CONJUNTOS Y CARDINALES INFINITOS

- Def.
  Un conjunto A decimos que es **finito** y de **cardinal** n ($n = |A|$) si existe una biyección

  $f : n \longrightarrow A$ donde $n = \{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$

  Bien definida:
  $\nexists f_1, f_2,$ biyecciones $f_1 \neq f_2$

  $f_1 : n \longrightarrow A$

  $f_2 : m \longrightarrow A$ si $n \neq m$.

  Esta propiedad se conoce como el **Principio del Palomar**:

  Sean A, B conjuntos finitos. Si $f : A \longrightarrow B$ y $|A| > |B|$ entonces f no es inyectiva.

  (Si hay más palomas que huecos en el palomar, al menos dos palomas tendrán que compartir hueco.)

- Teorema
  Sean A, B conjuntos finitos. Entonces

  1. $S \subseteq A \implies S$ también es finito y $|S| \leq |A|$
  2. $A \cup B$ es finito y
     $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
     $A \cap B = \emptyset \implies |A \cup B| = |A| + |B|$.
  3. $A - B$ es finito y
     $|A - B| = |A| - |A \cap B|$
     $B \subseteq A$ $(A \cap B = B) \implies |A - B| = |A| - |B|$
  4. $A \times B$ es finito y $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
  5. El conjunto de todas las funciones de A en B (denotado por $A \longrightarrow B$) es finito y $|A \longrightarrow B| = |B|^{|A|}$
  6. $\mathcal{P}(A)$ es finito y $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

  Dem.

  Sea A un conjunto y sea $B \subseteq A$, la función característica de B es:

  $f_B : A \longrightarrow \{0, 1\}$

  $$f_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

  Luego, existe una biyección de $\mathcal{P}(A)$ en $A \longrightarrow 2$ por tanto $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Comparando Conjuntos

Sean A, B conjuntos (finitos o infinitos).

1. $A \sim_c B$ sii $\exists f : A \longrightarrow B$ biyectiva.
   A y B son conjuntos **equipotentes.**
2. $A \leq_c B$ sii $\exists f : A \longrightarrow B$ inyectiva. A está **dominado** por B
3. $A <_c B$ sii $A \leq_c B$ pero $A \not\sim_c B$.
   A está **dominado estrictamente** por B.

- Ej.
  $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$

  $\mathbb{N}_+ \leq_c \mathbb{N} \qquad id_{\mathbb{N}_+} : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}.$
  $$n \longrightarrow n$$

  $\mathbb{N}_+ \sim_c \mathbb{N} \qquad p : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}.$
  $$p(n) = n - 1$$

- Teorema
  $\sim_c$ es una relación de equivalencia.

  1. $A \sim_c A$ (RF)
  2. $A \sim_c B \implies B \sim_c A$ (SIM)
  3. $A \sim_c B,\ B \sim_c C \implies A \sim_c C$ (TR)

- Ej.
  $\mathbb{Z} \sim_c \mathbb{N} \qquad f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$

  $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \geq 0 \\ 2|x| - 1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

  $\mathbb{R} \sim_c \mathbb{R}_+ \qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+.$
  $$x \longrightarrow e^x$$

  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim_c \mathbb{C} \qquad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$
  $$f(x, y) = x + iy$$

- Teorema
  Sean A, B, C conjuntos,

  1. $A \leq_c A$
  2. $A \leq_c B \quad B \leq_c C \implies A \leq_c C$
  3. $\mathbf{A \leq_c B, B \leq_c A \implies A \sim_c B}$ (importante)
  4. $A \sim_c B \implies A \leq_c B$
  5. $A \subseteq B \implies A \leq_c B$
  6. A finito $\implies A <_c \mathbb{N}$
  7. A infinito $\iff \mathbb{N} \leq_c A$

- <u>Dem</u>
  3)
  Si A y B son finitos y $|A| = n \quad |B| = m$
  Sea $f_1 : A \longrightarrow B$ inyectiva, luego $n \leq m$

  Sea $f_2 : B \longrightarrow A$ inyectiva, luego $m \leq n$ y $n = m$.

  Si A y B son infinitos es el teorema de Schröder- Berstein.

  6)
  Si A is finito y $|A| = n$ existe

  $f : n \longrightarrow A$ bijyectiva. Si $A \sim_c \mathbb{N}$ también existe $g : A \longrightarrow \mathbb{N}$ biyectiva.

  Asaímismo existe una inyección $n{+}1 \hookrightarrow \mathbb{N}$, luego la composición $n + 1 \hookrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow A$ también es inyectiva, pero $n + 1 > |A|$. Contradicción.

  7)
  $\Longleftarrow)$
  Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ injyectiva. Si A es finito $|A| = n$ y $A \sim_c n$ luego existe $g : A \longrightarrow n$ biyectiva y la composición
  $\mathbb{N} \longrightarrow A \longrightarrow n$ es inyectiva, ya que f es inyectiva y g es biyectiva.
  f iny $\quad g$ biy

  Luego, tenemos una inyección $f \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow n$ y como $n{+}1 \subseteq \mathbb{N}$ también existe una inyección $n + 1 \longrightarrow \mathbb{N} \longrightarrow n$, y, por tanto, $n + 1 \longrightarrow n$. Contradicción.

  Luego, A tiene que ser infinito.

  $\Longrightarrow)$
  A es infinito. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$ $n \not\sim_c A$.

  1. $0 \not\sim_c A \implies A \neq \emptyset$. Sea $a_0 \in A$.
  2. $1 \not\sim_c A \implies A \neq \{a_0\}$. Sea $a_1 \in A - \{a_0\}$.
  3. $2 \not\sim_c A \implies A \neq \{a_0, a_1\}$. Sea $a_2 \in A - \{a_0, a_1\}$.

     $\vdots$

  Podemos entonces, definir una inyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$
  $$f(i) = a_i$$

  Efectivamente es inyectiva ya que $i \neq j \implies f(i) \neq f(j)$
  $$a_i \neq a_j$$

  Luego, $\mathbb{N} \leq_c A$. (Este resultado dice que $\mathbb{N}$ es el menor conjunto infinito.)

- <u>Ej.</u>
  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim_c \mathbb{N}$

  $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $x \longrightarrow (x, 0)$ inyección

  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
  $(x, y) \longrightarrow 2^x * 3^y$ inyección (unicidad de descomp. en factores primos)

  $(0, 1) \sim_c \mathbb{R}$
  $[0, 1] \sim_c \mathbb{R}$

CONJUNTOS NUMERABLES Y NO NUMERABLES

- Def.
  Un conjunto A es **numerable** $\iff$ A es finito o $A \sim_c \mathbb{N}$.

- Ej.
  $A = \{a, b, c\}$, $\mathbb{N}_+$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$.

- Lema

  1. Si $A \subseteq \mathbb{N}$, A es numerable.
  2. Si B is numerable y $S \subseteq B \implies S$ es numerable.

  Dem.
  a) Si A es finito $\implies A$ es numerable.

  Si A es infinito, consideramos los elementos de A en orden creciente: $a_0 < a_1 < a_2 \ldots$

  Podemos definir la biyección $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$

  $$f(i) = a_i$$

  Luego $A \sim_c \mathbb{N}$.

  b) B es numerable.

  Si B es finito y $S \subseteq B \implies S$ es finito, luego S es numerable.

  Si B es infinito, $B \sim_c \mathbb{N}$.

  Sea $S \subseteq B$, si S es finito, es numerable.
  Si S es infinito $\implies \mathbb{N} \leq_c S$, También se verifica $S \underset{\text{iny}}{\hookrightarrow} B \sim_c \mathbb{N} \implies S \leq_c \mathbb{N}$

  $\mathbb{N} \leq_c S$, $S \leq_c \mathbb{N} \implies S \sim_c \mathbb{N}$

- Teorema

  1. A es numerable sii existe una inyección $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$. $(A \leq_c \mathbb{N})$.
  2. $A \neq \emptyset$, A es numerable sii existe una función suprayectiva $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

  Dem.
  a)
  $\implies$)
  Si A es finito, $A \sim_c n$, y puesto que $n \hookrightarrow \mathbb{N}$ tenemos una inyección $A \sim n \hookrightarrow \mathbb{N}$
  $\implies A \leq_c \mathbb{N}$

  Si A es infinito, $A \sim_c \mathbb{N}$.

  $\impliedby$)
  Si tenemos una inyección $f : A \longrightarrow \mathbb{N} \implies f : A \longrightarrow ran(f)$ es una biyección.
  Luego $A \sim_c ran(f) \subseteq \mathbb{N}$ y por el lema anterior $ran(f)$ es numerable.

  Si $ran(f)$ es finito $A \sim_c ran(f) \sim_c n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Luego A tiene que ser finito, $\implies A$ es numerable.

Si $ran(f)$ es infinito $ran(f) \sim_c \mathbb{N}$ y $A \sim_c ran(f)$. Luego $A \sim_c \mathbb{N} \Longrightarrow A$ es numerable.

b)
$A \neq \emptyset$
$\Longrightarrow)$
Si A es numerable, por a) existe una inyección $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ $(f : A \longrightarrow ran(f)$ es una biyección)

Definimos $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$

$$g(n) = \begin{cases} f^{-1}(n) & \text{if } n \in ran(f) \\ a_0 & \text{if } n \notin ran(f) \end{cases} \qquad a_0 \in A \neq \emptyset$$

g es suprayectiva: $\forall a \in A, f(a) \in ran(f),\ f(a) = n \in \mathbb{N} \Longrightarrow a = f^{-1}(n) = g(n)$

$\Longleftarrow)$
Sea $g : \mathbb{N} \longrightarrow A$ suprayectiva. $A = \{a_0 = g(0), a_1 = g(1), \ldots\}$ (Algunos elementos pueden estar repetidos, g no tiene que ser necesariamente inyectiva). Decimos g **enumera** A.

Definimos $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva

$f(a) =$ el menor $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = a$.

Propiedades de Conjuntos Numerables.

- Teorema

1. Sean A, B conjuntos numerables $\Longrightarrow$ $A \cup B$, $A \times B$ son numerables.
2. Sean $A_1, \ldots A_n$, conjuntos numerables $\Longrightarrow$ $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \times \ldots \times A_n$ son numerables.

Dem.
a)
Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ es trivial.

Si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Existen funciones suprayectivas $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ $\quad g : \mathbb{N} \longrightarrow B$.

Podemos definir $h : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ suprayectiva.

$$h(n) = \begin{cases} f(i) & \text{si } n = 2i \\ g(i) & \text{si } n = 2i + 1 \end{cases}$$

Existen funciones inyectivas $f' : A \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad g' : B \longrightarrow \mathbb{N}$.

Podemos definir $h' : A \times B \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva.

$$h'((a, b)) = 2^{f'(a)} 3^{g'(b)}$$

$h'((a, b)) = h'((a', b'))$

$$2^{f'(a)} 3^{g'(b)} = 2^{f'(a')} 3^{g'(b')} \Longrightarrow \begin{cases} f'(a) = f'(a') \\ g'(b) = g'(b') \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

b)
Por inducción sobre n. $\quad A_1 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cup A_n$

$A_1 \times \ldots \times A_n = (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$

- Ej.
  $\mathbb{Z} = A \cup B$ es un conjunto numerable.

  $A = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}$ es un conjunto numerable.

  $B = \{n \in \mathbb{Z} | n \leq 0\}$ es un conjunto numerable.

  $A_1 \times \ldots \times A_n$ es un conjunto numerable si
  $A_i,\ 0 \leq i \leq n$ son todos numerables.

  $f_i : A_i \longrightarrow \mathbb{N}\ \ 0 \leq i \leq n$ inyectivas (A_i numer).

  Definimos $h : A_1 \times \ldots \times A_n \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva.
  $$h((a_1, \ldots, a_n)) = p_1^{f_1(a_1)} \cdots p_n^{f_n(a_n)} \quad \text{donde } p_1, p_2 \ldots, p_n \text{ son primos.}$$

- Teorema
  Sea $\mathcal{C} = \{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ (A_i numerable $i \in \mathbb{N}$)

  $\bigcup \mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ es numerable.

  Dem. Definimos $g : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup \mathcal{C}$ suprayectiva.

  Sea $A_0 = \{a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, \ldots\}$

  $A_1 = \{a_{10}, a_{11}, \ldots\}$

  $A_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \ldots\}$

  $a_{00},\ \ (g(0))$
  $a_{01}, a_{10},\ \ (g(1), g(2))$
  $a_{02}, a_{11}, a_{20},\ \ (g(3), g(4), g(5))$
  $a_{03}, a_{12}, a_{21}, a_{30} \ldots\ \ (g(6), g(7), g(8), g(9), \ldots)$

- Ej.
  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$

  $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} | x > 0\}$ es numerable. $\quad \mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} | x < 0\}$ es numerable.

  Podemos definir $f : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$ inyectiva.
  $$f(\tfrac{m}{n}) = 2^m 3^n \qquad (m, n \text{ primos entre sí.})$$

CONJUNTOS NO NUMERABLES

- Teorema
  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es un conjunto infinito, no numerable.

  Dem
  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es finito ya que $\mathbb{N} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\quad (f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}))$
  $f(n) = \{n\}$

  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable. Vamos a demostrar que no existe $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ suprayectiva.

  Supongamos que existe $g_0 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
  Sean $A_0 = g_0(0)$ $\; A_1 = g_0(1)$ $A_2 = g_0(2) \ldots$

  Definimos $D = \{i \in \mathbb{N} | i \notin A_i\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pero $D \neq g_0(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

  Supongamos $D = g_0(n_0)$ para algún $n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \in D \Longleftrightarrow n_0 \notin A_{n_0} = g_0(n_0) = D$
  $n_0 \in D \Longleftrightarrow n_0 \notin D$

  (Diagonalización de Cantor.)

- Teorema
  Sea A un conjunto. $A <_c \mathcal{P}(A)$.

  $\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \ldots$

- Teorema
  Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cualquiera de $\mathbb{R}$.

  1. $I \sim_c \mathbb{R}$
  2. $\mathbb{R} \sim_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$

- Teorema
  Sean $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$, conjuntos tales que $A_i \sim_c \mathbb{R} \quad \forall 0 \leq i \leq n-1$

  1. $A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \sim_c \mathbb{R}$
  2. $A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_{n-1} \sim_c \mathbb{R}$

- Ej.
  $\mathbb{R}^n \sim_c \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$

- Teorema
  Sea $\mathcal{C} = \{A_i | i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de conjuntos tal que $A_i \sim_c \mathbb{R}$ $\; \forall i \in \mathbb{N}$.

  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \sim_c \mathbb{R}$.