

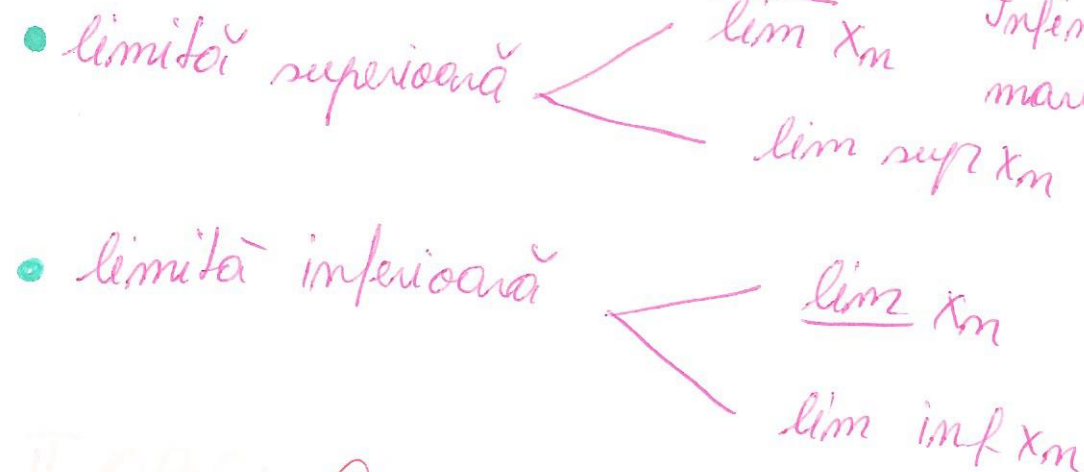
LIMITA SUPERIOARĂ ȘI ÎNFERIOARĂ A UNUI ȘIR

①

Definiție

Supremum: cea mai mică
margine superioară (sup)

Infimum: cea mai mare
margine inferioară (inf)



TEOREM: Dacă $(x_n)_n$ este șir de numere reale mărginit,
atunci $\exists \underline{\lim} x_n$ și $\overline{\lim} x_n$ și sunt unice.

- 1) $\overline{\lim} x_n \geq \underline{\lim} x_n$: Dacă $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n \Rightarrow$ șir convergent
- 2) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$
- 3) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$
- 4) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n)$
- 5) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n)$
- 6) Dacă $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$;
Dacă $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

Aplicatii

(2)

1) Determinați supremum și infimum:

$$a) \sup(\{3, 4, 5\}) = 5$$

$$\inf(\{3, 4, 5\}) = 3$$

$$b) \sup(\{1, 2, 3, 4, \dots\}) = \infty$$

$$\inf(\{0, -1, -2, -3, \dots\}) = -\infty$$

$$c) \sup(\emptyset) = -\infty$$

$$\inf(\emptyset) = \infty$$

2) Determinați limita superioară și limita inferioară pentru:

$$a) a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}; \text{ Scriem câțiva termeni:}$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{7} \dots \right\}$$

$$\underline{\lim} a_n = 0$$

$$\overline{\lim} a_n = 0 \quad \left| \text{serie convergentă} \right.$$

$$b) a_n = n(-1)^n$$

$$\underline{\lim} a_n = \infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$a_n = \infty$$

$$\left\{ -1; 2; -3; 4; -5; 6 \dots \right\}$$

$$\overline{\lim} a_n = -\infty$$

$$n \rightarrow \infty$$

$$c) a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} ? \left\{ 0; 0; 0; 0; 0 \dots \right\}$$

$$\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = 0 \rightarrow \text{serie convergentă}$$