Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VIII-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul "partially ordered set") $\equiv$ *mulţime parţial ordonată*
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime total ordonată* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată*
- *poset mărginit* $\equiv$ *poset cu prim şi ultim element*
- *latice mărginită* $\equiv$ *latice cu prim şi ultim element*

Structurile algebrice cu care vom lucra vor fi desemnate, uneori, prin mulţimile lor suport.

Pentru orice număr natural nenul n, vom nota cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente.

Laticile vor fi notate cu $(L, \vee, \wedge, \leq)$, laticile mărginite cu $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, iar algebrele Boole cu $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii.

Amintim că:

- pentru orice mulţimi A, B, M astfel încât $M \subseteq B$ şi orice funcţie $f : A \to B$ cu imaginea $f(A) \subseteq M$, se defineşte *corestricţia lui f la M* ca fiind funcţia $g : A \to M$ dată de: $g(x) = f(x)$, pentru orice $x \in A$; de obicei, corestricţia lui f la M se notează tot cu f;
- pentru orice relaţie binară R pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui R* ca fiind relaţia binară pe A notată cu R^{-1} şi dată de: $R^{-1} = \{(a, b) \mid a, b \in A, (b, a) \in R\} \subseteq A^2 = A \times A$;
- legătura dintre operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$, pentru orice elemente $a, b, x, y \in L$, dacă $\begin{cases} a \leq b \\ \text{şi} \\ x \leq y, \end{cases}$ atunci $\begin{cases} a \vee x \leq b \vee y \\ \text{şi} \\ a \wedge x \leq b \wedge y; \end{cases}$

- dacă $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o latice mărginită, iar $x, y \in L$, atunci, prin definiţie, y este *complement al lui x în L* ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge y = 0; \end{cases}$

- *algebra Boole trivială* este algebra Boole cu un singur element, adică algebra Boole cu $0 = 1$, iar *algebrele Boole netriviale* sunt algebrele Boole care nu sunt triviale, adică algebrele Boole cu cel puţin două elemente;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc echivalenţele: $\begin{cases} x \leq y \Leftrightarrow x \rightarrow y = 1 \\ \text{şi} \\ x = y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y = 1; \end{cases}$

- **Teorema de structură a algebrelor Boole finite** afirmă că orice algebră Boole finită este izomorfă cu o putere naturală a algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$.

În exerciţiile din logica propoziţională clasică, vom nota cu:

- V mulţimea variabilelor propoziţionale;

- E mulţimea enunţurilor;

- $(E/_\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;

- $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală.

Amintim că, pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 1,$$

unde $\hat{\varphi} \in E/_\sim$ este clasa enunţului φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_\sim$.

De asemenea, pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, vom nota cu $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici (primitivi) în operaţii booleene.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Oricărui poset $\mathcal{P} = (P, \leq)$ îi asociem relaţia binară $R_\mathcal{P} = \{(a, b) \mid a, b \in P, a \nleq b, b \nleq a\} \subseteq P^2$ ($R_\mathcal{P}$ este mulţimea perechilor de elemente incomparabile în posetul $\mathcal{P}$).*

Acum considerăm un poset fixat $\mathcal{P} = (P, \leq)$, cu $P \neq \emptyset$.

Să se demonstreze că:

(i) $R_{\mathcal{P}}$ *e ireflexivă;*

(ii) $R_{\mathcal{P}}$ *e simetrică;*

(iii) $R_{\mathcal{P}} = \emptyset$ *ddacă* $\mathcal{P}$ *este lanţ;*

(iv) dacă $\mathcal{P}$ *nu este lanţ, atunci* $R_{\mathcal{P}}$ *nu e tranzitivă;*

(v) dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *este o algebră Boole, iar* $\mathcal{P}_{\mathcal{B}} = (B, \leq)$ *este posetul subiacent lui* $\mathcal{B}$*, atunci:* $\{x \in B \mid x R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}} \overline{x}\} = B \setminus \{0, 1\}$.

Rezolvare: (i) $\leq$ e reflexivă, i. e., pentru orice $a \in P$, are loc $a \leq a$, ceea ce înseamnă că, pentru orice $a \in P$, $(a, a) \notin R_{\mathcal{P}}$, adică $R_{\mathcal{P}}$ este ireflexivă.
(ii) Fie $a, b \in P$, astfel încât $(a, b) \in R_{\mathcal{P}}$, adică $a \nleq b$ şi $b \nleq a$, altfel scris, $b \nleq a$ şi $a \nleq b$, i. e. $(b, a) \in R_{\mathcal{P}}$. Aşadar, $R_{\mathcal{P}}$ e simetrică.
(iii) Au loc echivalenţele: $\mathcal{P}$ este lanţ ddacă oricare două elemente ale sale sunt comparabile, i. e., pentru orice $a, b \in P$, avem $a \leq b$ sau $b \leq a$, ceea ce înseamnă că, oricare ar fi $a, b \in P$, are loc $(a, b) \notin R_{\mathcal{P}}$, adică $R_{\mathcal{P}} = \emptyset$.
(iv) Aplicând succesiv (iii), (ii) şi (i), obţinem: dacă $\mathcal{P}$ nu este lanţ, atunci $R_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$, adică există $a, b \in P$ astfel încât $(a, b) \in R_{\mathcal{P}}$, prin urmare $(b, a) \in R_{\mathcal{P}}$, iar acum faptul că $(a, a) \notin R_{\mathcal{P}}$ arată că $R_{\mathcal{P}}$ nu este tranzitivă.
(v) Să notăm cu $M = \{x \in B \mid (x, \overline{x}) \in R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}\} \subseteq B$. Avem de demonstrat că $M = B \setminus \{0, 1\}$.

Cum $0 \leq 1 = \overline{0}$, iar $\overline{1} = 0 \leq 1$, rezultă că $(0, \overline{0}) \notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$ şi $(1, \overline{1}) \notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$, adică $0 \notin M$ şi $1 \notin M$, deci $M \subseteq B \setminus \{0, 1\}$.

Fie $x \in B \setminus \{0, 1\}$, arbitrar, fixat. Presupunem prin absurd că $x \notin M$, i. e. $(x, \overline{x}) \notin R_{\mathcal{P}_{\mathcal{B}}}$, i. e. $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$.

Dacă $x \leq \overline{x}$, atunci $x = x \wedge \overline{x} = 0$, ceea ce este o contradicţie cu faptul că $x \in B \setminus \{0, 1\}$.

Dacă $\overline{x} \leq x$, atunci $x = x \vee \overline{x} = 1$, ceea ce este tot o contradicţie cu faptul că $x \in B \setminus \{0, 1\}$.

Prin urmare, $x \in M$. Am demonstrat că $B \setminus \{0, 1\} \subseteq M$.

Rezultă că $M = B \setminus \{0, 1\}$.

Exerciţiul 1.2. *Să se demonstreze că algebra Boole a elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite cu exact* 5 *elemente este izomorfă cu algebra Boole standard.*

Rezolvare: Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită cu exact 5 elemente: $L = \{0, a, b, c, 1\}$, şi fie $C(L)$ mulţimea elementelor complementate ale lui L. (De fapt, nu era necesară precizarea "mărginită", pentru că orice latice finită şi nevidă este mărginită.)

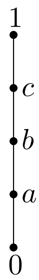
$\mathcal{L}$ este distributivă, prin urmare orice element al său are cel mult un complement, deci fiecare element din $C(L)$ are exact un complement. Pentru fiecare element $x \in C(L)$, vom nota cu $\overline{x}$ unicul său complement din $\mathcal{L}$; desigur, la rândul său, $\overline{x} \in C(L)$, iar unicul complement al lui $\overline{x}$ este x ($\overline{\overline{x}} = x$).

Desigur, $0, 1 \in C(L)$, cu $\overline{0} = 1$ (şi, implicit, $\overline{1} = 0$), de unde, conform unicităţii complementului, rezultă că niciunul dintre elementele a, b, c nu are drept complement pe 0 sau pe 1, aşadar complementele elementelor a, b, c, dacă există, se află tot în mulţimea $\{a, b, c\}$.

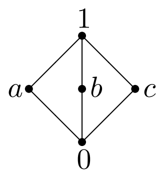
Ştim că $(C(L), \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole, unde am notat la fel operaţiile şi relaţia de ordine ale lui $\mathcal{L}$ cu cele restricţionate la $C(L)$ (cele induse pe $C(L)$). Această algebră Boole va fi referită tot prin $C(L)$, ca şi mulţimea sa suport.

În posetul mărginit $(L, \leq, 0, 1)$ putem avea următoarele ordonări ale elementelor $0, a, b, c, 1$, modulo permutări ale mulţimii $\{a, b, c\}$:

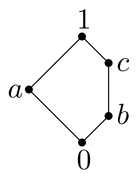
(i) $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$; atunci $\mathcal{L} = \mathcal{L}_5$ ($\mathcal{L}$ este lanţul cu 5 elemente), cu următoarea diagramă Hasse:



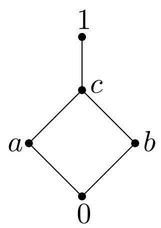
(ii) $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq c \leq 1$, iar a, b, c sunt două câte două incomparabile; atunci $\mathcal{L}$ este diamantul, care este o latice nedistributivă, deci acest caz este exclus:



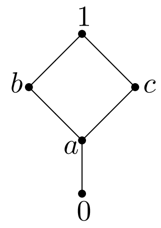
(iii) $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq c \leq 1$, iar a nu este comparabil nici cu b, nici cu c; atunci $\mathcal{L}$ este pentagonul, care este o latice nedistributivă, deci şi acest caz este exclus:



(iv) $0 \leq a \leq c \leq 1$, $0 \leq b \leq c \leq 1$, iar a şi b sunt incomparabile:



(v) $0 \leq a \leq b \leq 1$, $0 \leq a \leq c \leq 1$, iar b şi c sunt incomparabile:



Cazurile în care se obţine o latice distributivă sunt (i), (iv) şi (v).

În cazul (i), cum $\mathcal{L}$ este lanţ, au loc: $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$, prin urmare, oricare ar fi $x, y \in \{a, b, c\}$, $x \vee y = \max\{x, y\} \in \{x, y\} \subseteq \{a, b, c\} = L \setminus \{0, 1\}$, deci $x \vee y \neq 1$. Rezultă că niciunul dintre elementele a, b, c nu este complementat ($a, b, c \notin C(L)$), aşadar $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

În cazul (iv), $a \vee b = a \vee c = b \vee c = c \neq 1$, aşadar şi aici $a, b, c \notin C(L)$, deci $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

În cazul (v), $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c = a \neq 0$, deci şi în acest caz $a, b, c \notin C(L)$, aşadar $C(L) = \{0, 1\} = \mathcal{L}_2$, adică $C(L)$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

Exerciţiul 1.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi \in E$, astfel încât: $\varphi = \neg\,\alpha \rightarrow (\beta \wedge \neg\,\gamma)$ şi $\psi = (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha$.*

Să se demonstreze că: $\vdash \varphi$ ddacă $\vdash \psi$.

Rezolvare: Să notăm clasele enunţurilor α, β, γ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$ cu x, y, z, respectiv, adică: $x = \hat{\alpha}$, $y = \hat{\beta}$, $z = \hat{\gamma}$. Acum să calculăm clasele lui φ şi ψ în $E/_{\sim}$:

$\hat{\varphi} = \overline{\hat{\alpha}} \rightarrow (\hat{\beta} \wedge \overline{\hat{\gamma}}) = \overline{x} \rightarrow (y \wedge \overline{z}) = \overline{\overline{x}} \vee (y \wedge \overline{z}) = x \vee (y \wedge \overline{z})$;

$\hat{\psi} = (\hat{\beta} \rightarrow \hat{\gamma}) \rightarrow \hat{\alpha} = (y \rightarrow z) \rightarrow x = \overline{(\overline{y} \vee z)} \vee x = x \vee \overline{(\overline{y} \vee z)} = x \vee (\overline{\overline{y}} \wedge \overline{z}) = x \vee (y \wedge \overline{z})$.

Am folosit definiţia implicaţiei într–o algebră Boole şi **legile lui de Morgan**.

Aşadar, $\hat{\varphi} = \hat{\psi}$, prin urmare au loc echivalenţele: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ ddacă $\hat{\psi} = 1$ ddacă $\vdash \psi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Oricărui poset $\mathcal{P} = (P, \leq)$ îi asociem relaţia binară $Q_{\mathcal{P}} = \{(a, b) \mid a, b \in P, \exists \sup\{a, b\}$ în $\mathcal{P}\} \subseteq P^2$.*

De asemenea, pentru orice poset $\mathcal{P} = (P, \leq)$, notăm cu $\overline{\mathcal{P}}$ posetul dual: $\overline{\mathcal{P}} = (P, \geq)$, unde am folosit notaţia uzuală $\geq = \leq^{-1}$.

Acum considerăm un poset fixat $\mathcal{P} = (P, \leq)$, cu $P \neq \emptyset$.

Să se demonstreze că:

(i) $Q_{\mathcal{P}}$ *este reflexivă;*

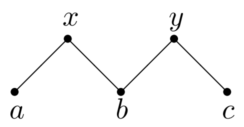
(ii) $Q_{\mathcal{P}}$ *e simetrică;*

(iii) $Q_{\mathcal{P}}$ *nu e neapărat tranzitivă;*

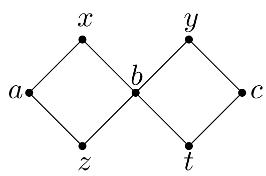
(iv) $Q_{\mathcal{P}} \supseteq (\leq \cup \geq)$;

(v) $\mathcal{P}$ *este latice ddacă* $Q_{\mathcal{P}} = Q_{\overline{\mathcal{P}}} = P^2$.

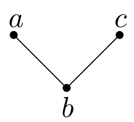
Rezolvare: (i) Pentru orice $a \in P$, există $\sup\{a,a\} = \sup\{a\} = a$ în $\mathcal{P}$, aşadar $(a,a) \in Q_{\mathcal{P}}$, deci $Q_{\mathcal{P}}$ e reflexivă.
(ii) Pentru orice $a,b \in P$, $\{a,b\} = \{b,a\}$, deci există $\sup\{a,b\}$ în $\mathcal{P}$ ddacă există $\sup\{b,a\}$ în $\mathcal{P}$, adică $(a,b) \in Q_{\mathcal{P}}$ ddacă $(b,a) \in Q_{\mathcal{P}}$, prin urmare $Q_{\mathcal{P}}$ e simetrică.
(iii) În fiecare dintre următoarele poseturi au loc: $(a,b) \in Q_{\mathcal{P}}$, $(b,c) \in Q_{\mathcal{P}}$, dar $(a,c) \notin Q_{\mathcal{P}}$, deci $Q_{\mathcal{P}}$ nu e tranzitivă (desigur, în cadrul unui examen, este suficient să se dea un singur (contra)exemplu):



$\sup\{a,b\} = x$
$\sup\{b,c\} = y$
mulţimea $\{a,c\}$ nu are majoranţi,
deci nu există $\sup\{a,c\}$



la fel ca în posetul anterior



$\sup\{a,b\} = \max\{a,b\} = a$
$\sup\{b,c\} = \max\{b,c\} = c$
mulţimea $\{a,c\}$ nu are majoranţi,
deci nu există $\sup\{a,c\}$

(iv) Fie $a,b \in P$, arbitrare, fixate.

Dacă $(a,b) \in \leq$, i. e. $a \leq b$, atunci există $\sup\{a,b\} = \max\{a,b\} = b$ în $\mathcal{P}$, deci $(a,b) \in Q_{\mathcal{P}}$. Prin urmare $\leq \subseteq Q_{\mathcal{P}}$.

Dacă $(a,b) \in \geq$, i. e. $a \geq b$, i. e. $b \leq a$, atunci există $\sup\{a,b\} = \max\{a,b\} = a$ în $\mathcal{P}$, deci $(a,b) \in Q_{\mathcal{P}}$. Prin urmare $\geq \subseteq Q_{\mathcal{P}}$.

Am obţinut: $Q_{\mathcal{P}} \supseteq (\leq \cup \geq)$.

(v) Ştim că supremumul şi infimumul sunt noţiuni duale una alteia, adică supremumul în posetul dual, $\overline{\mathcal{P}}$, coincide cu infimumul în $\mathcal{P}$. Prin urmare, $Q_{\overline{\mathcal{P}}} = \{(a,b) \mid a,b \in P, \exists \inf\{a,b\} \text{ în } \mathcal{P}\}$.

Conform definiţiei, $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este latice ddacă, pentru orice $a,b \in P$, există $\sup\{a,b\}$ şi $\inf\{a,b\}$ în $\mathcal{P}$, adică, pentru orice $a,b \in P$, $(a,b) \in Q_{\mathcal{P}}$ şi $(a,b) \in Q_{\overline{\mathcal{P}}}$, i. e. $Q_{\mathcal{P}} = Q_{\overline{\mathcal{P}}} = P^2$.

Exerciţiul 2.2. *Fie* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *o algebră Boole şi* $(B^2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ *algebra Boole produs direct a lui* $\mathcal{B}$ *cu ea însăşi, cu operaţiile şi relaţia de ordine definite pe componente şi notate la fel ca acelea ale lui* $\mathcal{B}$.

Considerăm funcţia $f : B^2 \to B$, *definită prin:* $f(x,y) = x \vee y$, *pentru orice* $x,y \in B$.

Să se demonstreze că:

(i) f *comută cu* $\vee$, 0 *şi* 1*;*

(ii) f *e morfism boolean ddacă* $\mathcal{B}$ *este algebra Boole trivială.*

Rezolvare: (i) $f(0) = f(0,0) = 0 \vee 0 = 0$ şi $f(1) = f(1,1) = 1 \vee 1 = 1$. Deci f comută cu 0 şi cu 1.

Fie $x,y,a,b \in B$, arbitrare, fixate. $f((x,y) \vee (a,b)) = f(x \vee a, y \vee b) = x \vee a \vee y \vee b = x \vee y \vee a \vee b = f(x,y) \vee f(a,b)$. Deci f comută cu $\vee$. Am folosit asociativitatea şi comutativitatea operaţiei $\vee$ a lui $\mathcal{B}$.

(ii) “$\Leftarrow$:“ Dacă $\mathcal{B}$ este algebra Boole trivială, i. e. $B=\{\beta\}$, cu unicul element $\beta=0=1$ şi cu toate operaţiile de algebră Boole având ca rezultat pe β, atunci $B^2=\{(\beta,\beta)\}$, cu toate operaţiile de algebră Boole având ca rezultat pe (β,β), iar $f:\{(\beta,\beta)\}\rightarrow\{\beta\}$ este definită prin: $f(\beta,\beta)=\beta\vee\beta=\beta$. Evident, în acest caz, f este morfism de algebre Boole.
“$\Rightarrow$:“ Dacă f este morfism de algebre Boole, atunci f comută cu operaţia de complementare, aşadar $f(\overline{(0,1)})=\overline{f(0,1)}$, adică $f(1,0)=\overline{0\vee 1}$, i. e. $1\vee 0=\overline{1}$, adică $1=0$, deci $\mathcal{B}$ este algebra Boole trivială.

Exerciţiul 2.3. *Să se demonstreze că: pentru orice $\varphi,\psi,\chi\in E$, mulţimea*

$$\Sigma=\{\varphi\wedge(\psi\leftrightarrow\neg\,\chi),((\varphi\wedge\psi)\vee\neg\,\neg\,\chi)\rightarrow((\varphi\rightarrow\chi)\leftrightarrow\psi)\}\subset E$$

nu admite niciun model (i. e. nu există nicio interpretare h, astfel încât $h\vDash\Sigma$).

Rezolvare: Să notăm cu $\alpha=\varphi\wedge(\psi\leftrightarrow\neg\,\chi)\in E$ şi $\beta=((\varphi\wedge\psi)\vee\neg\,\neg\,\chi)\rightarrow((\varphi\rightarrow\chi)\leftrightarrow\psi)\in E$. Avem: $\Sigma=\{\alpha,\beta\}\subset E$. Presupunem prin absurd că există $h:V\rightarrow\mathcal{L}_2=\{0,1\}$, astfel încât $h\vDash\Sigma$, i. e. $\tilde{h}(\alpha)=\tilde{h}(\beta)=1$.

Aşadar, $1=\tilde{h}(\alpha)=\tilde{h}(\varphi)\wedge(\tilde{h}(\psi)\leftrightarrow\overline{\tilde{h}(\chi)})$, deci $\tilde{h}(\varphi)=1$ şi $\tilde{h}(\psi)\leftrightarrow\overline{\tilde{h}(\chi)}=1$, iar ultima dintre aceste două egalităţi este echivalentă cu $\tilde{h}(\psi)=\overline{\tilde{h}(\chi)}$.

Rezultă că $1=\tilde{h}(\beta)=((\tilde{h}(\varphi)\wedge\tilde{h}(\psi))\vee\overline{\overline{\tilde{h}(\chi)}})\rightarrow((\tilde{h}(\varphi)\rightarrow\tilde{h}(\chi))\leftrightarrow\tilde{h}(\psi))=((1\wedge\tilde{h}(\psi))\vee\tilde{h}(\chi))\rightarrow((1\rightarrow\tilde{h}(\chi))\leftrightarrow\tilde{h}(\psi))=(\tilde{h}(\psi)\vee\tilde{h}(\chi))\rightarrow((\overline{1}\vee\tilde{h}(\chi))\leftrightarrow\tilde{h}(\psi))=(\overline{\tilde{h}(\chi)}\vee\tilde{h}(\chi))\rightarrow((0\vee\tilde{h}(\chi))\leftrightarrow\overline{\tilde{h}(\chi)})=1\rightarrow(\tilde{h}(\chi)\leftrightarrow\overline{\tilde{h}(\chi)})=1\rightarrow 0=0$, pentru că, în $\mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\chi)\neq\overline{\tilde{h}(\chi)}$. Am obţinut $1=0$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicţie.

Aşadar, nu există nicio interpretare h care să satisfacă Σ.

3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie $\mathcal{B}=(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ o algebră Boole.*

Pentru orice relaţie binară $R\subseteq B^2$, notăm cu $\neg\,R$ următoarea relaţie binară pe B: $\neg\,R=\{(\overline{a},\overline{b})\mid a,b\in B,\ \text{astfel încât}\ (a,b)\in R\}\subseteq B^2$.

Să se demonstreze că:

(i) pentru orice $R\subseteq B^2$ şi orice $a,b\in B$, au loc echivalenţele: $\begin{cases} aRb\ \text{ddacă}\ \overline{a}\neg\,R\overline{b};\\ a\neg\,Rb\ \text{ddacă}\ \overline{a}R\overline{b};\end{cases}$

(ii) pentru orice $R\subseteq B^2$, $\neg\,\neg\,R=R$;

(iii) pentru orice $R\subseteq B^2$ şi orice $S\subseteq B^2$, au loc: $\begin{cases} R\subseteq S\ \text{ddacă}\ \neg\,R\subseteq\neg\,S;\\ \neg\,(R\cup S)=\neg\,R\cup\neg\,S;\\ \neg\,(R\cap S)=\neg\,R\cap\neg\,S;\\ \neg\,(R\setminus S)=\neg\,R\setminus\neg\,S;\end{cases}$

(iv) dacă R este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci $R=\neg\,R$;

(v) $\neg\leq=\geq$, unde am notat $\geq=\leq^{-1}$.

Rezolvare: Pentru cele ce urmează, fie $R \subseteq B^2$ şi $a, b \in B$, arbitrare, fixate.
(i) Conform definiţiei lui $\neg R$, dacă aRb, atunci $\overline{a} \neg R \overline{b}$.

Dacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$, atunci, conform definiţiei lui $\neg R$, există $c, d \in B$, astfel încât cRd şi $\overline{c} = \overline{a}$, iar $\overline{d} = \overline{b}$. Unicitatea complementului în algebre Boole ne asigură de faptul că $c = a$ şi $d = b$. Conform alegerii lui c şi d, are loc cRd, aşadar aRb.

Am demonstrat că aRb ddacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$.

Din idempotenţa operaţiei de complementare şi echivalenţa anterioară rezultă că: $a \neg Rb$ ddacă $\overline{\overline{a}} \neg R \overline{\overline{b}}$ ddacă $\overline{a} R \overline{b}$.
(ii) Folosind punctul (i), obţinem echivalenţele: $a \neg \neg Rb$ ddacă $\overline{a} \neg R \overline{b}$ ddacă aRb. Aşadar, $(a, b) \in \neg \neg R$ ddacă $(a, b) \in R$, prin urmare $\neg \neg R = R$.
(iii) Pentru acest punct, fie şi $S \subseteq B^2$, arbitrară, fixată.

Dacă $R \subseteq S$, atunci, conform punctului (i), avem: dacă $a \neg Rb$, ceea ce este echivalent cu $\overline{a} R \overline{b}$, atunci $\overline{a} S \overline{b}$, ceea ce este echivalent cu $a \neg Sb$, aşadar $\neg R \subseteq \neg S$. Deci are loc implicaţia: $R \subseteq S$ implică $\neg R \subseteq \neg S$, prin urmare şi: $\neg R \subseteq \neg S$ implică $\neg \neg R \subseteq \neg \neg S$, ceea ce este echivalent cu $R \subseteq S$, conform punctului (ii). Aşadar, au loc ambele implicaţii, adică este satisfăcută echivalenţa: $R \subseteq S$ ddacă $\neg R \subseteq \neg S$.

Prin aplicarea punctului (i) şi a definiţiilor operaţiilor cu mulţimi, obţinem:

$$(a, b) \in \neg(R \cup S) \text{ ddacă } (\overline{a}, \overline{b}) \in R \cup S \text{ ddacă } \begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{sau} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in S \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{sau} \\ (a, b) \in \neg S \end{cases} \text{ ddacă}$$

$(a, b) \in \neg R \cup \neg S$, prin urmare $\neg(R \cup S) = \neg R \cup \neg S$;

$$(a, b) \in \neg(R \cap S) \text{ ddacă } (\overline{a}, \overline{b}) \in R \cap S \text{ ddacă } \begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{şi} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \in S \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{şi} \\ (a, b) \in \neg S \end{cases} \text{ ddacă}$$

$(a, b) \in \neg R \cap \neg S$, prin urmare $\neg(R \cap S) = \neg R \cap \neg S$;

$$(a, b) \in \neg(R \setminus S) \text{ ddacă } (\overline{a}, \overline{b}) \in R \setminus S \text{ ddacă } \begin{cases} (\overline{a}, \overline{b}) \in R \\ \text{şi} \\ (\overline{a}, \overline{b}) \notin S \end{cases} \text{ ddacă } \begin{cases} (a, b) \in \neg R \\ \text{şi} \\ (a, b) \notin \neg S \end{cases} \text{ ddacă}$$

$(a, b) \in \neg R \setminus \neg S$, prin urmare $\neg(R \setminus S) = \neg R \setminus \neg S$.
(iv) Presupunem că R este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$. Atunci R este compatibilă cu operaţia de complementare, aşadar: dacă aRb, atunci $\overline{a} R \overline{b}$, ceea ce implică $\overline{\overline{a}} R \overline{\overline{b}}$, ceea ce este echivalent cu aRb, în conformitate cu idempotenţa complementării. Am demonstrat că aRb ddacă $\overline{a} R \overline{b}$.

Dar, conform punctului (i), $\overline{a} R \overline{b}$ ddacă $a \neg Rb$.

Aşadar, aRb ddacă $a \neg Rb$, i. e. $(a, b) \in R$ ddacă $(a, b) \in \neg R$, deci $R = \neg R$.
(v) Conform definiţiei lui $\geq = \leq^{-1}$, are loc: $a \geq b$ ddacă $b \leq a$. Dar, conform unei proprietăţi a algebrelor Boole, $b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}$, iar, conform punctului (i), $\overline{a} \leq \overline{b}$ ddacă $a \neg \leq b$.

Prin urmare, are loc echivalenţa: $a \geq b$ ddacă $a \neg \leq b$, adică $(a, b) \in \geq$ ddacă $(a, b) \in \neg \leq$, deci $\geq = \neg \leq$.

Exerciţiul 3.2. *Fie $(A, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ şi $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ două latici mărginite (care vor fi referite prin mulţimile lor suport), iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ două morfisme de latici mărginite.*

Notăm cu $M = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\} \subseteq A$.

Să se demonstreze că:

(i) dacă A este algebră Boole, atunci $f(A)$ este algebră Boole şi corestricţia $f : A \to f(A)$ este morfism boolean;

(ii) M este o sublatice mărginită a lui A;

(iii) dacă A este algebră Boole, **nu rezultă** *că M este o subalgebră Boole a lui A;*

(iv) $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, dar nu are neapărat loc egalitatea în acea incluziune.

Rezolvare: (i) Cum A şi B sunt latici mărginite şi $f : A \to B$ este un morfism de latici mărginite, rezultă că $f(A)$ este o latice mărginită cu operaţiile induse de cele ale lui B (i. e. o sublatice mărginită a lui B).

Presupunem că A este o algebră Boole, deci A este distributivă şi complementată.

Fie $x, y, z \in f(A)$, arbitrare, fixate. Rezultă că există $a, b, c \in A$, astfel încât $x = f(a), y = f(b), z = f(c)$. Întrucât A este distributivă, rezultă că $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, prin urmare, aplicând pe f în ambii membri şi apoi folosind faptul că f este morfism de latici, $f(a\vee(b\wedge c)) = f((a\vee b)\wedge(a\vee c))$, aşadar $f(a)\vee f(b\wedge c) = f(a\vee b)\wedge f(a\vee c)$, deci $f(a)\vee(f(b)\wedge f(c)) = (f(a)\vee f(b))\wedge(f(a)\vee f(c))$, adică $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$. Conform echivalenţei celor două legi de distributivitate în orice latice, rezultă că $f(A)$ satisface şi cealaltă lege de distributivitate, deci este distributivă.

Am obţinut că $f(A)$ este o latice distributivă mărginită, desigur, cu primul element $0 = f(0)$ şi ultimul element $1 = f(1)$ (primul şi, respectiv, ultimul element al lui B).

Fie $x \in f(A)$, arbitrar, fixat. Rezultă că există $a \in A$, astfel încât $x = f(a)$. A este complementată, prin urmare există un element $\overline{a} \in A$, astfel încât $\begin{cases} a \vee \overline{a} = 1 \\ \text{şi} \\ a \wedge \overline{a} = 0. \end{cases}$ Prin urmare, $\begin{cases} x \vee f(\overline{a}) = f(a) \vee f(\overline{a}) = f(a \vee \overline{a}) = f(1) = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge f(\overline{a}) = f(a) \wedge f(\overline{a}) = f(a \wedge \overline{a}) = f(0) = 0, \end{cases}$ aşadar $f(\overline{a}) \in f(A)$ este complement al lui x în laticea mărginită $f(A)$. Deci $f(A)$ este şi complementată.

Am obţinut că $f(A)$ este o latice mărginită distributivă şi complementată, adică o algebră Boole.

$f : A \to B$ este un morfism de latici mărginite, prin urmare corestricţia sa la $f(A)$, $f : A \to f(A)$, este, de asemenea, morfism de latici mărginite.

A şi $f(A)$ sunt algebre Boole, deci satisfac existenţa şi unicitatea complementului. Să notăm, cum este uzual, cu $\bar{\cdot}$ operaţia de complementare a fiecăreia dintre aceste algebre Boole. Conform calculului de mai sus, rezultă că, pentru orice element $a \in A$, complementul lui $f(a)$ în algebra Boole $f(A)$ este $f(\overline{a})$, adică $\overline{f(a)} = f(\overline{a})$, aşadar f comută şi cu operaţia de complementare.

Rezultă că $f : A \to f(A)$ este morfism de algebre Boole.

(ii) M este o submulţime a laticii mărginite A.

f şi g sunt morfisme de latici mărginite, prin urmare $f(0) = 0 = g(0)$ şi $f(1) = 1 = g(1)$, deci $0, 1 \in M$.

Fie $a, b \in M$, adică $a, b \in A$, astfel încât $f(a) = g(a)$ şi $f(b) = g(b)$. Aplicând faptul că f şi g sunt morfisme de latici, deci comută cu $\vee$ şi $\wedge$, obţinem:

$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = g(a) \vee g(b) = g(a \vee b)$, aşadar $a \vee b \in M$;

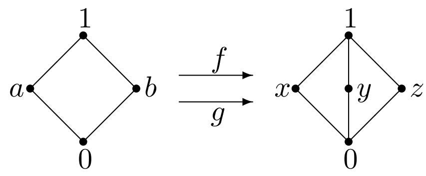
$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = g(a) \wedge g(b) = g(a \wedge b)$, aşadar $a \wedge b \in M$.

Am obţinut că M este închisă la 0, 1, $\vee$ şi $\wedge$, deci M este o sublatice mărginită a lui A.

(iii) Pentru a rezolva acest punct, vom găsi un exemplu care să ilustreze situaţia cerută. Conform punctului (i), în cazul în care A este o algebră Boole, $f(A)$ şi $g(A)$ sunt tot algebre Boole, iar corestricţiile $f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$ sunt morfisme booleene.

În exemplul de mai jos, $A = \mathcal{L}_2^2$ (A este rombul), care este o algebră Boole, B este diamantul, morfismele de latici mărginite $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ corestricţionate la imaginile lor ($f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$, respectiv) sunt chiar izomorfisme booleene, iar $M = \mathcal{L}_3$ (M este lanţul cu trei elemente), care nu este o algebră Boole, aşadar nu este subalgebră Boole a lui A.

Fie, aşadar, $A = \{0, a, b, 1\}$ şi $B = \{0, x, y, z, 1\}$, cu diagramele Hasse desenate mai jos, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ date de tabelul de dedesubtul acestor diagrame Hasse.



α	0	a	b	1
$f(\alpha)$	0	y	x	1
$g(\alpha)$	0	y	z	1

Este clar că f şi g sunt morfisme de latici mărginite.

$f(A) = \{0, x, y, 1\}$ şi $g(A) = \{0, y, z, 1\}$. A, $f(A)$ şi $g(A)$ sunt algebre Boole, fiecare izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul), iar $f : A \to f(A)$ şi $g : A \to g(A)$ sunt izomorfisme booleene.

După cum se observă, submulţimea $M = \{\alpha \in A \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ a lui A este $M = \{0, a, 1\} = \mathcal{L}_3$ (lanţul cu 3 elemente), care este o sublatice mărginită a lui B, este o latice mărginită şi distributivă, dar nu este o algebră Boole, pentru că elementul a nu are complement în M (a se vedea şi **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**, care arată că orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2, deci M nu poate fi organizată ca o algebră Boole, pentru că are cardinalul egal cu 3).

(iv) În exemplul de la punctul (iii), are loc egalitatea: $f(M) = g(M) = f(A) \cap g(A)$, pentru că $M = \{0, a, 1\}$ şi $f(\{0, a, 1\}) = g(\{0, a, 1\}) = \{0, y, 1\} = f(A) \cap g(A)$.

Dar, dacă am considera aceleaşi latici mărginite A şi B ca în exemplul de la punctul (iii), însă morfismele de latici mărginite $f : A \to B$ şi $g : A \to B$ date de tabelul următor, atunci: $f(A) = \{0, x, y, 1\}$, $g(A) = \{0, y, z, 1\}$, deci $f(A) \cap g(A) = \{0, y, 1\}$, dar $M = \{0, 1\}$, deci $f(M) = g(M) = \{0, 1\} \subsetneq f(A) \cap g(A)$.

α	0	a	b	1
$f(\alpha)$	0	x	y	1
$g(\alpha)$	0	y	z	1

A rămas de demonstrat faptul că are loc întotdeauna $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, în ipotezele exerciţiului.

Cum $M \subseteq A$, rezultă că $f(M) \subseteq f(A)$. Acum, fie $\beta \in f(M)$. Atunci există $\alpha \in M$, astfel încât $\beta = f(\alpha)$. Conform definiţiei lui M, faptul că $\alpha \in M$ implică $f(\alpha) = g(\alpha)$. Aşadar, $\beta = g(\alpha) \in g(M) \subseteq g(A)$. Prin urmare, $f(M) \subseteq g(M) \subseteq g(A)$. Din faptul că $f(M) \subseteq f(A)$ şi faptul că $f(M) \subseteq g(A)$, rezultă că $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Am demonstrat că $f(M) \subseteq g(M)$ şi că $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Analog se demonstrează că $g(M) \subseteq f(M)$ (şi $g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$, cu toate că această incluziune va rezulta oricum din egalitatea $f(M) = g(M)$ şi incluziunea $f(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$ de mai sus).

Prin urmare, $f(M) = g(M) \subseteq f(A) \cap g(A)$.

Exercițiul 3.3. *Fie $\alpha, \beta, \varphi, \psi \in E$, astfel încât $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ şi $\vdash \alpha \rightarrow \beta$.*
Să se demonstreze că: $\vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta)$.

Rezolvare: Fie a, b, x, y clasele enunţurilor $\alpha, \beta, \varphi, \psi$, respectiv, în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$, i. e.: $a = \hat{\alpha}$, $b = \hat{\beta}$, $x = \hat{\varphi}$ şi $y = \hat{\psi}$.

$\vdash \varphi \rightarrow \psi$, aşadar $\widehat{\varphi \rightarrow \psi} = 1$, i. e. $\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\psi} = 1$, adică $x \rightarrow y = 1$, deci $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $\overline{y} \leq \overline{x}$.

$\vdash \alpha \rightarrow \beta$, aşadar $\widehat{\alpha \rightarrow \beta} = 1$, i. e. $\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\beta} = 1$, adică $a \rightarrow b = 1$, deci $a \leq b$.

Din inegalităţile $\overline{y} \leq \overline{x}$ şi $a \leq b$ rezultă că: $\overline{y} \vee a \leq \overline{x} \vee b$, adică $y \rightarrow a \leq x \rightarrow b$, deci $(y \rightarrow a) \rightarrow (x \rightarrow b) = 1$, aşadar $(\hat{\psi} \rightarrow \hat{\alpha}) \rightarrow (\hat{\varphi} \rightarrow \hat{\beta}) = 1$, adică $(\psi \rightarrow \widehat{\alpha) \rightarrow (}\varphi \rightarrow \beta) = 1$, prin urmare $\vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\varphi \rightarrow \beta)$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri).