CURSUL 2: FUNCŢII

G. MINCU

1. Funcţii

Definiţia 1. (provizorie!) Numim **funcţie** orice triplet format din două mulţimi şi o „lege de corespondenţă” care asociază ***fiecărui*** element din prima mulţime un ***unic*** element din cea de-a doua.

Definiţia 2. Prima dintre cele două mulţimi care intră în componenţa unei funcţii se numeşte **domeniul** (**de definiţie** al) funcţiei, iar cea de a doua se numeşte **codomeniul** (sau **domeniul de valori** al) funcţiei.

Observaţia 3. Două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă au acelaşi domeniu, acelaşi codomeniu şi aceeaşi lege de corespondenţă.

Notaţia uzuală pentru o funcţie f care are domeniul A şi codomeniul B este $f : A \to B$ (citim „f este definită pe A şi ia valori în B”). Faptul că elementului $a \in A$ îi corespunde prin f elementul $b \in B$ se notează $f(a) = b$.

Definiţia 4. Prin **graficul** unei funcţii $f : A \to B$ înţelegem mulţimea $\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$.

Observaţia 5. Dacă $f : A \to B$, atunci $\Gamma_f \subset A \times B$.

Observaţia 6. Cunoscând graficul unei funcţii, putem identifica domeniul de definiţie al funcţiei, precum şi legea de corespondenţă a acesteia[1]. Din acest motiv, se preferă reformularea definiţiei 1 astfel încât să se evite termenul „lege”, care nu are în situaţia respectivă un înţeles foarte bine precizat:

Definiţia 7. Numim **funcţie** orice triplet format din trei mulţimi A, B, G, $G \subset A \times B$, cu proprietatea: $\forall a \in A\ \exists!\ b \in B\ (a, b) \in G$.

Observaţia 8. O consecinţă a axiomelor din teoria mulţimilor este faptul că, date fiind două mulţimi A şi B, funcţiile definite pe A cu valori în B constituie o mulţime.

[1]Nu însă şi codomeniul; putem însă „vedea” imaginea funcţiei.

Observaţia 9. Dacă mulţimile finite A şi B au a, respectiv b elemente, se arată uşor (temă!) că numărul funcţiilor definite pe A cu valori în B este b^a. Această observaţie ne sugerează utilizarea pentru mulţimea tuturor funcţiilor definite pe A cu valori în B a notaţiei B^A.

2. Clase importante de funcţii

Definiţia 10. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **injectivă** dacă $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.

Observaţia 11. În cuvinte, o funcţie este injectivă dacă duce orice două elemente diferite în elemente diferite.

O caracterizare des utilizată a funcţiilor injective este dată de:

Propoziţia 12. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă $\forall a_1, a_2 \in A \ \ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Exemplul 13. Dacă $A \subset B$, atunci $i : A \to B$, $i(a) = a$ este o funcţie injectivă. Ea se numeşte **injecţia canonică** a lui A în B.

Definiţia 14. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **surjectivă** dacă $\forall b \in B$ $\exists a \in A \ f(a) = b$.

Observaţia 15. În cuvinte, o funcţie este surjectivă dacă „îşi umple codomeniul".

Exemplul 16. $\pi_A : A \times B \to A$, $\pi_A(a, b) = a$ şi $\pi_B : A \times B \to A$, $\pi_B(a, b) = b$ sunt funcţii surjective (ele se numesc **proiecţiile canonice** ale produsului cartezian $A \times B$).

Definiţia 17. O funcţie injectivă şi surjectivă se numeşte **bijectivă**.

Exemplul 18. Dată fiind o mulţime A, funcţia $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\mathrm{id}_A(a) = a$ este o funcţie bijectivă. Ea se numeşte **funcţia identică a mulţimii A**.

Definiţia 19. O mulţime A se numeşte **infinită** dacă există $f \in A^A$ injectivă, dar nesurjectivă. Mulţimea A se numeşte **finită** dacă nu este infinită.

Propoziţia 20. Fie A o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) A este finită.
b) Există un număr $n \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie bijectivă $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.

3. FUNCŢIA CARACTERISTICĂ A UNEI SUBMULŢIMI

Definiţia 21. Fie E o mulţime şi $A \subset E$. Funcţia

$$\chi_A : E \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

se numeşte **funcţia caracteristică**[2] **a lui** A **în** E.

Teorema 22. Fie E o mulţime. Funcţia $\chi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$, $\chi(A) = \chi_A$ este bijectivă.

Funcţiile caracteristice ale submulţimilor au proprietăţi calculatorii interesante care, laolaltă cu teorema 22, le conferă o largă aplicabilitate:

Propoziţia 23. Fie E o mulţime şi A, B submulţimi ale sale. Au loc relaţiile:
a) $\chi_E = 1$; $\chi_\emptyset = 0$.
b) $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A\chi_B$.
c) $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$.
d) $\chi_{\complement_E A} = 1 - \chi_A$.

4. „TRANSPORTUL" SUBMULŢIMILOR PRIN FUNCŢII

Definiţia 24. Dacă $f : A \to B$ şi $C \subset A$, notăm $f(C)$ şi numim **imaginea submulţimii** C **prin funcţia** f mulţimea

$$\{b \in B : \exists c \in C \ f(c) = b\}.$$

Definiţia 25. Prin **imaginea** funcţiei $f : A \to B$ înţelegem mulţimea $f(A)$.

Notaţia folosită în mod uzual pentru imaginea funcţiei f este $\mathrm{Im} f$.

Definiţia 26. Dacă $f : A \to B$ şi $D \subset B$, notăm $f^{-1}(D)$ şi numim **preimaginea**[3] **submulţimii** D **prin funcţia** f mulţimea $\{a \in A : f(a) \in D\}$.

Observaţia 27. Notaţia din definiţia 26 se utilizează şi în situaţia în care funcţia f nu este inversabilă!

Propoziţia 28. Considerăm funcţia $f : A \to B$. Atunci:
a) Dacă $M \subset N \subset A$, atunci $f(M) \subset f(N)$.
b) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$.
c) Dacă $M, N \subset A$, atunci $f(M \cap N) \subset f(M) \cap f(N)$.
d) Dacă $P \subset Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P) \subset f^{-1}(Q)$.

---

[2] Uneori, cu precădere în teoria probabilităţilor, se mai foloseşte pentru funcţia prezentată denumirea de **funcţia indicator a submulţimii** A **a lui** E

[3] sau **imaginea inversă**, sau încă **imaginea reciprocă**

e) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cup Q) = f^{-1}(P) \cup f^{-1}(Q)$.
f) Dacă $P, Q \subset B$, atunci $f^{-1}(P \cap Q) = f^{-1}(P) \cap f^{-1}(Q)$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 28!

Temă: Generalizaţi afirmaţiile din propoziţia 28 la situaţia unei familii arbitrare de submulţimi!

Observaţia 29. Observăm că în cazul relaţiilor din propoziţia 28 imagi-nea inversă „se poartă mai bine” decât imaginea directă. Aparenta „anomalie” de la punctul c) dispare pentru funcţiile injective:

Propoziţia 30. Funcţia $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă

$$\forall M, N \subset A \quad f(M \cap N) = f(M) \cap f(N).$$

5. COMPUNEREA FUNCŢIILOR

Definiţia 31. Date fiind funcţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ cu[4] $B \subset C$, definim funcţia $g \circ f : A \to D$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. Funcţia $g \circ f$ se numeşte **compusa lui** g **cu** f.

O situaţie importantă din punctul de vedere al compunerii funcţiilor este prezentată în

Exemplul 32. Dată fiind o funcţie arbitrară $f : A \to B$, $\mathrm{id}_B \circ f = f$ şi $f \circ \mathrm{id}_A = f$.

Propoziţia 33. Fie funcţiile $f : A \to B$, $g : C \to D$ şi $h : E \to F$, unde $B \subset C$ şi $D \subset E$. Atunci[5] $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Propoziţia 34. Fie funcţiile $f : A \to B$ şi $g : C \to D$, unde $B \subset C$. Atunci:
a) Dacă f şi g sunt injective, atunci $g \circ f$ este injectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este injectivă, atunci f este injectivă.
c) Dacă f şi g sunt surjective, atunci $g \circ f$ este surjectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este surjectivă, atunci g este surjectivă.
e) Dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este bijectivă.
b) Dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă, iar g este surjectivă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 34!

---

[4] în caz de necesitate, se poate impune doar condiţia mai slabă $\mathrm{Im} f \subset C$

[5] Anticipând discuţia referitoare la legi de compoziţie, această relaţie arată că, dată fiind o mulţime M, compunerea funcţiilor este o operaţie asociativă pe M^M.

6. Inversarea funcţiilor

Definiţia 35. (provizorie!) Prin **inversă a funcţiei** $f : A \to B$ înţelegem orice funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = \mathrm{id}_A$ şi $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definiţia 36. Funcţia $f : A \to B$ se numeşte **inversabilă** dacă ea admite (cel puţin o) inversă.

Propoziţia 37. Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, atunci ea admite o unică inversă

Demonstraţie: Presupunem că f este inversabilă şi că g şi h sunt inverse ale sale. Atunci,

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_A \circ h = h. \quad \square$$

Definiţia 38. Dacă funcţia $f : A \to B$ este inversabilă, atunci prin **inversa** lui f înţelegem unica (conform propoziţiei 37) funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = \mathrm{id}_A$ şi $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notaţia pe care o vom folosi pentru a desemna inversa funcţiei inversabile f este f^{-1}.

Observaţia 39. Dacă $f : A \to B$ este inversabilă, iar $D \subset B$, atunci, în acord cu definiţia 26, notaţia $f^{-1}(D)$ ar desemna atât preimaginea lui D prin f, cât şi imaginea lui D prin f^{-1}. Întrucât aceste două mulţimi coincid, utilizarea aceleiaşi notaţii nu prezintă inadvertenţe.

Teorema 40. O funcţie este inversabilă dacă şi numai dacă ea este bijectivă.

7. Produsul cartezian al unei familii de mulţimi

Observaţia 41. Perechea ordonată $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ poate fi interpretată ca fiind o reprezentare a funcţiei $a : \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$, $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$. Evident, $a(1) \in A_1$ şi $a(2) \in A_2$. Aceste consideraţii ne sugerează:

Definiţia 42. Dată fiind familia de mulţimi $(A_i)_{i \in I}$, definim produsul său cartezian ca fiind mulţimea $\{a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i : \forall i \in I \ \ a(i) \in A_i\}$[6,7]

[6]Axiomele teoriei mulţimilor au drept consecinţă faptul că aceasta este într-adevăr o mulţime.

[7]Una dintre axiomele teoriei mulţimilor (aşa-numita „axiomă a alegerii") afirmă că dacă toate mulţimile familiei date sunt nevide, atunci produsul cartezian al familiei este nevid.

Vom nota produsul cartezian al familiei de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ cu $\prod\limits_{i\in I} A_i$, iar elementul $a \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ cu $(a(i))_{i\in I}$ sau, mai frecvent, cu $(a_i)_{i\in I}$.

Definiţia 43. Pentru $j \in I$, funcţia $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} A_i \to A_j$, $\pi_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$ se numeşte **proiecţia canonică** a produsului $\prod\limits_{i\in I} A_i$ pe componenta j.

Observaţia 44. Proiecţiile canonice ale produsului cartezian sunt surjective.

Observaţia 45. Dacă avem familia de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$ cu proprietatea $A_i = A$ pentru orice $i \in I$, atunci, conform definiţiei 42, produsul cartezian $\prod\limits_{i\in I} A_i$ constă exact în funcţiile definite pe I şi care iau valori în A. Deci, în acest caz avem $\prod\limits_{i\in I} A_i = A^I$. Dacă în situaţia prezentată avem $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, vom folosi în loc de A^I notaţia A^n.

Observaţia 46. Conform observaţiei anterioare,

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.