Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado en Ingeniería Informática - Matemáticas
Doble Grado en Administración y Dirección de Empresas - Ingeniería Informática
Grados en Ingeniería Informática, Ingeniería del Software, Ingeniería de Computadores

Examen Final - Febrero 2021

NOMBRE Y APELLIDOS:

GRUPO:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre, apellidos y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
- **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
- El examen durará **2 horas y media estrictamente**.
- Cada una de las cuatro primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta de ellas respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será, como mínimo, de **0 puntos**, nunca será negativa. Deja **totalmente clara** la respuesta escogida, o bien que no quieres contestar una pregunta, sobre todo cuando haya alguna tachadura.
- Cada una de las preguntas a desarrollar restantes vale **1,5 puntos**, salvo la séptima, que vale **1 punto**.
- El examen se calificará sobre **9 puntos**. A esta nota se le sumará la evaluación por curso (**de 0 a 1 punto**).

Preguntas de Test

---

1 **(0.5 puntos)** Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a|(b \cdot c)$. Entonces siempre sucede que

- ☐ $a \mid (b + c)$
- ☐ $a \mid mcd(b, c)$
- ☐ $(a \mid b)$ o $(a \mid c)$
- ☐ Ninguna de las anteriores.

---

2 **(0.5 puntos)** Dados los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$, $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\ \textit{tal que}\ |X| = 2\}$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, marca la respuesta correcta:

- ☐ Los tres conjuntos son no numerables.
- ☐ El primero es el único no numerable.
- ☐ El primero y el tercero son los únicos no numerables.
- ☐ El primero y el segundo son los únicos no numerables.

---

3 **(0.5 puntos)** Sea A un conjunto finito y sea $f : A \to B$. Definimos una **relación de equivalencia** R sobre A como

$$xRy \iff f(x) = f(y)$$

Para que $|A/R| = |A|$:

- ☐ f tiene que ser suprayectiva.
- ☐ f tiene que ser inyectiva.
- ☐ f tiene que ser biyectiva.
- ☐ Se verifica siempre, cualquiera que sea f.

---

(4) **(0.5 puntos)** Sean $(A, \sqsubseteq_1)$ y $(B, \sqsubseteq_2)$ dos conjuntos **totalmente ordenados** tales que $|A|, |B| \geq 2$. Si definimos la relación binaria en $A \times B$

$$(x, y) \sqsubseteq (x', y') \Longleftrightarrow x \sqsubseteq_1 x' \wedge y \sqsubseteq_2 y'$$

Señala la respuesta correcta:

- ☐ $\sqsubseteq$ no es una relación de orden.
- ☐ $\sqsubseteq$ es una relación de orden pero no es total.
- ☐ $\sqsubseteq$ es una relación de orden total.
- ☐ $\sqsubseteq$ es una relación de orden estricto.

Preguntas de Desarrollo

(5) **(1.5 puntos)** Dada la siguiente función definida recursivamente

$$f(n) = \begin{cases} 6 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n = 1 \\ 6f(n-2) - f(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestra por **inducción matemática** que para todo número natural n, $f(n) = 2(2^{n+1} + (-3)^n)$. Indica el tipo de inducción que utilizas.

(6) **(1.5 puntos)** Si A, B, C y D son conjuntos cualesquiera, **demuestra**:

(a) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
(b) $(A \times B) \setminus (C \times D) = ((A \setminus C) \times B) \cup (A \times (B \setminus D))$

(7) **(1 punto)** Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ una función definida por $f(X) = X \setminus \{\textit{mínimo}(X)\}$. Estudia si f es **inyectiva** y/o **suprayectiva**. En cada caso debes demostrar formalmente si se cumple la propiedad o dar un contraejemplo si no se cumple.

(8) **(1.5 puntos)** Considera la relación $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por

$$x \; R \; y \iff 4 \mid (x - y + 2) \;\vee\; 4 \mid (x - y).$$

(a) Demuestra que R es una **relación de equivalencia**.
(b) Describe con precisión la **clase de equivalencia** de 7, justificando tu respuesta.
(c) ¿Cuántos elementos tiene el **conjunto cociente** $\mathbb{Z}/R$? Descríbelo detalladamente.

(9) **(1.5 puntos)** Sea R una relación sobre $\mathbb{N}$, definida como $a \, R \, b \iff$ *Existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a = b^n$.

(a) Demuestra que R es una **relación de orden**.
(b) Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$. Dibuja el **diagrama de Hasse** para el conjunto ordenado(A, R).
(c) ¿Cuáles son los elementos **maximales** y **minimales** de A? ¿Tiene **máximo** y/o **mínimo**? Justifica tu respuesta.