Tema 2

Soluții

Exercițiul 1

Se poate observa cu ușurință că variabila aleatoare $3X+7 \in \{4,7,10\}$ cu probabilitățile 0.3, 0.2 respectiv 0.5, de unde deducem că $3X+7$ este repartizată

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Pentru variabila aleatoare X^2 observăm că $X^2 \in \{0,1\}$ iar $\mathbb{P}(X^2=0)=0.2$ și $\mathbb{P}(X^2=1)=\mathbb{P}(X=-1)+\mathbb{P}(X=1)=0.8$, astfel

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

În mod similar obținem:

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X+X^2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

De asemenea avem că

$$\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = 0.7,$$

iar

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right)}{\mathbb{P}\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

Exercițiul 2

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ de unde obţinem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată şi avem că $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_2}{p_1}\cdots\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$ de unde $p_n = p_0\frac{\lambda^n}{n!}$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ obţinem că $p_0 = e^{-\lambda}$ şi putem să concluzionăm.

b) i) Ştim că $\mathbb{P}(X=j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ şi vrem să evaluăm raportul $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=j) &\geq \mathbb{P}(X=j-1), \quad \text{dacă } \lambda \geq j \\ \mathbb{P}(X=j) &< \mathbb{P}(X=j-1), \quad \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că $j=[\lambda]$ este punctul maxim şi $\mathbb{P}(X=[\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ este valoarea maximă.

ii) După cum am văzut la punctul precedent avem $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru $\lambda = j$.

Exercițiul 3

a) Fie L durata unui meci (numărul de partide jucate până la câștig). Dacă Fischer câștigă un meci care constă din L partide atunci primele $L-1$ partide au fost remiză. Astfel obținem că probabilitatea ca Fischer să câștige este

$$\mathbb{P}(\text{Fischer câștigă}) = \sum_{l=1}^{10} \mathbb{P}(L=l) = \sum_{l=1}^{10} 0.3^{l-1} \times 0.4 = 0.571425.$$

b) Meciul are durata L cu $L < 10$ dacă și numai dacă au loc $L-1$ remize urmate de un câștig de către oricare dintre cei doi jucători. Jocul are lungimea 10 dacă și numai dacă au avut loc 9 remize. Probabilitatea ca unul din cei doi jucători să câștige o partidă este de 0.7 $(0.4 + 0.3)$. Obținem astfel

$$\mathbb{P}(L=l) = \begin{cases} 0.3^{l-1} \times 0.7, & l = 1 \dots 9 \\ 0.3^9, & l = 10 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Exercițiul 4

Pentru calculul mediei folosim definiția și obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)} \left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right] = -\frac{1-p}{p\log(p)}.\end{aligned}$$

Pentru calculul momentului de ordin 2 avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)}(1-p) \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^k\right)' = -\frac{1}{\log(p)} \frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2\log(p)}.\end{aligned}$$

Cum $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ decucem că

$$Var[X] = -\frac{1-p}{p^2\log(p)} - \left(\frac{1-p}{p\log(p)}\right)^2 = \frac{(1-p)(1-p+\log(p))}{-p^2\log^2(p)}.$$

Exercițiul 5

Din ipoteză deducem că funcția de masă a variabilei aleatoare X este

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & \text{dacă } x = 2^k,\ a \leq k \leq b,\ k \text{ întreg} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

prin urmare

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} 2^k = \frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}.$$

În mod similar avem momentul de ordin 2

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} (2^k)^2 = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)}$$

de unde varianța este

$$Var[X] = \frac{4^{b+1} - 4^a}{3(b-a+1)} - \left(\frac{2^{b+1} - 2^a}{b-a+1}\right)^2.$$

Pentru momentul de ordin 3 avem

$$\mathbb{E}[X^3] = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} (2^k)^3 = \frac{8^{b+1} - 8^a}{7(b-a+1)}.$$

Exercițiul 6

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caştigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii răman $N - X$, deci caştigul devine $G = aX - b(N - X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N \\ aX - b(N - X) & \text{dacă } X < N \end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1} [ax - b(N - x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G] &= aN \sum_{x=N}^{n} \frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N} \frac{(a+b)x - bN}{n+1} \\ &= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1} \\ &= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exercițiul 7

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7-X)$ observăm că $Y \in \{6,10,12\}$ cu $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6+10+12) = \frac{28}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36+100+144) = \frac{280}{3}\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6,10,12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6,10,12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$