Curs 2

Cuprins

Logica propozițională PL (recap.)

Logica propozițională PL

- O propoziție este un enunț care poate fi adevărat (1) sau fals (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Logica propozițională PL

- O propoziție este un enunț care poate fi adevărat (1) sau fals (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead}) \rightarrow (\texttt{sansa} \vee \texttt{arya} \vee \texttt{bran})$$

Logica propozițională PL

- O propoziție este un enunț care poate fi adevărat (1) sau fals (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead}) \rightarrow (\texttt{sansa} \vee \texttt{arya} \vee \texttt{bran})$$

Cine este $\neg\varphi$?

Logica propozițională PL

- O propoziție este un enunț care poate fi adevărat (1) sau fals (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead}) \rightarrow (\texttt{sansa} \vee \texttt{arya} \vee \texttt{bran})$$

Cine este $\neg\varphi$? Propoziția $\neg\varphi$ este:

$$\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead} \wedge \neg\texttt{sansa} \wedge \neg\texttt{arya} \wedge \neg\texttt{bran}$$

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)

- Formulele PL

$$
\begin{array}{lll}
var & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
form & ::= & var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\
 & & \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form
\end{array}
$$

Limbajul și formulele PL

Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
- conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)

Formulele PL

$$
\begin{array}{lcl}
var & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
form & ::= & var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\
 & & \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form
\end{array}
$$

Exemplu

- Nu sunt formule: $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$
- Sunt formule: $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)
- Formulele PL

$$
\begin{array}{lcl}
var & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
form & ::= & var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\
 & & \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form
\end{array}
$$

Exemplu

- Nu sunt formule: $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$
- Sunt formule: $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$

- Notăm cu *Form* mulțimea formulelor.

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)

- Formulele PL

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{var} & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
\mathit{form} & ::= & \mathit{var} \mid (\neg \mathit{form}) \mid \mathit{form} \wedge \mathit{form} \mid \mathit{form} \vee \mathit{form} \\
 & & \mid \mathit{form} \rightarrow \mathit{form} \mid \mathit{form} \leftrightarrow \mathit{form}
\end{array}
$$

- Conectorii sunt împărțiți în conectori de bază și conectori derivați (în funcție de formalism).

- Legături între conectori:

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi \vee \psi & := & \neg\varphi \rightarrow \psi \\
\varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa

- Semantica

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa
  - noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
  - notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
  - notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ
- Semantica

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa
  - noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
  - notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
  - notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ
- Semantica
  - noțiuni semantice: adevăr, model, tautologie (formulă universal adevărată)
  - notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este tautologie
  - notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că formula φ este adevărată atunci când toate formulele din mulțimea Γ sunt adevărate

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

`If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.`

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

`If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.`

O posibilă formalizare este următoarea:

p = `winter is coming`
q = `Ned is alive`
r = `Robb is lord of Winterfel`

Logica propozițională

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

`If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell.  Winter is coming.  Rob is not lord of Winterfell.  Then Ned is alive.`

O posibilă formalizare este următoarea:

p = `winter is coming`
q = `Ned is alive`
r = `Robb is lord of Winterfel`

$\{(p \land \neg q) \to r, p, \neg r\} \models q$

Semantica PL

- Mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$ pe care considerăm următoarele operații:

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$x \vee y := max\{x, y\}$ $\qquad$ $x \wedge y := min\{x, y\}$

Semantica PL

- o funcție $e : Var \to \{0, 1\}$ se numește evaluare (interpretare)
- pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ există o unică funcție $e^+ : Form \to \{0, 1\}$ care verifică următoarele proprietăți:
  - $e^+(v) = e(v)$
  - $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$
  - $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$

  oricare ar fi $v \in Var$ și φ, $\psi \in Form$.

Semantica PL

- o funcție $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ se numește evaluare (interpretare)
- pentru orice evaluare $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție $e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$ care verifică următoarele proprietăți:
  - $e^+(v) = e(v)$
  - $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$
  - $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$

  oricare ar fi $v \in Var$ și φ, $\psi \in Form$.

Exemplu

Dacă $e(p) = 0$ și $e(q) = 1$ atunci

$$e^+(p \vee (p \rightarrow q)) = e^+(p) \vee e^+(p \rightarrow q) = e(p) \vee (e(p) \rightarrow e(q)) = 1$$

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ este model al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este model al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ este model al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este model al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.

- O formulă φ este satisfiabilă dacă are un model. O mulțime Γ de formule este satisfiabilă dacă are un model.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ este model al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este model al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.

- O formulă φ este satisfiabilă dacă are un model. O mulțime Γ de formule este satisfiabilă dacă are un model.

- O formulă φ este tautologie (validă, universal adevarată) dacă $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$.
  Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ este model al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este model al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.

- O formulă φ este satisfiabilă dacă are un model. O mulțime Γ de formule este satisfiabilă dacă are un model.

- O formulă φ este tautologie (validă, universal adevarată) dacă $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$.
  Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.

- O formulă φ este Γ−tautologie (consecință semantică a lui Γ) dacă orice model al lui Γ este și model pentru φ, i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$.
  Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că φ este o Γ-tautologie.

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ.
- Cele 2^n evaluări posibile $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ.
- Cele 2^n evaluări posibile $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$e_1^+(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$e_2^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$e_{2^n}^+(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel!

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ.
- Cele 2^n evaluări posibile $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$e_1^+(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$e_2^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$e_{2^n}^+(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel!

- $\models \varphi$ dacă și numai dacă $e_1^+(\varphi) = \cdots = e_{2^n}^+(\varphi) = 1$

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conțin n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional, încât este irealizabilă. (Timp exponențial)

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.

- În cazul în care formula conțin n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional, încât este irealizabilă. (Timp exponențial)

Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.

- În cazul în care formula conțin n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional, încât este irealizabilă. (Timp exponențial)

- Problemă deschisă de un milion de dolari:

  Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

  Echivalent, este adevărată $P = NP$?
  (Institutul de Matematica Clay – Millennium Prize Problems)

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conțin n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional, încât este irealizabilă. (Timp exponențial)
- Problemă deschisă de un milion de dolari:

  Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

  Echivalent, este adevărată $P = NP$?
  (Institutul de Matematica Clay – Millennium Prize Problems)
- SAT este problema satisfiabilității în calculul propozițional clasic. SAT-solverele sunt bazate pe metode sintactice.

Sintaxa PL

Sisteme deductive pentru calculul propozițional clasic:

- Sistemul Hilbert
- Rezoluție
- Deducția naturală
- Sistemul Gentzen

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi φ, ψ, $\chi \in$ *Form* următoarele formule sunt axiome:

  (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}\,\mathbf{MP}$

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi φ, ψ, $\chi \in$ *Form* următoarele formule sunt axiome:

  (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$ **MP**

- O demonstrație pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
  - γ_i este axiomă,
  - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \to \gamma_i$

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi φ, ψ, $\chi \in$ *Form* următoarele formule sunt axiome:

  (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$ MP

- O demonstrație pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
  - γ_i este axiomă,
  - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \to \gamma_i$

- O formulă φ este teoremă dacă are o demonstrație. Notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă.

Sistemul Hilbert

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O demonstrație din ipotezele Γ (sau Γ-demonstrație) pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
  - γ_i este axiomă,
  - $\gamma_i \in \Gamma$
  - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \rightarrow \gamma_i$
- O formulă φ este Γ-teoremă dacă are o Γ-demonstrație. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este o Γ-teoremă

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathit{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)

(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)

(2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)

(3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
(6) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ TD

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
(6) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ TD
(7) $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ TD

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
(6) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ TD
(7) $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ TD
(8) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ TD

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi φ, ψ, $\chi \in$ *Form* următoarele formule sunt axiome:

  (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \;\; \varphi \to \psi}{\psi}$ **MP**

Teorema de completitudine

Γ-teoremele și Γ-tautologiile coincid, i.e.

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \models \varphi$$

oricare are fi $\Gamma \cup \{\varphi\} \in$ *Form*.
În particular, $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$.

($\Rightarrow$) Corectitudine
($\Leftarrow$) Completitudine

Reguli de deducție pentru PL

O regula de deducție are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce concluzia $\Gamma \vdash \varphi$ din premisele $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$, ..., $\Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Reguli de deducție pentru PL

O regula de deducție are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce concluzia $\Gamma \vdash \varphi$ din premisele $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$, ..., $\Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Exemplu

Folosind teorema deducției se demonstrează regula:

$$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Deducția naturală DN

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.

- Numim secvent o expresie de forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

Formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premise, iar ψ se numește concluzie.

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.
- Numim secvent o expresie de forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

  Formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premise, iar ψ se numește concluzie.
- Un secvent este valid dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.
- Numim secvent o expresie de forma
$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$
Formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premise, iar ψ se numește concluzie.
- Un secvent este valid dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.
- O teoremă este o formulă ψ astfel încât $\vdash \psi$
(adică ψ poate fi demonstrată din mulțimea vidă de ipoteze).

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.
- Numim secvent o expresie de forma
$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$
Formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premise, iar ψ se numește concluzie.
- Un secvent este valid dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.
- O teoremă este o formulă ψ astfel încât $\vdash \psi$ (adică ψ poate fi demonstrată din mulțimea vidă de ipoteze).
- Pentru fiecare conector logic vom avea reguli de introducere și reguli de eliminare.

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Regulile pentru conjuncție

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \wedge \psi$ revine la a demonstra φ și ψ. Obținem astfel regula

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

Eticheta $(\wedge i)$ înseamnă $\wedge$-introducere deoarece $\wedge$ este introdus în concluzie.

Regulile pentru conjuncție

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \wedge \psi$ revine la a demonstra φ și ψ. Obținem astfel regula

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

  Eticheta $(\wedge i)$ înseamnă $\wedge$-introducere deoarece $\wedge$ este introdus în concluzie.

- Regulile pentru $\wedge$- eliminare sunt:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un arbore

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,(\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\,(\wedge i)$$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un arbore

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\ (\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\ (\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un mod liniar astfel:

1	$p \wedge q$	*premisa*
2	r	*premisa*

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un arbore

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,(\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\,(\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un mod liniar astfel:

1	$p \wedge q$	*premisa*
2	r	*premisa*
3	q	$(\wedge e_2)$,1

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un arbore

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,(\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\,(\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un mod liniar astfel:

1	$p \wedge q$	*premisa*
2	r	*premisa*
3	q	$(\wedge e_2)$,1
4	$q \wedge r$	$(\wedge i)$,3,2

Regulile pentru dubla negație

- Regulile ¬¬-introducere și ¬¬-eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

Regulile pentru dubla negație

- Regulile $\neg\neg$-introducere și $\neg\neg$-eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secventul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

Regulile pentru dubla negație

- Regulile $\neg\neg$-introducere și $\neg\neg$-eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secventul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

1	$\neg\neg(q \wedge r)$	*premisa*
2	$q \wedge r$	$(\neg\neg ei)$,1
3	r	$(\wedge e_2)$,2

Regulile pentru dubla negație

- Regulile $\neg\neg$-introducere și $\neg\neg$-eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secventul $\neg\neg(q \land r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

1	$\neg\neg(q \land r)$	*premisa*
2	$q \land r$	$(\neg\neg ei)$,1
3	r	$(\land e_2)$,2
4	$\neg\neg r$	$(\neg\neg i)$,3

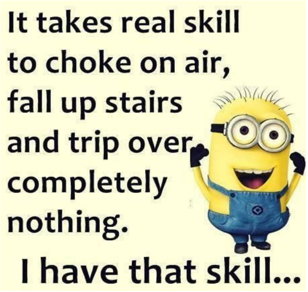
Regulile pentru implicație: $\to$-eliminare

- Regula de $\to$-eliminare o stiți deja:

Regulile pentru implicație: $\rightarrow$-eliminare

- Regula de $\rightarrow$-eliminare o stiți deja: este *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ (\rightarrow e)$$



Regulile pentru implicație: $\rightarrow$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ, i.e. presupunem temporar φ și demonstrăm ψ.

Regulile pentru implicație: $\rightarrow$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ, i.e. presupunem temporar φ și demonstrăm ψ.
  Acest lucru se reprezintă astfel:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow i)$$

Regulile pentru implicație: $\rightarrow$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ, i.e. presupunem temporar φ și demonstrăm ψ.
  Acest lucru se reprezintă astfel:

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow i)$$

- Cutia (chenarul) are rostul de a marca scopul ipotezei φ: numai deducțiile din interiorul cutiei pot folosi φ.
- În momentul în care am obținut ψ, închidem cutia și deducem $\varphi \rightarrow \psi$ în afara cutiei.
- O ipoteză nu poate fi folosită în afara scopului său.

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \land q) \to p$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \land q) \to p$

Vom considera $p \land q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{p \land q}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \to p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p} \; (\wedge e_1)}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \to p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p}\ (\wedge e_1)}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p}\ (\wedge e_1)}}{p \wedge q \rightarrow p}\ (\rightarrow i)$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \land q) \to p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \land q$	*ipoteza*

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \to p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \wedge q$	*ipoteza*
2	p	$(\wedge e_1)$,1

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \wedge q$	*ipoteza*
2	p	$(\wedge e_1)$,1
3	$p \wedge q \rightarrow p$	$(\rightarrow i)$,1−2

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to p$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to p$

1	$\boxed{p}$	*ipoteza*
2	$p \to p$	$(\to i)$,1

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4
6	$p \to r$	$(\to i)$,3–5

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4
6	$p \to r$	$(\to i)$,3−5
7	$(q \to r) \to (p \to r)$	$(\to i)$,2−6

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4
6	$p \to r$	$(\to i)$,3–5
7	$(q \to r) \to (p \to r)$	$(\to i)$,2–6
8	$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$	$(\to i)$,1–7

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.
- Linia care urmează după închiderea unei cutii trebuie să conțină concluzia regulii pentru care a fost utilizată cutia.

Regulile ”cutiilor”

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.
- Linia care urmează după închiderea unei cutii trebuie să conțină concluzia regulii pentru care a fost utilizată cutia.
- Într-un punct al unei demonstrații se pot folosi formulele care au apărut anterior, cu excepția celor din interiorul cutiilor închise.

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*
3	p	*copiere* 1

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*
3	p	*copiere* 1
4	$q \to p$	$(\to i)$,2–3

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*
3	p	*copiere* 1
4	$q \to p$	$(\to i)$,2–3
5	$p \to (q \to p)$	$(\to i)$,1–4

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ. În consecință, regulile de $\vee$-introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ. În consecință, regulile de $\vee$-introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \to r \vdash q \to (r \vee p)$ este valid.

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ. În consecință, regulile de $\vee$-introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \to r \vdash q \to (r \vee p)$ este valid.

1	$q \to r$	*premisa*
2	q	*ipoteza*
3	r	$(\to e)$,1,2
4	$r \vee p$	$(\vee i_1)$,3
5	$q \to (r \vee p)$	$(\to i)$,2–4

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-eliminare

- Cum procedăm pentru a demonstra χ știind $\varphi \vee \psi$?
  Trebuie să analizăm două cazuri:
  - presupunem φ și demonstrăm χ
  - presupunem ψ și demonstrăm χ

  Astfel, dacă am demonstrat $\varphi \vee \psi$ putem să deducem χ deoarece cazurile de mai sus acoperă toate situațiile posibile.

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-eliminare

- Cum procedăm pentru a demonstra χ știind $\varphi \vee \psi$?
  Trebuie să analizăm două cazuri:
  - presupunem φ și demonstrăm χ
  - presupunem ψ și demonstrăm χ

  Astfel, dacă am demonstrat $\varphi \vee \psi$ putem să deducem χ deoarece cazurile de mai sus acoperă toate situațiile posibile.

- Regula $\vee$-eliminare reflectă aceast argument:

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots \\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

Regulile pentru disjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \to r \vdash (p \lor q) \to (p \lor r)$ este valid.

1	$q \to r$	*premisa*
2	$p \lor q$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	$p \lor r$	$(\lor i_1)$,3
5	q	*ipoteza*
6	r	$(\to e)$,1,5
7	$p \lor r$	$(\lor i_2)$,6
8	$p \lor r$	$(\lor e)$,2,3−4,5−7
9	$p \lor q \to p \lor r$	$(\to i)$,2−8

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ, formulele $\varphi \land \neg\varphi$ și $\neg\varphi \land \varphi$ se numesc contradicții. O contradicție arbitrară va fi notată $\bot$.

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ, formulele $\varphi \wedge \neg\varphi$ și $\neg\varphi \wedge \varphi$ se numesc contradicții. O contradicție arbitrară va fi notată $\perp$.

- Faptul că dintr-o contradicție se poate deduce orice este reprezentat printr-o regulă specială:

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp e)$$

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ, formulele $\varphi \land \neg\varphi$ și $\neg\varphi \land \varphi$ se numesc contradicții. O contradicție arbitrară va fi notată $\perp$.

- Faptul că dintr-o contradicție se poate deduce orice este reprezentat printr-o regulă specială:

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp e)$$

- Regulile de $\neg$-eliminare și $\neg$-introducere sunt:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\ (\neg e) \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i)$$

Regulile pentru negație

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \to \neg p \vdash \neg p$ este valid.

1	$p \to \neg p$	*premisa*
2	p	*ipoteza*
3	$\neg p$	$(\to e)$,1,2
4	$\bot$	$(\neg e)$,2,3
5	$\neg p$	$(\neg i)$,2–4

Regulile DN

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i)$$

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e) \qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

Reguli derivate

- Următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducției naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \textbf{MT} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \textbf{RAA} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND}$$

Reguli derivate: **TND**

Exemplu

Regula $\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ **TND** este derivată în deducția naturală.

1	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	*ipoteza*
2	φ	*ipoteza*
3	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_1)$,2
4	$\bot$	$(\neg e)$,3,1
5	$\neg\varphi$	$(\neg i)$,2–4
6	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_2)$,5
7	$\bot$	$(\neg e)$,6,1
8	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\neg i)$,1–7
9	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\neg\neg e)$,8

Reguli derivate: **TND**

Exemplu

Regula $\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ **TND** este derivată în deducția naturală.

1	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	*ipoteza*
2	φ	*ipoteza*
3	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_1)$,2
4	$\bot$	$(\neg e)$,3,1
5	$\neg\varphi$	$(\neg i)$,2–4
6	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_2)$,5
7	$\bot$	$(\neg e)$,6,1
8	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\neg i)$,1–7
9	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\neg\neg e)$,8

MT și **RAA** sunt exerciții pentru seminar!

Corectitudinea și completitudinea DN

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid atunci } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid atunci } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid atunci } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Fie k numărul de linii dintr-o demonstrație în forma liniară.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid atunci } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Fie k numărul de linii dintr-o demonstrație în forma liniară. Prin inducție după $k \geq 1$ vom arăta că

oricare ar fi $n \geq 0$ *și* $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, φ *formule, dacă* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ *are o demonstrație de lungime* $k \geq 1$ *atunci* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$,

(orice secvent care are o demonstrație de lungime k este corect).

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Atenție! Facem inducție după lungimea demonstrației, numărul de premise este arbitrar.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Atenție! Facem inducție după lungimea demonstrației, numărul de premise este arbitrar. *Cazul* $k = 1$. În acest caz demonstrația este

1	φ	*premisa*

ceea ce înseamnă că secventul inițial este $\varphi \vdash \varphi$.

Este evident că $\varphi \models \varphi$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Cazul de inducție. Vom presupune că:

oricare ar fi $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, φ, *dacă* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ *are o demonstrație de lungime* $< k$ *atunci* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$

și vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru secvenți cu demonstrații de lungime k.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Cazul de inducție. Vom presupune că:

oricare ar fi $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, φ, *dacă* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ *are o demonstrație de lungime* $< k$ *atunci* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$

și vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru secvenți cu demonstrații de lungime k.

Fie (R) ultima regulă care se aplică în demonstrație, adică

1	φ_1	*premisa*
	$\vdots$	
n	φ_n	*premisa*
	$\vdots$	
k	φ	(R)

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

$$\begin{array}{lll}
1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
n & \varphi_n & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
k_1 & \psi & \\
 & \vdots & \\
k_2 & \chi & \\
 & & \\
k & \psi \wedge \chi & (\wedge i) k_1, k_2
\end{array}$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1	φ_1	*premisa*
	$\vdots$	
n	φ_n	*premisa*
	$\vdots$	
k_1	ψ	
	$\vdots$	
k_2	χ	
k	$\psi \wedge \chi$	$(\wedge i)_{k_1,k_2}$

Se observă că secvențiii
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \chi$
au demonstrații de lungime $< k$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1	φ_1	*premisa*
	$\vdots$	
n	φ_n	*premisa*
	$\vdots$	
k_1	ψ	
	$\vdots$	
k_2	χ	
k	$\psi \wedge \chi$	$(\wedge i)_{k_1, k_2}$

Se observă că secvenții
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \chi$
au demonstrații de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \chi$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1	φ_1	*premisa*
	$\vdots$	
n	φ_n	*premisa*
	$\vdots$	
k_1	ψ	
	$\vdots$	
k_2	χ	
k	$\psi \wedge \chi$	$(\wedge i)_{k_1,k_2}$

Se observă că secvenții
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \chi$
au demonstrații de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \chi$ deci

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \wedge \chi$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

$$\begin{array}{lll}
1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
n & \varphi_n & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
k_1 & \psi & \textit{ipoteza} \\
 & \vdots & \\
k_2 & \chi & \\
 & & \\
k & \psi \rightarrow \chi & (\rightarrow i) k_1 - k_2
\end{array}$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\to i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \to \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

$$\begin{array}{lll}
1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
n & \varphi_n & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
k_1 & \psi & \textit{ipoteza} \\
 & \vdots & \\
k_2 & \chi & \\
 & & \\
k & \psi \to \chi & (\to i) k_1 - k_2
\end{array}$$

Se observă că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

are demonstrația de lungime $< k$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\to i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \to \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

$$\begin{array}{lll}
1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
n & \varphi_n & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
k_1 & \psi & \textit{ipoteza} \\
 & \vdots & \\
k_2 & \chi & \\
k & \psi \to \chi & (\to i) k_1 - k_2
\end{array}$$

Se observă că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

are demonstrația de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \models \chi \quad (*)$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \cdots = e^+(\varphi_n) = 1$.
Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \to \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \to e^+(\chi) = 1$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \cdots = e^+(\varphi_n) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \to \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \to e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ψ. Din $(*)$ rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \to 1 = 1$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \cdots = e^+(\varphi_n) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \to \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \to e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$. Din $(*)$ rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \to 1 = 1$.

Am demonstrat că regula $(\to i)$ este corectă.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \cdots = e^+(\varphi_n) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \to \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \to e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$. Din $(*)$ rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \to 1 = 1$.

Am demonstrat că regula $(\to i)$ este corectă.

Pentru a finaliza demonstrația trebuie sa arătăm că fiecare din celelalte reguli ale deducției naturale este corectă. $\square$

Notații

Pentru a demonstra ca DN este completă pentru PL facem următoarele notații:

Notații

Pentru a demonstra ca DN este completă pentru PL facem următoarele notații:

- Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ evaluare. Pentru orice $v \in Var$ definim

$$v^e := \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0 \end{cases}$$

- $Var(\varphi) := \{v \in Var \mid v \text{ apare în } \varphi\}$ oricare φ formulă.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Propoziția 2

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ,
dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Propoziția 2

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$,
dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.

Propoziția 3

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$,
dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid,
atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{atunci} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{atunci} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \ \text{ atunci } \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \ \text{ atunci } \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.
Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \;\text{ atunci }\; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.
Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.
Aplicând *Pasul 1* obținem că $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \text{ atunci } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.
Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.
Aplicând *Pasul 1* obținem că $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid. În consecință $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid din *Propoziția 3*.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \to \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secventul $\{p_1^e, \ldots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \to \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secventul $\{p_1^e, \ldots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Deoarece există 2^n evaluări, i.e., tabelul de adevăr are 2^n linii, obținem 2^n demonstrații pentru φ, fiecare din aceste demonstrații având n premise.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

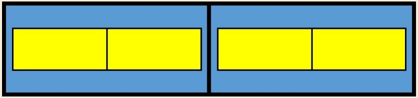
În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \to \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secventul $\{p_1^e, \ldots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Deoarece există 2^n evaluări, i.e., tabelul de adevăr are 2^n linii, obținem 2^n demonstrații pentru φ, fiecare din aceste demonstrații având n premise.

Vom arăta în continuare, pe un exemplu simplu, cum se pot combina aceste 2^n demonstrații cu premise pentru a obține o demonstrație fără premise pentru φ.



Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \land p_2 \to p_1$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \to p_1$

Din *Propoziția 1* știm că următorii secvenți sunt valizi:

$$
\begin{aligned}
p_1, p_2 &\vdash \varphi \\
p_1, \neg p_2 &\vdash \varphi \\
\neg p_1, p_2 &\vdash \varphi \\
\neg p_1, \neg p_2 &\vdash \varphi
\end{aligned}
$$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$

Din *Propoziția 1* știm că următorii secvenți sunt valizi:

$$\begin{aligned} p_1, p_2 &\vdash \varphi \\ p_1, \neg p_2 &\vdash \varphi \\ \neg p_1, p_2 &\vdash \varphi \\ \neg p_1, \neg p_2 &\vdash \varphi \end{aligned}$$

deci există demonstrațiile:

p_1	*ipoteza*
p_2	*ipoteza*
$\vdots$	
φ	

p_1	*ipoteza*
$\neg p_2$	*ipoteza*
$\vdots$	
φ	

$\neg p_1$	*ipoteza*
p_2	*ipoteza*
$\vdots$	
φ	

$\neg p_1$	*ipoteza*
$\neg p_2$	*ipoteza*
$\vdots$	
φ	

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$$
\begin{array}{ll}
p_1 \vee \neg p_1 & \qquad\qquad\qquad\qquad TND \\
\boxed{p_1 \quad \textit{ipoteza}} & \boxed{\neg p_1 \quad \textit{ipoteza}}
\end{array}
$$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$ *TND*

p_1 *ipoteza*

$p_2 \vee \neg p_2$ *TND*

p_2 *ipoteza*

$\neg p_2$ *ipoteza*

$\neg p_1$ *ipoteza*

$p_2 \vee \neg p_2$ *TND*

p_2 *ipoteza*

$\neg p_2$ *ipoteza*

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$ — *TND*

p_1	*ipoteza*
$p_2 \vee \neg p_2$	*TND*
p_2 *ipoteza* ⋮ φ	$\neg p_2$ *ipoteza* ⋮ φ
φ	$(\vee e)$

$\neg p_1$	*ipoteza*
$p_2 \vee \neg p_2$	*TND*
p_2 *ipoteza* ⋮ φ	$\neg p_2$ *ipoteza* ⋮ φ
φ	$(\vee e)$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$ *TND*

p_1 *ipoteza* $p_2 \vee \neg p_2$ *TND* [p_2 *ipoteza* ⋮ φ] [$\neg p_2$ *ipoteza* ⋮ φ] φ $(\vee e)$	$\neg p_1$ *ipoteza* $p_2 \vee \neg p_2$ *TND* [p_2 *ipoteza* ⋮ φ] [$\neg p_2$ *ipoteza* ⋮ φ] φ $(\vee e)$

φ $(\vee e)$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$ — *TND*

- p_1 — *ipoteza*
  - $p_2 \vee \neg p_2$ — *TND*
  - p_2 — *ipoteza*, $\vdots$, φ
  - $\neg p_2$ — *ipoteza*, $\vdots$, φ
  - φ — $(\vee e)$
- $\neg p_1$ — *ipoteza*
  - $p_2 \vee \neg p_2$ — *TND*
  - p_2 — *ipoteza*, $\vdots$, φ
  - $\neg p_2$ — *ipoteza*, $\vdots$, φ
  - φ — $(\vee e)$

φ — $(\vee e)$

Am obținut o demonstrație pentru φ fără ipoteze. $\square$

Deducția naturală DN

- este un sistem deductiv corect și complet pentru logica clasică,
- stabilește reguli de deducție pentru fiecare operator logic,
- o demonstrație se construiește prin aplicarea succesivă a regulilor de deducție,
- în demonstrații putem folosi ipoteze temporare, scopul acestora fiind bine delimitat.

Pe săptămâna viitoare!