Calcul Numeric – Tema #4

Ex. 1 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se afle manual factorizarea QR prin metoda Givens. Să se rezolve sistemul $Ax = b$, unde $b = (1, 2, 5)^T$.

Ex. 2 Să se implementeze algoritmul Metoda Givens şi să se apeleze pentru datele de la Ex. 1.

Ex. 3 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze conform definiţiei valorile proprii ale matricei A.

Ex. 4 Să se implementeze în Matlab Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii şi să se aplice pentru matricea de la Ex.3 şi $\varepsilon = 10^{-4}$.

Ex. 5 Să se demonstreze că $det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$, unde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Indicaţie: Se vor folosi relaţiile lui Viète pentru polinomul caracteristic $P_n(\lambda) = det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_0$ şi se va ţine cont că $P_n(0) = det(A)$.

Ex. 6 Să se demonstreze că dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este nesingulară, atunci matricea $A^T A$ este pozitiv definită. Indicaţie: Se va folosi definiţia unei matrice pozitiv definite.

Ex. 7 Fie λ valoare proprie pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $x \neq 0_n$ un vector propriu asocoat valorii proprii λ. Să se arate că:

a) λ este valoare proprie şi pentru A^T;

b) λ^k este valoare proprie a matricei A^k cu vectorul propriu x.

c) Dacă A este nesingulară, atunci $\dfrac{1}{\lambda}$ este valoare proprie a matricei A^{-1} cu vectorul propriu x.