RELACIONES DE EQUIVALENCIA

- Def
  Sea $R \subseteq A \times A$ una relación binaria

  1. R se llama **reflexiva** o decimos que verifica la propiedad reflexiva sii
     $\forall x \in A, xRx$ (RF)
  2. R se llama **simétrica** o decimos que verifica la propiedad simétrica sii
     $\forall x, y \in A, xRy \Longrightarrow yRx$ (SM)
  3. R se llama **transitiva** o decimos que verifica la propiedad transitiva sii
     $\forall x, y, z \in A, xRy, yRz \Longrightarrow xRz$ (TR)

- Ej.
  Sea $A = \{1, 2, 3\}$

  1. $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (2,2)\}$
     no es reflexiva
     $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,2))\}$
     es reflexiva
  2. $R_1 = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3)\}$
     no es simétrica
     $R_2 = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2))\}$
     es simétrica
  3. $R_1 = \{(1,2), (2,3), (2,2)\}$ no es transitiva
     $R_2 = \{(1,1), (2,3), (1,3), (2,2), (3,2), (1,2), (3,3)\}$ es transitiva

- Def.
  $R \subseteq A \times A$ es una **relación de equivalencia** sii es reflexiva, simétrica y transitiva.

- Ej.
  Sea $A = \{1, 2, 3\}$

  1. $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (3,1), (1,3)\}$ es una relación de equivalencia.
  2. $A = \{X | X \neq \emptyset, X \subseteq \mathbb{N}\}$
     $X R\, Y \Longleftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$
     a) R es reflexiva:
        $XRX \Longleftrightarrow X \cap X = X \neq \emptyset \;\; \forall X \in A$
     b) R es simétrica:
        $XRY \Longleftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset \;\; \Longleftrightarrow Y \cap X \neq \emptyset \Longleftrightarrow YRX$

c) R no es transitiva:
$XRY,\ YRZ \not\Longrightarrow XRZ$
Contraejemplo: $X=\{1,2\}$ $Y=\{2,4\}$ $Z=\{4,5\}$
$X\cap Y=\{2\}\neq\emptyset \Longleftrightarrow XRY$ $Y\cap Z=\{4\}\neq\emptyset \Longleftrightarrow YRZ$
pero $X\cap Z=\emptyset \Longleftrightarrow X \not{R} Z$

Clases de Equivalencia.

- Def.
Sea R una relación de equivalencia sobre A. $\forall x\in A$, la **clase de equivalencia** de x se define como
$$[x]_R=\{y\in A|xRy\}$$
Si $b\in[a]_R$, b se dice que es un **representante** de la clase de equivalencia. Todos los elementos de la clase de equivalencia son representantes de la misma.

- Ej.1
R relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$:
$aRb \Longleftrightarrow a=b\ \vee\ a=-b$

$[a]_R=\{a,-a\}$
$[0]_R=\{0\}$
$[7]_R=\{7,-7\}$ 7 y -7 son ambos representantes de [7].

- Ej.2
R relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$:

$R=\{(a,b)|a\equiv_m b\}$ $a\equiv_m b \Longleftrightarrow m\ /(a-b)$

$[a]_m=\{..,a-2m,a-m,a,a+m,a+2m,..\}$

$m-1$ clases equiv.: $[0]_m,[1]_m,\ldots,[m-1]_m$

Todo $n\in\mathbb{N}$ pertenece a **una y sólo una** de las clases ya que $n=m\cdot q+r$ y $0\leq r<m$ es **único**. $[n]_m=[r]_m$ $(n-r=m\cdot q)$

Si $m=4$ $[0]_4=\{\ldots,-8,-4,0,4,8,\ldots\}$
$[1]_4=\{\ldots,-7,-3,1,5,9,\ldots\}$
$[2]_4=\{\ldots,-6,-2,2,6,10,\ldots\}$
$[3]_4=\{\ldots,-5,-1,3,7,11,\ldots\}$

Hay cuatro clases de equivalencia:

$[4]_4=[0]_m$
$[5]_4=[1]_m$
$[23]_4=[3]_m$ $(23=4\cdot5+3)$
$[14]_4=[2]_m$ $(14=4\cdot3+2)$

- Teorema
  Sea R una relación de equivalencia sobre A. Son equivalentes:

  1. aRb
  2. $[a] = [b]$
  3. $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

  $a \not R b \iff [a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$

  Dem.
  $1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1)$

  - $1) \Longrightarrow 2)$ $[a] \subseteq [b]$ $\quad [a] = \{y \in A | aRy\}$
    $\forall x \in [a] \quad aRx \underset{\text{Sim}}{\Longrightarrow} xRa$, también $aRb \underset{\text{Tr}}{\Longrightarrow} xRb \underset{\text{Sim}}{\Longrightarrow} bRx \Longrightarrow x \in [b]$

    $[b] \subseteq [a]$
    $\forall x \in [b], \quad bRx, aRb \underset{\text{Tr}}{\Longrightarrow} aRx \Longrightarrow x \in [a]$
  - $2) \Longrightarrow 3)$
    $[a] = [b] \Longrightarrow [a] \cap [b] = [a] \neq \emptyset$ pues $a \in [a]$ ya que aRa por la propiedad reflexiva.
  - $3) \Longrightarrow 1)$
    $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Longrightarrow \exists x, x \in [a] \cap [b] \Longrightarrow x \in [a], x \in [b] \Longrightarrow aRx, bRx \Longrightarrow$
    $\underset{\text{Sim}}{\Longrightarrow} aRx, xRb \underset{\text{Tr}}{\Longrightarrow} aRb$

- Def.
  Sea R relación de equivalencia sobre A. El **Conjunto Cociente de A con respecto a R** se define como

  $$A/R = \{[a] | a \in A\}$$

- Ej.
  $aRb \iff a \equiv_m b$

  $\mathbb{Z}/\equiv_m = \{[0], [1], \ldots, [m-1]\} = \mathbb{Z}/(m)$

- Ej.
  $A = \{6, 10, 12, 18, 21, 40, 441, 1323\}$

  $xRy \iff x, y$ tienen los mismos divisores primos.

  $6 = 2 \cdot 3$ $\qquad$ $40 = 2^3 \cdot 5$

  $10 = 2 \cdot 5$ $\qquad$ $441 = 3^2 \cdot 7^2$

  $12 = 2^2 \cdot 3$ $\qquad$ $1323 = 3^3 \cdot 7^2$

$18 = 2 \cdot 3^2$

$21 = 3 \cdot 7$

$[6] = \{6, 12, 18\}$ $\quad$ $[10] = \{10, 40\}$ $\quad$ $[21] = \{21, 441, 1323\}$

$[6] = [12] = [18]$ $\quad$ $[10] = [40]$ $\quad$ $[21] = [441] = [1323]$

$A/R = \{[6], [10], [21]\}$

- Def.
  Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto y $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una **partición** de A sii:

  1. $C \neq \emptyset$ for all $C \in \mathcal{C}$.
  2. $C, C' \in \mathcal{C}, C \neq C' \Longrightarrow C \cap C' = \emptyset$
  3. $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = A$

- Teorema
  R relación de equivalencia sobre A, $A \neq \emptyset$. A/R es una partición de A.
  $\mathcal{C}$ partición de $A \Longrightarrow \exists R$ sobre A relación equiv. única t.q. $A/R = \mathcal{C}$.

  Dem.
  $\Longrightarrow)$
  En el teorema anterior hemos demostrado:
  $[a] \neq [b] \iff [a] \cap [b] = \emptyset$

  $a \in [a] \ \ \forall a \in A \implies \bigcup_{a \in A} [a] = A$

  luego A/R es una partición of A.

  $\Longleftarrow)$
  Sea $\mathcal{C}$ una partición de A.

  Definimos: $xRy \iff C_x = C_y$ donde C_x es el único elemento de $\mathcal{C}$ tal que $x \in C_x$ (si $C_x \neq C_y$, $C_x \cap C_y = \emptyset$)

  R es trivialmente reflexiva, simétrica y transitiva.

  $xRx \Longleftrightarrow C_x = C_x$

  $xRy \Longleftrightarrow C_x = C_y \Longrightarrow C_y = C_x \Longleftrightarrow yRx$

  $xRy, yRz \Longleftrightarrow C_x = C_y, C_y = C_z \Longrightarrow C_x = C_z \Longleftrightarrow xRz$

  $[x]_R = \{y \in A | xRy\} = \{y \in A | C_x = C_y\} \stackrel{?}{=} C_x$

  Demostremos $[x] \subseteq C_x$ y $C_x \subseteq [x]$.

  Sea $y \in [x]$, $xRy \Longrightarrow C_x = C_y$. Como $y \in C_y = C_x$, $y \in C_x$

  Sea $y \in C_x$, como $y \in C_y$, $C_x \cap C_y \neq \emptyset \implies C_x = C_y \Longrightarrow xRy \Longrightarrow y \in [x]$.

  Luego $A/R = \{[x] | x \in A\} = \bigcup C_x = \mathcal{C}$.

  R es única.

Sea R' otra relación de equivalencia tal que $A/R' = \mathcal{C} = A/R$.

$xR'y \Longleftrightarrow [x]_{R'} = [y]_{R'} \Longleftrightarrow C_x = C_y \Longleftrightarrow xRy$

C_x es el único elemento $C \in \mathcal{C}$ tal que $x \in C$.

En el ejemplo anterior:

$\mathcal{C} = \{\{6, 12, 18\}, \{10, 40\}, \{21, 441, 1323\}\}$ es una partición de A.