CURSUL 1: MULŢIMI

G. MINCU

1. Mulţimi

Noţiunea de mulţime este una primară în matematică.

De obicei, folosim termenul de „mulţime” pentru a desemna o entitate pe care considerăm că o constituie anumite obiecte[1]. Acestea din urmă se numesc **elementele** mulţimii.

Vom nota faptul că obiectul x este element al mulţimii M prin $x \in M$.

Vom considera că **două mulţimi sunt egale dacă şi numai dacă au aceleaşi elemente**.

Cea mai naturală metodă de a reprezenta o mulţime este de a enumera efectiv elementele acesteia; în mod standard, elementele respective se scriu între acolade, fără repetiţii şi în orice ordine dorim.

Exemplul 1. a) $\{1, 3, -5\}$; $\{-\frac{7}{3}, \pi\}$; {a;b;1, 2(3)}, $\{3, -5, 1\}$, $\{-3, 5, 1\}$, etc.
Reamintim aici şi mulţimile „uzuale” de numere:
b) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ - mulţimea numerelor naturale.
c) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ - mulţimea numerelor întregi.

Observaţia 2. $\{1, 3, -5\} = \{3, -5, 1\}$, dar $\{1, 3, -5\} \neq \{-1, 3, 5\}$.

Nu toate mulţimile pot fi reprezentate de maniera sintetică propusă anterior, de cele mai multe ori motivul fiind acela că respectivele mulţimi au „prea multe” elemente pentru a fi posibilă (sau utilă!) o astfel de reprezentare. În astfel de situaţii, apelăm la reprezentarea mulţimilor cu ajutorul unei proprietăţi caracteristice elementelor lor.

[1]fie graţie unor proprietăţi comune ce justifică punerea laolaltă a acestor obiecte, fie pur şi simplu în mod arbitrar/ca exerciţiu intelectual

Exemplul 3. a) $\{a \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}\ a = 2k+1\}$ - mulţimea numerelor naturale impare
b) $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.
c) $\mathbb{R}$ = mulţimea numerelor ce corespund punctelor unei drepte[2] - mulţimea numerelor reale.
d) $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ - mulţimea numerelor complexe.

Observaţia 4. În observaţia anterioară, mulţimea $\mathbb{R}$ nu este prezentată în acord cu ideile pe care le-am introdus. O astfel de reprezentare este posibilă, dar greu de urmărit în acest moment.

Definiţia 5. Spunem că mulţimea A este **inclusă** în mulţimea B dacă orice element al lui A îi aparţine şi lui B. Această situaţie este descrisă şi de exprimarea „A este submulţime a mulţimii B".

Desemnăm situaţia în care mulţimea A este inclusă în mulţimea B prin notaţia $A \subset B$.

Observaţia 6. Dacă $A \subset B$, putem avea $A = B$ sau nu. Dacă nu are loc egalitatea celor două mulţimi, spunem că A **este inclusă strict în** B şi scriem $A \subsetneq B$.

Observaţia 7. Dată fiind o mulţime M şi o proprietate $\mathcal{P}$ care are sens pentru cel puţin unul dintre elementele lui M, admitem că $\{x \in M : x$ are proprietatea $\mathcal{P}\}$ este o submulţime a lui M. Acest lucru conferă legitimitate manierei „analitice" de prezentare a mulţimilor pe care am amintit-o mai sus[3].

Observaţia 8. Mulţimile A şi B sunt egale dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$.

O consecinţă foarte importantă a observaţiei 8 este următoarea:

Observaţia 9. Întotdeauna, egalitatea de mulţimi se demonstrează prin dublă incluziune.

Observaţia 10. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Niciuna dintre aceste incluziuni nu este egalitate.

Definiţia 11. Considerăm că există o mulţime care nu are niciun element. Ea se notează cu $\emptyset$ şi se numeşte **mulţimea vidă**.

---

[2] pe care am fixat originea şi unitatea

[3] Atragem atenţia asupra faptului că, în lipsa unei mulţimi iniţiale M în cadrul căreia să punem problema elementelor cu proprietatea $\mathcal{P}$, nu avem garanţia că acestea constituie o mulţime. Persistenţa în a lucra cu astfel de „mulţimi" poate conduce la paradoxuri.

Observaţia 12. Pentru orice mulţime M avem $\emptyset = \{x \in$M: $x \neq x\}$. Prin urmare, $\emptyset \subset M$.

Se consideră că, dată fiind o mulţime M, submulţimile sale constituie o mulţime.

Definiţia 13. Dată fiind mulţimea M, mulţimea $\{A : A \subset M\}$ se numeşte **mulţimea părţilor lui** M. Vom nota această mulţime cu $\mathcal{P}(M)$.

2. Operaţii cu mulţimi

În fiecare dintre situaţiile care urmează, în lipsa vreunei alte menţiuni, vom considera că există o mulţime „mare” care conţine toate mulţimile în discuţie.

Considerăm mulţimile A şi B.

Definiţia 14. Mulţimea $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ se numeşte **reuniunea** mulţimilor A şi B.

Definiţia 15. Mulţimea $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ se numeşte **intersecţia** mulţimilor A şi B.

Definiţia 16. Dacă $A \cap B = \emptyset$, spunem că mulţimile A şi B sunt **disjuncte**.

Definiţia 17. Mulţimea $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ se numeşte **diferenţa** mulţimilor A şi B.

Definiţia 18. $(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ se numeşte **perechea ordonată** determinată de elementele a şi b.

Observaţia 19. Se consideră că toate perechile ordonate (a, b) cu $a \in A$ şi $b \in B$ constituie o mulţime.

Definiţia 20. $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$ se numeşte **produsul cartezian** al mulţimilor A şi B.

Propoziţia 21. Pentru orice mulţimi A, B şi C au loc relaţiile:
a) $A \cap B \subset A \subset A \cup B$.
b) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
e) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Exerciţiul 22. Demonstraţi propoziţia 21!

Fie E o mulţime.

Definiţia 23. Pentru $A \subset E$, definim complementara lui A în raport cu E ca fiind mulţimea $E \setminus A$.

Notaţia utilizată pentru complementara lui A în raport cu E este $\complement_E A$. Dacă E este subînţeleasă în context, atunci complementara lui A în raport cu E se mai notează şi $\overline{A}$.

Regulile lui de Morgan: Dacă $A, B \subset E$, atunci:

$$\complement_E(A \cup B) = \left(\complement_E A\right) \cap \left(\complement_E B\right) \quad \text{şi} \quad \complement_E(A \cap B) = \left(\complement_E A\right) \cup \left(\complement_E B\right).$$

Exerciţiul 24. Demonstraţi regulile lui de Morgan!

Definiţia 25. Dacă E este o mulţime înzestrată cu o lege de compoziţie $\circ$, iar $A, B \subset E$, definim $A \circ B = \{a \circ b : a \in A \wedge b \in B\}$.
Dacă $a \in E$, notăm $a \circ E$ (respectiv, $E \circ a$) în loc de $\{a\} \circ E$ (respectiv, de $E \circ \{a\}$).

Exemplul 26. a) $\{1, 2, 3\} + \{10, 20\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 23\}$
b) $\{1, 2, 3\} - \{10, 20\} = \{-19, -18, -17, -9, -8, -7\}$
c) $\{1, 2, 3\} \cdot \{10, 20\} = \{10, 20, 30, 40, 60\}$
d) $2\mathbb{Z}$ = mulţimea numerelor întregi pare.
e) $3\mathbb{Z} + 1$ = mulţimea acelor numere întregi care prin împărţire la 3 dau restul 1.
f) $\{-1, 1\} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{Z}$.

3. Familii de mulţimi

Pentru generalizarea chestiunilor din paragraful precedent, este necesară o modalitate de a gestiona „un număr mare” de mulţimi. Una din cele mai frecvente abordări ale chestiunii este următoarea[4]:

Definiţia 27. Prin **familie de mulţimi indexată după mulţimea** I înţelegem o funcţie definită pe I şi ale cărei valori sunt mulţimi.

Vom nota familia mulţimilor M_i, $i \in I$, cu $(M_i)_{i \in I}$.

O consecinţă imediată a axiomelor teoriei mulţimilor este aceea că putem defini reuniunea oricărei mulţimi de mulţimi. Este legitimă deci:

Definiţia 28. Prin **reuniunea** familiei de mulţimi $(M_i)_{i \in I}$ înţelegem mulţimea $\{x : \exists i \in I \;\; x \in M_i\}$.

[4] Pentru a plasa aceste consideraţii imediat după cele pe care le generalizează, utilizăm aici definiţia noţiunii de funcţie (cursul 2), care nu se bazează pe chestiunile din acest paragraf.

Notaţia pe care o vom folosi pentru reuniunea familiei de mulţimi $(M_i)_{i\in I}$ este $\bigcup\limits_{i\in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, reuniunea familiei menţionate se notează şi $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, reuniunea familiei $(M_i)_{i\in I}$ se notează şi $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ sau $\bigcup\limits_{i\geq 1} M_i$

Definiţia 29. Prin **intersecţia** familiei de mulţimi $(M_i)_{i\in I}$ înţelegem mulţimea $\{x : \forall i \in I \ \ x \in M_i\}$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru intersecţia familiei de mulţimi $(M_i)_{i\in I}$ este $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$. În situaţia în care $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, intersecţia familiei menţionate se notează şi $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i$, iar dacă $I = \mathbb{N}$, intersecţia familiei $(M_i)_{i\in I}$ se notează şi $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ sau $\bigcap\limits_{i\geq 1} M_i$

Afirmaţiile propoziţiei 21 se generalizează astfel:

Propoziţia 30. *Pentru orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ şi pentru orice mulţime B au loc relaţiile*[5]*:*

a') $\forall i \in I \quad \bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset A_i \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

c') Dacă $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, iar mulţimile familiei $(I_j)_{j\in J}$ sunt disjuncte două câte două, atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I_j} A_i\right) \quad \text{şi} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{j\in J}\left(\bigcap_{i\in I_j} A_i\right).$$

d') $B \cap \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \cap A_i)$ şi $B \cup \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \cup A_i)$.

e') $B \times \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \times A_i)$ şi $B \times \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \times A_i)$.

[5] Punctul b) al propoziţiei 21 se generalizează la:
b') Pentru orice funcţie bijectivă $\sigma : I \to I$,
$\bigcup\limits_{i\in I} A_{\sigma(i)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ şi $\bigcap\limits_{i\in I} A_{\sigma(i)} = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Toate consideraţiile anterioare sunt, desigur, valabile şi pentru familii de submulţimi ale unei mulţimi date. În acest context funcţionează următoarea variantă generalizată a regulilor lui de Morgan:

Propoziţia 31. Dată fiind familia $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale mulţimii E, au loc relaţiile:

$$\complement_E\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}\complement_E A_i \quad \text{şi} \quad \complement_E\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}\complement_E A_i$$

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.

[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.