo.
  - Un multigrafo $G = (V, E, I)$ es **conexo** si tiene una única clase de equivalencia determinada por C.

  A continuación vamos a estudiar recorridos que utilizan cada arista de un grafo una sola vez. Euler fue el primero en estudiar estos recorridos.

- <u>Def.</u>
  Sea $G = (V, E, I)$ un multigrafo.

  Un circuito que atraviesa cada arista de G exactamente una vez es un **circuito Euleriano.**
  Un **recorrido Euleriano** es un recorrido que atraviesa cada arista de G exactamente una vez.

  Un multigrafo es **Euleriano** si contiene un circuito Euleriano y **semi-Euleriano** si contiene un recorrido Euleriano pero no un circuito Euleriano..

  Es mucho más difícil determinar si un grafo es Hamiltoniano.

- <u>Teorema</u>
  Sea $G = (V, E, I)$ un multigrafo conexo.

  1. G es Euleriano $\iff$ Todos los vértices de G son de grado par.
  2. G es semi-Euleriano $\iff$ G tiene dos vértices de grado impar y el resto de grado par.

  Dem.
  Demostramos (2) suponiendo que (1) es cierto.

  $\Longrightarrow)$
  Sea $R : u = x_0, e_1, x_1, \ldots, x_{n-1}, e_n, x_n = v$ un recorrido euleriano en G.

  No es un circuito, luego $u \neq v$. Si añadimos una arista e uniendo u con v obtenemos un multigrafo Euleriano G' y por (1) todos los vértices de G' tienen grado par. Por tanto, todos los vértices de G, excepto u, v son de grado par.

  $\Longleftarrow)$

Si G tiene exactamente dos vértices de grado impar u, v, si añadimos una arista e uniendo u con v obtenemos un multigrafo G' con todos sus vértices de grado par. Por (1), G' tiene un circuito Euleriano C. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que C es $v, e, u, \ldots, v$. Si eliminamos la arista e, obtenemos un recorrido Euleriano de u a v. Luego G es semi-Euleriano.

Demostración de (1).

$\Longrightarrow)$

Supongamos que G tiene un circuito Euleriano. Comienza en un vértice a y continúa con una arista incidente en a, sea e. Esta arista contribuye en 1 al $gr(a)$. Cada vez que el circuito pasa por un vértice, éste contribuye en 2 al grado del vértice ya que el circuito entra por una arista incidente con el vértice y lo abandona por otra distinta. Finalmente el circuito termina donde empezó, contribuyendo con 1 al $gr(a)$. Luego el $gr(a)$ tiene que ser par y el resto de los vértices también, ya que el circuito contribuye con 2 a su grado cada vez que pasa por el vértice.

$\Longleftarrow)$

La demostración es por inducción en el número de aristas n de G.

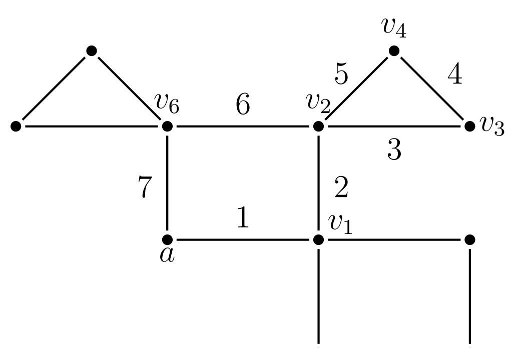
Base (n = 0).

Como G es conexo, si G no tiene aristas, entonces G tiene un único vértice. Un circuito Euleriano consiste en un único vértice sin aristas.

Paso Inductivo.

Supongamos que G tiene n aristas, $n > 0$ y que todo grafo conexo con k aristas, $k < n$, y tall que todo vértice es de grado par, tiene un circuito Euleriano.

Vamos a construir un circuito que comienza en un vértice arbitrario $a \in V$. Primero escogemos una arista cualquiera e_1 incidente en a y consideramos un recorrido $a = v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ tan largo como sea posible..



$a, 1, v_1, 2, v_2, 3, v_3, 4, v_4, 5, v_2, 6, v_6, 7, a$

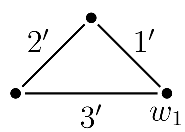
El recorrido tiene que terminar ya que el grafo tiene un número finito de aristas. Comienza en a con una arista e_1 y termina en a con una arista e_n, $(v_n = a)$. Esto es posible porque el recorrido atraviesa siempre vértices de grado par y sólo utiliza una arista para entrar en el vértice, luego siempre queda otra para abandonarlo. El circuito puede usar todas las aristas o puede no hacerlo.

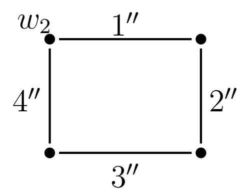
En el primer caso tendremos un recorrido Euleriano. En otro caso consideramos el subgrafo H obtenido de G eliminando las aristas ya utilizadas y los vértices no incidentes en las restantes.

Como G es conexo, H tiene al menos un vértice en común con el circuito eliminado. Sea w dicho vértice.

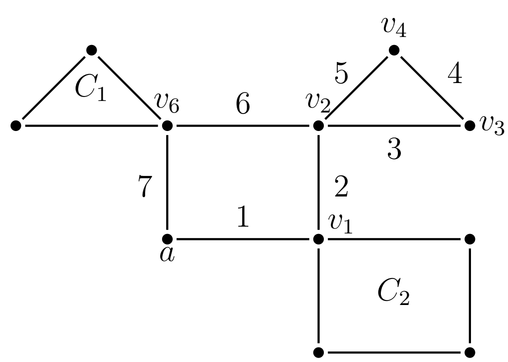
Todo vértice de H tiene grado par (porque los vértices de G tienen todos grado par y para cada vértice eliminamos pares de aristas incidentes en él para formar H.)

H sin embargo, puede que no sea conexo. Sean $H_1, \ldots, H_k$ las componentes conexas de H. Cada H_i $1 \leq i \leq k$ tiene menos aristas que G, luego por la hipótesis de inducción podemos costruir circuits Eulerianos C_i para cada H_i. Al existir al menos un vértice w_i común a C y a cada C_i, podemos combinar $C, C_1, \ldots C_k$ para obtener finalmente un circuito Euleriano en G.





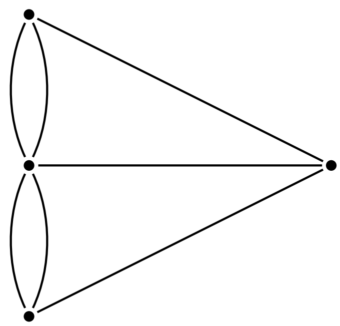
$C_1 : 1', 2', 3'$ $\qquad$ $C_2 : 1'', 2'', 3'', 4''$



$a, 1, v_1 = w_2, C_2(1'', 2'', 3'', 4''), w_2 = v_1, 2, v_2, 3, v_3, 4, v_4, 5, v_2, 6, v_6 = w_1, C_1(1', 2', 3'),$
$w_1 = v_6, 7, a$

- Ej. El problema de los puentes de Königsberg.

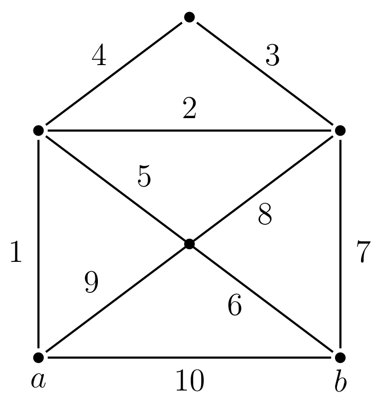
  En el siglo XVIII siete puentes conectaban las cuatro partes en que el río Pregel dividía la ciudad.

  Euler demostró que no era posible comenzar en un determinado punto, atravesar todos los puentes una única vez y regresar al punto de partida.

  El multigrafo no es euleriano ni semieuleriano. (1 vértice de grado 5 y 3 vértices de grado 3).

- Ej.

  Este grafo tiene dos vértices a, b de grado impar.

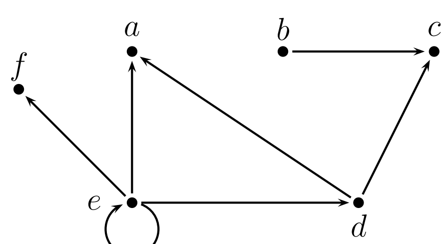
- GRAFOS DIRIGIDOS

- Def.
  Un **grafo dirigido** $G = (V, A)$ V = vértices, $A \subseteq V \times V$ **relación de adyacencia**.

  Si $(x, y) \in A$ decimos que (x, y) es un **arco**. (Arcos = pares ordenados (v, w) aristas = pares no ordenados $\{v, w\}$).

  Un arco (v, v) se llama **bucle**.

- Ej.

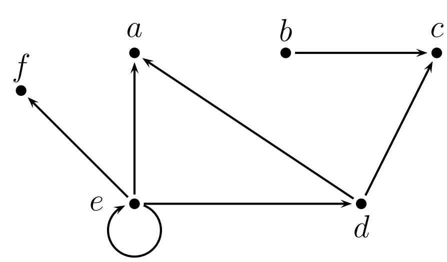
  

- Def.
  Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido.
  - Un **recorrido dirigido** es una sucesión de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in A \quad 1 \leq i \leq k-1$
  - Un **camino dirigido** es un recorrido dirigido $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en el que todos sus vértices son distintos.($v_k = v_1$ o $v_k \neq v_1$)
  - Un **circuito dirigido** es un recorrido dirigido circular, es decir, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $v_1 = v_k$.
  - Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido circular, es decir, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ tal que $v_1 = v_k$.

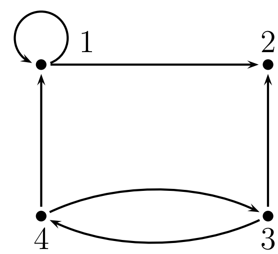
- Representación de Grafos Dirigidos

  Tablas de Adyacencia
  Matrices de Adyacencia.

- Ej.



D₁



D₂

a			
b	c		
c			
d	c	b	
e	a	d	f
f			

$\mathbf{D_1}$

1	1	2
2		
3	2	4
4	1	3

$\mathbf{D_2}$

La **matriz de adyacencia** es la matriz $M_{n \times n}$ $(n = |V|)$

$$M[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{si no hay arco de } v_i \text{ a } v_j \\ 1 & \text{si hay un arco de } v_i \text{ a } v_j \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En general, la matriz de adyacencia de un grafo dirigido no es simétrica.

- Def.
  $D_2 = (V_2, A_2)$ es un **subgrafo dirigido** de $D_1 = (V_1, A_1)$ sii $V_2 \subseteq V_1$ y $A_2 \subseteq A_1$.

  Si $V_2 \subseteq V_1$, y $A_2 = A_1 \cap (V_2 \times V_2)$ decimos que D_2 es un **subgrafo completo** de D_1.

- Def.
  $(V_1, A_1) \simeq (V_2, A_2)$ son **grafos dirigidos isomorfos** si existe una biyección $\alpha : V_1 \longrightarrow V_2$ tal que

$$\forall x, y \in V_1,\ xA_1y \iff \alpha(x)A_2\alpha(y)$$

- Def. **Grado de vértices**
  Sea $v \in V$ un vértice. En un grafo dirigido distinguimos entre:

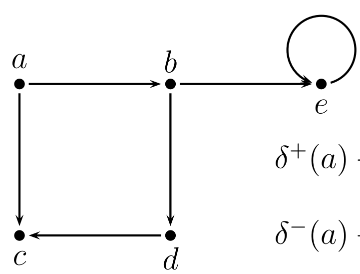
  grado de salida $\delta^+(v) =$ nº de arcos (v, u)

  grado de entrada $\delta^-(v) =$ nº de arcos (u, v)

- Teorema
  Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido.

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v)$$

Ej.



$$\delta^+(a) + \delta^+(b) + \delta^+(c) + \delta^+(d) + \delta^+(e) = 2 + 2 + 0 + 1 + 1 = 6$$

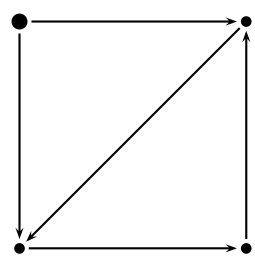
$$\delta^-(a) + \delta^-(b) + \delta^-(c) + \delta^-(d) + \delta^-(e) = 0 + 1 + 2 + 1 + 2 = 6$$

- <u>Grafos Dirigidos Conexos</u>
- <u>Def.</u>
  Sea $D = (V, A)$ un grafo dirigido. Sea $x, y \in V$.

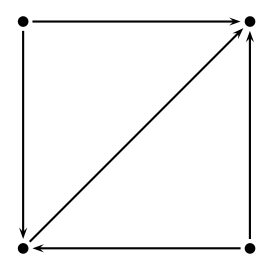
  y es **accesible** desde $x \iff$ hay un camino de x a y.

  (En general no es una relación de equivalencia.)

  Decimos que un grafo dirigido $D = (V, A)$ es **conexo** si existe un vértice x_0 desde el que todo $y \in V$ es accesible.
- <u>Ej.</u>



Grafo Dirigido Conexo



Grafo Dirigido no Conexo