LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul VII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Mulțimi parțial ordonate: poseturi

Definiție

Se numește *mulțime (parțial) ordonată* sau *poset* (de la englezescul “partially ordered set“) o pereche $(A, \leq)$ formată dintr–o mulțime A și o **relație de ordine** $\leq$ pe A, i. e.:

- $\leq$ este o **relație binară** pe A: $\leq \subseteq A^2 := A \times A$
- $\leq$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \leq x$
- $\leq$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, $x \leq y$ și $y \leq z$ implică $x \leq z$
- $\leq$ este **antisimetrică**: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ și $y \leq x$ implică $x = y$

Dacă, în plus, relația de ordine $\leq$ este **totală**, i. e. **liniară**, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ sau $y \leq x$, atunci $(A, \leq)$ se numește *mulțime total ordonată* sau *mulțime liniar ordonată* sau *lanț*.
Relația de ordine strictă asociată ordinii $\leq$ este
$< \stackrel{\text{not.}}{=} \leq \setminus \Delta_A = \{(x, y) \mid x, y \in A, x \leq y, x \neq y\}$.
Relația de succesiune asociată ordinii $\leq$ este
$\prec \stackrel{\text{not.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in A, x < y, (\nexists\, a \in A)\,(x < a < y)\}$.

Se notează: $\geq := \leq^{-1}$, $> := <^{-1} = \geq \setminus \Delta_A$ și $\succ := \prec^{-1}$.

Dualul unui poset; diagrame Hasse; despre lanțuri

Remarcă (Cu notațiile din definiția anterioară, avem:)

- $\geq$ este o relație de ordine pe A; $(A, \geq)$ se numește *posetul dual posetului* $(A, \leq)$
- clar: $(A, \leq)$ este lanț ddacă $(A, \geq)$ este lanț
- $>$ este relația de ordine strictă asociată lui $\geq$
- $\succ$ este relația de succesiune asociată lui $\geq$

- Să ne amintim că muchiile dintr–o diagramă Hasse reprezintă perechile din relația de succesiune, $\prec$, asociată ordinii posetului reprezentat prin acea diagramă.
- La fel ca în cazul oricărui tip de structură algebrică, cu notațiile din definiția de mai sus, spunem că A este *mulțimea subiacentă* sau *mulțimea suport* a posetului $(A, \leq)$.

Remarcă

Fie $(A, \leq)$ un poset și $a, b \in A$. Atunci:

- $b < a$ implică $a \nleq b$;
- dacă $(A, \leq)$ este lanț, atunci: $b < a$ ddacă $a \nleq b$.

Poseturi mărginite; funcții izotone

Definiție

Un poset cu minim și maxim se numește *poset mărginit* sau *poset cu* 0 *și* 1, iar minimul și maximul unui poset mărginit se notează adesea cu 0, respectiv 1.

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se zice *izotonă* (sau *crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.
f se zice *antitonă* (sau *descrescătoare*) ddacă f inversează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(y) \sqsubseteq f(x)$.
Funcțiile izotone se mai numesc *morfisme de poseturi*.

Observație

Se consideră că denumirea de **funcție crescătoare** este legată de ordinile naturale de pe mulțimile de numere, și, de aceea, se preferă denumirea de **funcție izotonă** în cazul funcțiilor între poseturi arbitrare.

Remarcă

Cu notațiile din definiția de mai sus, f este funcție antitonă ddacă este morfism între posetul $(A, \leq)$ și posetul dual lui $(B, \sqsubseteq)$, anume $(B, \sqsupseteq)$, unde $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$.

Funcții izotone; izomorfisme de poseturi

Remarcă

- Compunerea a două funcții izotone este o funcție izotonă.
- Orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare (dar nu și infimumurile și supremumurile, nici măcar pe ale mulțimilor finite, nici măcar dacă este bijectivă).
- Orice funcție izotonă duce lanțuri în lanțuri.
- Orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă.

Definiție

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă. Două poseturi între care există un izomorfism de poseturi se zic *izomorfe*.

- **Intuitiv:** două poseturi finite sunt izomorfe ddacă au aceeași diagramă Hasse.

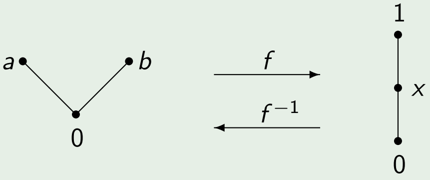
Remarcă

Orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

Morfisme bijective versus izomorfisme de poseturi

Exemplu

Funcția f între următoarele două poseturi (pe care le notăm $(\{0, a, b\}, \leq)$ și $(\{0, x, 1\}, \sqsubseteq)$, respectiv), dată prin următorul tabel, este izotonă și bijectivă, dar inversa ei nu este izotonă, pentru că $x \sqsubseteq 1$ în al doilea poset, dar $f^{-1}(x) = a \not\leq b = f^{-1}(1)$ (în primul poset, a și b sunt incomparabile).



u	0	a	b
$f(u)$	0	x	1

u	0	x	1
$f^{-1}(u)$	0	a	b

Demonstrația următoarei remarci (a se vedea seminarul) arată că aceasta e unica situație în care inversa unei funcții izotone bijective f între două poseturi $(P, \leq)$ și $(Q, \sqsubseteq)$ nu este izotonă: există $a, b \in P$, incomparabile, cu $f(a), f(b)$ comparabile.

Remarcă

Fie $f : L \to M$ o funcție bijectivă izotonă între două poseturi $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$. Dacă $(L, \leq)$ este lanț, atunci inversa lui f, f^{-1}, este izotonă, adică f este izomorfism de ordine.

Latici

- O latice este simultan un poset și o structură algebrică înzestrată cu două operații binare, fiecare dintre acestea cu anumite proprietăți specifice.
- Vom defini mai jos două tipuri de latici, anume

  laticile Ore și **laticile Dedekind**,

  și apoi vom demonstra că orice latice Ore poate fi organizată ca o latice Dedekind, și orice latice Dedekind poate fi organizată ca o latice Ore.
- Așadar, vom arăta că, de fapt, există un singur fel de latice, care este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.

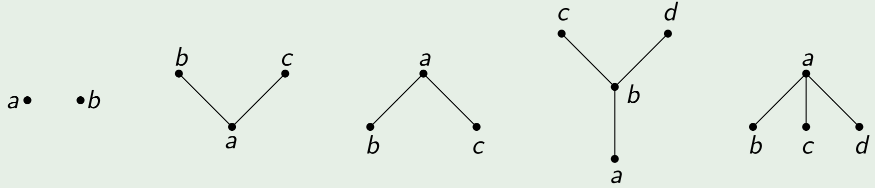
Latice Ore

Definiție

O *latice Ore* este un poset $(L, \leq)$ cu proprietatea că, pentru orice $x, y \in L$, există $\inf\{x, y\} \in L$ și $\sup\{x, y\} \in L$.

Exemplu (poseturi care nu sunt latici Ore)

Mulțimile indicate sub aceste diagrame nu au minoranți/majoranți, așadar nu au infimum/supremum.



$\nexists \inf\{a, b\}$
$\nexists \sup\{a, b\}$

$\nexists \sup\{b, c\}$

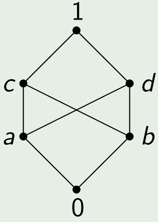
$\nexists \inf\{b, c\}$

$\nexists \sup\{c, d\}$

$\nexists \inf\{b, c\}$
$\nexists \inf\{b, d\}$
$\nexists \inf\{c, d\}$

Poset finit și mărginit care nu este latice Ore

Exemplu

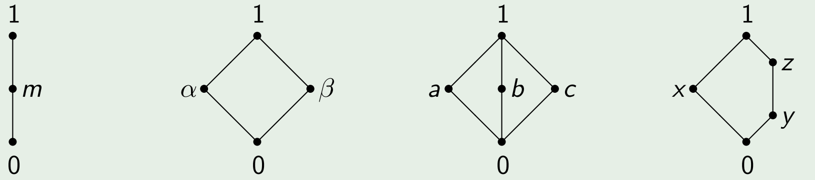


În acest poset mărginit, submulțimea $\{a, b\}$ nu are supremum, pentru că mulțimea majoranților săi este $\{c, d, 1\}$, care nu are minim ($c \leq 1$, $d \leq 1$ și c și d sunt *incomparabile*, i. e. $c \nleq d$ și $d \nleq c$).
În mod similar, submulțimea $\{c, d\}$ nu are infimum, pentru că mulțimea minoranților săi este $\{0, a, b\}$, care nu are maxim ($0 \leq a$, $0 \leq b$ și a și b sunt incomparabile).
Așadar, acest poset nu este o latice Ore, cu toate că este mărginit, așa cum vom vedea că sunt toate laticile finite.

Exemple de latici Ore

Exemplu

Următoarele poseturi sunt latici Ore, după cum se poate verifica direct:



$\mathcal{L}_3$ *rombul* *diamantul* *pentagonul*

Primul dintre aceste poseturi este lanțul cu 3 elemente. Și denumirile celorlalte trei poseturi se datorează formelor diagramelor lor Hasse.

Remarcă

Orice lanț este latice Ore, pentru că, dacă $(L, \leq)$ este un lanț nevid, iar $x, y \in L$, atunci $x \leq y$ sau $y \leq x$, prin urmare există $\min\{x, y\}$ și $\max\{x, y\}$, așadar există în $(L, \leq)$ $\inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.

Latice Dedekind

Definiție

O *latice Dedekind* este o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, unde L este o mulțime, iar $\vee$ și $\wedge$ sunt două operații binare pe L (adică $\vee : L^2 \to L$ și $\wedge : L^2 \to L$; aceste operații binare sunt notate infixat și numite, respectiv, *sau* și *și*, sau *disjuncție* și *conjuncție*, sau *reuniune* și *intersecție*) care satisfac următoarele proprietăți:

- **idempotență:** pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$ și $x \wedge x = x$;
- **comutativitate:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = y \vee x$ și $x \wedge y = y \wedge x$;
- **asociativitate:** pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ și $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
- **absorbție:** pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemplu

Pentru orice mulțime T, se verifică ușor că $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este o latice Dedekind, folosind proprietățile din calculul cu mulțimi demonstrate la primele seminarii.

Latici

Lemă (amintită din cele de mai sus)

Fie $(L, \leq)$ *un poset. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \leq y$
2. *există în* L $\inf\{x, y\} = x$
3. *există în* L $\sup\{x, y\} = y$

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Atunci, pentru orice* $x, y \in L$*, următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $x \wedge y = x$
2. $x \vee y = y$

Demonstrație: Fie $x, y \in L$.
(1) $\Rightarrow$ (2): În următorul șir de egalități, mai întâi scriem x în concordanță cu ipoteza (1), apoi aplicăm comutativitatea lui $\vee$ și cea a lui $\wedge$, și, în final, absorbția: $x \wedge y = x$ implică $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y \vee (x \wedge y) = y \vee (y \wedge x) = y$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Urmărim pașii demonstrației implicației anterioare, sărind peste aplicarea comutativității, pentru că aici nu este necesară: $x \vee y = y$ implică $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Teoremă

Cele două definiții ale noțiunii de latice sunt echivalente. Mai precis, au loc următoarele fapte.

1. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \leq)$ *o latice Ore. Definim* $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$*, unde* $\vee$ *și* $\wedge$ *sunt operații binare pe mulțimea* L*, definite prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \vee y := \sup\{x, y\}$ *și* $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ *în laticea Ore* $\mathcal{L}$*. Atunci* $\Phi(\mathcal{L})$ *este o latice Dedekind.*
2. *Fie* $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ *o latice Dedekind. Definim* $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$*, unde* $\leq$ *este o relație binară pe mulțimea* L*, definită prin: pentru orice* $x, y \in L$*,* $x \leq y$ *ddacă* $x \vee y = y$ *(ceea ce este echivalent cu* $x \wedge y = x$*, după cum ne asigură o lemă de mai sus). Atunci* $\Psi(\mathcal{L})$ *este o latice Ore, în care, pentru orice* $x, y \in L$*,* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *și* $\sup\{x, y\} = x \vee y$*.*
3. *Aplicațiile* Φ *și* Ψ *sunt inverse una alteia, adică: pentru orice latice Ore* $\mathcal{L}$*,* $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*, și, pentru orice latice Dedekind* $\mathcal{L}$*,* $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$*.*

Demonstrație: (1) Ca în enunț, să considerăm o latice Ore $\mathcal{L} := (L, \leq)$, și să definim $\Phi(\mathcal{L}) := (L, \vee, \wedge)$, unde $\vee$ și $\wedge$ sunt operații binare pe mulțimea L, definite prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y := \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ în laticea Ore $\mathcal{L}$. Trebuie să demonstrăm că $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.
A se observa că identitățile stabilite mai jos sunt valabile în orice poset în care există infimumurile și supremumurile care apar în aceste identități.
Este evident, din definiția maximului și a minimului și din reflexivitatea unei relații de ordine, că orice submulțime a lui L cu un singur element are maxim și minim, ambele egale cu unicul său element. Așadar, pentru orice $x \in L$,
$x \vee x = \sup\{x, x\} = \sup\{x\} = \max\{x\} = x$ și
$x \wedge x = \inf\{x, x\} = \inf\{x\} = \min\{x\} = x$, ceea ce înseamnă că operațiile $\vee$ și $\wedge$ sunt idempotente.
Pentru orice $x, y \in L$, avem egalitatea de mulțimi $\{x, y\} = \{y, x\}$, prin urmare $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\} = \inf\{y, x\} = y \wedge x$, deci $\vee$ și $\wedge$ sunt comutative.
Fie $x, y, z \in L$. Vom demonstra că există în L $\sup\{x, y, z\}$ și $\sup\{x, y, z\} = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ (știm că în L există supremumurile mulțimilor de 1 sau 2 elemente, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\}$ există în L).
Să notăm $t := \sup\{y, z\}$ și $u := \sup\{x, t\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Egalitatea $t = \sup\{y, z\}$ și definiția supremumului arată că $y \leq t$ și $z \leq t$.
Similar, faptul că $u = \sup\{x, t\}$ implică $t \leq u$.
$y \leq t$ și $t \leq u$, deci $y \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$. Analog, $z \leq t$ și $t \leq u$ implică $z \leq u$ conform tranzitivității lui $\leq$.
$u = \sup\{x, t\}$, prin urmare $x \leq u$.
Deci $x \leq u$, $y \leq u$, $z \leq u$, așadar u este un majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$. Deci mulțimea $\{x, y, z\}$ are cel puțin un majorant. Vom demonstra că u este cel mai mic majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, adică este supremumul acestei mulțimi.
Fie $s \in L$ un majorant arbitrar (dar fixat) al mulțimii $\{x, y, z\}$.
Întrucât s este majorant pentru $\{x, y, z\}$, avem $y \leq s$ și $z \leq s$, de unde, ținând seama de faptul că $t = \sup\{y, z\}$, obținem $t \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Dar faptul că s este majorant pentru $\{x, y, z\}$ implică și $x \leq s$.
Deci $x \leq s$, $t \leq s$ și $u = \sup\{x, t\}$, de unde obținem $u \leq s$ conform caracterizării supremumului.
Am arătat că $u \leq s$ pentru orice majorant al mulțimii $\{x, y, z\}$, ceea ce înseamnă că $\sup\{x, y, z\}$ există în L și $\sup\{x, y, z\} = u = \sup\{x, \sup\{y, z\}\}$.
Dar această egalitate ne dă și
$\sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = \sup\{z, \sup\{x, y\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{x, y, z\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, deci $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$, așadar $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.
(A se observa că, la fel ca mai sus, se poate demonstra, "din aproape în aproape" sau prin inducție matematică, faptul că în L există supremumul oricărei mulțimi finite nevide, și, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ și oricare ar fi $x_1, \ldots, x_n \in L$,

$$\sup\{x_1, \ldots, x_n\} = \begin{cases} x_1, & n = 1, \\ \sup\{\sup\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, x_n\}, & n > 1. \end{cases})$$

Principiul dualității pentru poseturi și identitatea $\sup\{x, \sup\{y, z\}\} = \sup\{\sup\{x, y\}, z\}$ arată că avem și $\inf\{x, \inf\{y, z\}\} = \inf\{\inf\{x, y\}, z\}$, adică $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
Am demonstrat că $\vee$ și $\wedge$ sunt asociative.
Pentru a demonstra absorbția, să considerăm $x, y \in L$. Avem de arătat că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$. Să notăm așadar $s := \sup\{x, y\}$ și $i := \inf\{x, s\}$.
$s = \sup\{x, y\}$, deci $x \leq s$, prin urmare $i = \inf\{x, s\} = \min\{x, s\} = x$, conform unei proprietăți a poseturilor demonstrate mai sus.
Deci $i = x$, ceea ce înseamnă că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$, adică $x \wedge (x \vee y) = x$.
Faptul că $\inf\{x, \sup\{x, y\}\} = x$ și **Principiul dualității pentru poseturi** arată că avem și $\sup\{x, \inf\{x, y\}\} = x$, adică $x \vee (x \wedge y) = x$.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Prin urmare, $\vee$ și $\wedge$ satisfac și absorbția, ceea ce încheie demonstrația punctului (1): $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind.

(2) Ca în enunț, să considerăm o latice Dedekind $\mathcal{L} := (L, \vee, \wedge)$ și să definim $\Psi(\mathcal{L}) := (L, \leq)$, unde $\leq$ este o relație binară pe mulțimea L, definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ (ddacă $x \wedge y = x$, conform unei leme de mai sus). Trebuie să demonstrăm că $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, în care, pentru orice $x, y \in L$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ și $\sup\{x, y\} = x \vee y$.

Din idempotența lui $\vee$, avem că, pentru orice $x \in L$, $x \vee x = x$, deci $x \leq x$, adică $\leq$ este reflexivă.

Fie $x, y, z \in L$ astfel încât $x \leq y$ și $y \leq z$, i. e. $x \vee y = y$ și $y \vee z = z$, prin urmare, folosind aceste două egalități și asociativitatea lui $\vee$, obținem: $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$, deci $x \vee z = z$, ceea ce înseamnă că $x \leq z$. Așadar $\leq$ este tranzitivă.

Acum fie $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$ și $y \leq x$, adică $x \vee y = y$ și $y \vee x = x$. Dar $x \vee y = y \vee x$ din comutativitatea lui $\vee$, deci $x = y$. Așadar $\leq$ este antisimetrică.

Am demonstrat că $\leq$ este o relație de ordine.

Echivalența celor două definiții ale laticii

Fie $x, y \in L$, arbitrare, fixate. Trebuie să demonstrăm că există în $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ infimumul și supremumul mulțimii $\{x, y\}$ și că acestea sunt egale cu $x \wedge y$ și respectiv $x \vee y$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\vee$, avem că $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$. Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\vee$, obținem $y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.
Fie $l \in L$, a. î. $x \leq l$ și $y \leq l$, adică $x \vee l = l$ și $y \vee l = l$. Atunci, conform asociativității lui $\vee$, $(x \vee y) \vee l = x \vee (y \vee l) = x \vee l = l$, deci $x \vee y \leq l$.
Caracterizarea supremumului ne dă acum: $\sup\{x, y\} = x \vee y$.
Din comutativitatea, asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, obținem: $(x \wedge y) \wedge x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq x$.
Din asociativitatea și idempotența lui $\wedge$, avem: $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge (y \wedge y) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq y$.
Fie $l \in L$, a. î. $l \leq x$ și $l \leq y$, adică $l \wedge y = l$ și $l \wedge y = l$. Atunci, conform asociativității lui $\wedge$, $l \wedge (x \wedge y) = (l \wedge x) \wedge y = l \wedge y = l$, așadar $l \leq x \wedge y$.
Caracterizarea infimumului ne dă acum: $\inf\{x, y\} = x \wedge y$, ceea ce încheie demonstrația punctului (2): $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore.

Echivalența celor două definiții ale laticii

(3) Fie $\mathcal{L} = (L, \leq)$ o latice Ore. Atunci $\Phi(\mathcal{L}) = (L, \vee, \wedge)$ este o latice Dedekind, unde, pentru orice $x, y \in L$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ și $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ în $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Fie $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = (L, \sqsubseteq)$. Atunci $(L, \sqsubseteq)$ este o latice Ore, cu $\sqsubseteq$ definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\sup\{x, y\} = y \in \{x, y\}$ ddacă în $\mathcal{L} = (L, \leq)$ avem $\max\{x, y\} = \sup\{x, y\} = y$ (a se vedea o proprietate de mai sus) ddacă $x \leq y$. Așadar $\sqsubseteq = \leq$, deci $(L, \sqsubseteq) = (L, \leq)$, adică $\Psi(\Phi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Acum fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ o latice Dedekind. Atunci $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$ este o latice Ore, unde relația de ordine $\leq$ este definită prin: pentru orice $x, y \in L$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$, sau, echivalent, $x \leq y$ ddacă $x \wedge y = x$, iar supremumurile și infimumurile sunt date de: pentru orice $x, y \in L$, $\sup\{x, y\} = x \vee y$ și $\inf\{x, y\} = x \wedge y$.
Atunci $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = (L, \sqcup, \sqcap)$ este o latice Dedekind, cu $\sqcup$ și $\sqcap$ definite după cum urmează, în funcție de supremumurile și infimumurile din laticea Ore $\Psi(\mathcal{L}) = (L, \leq)$: pentru orice $x, y \in L$, $x \sqcup y = \sup\{x, y\} = x \vee y$ și $x \sqcap y = \inf\{x, y\} = x \wedge y$, deci $\sqcup = \vee$ și $\sqcap = \wedge$, așadar $(L, \sqcup, \sqcap) = (L, \vee, \wedge)$, ceea ce înseamnă că $\Phi(\Psi(\mathcal{L})) = \mathcal{L}$.
Demonstrația teoremei este încheiată.

Notații alternative pentru latici

- De acum încolo, vom numi orice latice Ore și orice latice Dedekind, simplu, *latice*.
- Conform teoremei anterioare, orice latice este simultan o latice Ore și o latice Dedekind.
- Ori de câte ori va fi dată o latice, vom lucra cu ordinea ei parțială (care o face latice Ore) și cu operațiile ei binare (disjuncția și conjuncția, care o fac latice Dedekind) fără a specifica la care dintre cele două definiții echivalente ale unei latici ne vom referi într–un anumit moment.
- Pentru orice latice L, vom folosi oricare dintre notațiile: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$ și $(L, \vee, \wedge, \leq)$, în funcție de ce trebuie specificat despre structura de latice a lui L: ordinea ei parțială $\leq$, operațiile ei binare $\vee$ și $\wedge$, sau toate acestea.

Exemple de latici

Exemplu

Cu ultima dintre notațiile de mai sus, următoarele structuri sunt latici:

- $(\emptyset, (\emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \emptyset), \emptyset)$, pentru că $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ este unica relație binară pe $\emptyset$, iar unica operație binară pe $\emptyset$, adică funcție definită pe $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$ cu valori în $\emptyset$, este $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, și toate aceste componente satisfac, în mod trivial, condițiile din definiția unei latici;
- $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$, pentru orice mulțime T;
- $(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$;
- $(D_n, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, și D_n este mulțimea divizorilor naturali ai lui n;
- orice lanț $(L, \max, \min, \leq)$, de exemplu: $\mathcal{L}_n = (L_n, \max, \min, \leq)$ cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \max, \min, \leq)$, $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$.

Latici

- Proprietatea următoare generalizează compunerea incluziunilor nestricte și de același sens de mulțimi cu $\cup$, precum și cu $\cap$, membru cu membru.

Propoziție (două inegalități nestricte și de același sens într–o latice se pot compune cu $\vee$, precum și cu $\wedge$, membru cu membru; altfel spus, relația de ordine într–o latice este compatibilă cu $\vee$ și cu $\wedge$)

Pentru orice elemente x, y, a, b ale unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$, dacă $x \leq a$ și $y \leq b$, atunci $x \wedge y \leq a \wedge b$ și $x \vee y \leq a \vee b$.

Demonstrație: $x \leq a$ înseamnă că $x \wedge a = x$ și $x \vee a = a$.
$y \leq b$ înseamnă că $y \wedge b = y$ și $y \vee b = b$.
Atunci $(x \wedge y) \wedge (a \wedge b) = x \wedge y \wedge a \wedge b = x \wedge a \wedge y \wedge b = (x \wedge a) \wedge (y \wedge b) = x \wedge y$, deci $x \wedge y \leq a \wedge b$.
Și $(x \vee y) \vee (a \vee b) = x \vee y \vee a \vee b = x \vee a \vee y \vee b = (x \vee a) \vee (y \vee b) = a \vee b$, deci $x \vee y \leq a \vee b$.
Am folosit comutativitatea și asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$. (Asociativitatea acestor operații ne–a permis scrierile fără paranteze de mai sus.)

Principiul dualității pentru latici

În concordanță cu **Principiul dualității pentru poseturi**, următoarele noțiuni legate de definiția unei latici sunt duale unele față de celelalte: $\vee$ și $\wedge$, $\leq$ și $\geq$, respectiv, unde, ca și la enunțarea **Principiului dualității pentru poseturi**, am notat $\geq := \leq^{-1}$.
Pentru a exprima acest fapt mai precis, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este o latice, atunci este imediat, din definiția unei latici și **principiul dualității pentru poseturi**, că $(L, \wedge, \vee, \geq)$ este, de asemenea, o latice, iar această latice se numește *duala* laticii $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Este evident că duala dualei unei latici $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este chiar $(L, \vee, \wedge, \leq)$.
Aceste fapte ne conduc la **Principiul dualității pentru latici**: *orice rezultat privind o latice arbitrară* $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *rămâne valabil dacă în el interschimbăm* $\vee$ *cu* $\wedge$ *și* $\leq$ *cu* $\geq$.
Ca și la **Principiul dualității pentru poseturi**, este esențial ca laticea să fie **arbitrară**, adică acest principiu se referă **în mod strict** la rezultate valabile în **toate** laticile.
De acum încolo, ori de câte ori vom apela la **Principiul dualității pentru latici**, vom scrie, simplu, “prin dualitate“.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită de mai sus)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi, iar $f : A \to B$ o funcție.
f se numește *morfism de poseturi* (sau *funcție izotonă*, sau *funcție crescătoare*) ddacă f păstrează ordinea, i. e.: pentru orice $x, y \in A$, $x \leq y$ implică $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ o funcție.
f se numește *morfism de latici* ddacă f comută cu operațiile de latici, i. e.: pentru orice $x, y \in L$,

1. $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
   și
2. $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$.

Un morfism de latici de la o latice la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici este un morfism de latici. Întradevăr, dacă $(L, \vee, \wedge)$, $(M, \sqcup, \sqcap)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge)$ sunt latici, iar $f : L \to M$ și $g : M \to N$ sunt morfisme de latici, atunci $g \circ f : L \to N$ satisface următoarele egalități, pentru orice $a, b \in L$:

$$(g \circ f)(a \vee b) = g(f(a \vee b)) = g(f(a) \sqcup f(b)) = g(f(a)) \curlyvee g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlyvee (g \circ f)(b) \quad \text{și}$$

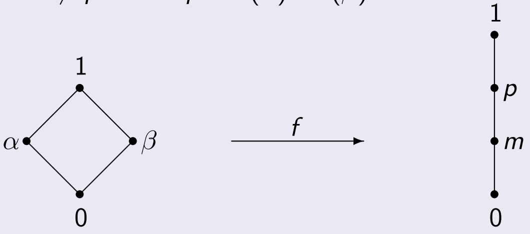
$$(g \circ f)(a \wedge b) = g(f(a \wedge b)) = g(f(a) \sqcap f(b)) = g(f(a)) \curlywedge g(f(b)) = (g \circ f)(a) \curlywedge (g \circ f)(b).$$

Remarcă

Orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc.
Într–adevăr, dacă $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ sunt două latici și $f : L \to M$ este un morfism de latici, atunci, pentru orice $x, y \in L$ a. î. $x \leq y$, ceea ce este echivalent cu $x \vee y = y$, avem: $f(x) \sqcup f(y) = f(x \vee y) = f(y)$, așadar $f(x) \sqsubseteq f(y)$.

Remarcă (continuare)

În ce privește implicația reciprocă, să considerăm următorul contraexemplu, în care f este funcție izotonă, dar nu este morfism de latici, pentru că $f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p = f(\alpha) \vee f(\beta)$:



rombul: $(R, \vee, \wedge)$ $\mathcal{L}_4 = (L_4, \vee, \wedge)$

x	0	α	β	1
$f(x)$	0	m	p	1

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție

Un *izomorfism de latici* este un morfism de latici inversabil, i. e. un morfism de latici care este o funcție inversabilă și a cărei inversă este tot un morfism de latici.
Un *automorfism de latici* este un izomorfism de latici între o latice și ea însăși (adică un endomorfism de latici inversabil).

Definiție

Două latici între care există un izomorfism de latici se zic *izomorfe*.
În general, oricare două structuri algebrice de același tip între care există un izomorfism se vor zice *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici este un izomorfism de latici ddacă este un morfism bijectiv de latici, adică un morfism de latici care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici este, de asemenea, un morfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Demonstrație: Implicația directă este imediată, pentru că, așa cum sugerează enunțul, orice izomorfism de latici este simultan un morfism de latici și o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ două latici și $f : L \to M$ un morfism bijectiv de latici. Să demonstrăm că, în aceste ipoteze, rezultă că f este un izomorfism de latici.
f este, așadar, o funcție bijectivă, deci inversabilă. Fie $f^{-1} : M \to L$ inversa funcției f.
Fie $a, b \in M$. f este bijectivă, deci surjectivă, deci există $x, y \in L$ a. î. $f(x) = a$ și $f(y) = b$. Aplicând f^{-1} în ambii membri ai fiecăreia dintre aceste două egalități, obținem: $f^{-1}(a) = f^{-1}(f(x)) = x$ și $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(y)) = y$.
Rezultă că
$f^{-1}(a \sqcup b)^{=} f^{-1}(f(x) \sqcup f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$. Prin dualitate, rezultă că avem și: $f^{-1}(a \sqcap b) = f^{-1}(a) \wedge f^{-1}(b)$. Așadar f^{-1} este morfism de latici, prin urmare f este un morfism de latici inversabil cu inversa morfism de latici, i. e. f este un izomorfism de latici.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Definiție (amintită de mai sus)

O funcție între două poseturi se numește *izomorfism de ordine* sau *izomorfism de poseturi* ddacă este morfism de poseturi inversabil, i. e. morfism de poseturi bijectiv, cu inversa tot morfism de poseturi, i. e. funcție izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă.

Propoziție

O funcție între două latici este izomorfism de latici ddacă este izomorfism de ordine (între poseturile subiacente celor două latici).

Demonstrație: Implicația directă rezultă din definiția unui izomorfism de latici și faptul că orice morfism de latici este funcție izotonă.
Reciproc, fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \sqsubseteq)$ două latici și $f : L \to M$ un izomorfism de ordine între poseturile $(L, \leq)$ și $(M, \sqsubseteq)$, adică f este o funcție izotonă bijectivă, iar inversa ei, $f^{-1} : M \to L$, este, de asemenea, izotonă.
Fie $a, b \in L$, arbitrare, fixate. Demonstrăm că $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
$a \vee b = \sup\{a, b\}$, iar $a \leq \sup\{a, b\}$ și $b \leq \sup\{a, b\}$.
Așadar, $a \leq a \vee b$ și $b \leq a \vee b$, iar f este izotonă, prin urmare $f(a) \sqsubseteq f(a \vee b)$ și $f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$, deci $f(a \vee b)$ este un majorant al submulțimii $\{f(a), f(b)\}$ a lui $(M, \sqsubseteq)$, prin urmare $\sup\{f(a), f(b)\} \sqsubseteq f(a \vee b)$, conform definiției supremumului.

Funcții izotone versus morfisme de latici

Dar $f(a) \sqcup f(b) = \sup\{f(a), f(b)\}$, deci $f(a) \sqcup f(b) \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Să notăm cu $u := f(a) \sqcup f(b) \in M$, pentru comoditatea scrierii în cele ce urmează.
Cu această notație, ultima relație de mai sus devine: $u \sqsubseteq f(a \vee b)$.
Au loc: $f(a) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$ și
$f(b) \sqsubseteq \sup\{f(a), f(b)\} = f(a) \sqcup f(b) = u$, deci $f(a) \sqsubseteq u$ și $f(b) \sqsubseteq u$.
Ipoteza că f^{-1} este izotonă și ultimele două relații de mai sus implică
$a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(u)$ și $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(u)$, deci $f^{-1}(u)$ este majorant pentru submulțimea $\{a, b\}$ a lui $(L, \leq)$.
Acum aplicăm din nou definiția supremumului, și obținem:
$a \vee b = \sup\{a, b\} \leq f^{-1}(u)$.
Prin urmare, întrucât f este izotonă, avem: $f(a \vee b) \sqsubseteq f(f^{-1}(u)) = u$.
În relația $f(a \vee b) \sqsubseteq u$, pe care tocmai am demonstrat–o, înlocuim
$u = f(a) \sqcup f(b)$ conform notației de mai sus, și obținem $f(a \vee b) \sqsubseteq f(a) \sqcup f(b)$.
Așadar, $f(a \vee b) = f(a) \sqcup f(b)$.
Prin dualitate, rezultă că și $f(a \wedge b) = f(a) \sqcap f(b)$.
Ultimele două egalități arată că f este un morfism de latici.
Dar, prin ipoteză, f este o funcție inversabilă, deci bijectivă.
Deci f este un morfism bijectiv de latici, așadar, conform propoziției anterioare, rezultă că f este un izomorfism de latici.

Am văzut mai sus că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$, avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Latici mărginite

Definiție

Un poset mărginit care este latice se numește *latice mărginită*.
Dacă există, primul element al (adică minimul) unei latici se notează, de obicei, cu 0.
Dacă există, ultimul element al (adică maximul) unei latici se notează, de obicei, cu 1.
O latice mărginită va fi notată $(L, \leq, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, sau $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, cu notațiile prezentate mai sus.
O latice mărginită se mai numește *latice cu* 0 *și* 1 sau *latice cu prim și ultim element*.

Definiție

Laticea mărginită cu un singur element (adică laticea mărginită cu $0 = 1$) se numește *laticea mărginită trivială*.
Orice latice mărginită de cardinal strict mai mare decât 1 (adică orice latice mărginită în care $0 \neq 1$) se numește *latice mărginită netrivială*.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ două latici mărginite și $f : L \to M$ o funcție. f se numește *morfism de latici mărginite* ddacă este morfism de latici și $f(0) = \bot$ și $f(1) = \top$.
Un morfism de latici mărginite de la o latice mărginită la ea însăși se numește *endomorfism* al acelei latici mărginite.

Remarcă

Compunerea a două morfisme de latici mărginite este un morfism de latici mărginite.
Într–adevăr, să considerăm trei latici mărginite, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, $(M, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ și $(N, \curlyvee, \curlywedge, \triangle, \triangledown)$ și două morfisme de latici mărginite $f : L \to M$ și $g : M \to N$. Atunci f și g sunt morfisme de latici, deci $g \circ f$ este un morfism de latici, conform unui rezultat de mai sus. În plus:

- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\bot) = \triangle$ și
- $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\top) = \triangledown$,

așadar $g \circ f : L \to N$ este un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Definiție

Un *izomorfism de latici mărginite* este un morfism de latici mărginite inversabil, i. e. un morfism de latici mărginite care este o funcție inversabilă a cărei inversă este tot un morfism de latici mărginite.
Un *automorfism de latici mărginite* este un izomorfism de latici mărginite între o latice mărginită și ea însăși (adică un endomorfism de latici mărginite inversabil).

Definiție

Două latici mărginite între care există un izomorfism de latici mărginite se zic *izomorfe*.

Propoziție

O funcție între două latici mărginite este un izomorfism de latici mărginite ddacă este un morfism bijectiv de latici mărginite, adică un morfism de latici mărginite care este funcție bijectivă.
Cu alte cuvinte, inversa oricărui morfism bijectiv de latici mărginite este, de asemenea, un morfism de latici mărginite.

Morfisme de latici mărginite

Demonstrație: Implicația directă este trivială.
Dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \perp, \top)$ sunt latici mărginite și $f : L \to M$ este un morfism bijectiv de latici mărginite, atunci:

- f este un morfism bijectiv de latici, prin urmare, conform unui rezultat de mai sus, inversa $f^{-1} : M \to L$ a lui f este un morfism de latici;
- în plus, conform definiției unui morfism de latici mărginite, $f(0) = \perp$ și $f(1) = \top$, deci $f^{-1}(\perp) = f^{-1}(f(0)) = 0$ și $f^{-1}(\top) = f^{-1}(f(1)) = 1$, așadar f^{-1} este un morfism de latici mărginite.

Așadar, f este un morfism de latici mărginite inversabil cu inversa morfism de latici mărginite, i. e. f este un izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

De fapt, conform următoarei remarci, izomorfismele de latici mărginite coincid cu izomorfismele de latici între latici mărginite, i. e.: orice izomorfism de latici între două latici mărginite este izomorfism de latici mărginite.

Remarcă

Am văzut că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare.
Prin urmare, orice funcție izotonă surjectivă între două poseturi mărginite

Morfisme de latici mărginite

Remarcă (continuare)

păstrează minimul și maximul, i. e. duce minimul primului poset în minimul celui de–al doilea poset, și duce maximul primului poset în maximul celui de–al doilea poset.

Remarcă

Am afirmat la un moment dat că ordinea totală pe o mulțime finită este unică, modulo o permutare a elementelor mulțimii (desigur, și există o astfel de ordine totală).

Semnificația acestei afirmații este că oricare două lanțuri finite cu aceeași mulțime suport sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru, pentru că știm că izomorfismele de ordine coincid cu izomorfismele de latici), adică: pentru orice mulțime finită A, dacă $\leq$ și $\sqsubseteq$ sunt ordini totale pe A, atunci poseturile (laticile) $(A, \leq)$ și $(A, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe.

Ca o consecință imediată, oricare două lanțuri finite de același cardinal (i. e. cu același număr de elemente, aici, în cazul finit) sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru), adică, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, lanțul cu n elemente este unic, modulo un izomorfism (altfel spus, până la un izomorfism), i. e. oricare două lanțuri cu n elemente sunt izomorfe (ca poseturi sau ca latici, este același lucru; deci și ca latici mărginite, conform remarcii anterioare).

Sublatici și sublatici mărginite

Definiție

Dată o latice $(L, \vee, \wedge)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$.

Dată o latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, o submulțime M a lui L se numește *sublatice mărginită a lui L* ddacă este închisă la operațiile de latice mărginită ale lui L, adică:

- pentru orice $x, y \in M$, rezultă că $x \vee y, x \wedge y \in M$;
- $0, 1 \in M$.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Este imediat că o sublatice (mărginită) M a unei latici (mărginite) L este o latice (mărginită) cu operațiile *induse* pe M de operațiile lui L, adică restricțiile operațiilor lui L la M:

- restricția lui $\vee$ la M este operația binară $\sqcup$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcup y := x \vee y$;
- restricția lui $\wedge$ la M este operația binară $\sqcap$ pe M, definită prin: oricare ar fi $x, y \in M$, $x \sqcap y := x \wedge y$;
- pentru latici mărginite:
  - restricția lui 1 la M la M este 1 (aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente);
  - restricția lui 0 la M la M este 0 (și aceasta este o constantă, i. e. o *operație zeroară*, adică o operație fără argumente).

Operațiile induse se notează, de obicei, la fel ca operațiile laticii L:

- operația $\sqcup$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\vee$;
- operația $\sqcap$, definită mai sus, se notează, de obicei, tot cu $\wedge$;
- în cazul laticilor mărginite, primul și ultimul element al sublaticii mărginite M, ca prim și, respectiv, ultim element al laticii mărginite M, se notează, de obicei tot cu 0 și 1, respectiv.

Sublatici și sublatici mărginite

Remarcă

Cu notațiile din remarca anterioară, este trivial că ordinea parțială a unei sublatici M a lui L (ca latice cu operațiile induse de cele ale lui L) este exact ordinea parțială a lui L restricționată la M, care (amintim) se notează, în mod uzual, la fel ca ordinea parțială a lui L:

- notând cu $\sqsubseteq$ ordinea laticii M, pentru orice $x, y \in M$, avem: $x \sqsubseteq y$ ddacă $x \sqcup y = y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \leq y$;
- deci ordinea $\sqsubseteq$ a laticii M este, într–adevăr, restricția lui $\leq$ la M, și $\sqsubseteq$ se notează, de obicei, tot cu $\leq$.

Remarcă

Orice submulțime a unei latici $\mathcal{L}$ este (sub)poset cu ordinea indusă, dar nu este neapărat și sublatice, pentru că poate să nu conțină infimumurile și supremumurile din $\mathcal{L}$ ale perechilor de elemente ale sale.

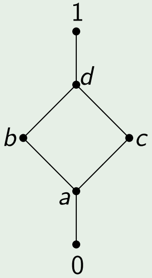
Exercițiu (temă)

Orice submulțime total ordonată a unei latici $\mathcal{L}$ este sublatice a lui $\mathcal{L}$.

Sublatici și sublatici mărginite

Exemplu

Fie L laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:



Se observă, direct din această diagramă Hasse, că submulțimea $M := \{a, b, c, d\}$ este o **sublatice** a lui L, pentru că este închisă la infimumurile și supremumurile perechilor de elemente ale ei.

Evident, M este o **latice mărginită**, cu primul element a și ultimul element d.

Dar $0, 1 \notin M$ (primul și ultimul element din L nu aparțin lui M), așadar M **nu** este o **sublatice mărginită** a lui L.

Exemple de submulțimi ale lui L care **nu sunt sublatici** ale lui L: $\{b, c\}$ sau $\{0, b, c, 1\}$ etc..

Sublatici și sublatici mărginite

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că:

1. imaginea unui morfism de latici (mărginite) este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
2. mai general: imaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a domeniului său este o sublatice (mărginită) a codomeniului acelui morfism;
3. preimaginea printr–un morfism de latici (mărginite) a unei sublatici (mărginite) a codomeniului său este o sublatice (mărginită) a domeniului acelui morfism.

(Desigur, preimaginea întregului codomeniu este întregul domeniu (pentru orice funcție), deci acest caz particular la punctul (3) este trivial.)

Latici distributive

Propoziție

În orice latice $(L, \vee, \wedge)$*, următoarele două afirmații, numite* legile de distributivitate*, sunt echivalente:*
(d_1) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$*;*
(d_2) *pentru orice* $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*.*

Demonstrație: $(d_1) \Rightarrow (d_2)$: Din (d_1), comutativitatea lui $\wedge$ aplicată de două ori, absorbția, din nou (d_1), asociativitatea lui $\vee$, din nou comutativitatea lui $\wedge$, apoi absorbția, și, în final, încă o dată comutativitatea lui $\wedge$, avem: pentru orice $x, y, z \in L$, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) = (x \wedge (x \vee y)) \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee (z \wedge (x \vee y)) = x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) = (x \vee (z \wedge x)) \vee (z \wedge y) = (x \vee (x \wedge z)) \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y) = x \vee (y \wedge z)$, deci $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$.
$(d_2) \Rightarrow (d_1)$: Prin dualitate, din implicația precedentă.

Definiție

O latice se zice *distributivă* ddacă satisface una (și deci pe amândouă) dintre condițiile (d_1) și (d_2) din propoziția precedentă.

Latici distributive

Remarcă

A se observa că egalitățile din legile de distributivitate **nu** sunt echivalente pentru orice $x, y, z \in L$, ci este necesar ca fiecare dintre aceste egalități să fie satisfăcută **pentru orice** $x, y, z \in L$ pentru a rezulta că și cealaltă este satisfăcută (de asemenea, pentru orice $x, y, z \in L$).

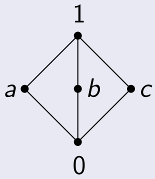
Remarcă

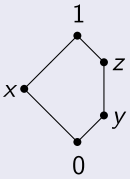
Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap)$ este distributivă. Acest fapt este cunoscut de la seminar: $\cup$ și $\cap$ sunt distributive una față de cealaltă.

Remarcă (temă)

Diamantul și pentagonul nu sunt latici distributive. Acest fapt se poate verifica prin considerarea, în fiecare dintre aceste latici, a celor trei elemente diferite de maximul și minimul laticii respective ca poset, și așezarea lor într–o anumită ordine într–o lege de distributivitate, astfel încât acea lege să nu fie satisfăcută.

(diamantul)





(pentagonul)

Latici distributive

Remarcă

Orice lanț este o latice distributivă.
Într–adevăr, dacă $(L, \leq)$ este un lanț (i. e. o mulțime total ordonată), atunci știm că $(L, \leq)$ este o latice în care, pentru orice $x, y \in L$,
$x \wedge y = \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}$ și $x \vee y = \sup\{x, y\} = \max\{x, y\}$.
Atunci, considerând trei elemente arbitrare $x, y, z \in L$, faptul că $(L, \leq)$ este lanț ne asigură de existența unei ordonări între aceste elemente, de exemplu $x \leq y \leq z$; în acest caz, din definițiile lui $\vee$ and $\wedge$ de mai sus ($\vee = \max$ și $\wedge = \min$), obținem: $x \wedge (y \vee z) = x \wedge z = x = x \vee x = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Celelalte cazuri, privind alte ordonări posibile între x, y and z, se tratează similar, și, din analiza tuturor acestor cazuri, rezultă că laticea $(L, \leq)$ este distributivă.

Remarcă

Remarca anterioară arată că, de exemplu, $\mathcal{L}_n$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat), $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ sunt latici distributive.

Am dat mai sus un exemplu de latice distributivă care nu este lanț: după cum știm dintr–un curs anterior, $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq)$ nu este lanț dacă mulțimea T are cardinalul mai mare sau egal cu 2.

Rezultatul următor pune în evidență un alt exemplu de latice distributivă care nu este lanț.

Corolar

$(\mathbb{N}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |)$ *este o latice distributivă.*

Demonstrație: Acest fapt rezultă din distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \leq)$.
Într–adevăr, dacă notăm cu $\mathcal{P}$ mulțimea numerelor prime naturale, observăm că fiecare număr natural nenul n se scrie sub forma: $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{e_p(n)}$, unde $e_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid p^k | n\} \in \mathbb{N}$ pentru fiecare $p \in \mathcal{P}$, iar produsul anterior este finit, i. e. familia $(e_p(n))_{p \in \mathcal{P}}$ este *de suport finit*, adică doar un număr finit de elemente din această familie sunt nenule.
Se mai observă că, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$,
$\mathrm{cmmmc}\{m, n\} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{e_p(m), e_p(n)\}}$ și
$\mathrm{cmmdc}\{m, n\} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(m), e_p(n)\}}$.

Latici distributive

Distributivitatea lanțului $(\mathbb{N}, \max, \min, \leq)$ ne asigură de faptul că, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ și orice $p \in \mathcal{P}$, $\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\} = \max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}$, de unde rezultă că: $\displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{e_p(x), \max\{e_p(y), e_p(z)\}\}} =$

$\displaystyle\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\min\{e_p(x), e_p(y)\}, \min\{e_p(x), e_p(z)\}\}}$, adică:

$\mathrm{cmmdc}\{x, \mathrm{cmmmc}\{y, z\}\} = \mathrm{cmmmc}\{\mathrm{cmmdc}\{x, y\}, \mathrm{cmmdc}\{x, z\}\}$, iar această egalitate este exact prima lege de distributivitate aplicată numerelor naturale nenule x, y, z.

(Dacă nu sunteți obișnuiți cu acest gen de scriere, puteți efectua produsele de mai sus numai după numerele naturale prime p care divid măcar unul dintre numerele naturale nenule x, y, z.)

A rămas de demonstrat faptul că, atunci când numărul 0 apare în prima lege de distributivitate, egalitatea obținută este satisfăcută, fapt ce poate fi arătat foarte ușor, ținând seama de identitățile: $\mathrm{cmmmc}\{0, n\} = 0$ și $\mathrm{cmmdc}\{0, n\} = n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$ (inclusiv pentru $n = 0$).

Latici distributive

Remarcă

Este evident că orice sublatice a unei latici distributive este distributivă.

Remarcă (temă)

Imaginea oricărei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă.

Propoziție (caracterizare a laticilor distributive)

O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

Notă

Demonstrația propoziției anterioare se găsește în *Curs de bazele informaticii. Latici și algebre booleene*, de Sergiu Rudeanu, precum și în cele două cărți de D. Bușneag și D. Piciu din bibliografia din primul curs.
Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

Complementul unui element într–o latice mărginită

Definiție

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ latice mărginită.
Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$ a. î. $x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0$.
Un astfel de element y se numește *complement al lui* x.
O latice mărginită se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.

Remarcă

În mod evident, dacă $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ este o latice mărginită și $x, y \in L$ sunt a. î. y este un complement al lui x, atunci x este un complement al lui y, după cum arată comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$.

Remarcă

Este imediat faptul că, în orice latice mărginită $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente, pentru că, dacă $a \in L$ este un complement al lui 0, atunci $a = a \vee 0 = 1$, iar, dacă $b \in L$ este un complement al lui 1, atunci $b = b \wedge 1 = 0$.

Remarcă

În orice latice distributivă mărginită, complementul unui element, dacă există, este unic.

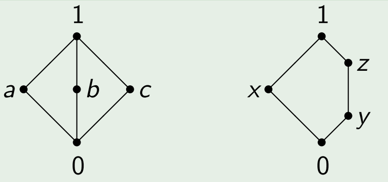
Într–adevăr, fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită și $x, a, b \in L$ a. î. a și b sunt complemente ale lui x, adică:

$$\begin{cases} x \vee a = 1 \\ x \wedge a = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x \vee b = 1 \\ x \wedge b = 0 \end{cases}$$

Atunci, conform relațiilor de mai sus (care dau definiția unui complement), distributivității lui L și commutativității lui $\wedge$,
$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee b) = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (a \wedge b) = 0 \vee (a \wedge b) = a \wedge b$, deci $a = a \wedge b$, ceea ce înseamnă că $a \leq b$ (a se vedea teorema privind echivalența celor două definiții ale noțiunii de latice).
Interschimbând a și b în șirul de egalități de mai sus, obținem $b = b \wedge a$, deci $b \leq a$.
Prin urmare $a = b$, conform antisimetriei relației de ordine $\leq$.

Unicitatea complementului în latici distributive mărginite

Exemplu



diamantul *pentagonul*

Aceste două latici mărginite nu sunt distributive, iar acest fapt poate fi demonstrat și prin intermediul remarcii anterioare.
Într–adevăr, în diamant, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente ale celui de–al treilea.
Iar, în pentagon, y și z sunt complemente ale lui x.
Deci aceste două latici mărginite nu satisfac proprietatea de unicitate a complementului, așadar nu sunt distributive, conform remarcii de mai sus.

Latici complete

Definiție

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ și $\sup(A)$ în posetul $(L, \leq)$.

Pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ se mai notează cu $\displaystyle\bigwedge_{x \in A} x$, iar $\sup(A)$ se mai notează cu $\displaystyle\bigvee_{x \in A} x$.

Exemplu

- Pentru orice mulțime T, laticea $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \emptyset, T)$ este mărginită, distributivă și completă.
- Considerând $0, 1 \in \mathbb{R}$ și ordinea naturală $\leq$ pe $\mathbb{R}$ (desigur, restricționată la mulțimea suport a fiecăreia dintre cele două latici de mai jos), avem:
  1. laticea $([0,1] \cap \mathbb{Q}, \max, \min, \leq, 0, 1)$ este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ $\inf\{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}/2\}$);
  2. laticea $((0,1), \max, \min, \leq)$ nu este mărginită, este distributivă (fiind lanț, i. e. mulțime total ordonată) și nu este completă (de exemplu, nu există în $(0,1)$ $\inf\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, sau $\inf((0,1))$, sau $\sup((0,1))$).

Latici complete

Remarcă

- Orice latice completă $(L, \leq)$ este nevidă și mărginită, pentru că există $\inf(L) \in L$ și $\sup(L) \in L$, deci acestea sunt respectiv $\min(L) = 0$ și $\max(L) = 1$, cu notația clasică pentru primul și ultimul element al unei latici.
- Orice latice finită și nevidă este completă, pentru că, după cum am demonstrat într–un curs anterior, orice latice nevidă conține infimumurile și supremumurile tuturor submulțimilor sale finite și nevide și, în plus, orice latice finită și nevidă are prim și ultim element, iar acestea sunt, respectiv, supremumul și infimumul mulțimii vide (a se revedea cursurile anterioare).
- O latice $(L, \leq)$ este completă ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$, ddacă, pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$. Aceste echivalențe rezultă din următorul fapt, cunoscut din cursul anterior: în orice poset $(L, \leq)$, următoarele afirmații sunt echivalente:
  1. pentru orice $A \subseteq L$, $\inf(A)$ există în $(L, \leq)$;
  2. pentru orice $A \subseteq L$, $\sup(A)$ există în $(L, \leq)$.