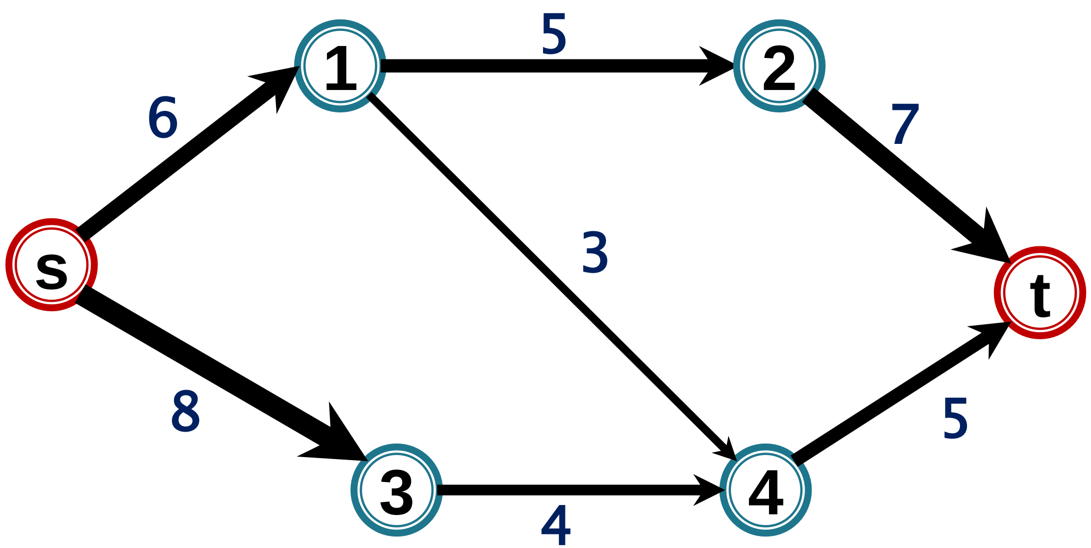
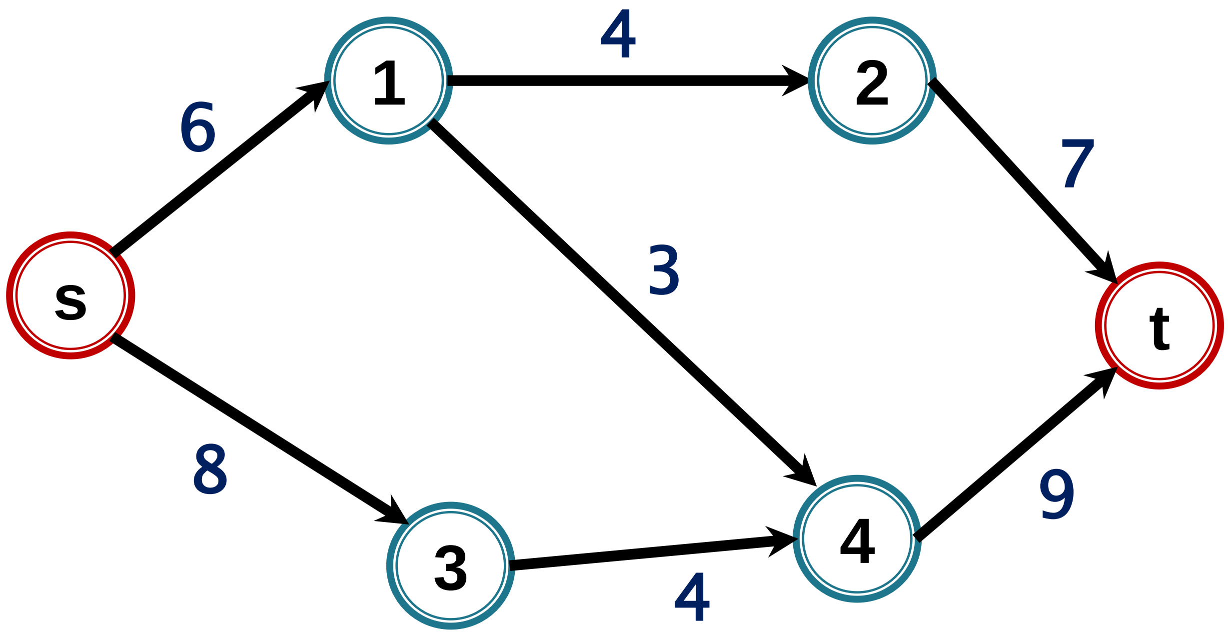
Fluxuri maxime în rețele de transport

- Avem o reţea în care
  - arcele au limitări de capacitate
  - nodurile = joncţiune

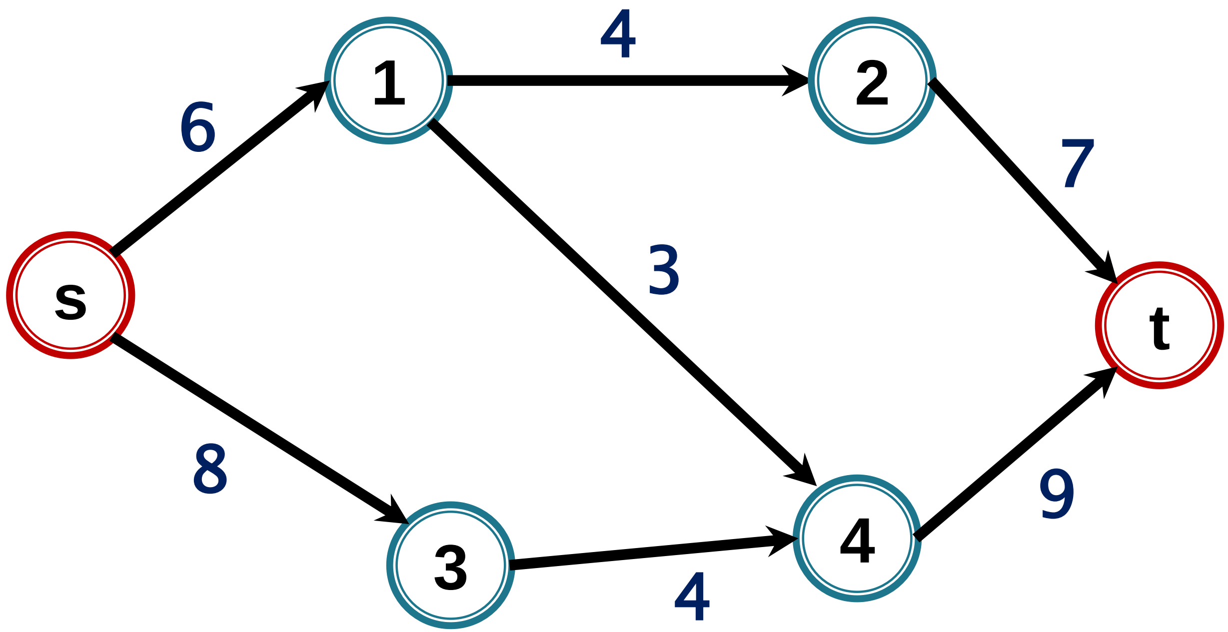
  Care este cantitatea maximă care poate fi transmisă prin reţea de la surse la destinaţii?



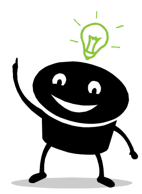
- Rețea de comunicare
  - Transferul de informații – limitat de lățimea de bandă
- Rețele de transport / evacuare în caz de urgențe
  - Limitare – număr de mașini/persoane în unitatea de timp
- Rețele de conducte
- …



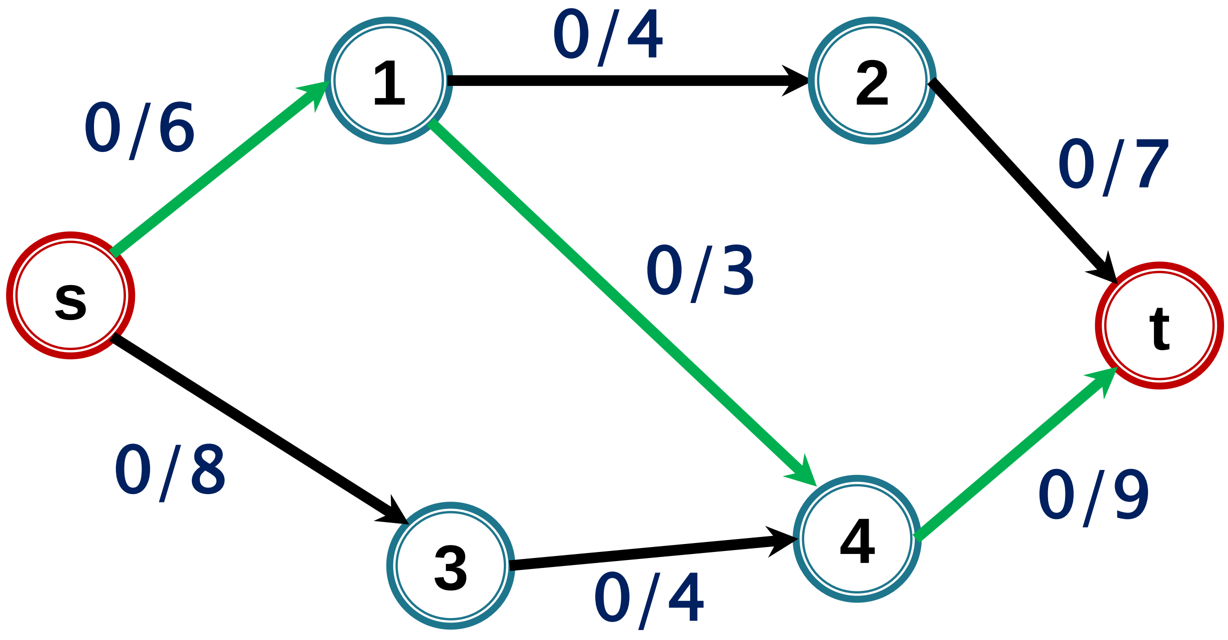
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t

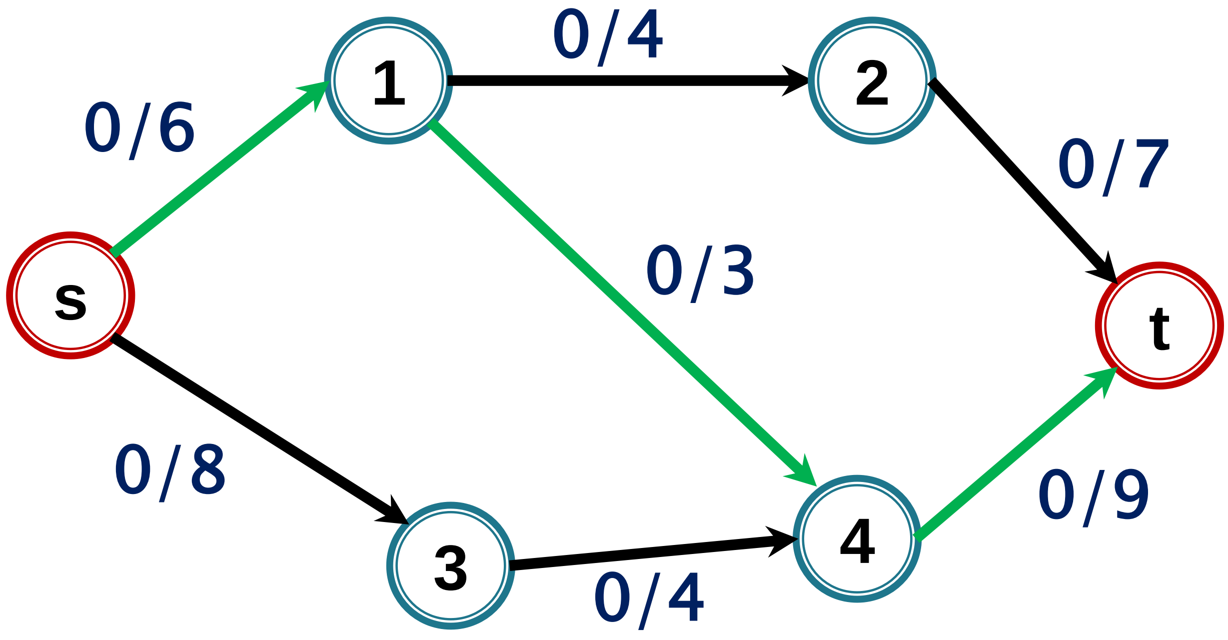


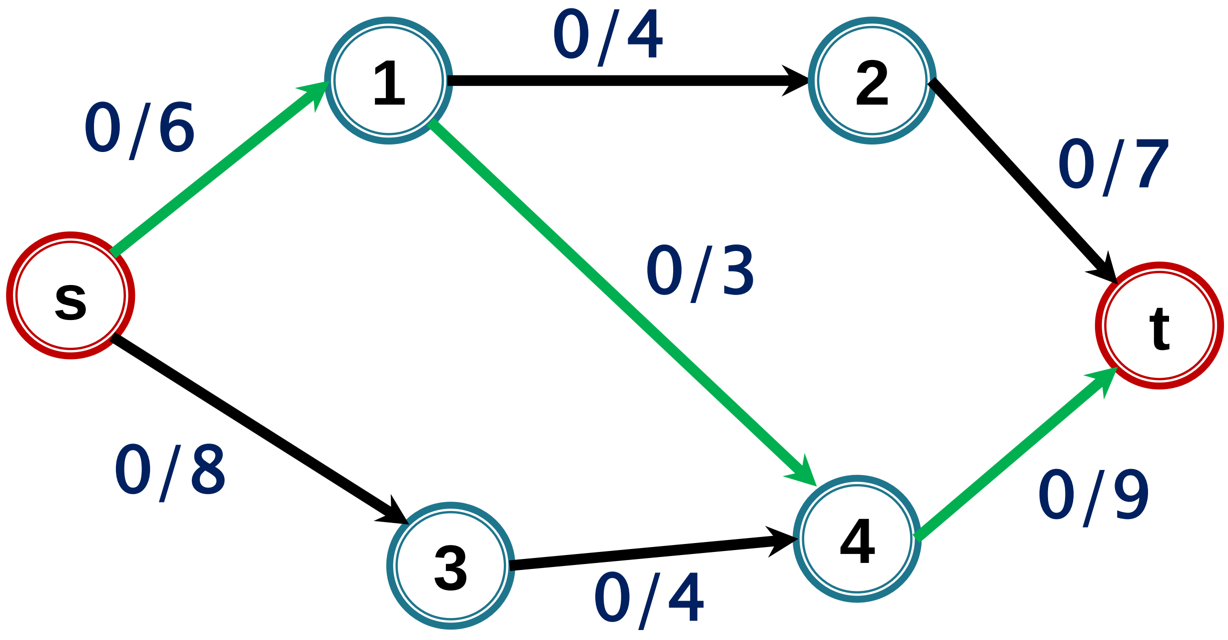
Încercăm să trimitem marfă (flux) de la vârful sursă s la destinaţia t



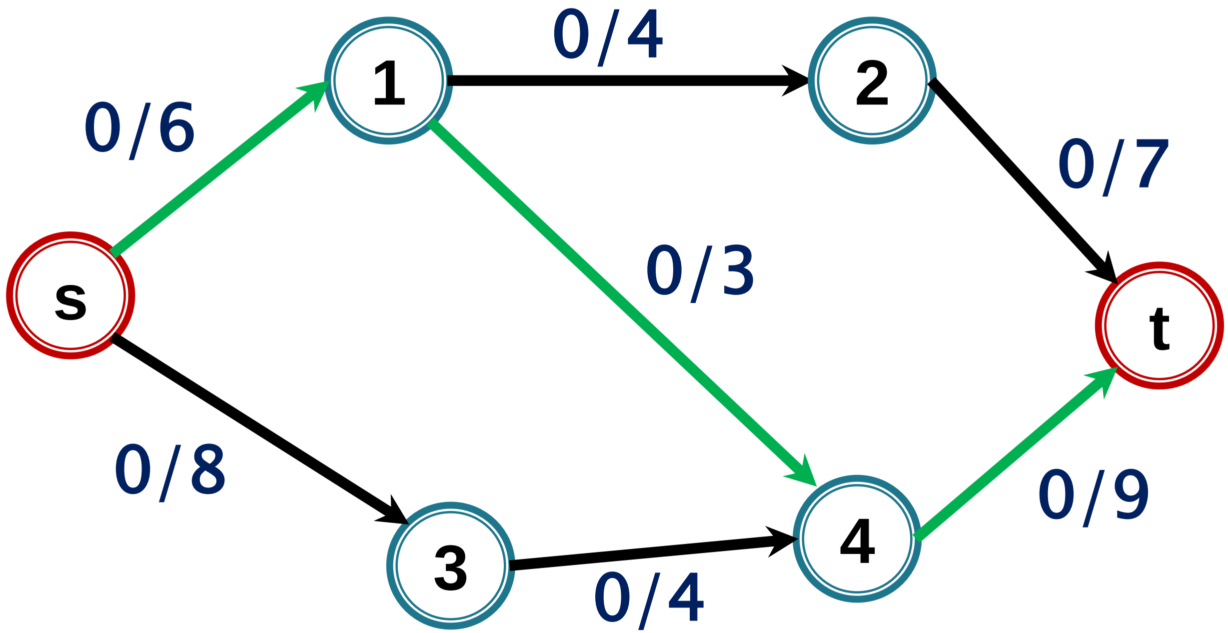
Determinăm drumuri de la s la t pe care mai putem trimite marfă

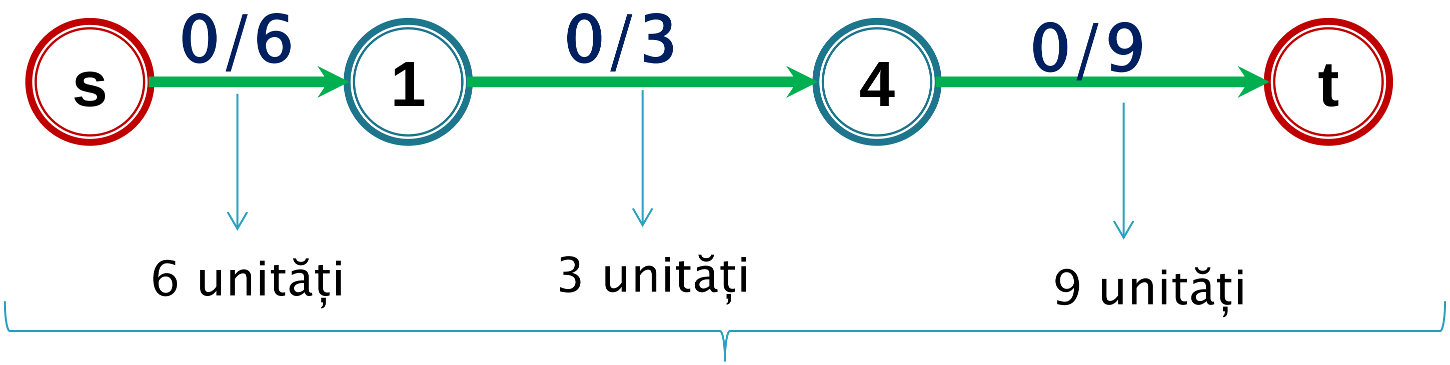

0/4
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
4
3
0/4


0/4
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/9
3
4
0/4

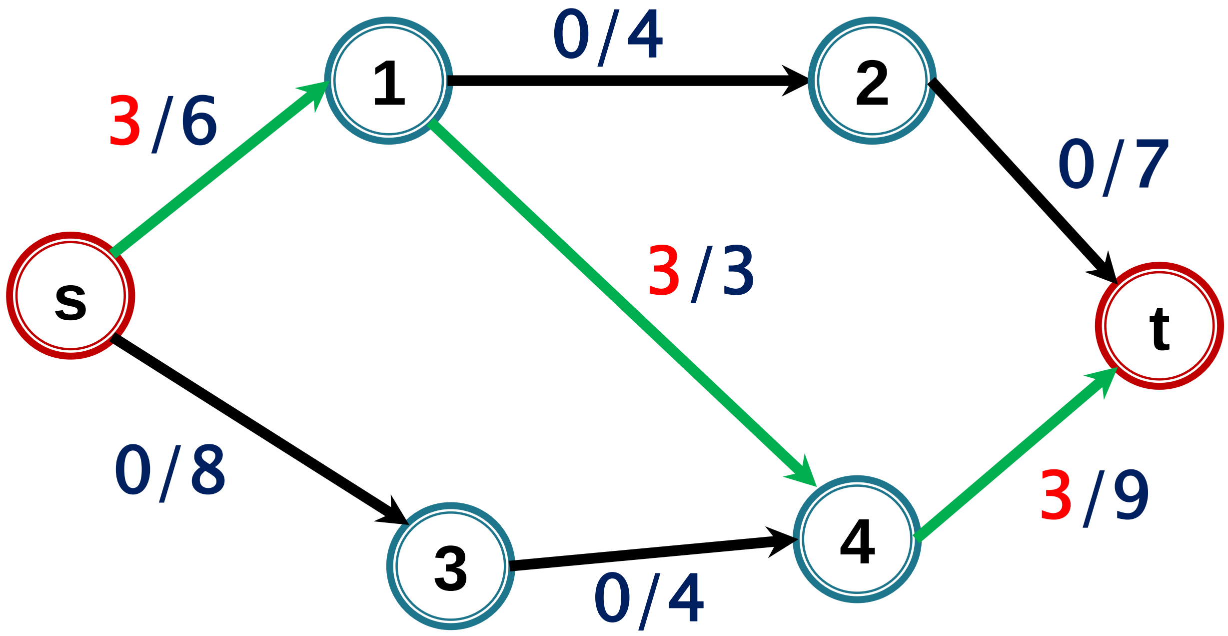

0/6
0/4
0/7
0/3
0/8
0/9
0/4
s
1
2
t
3
4


0/6
0/3
0/9
s
1
4
t

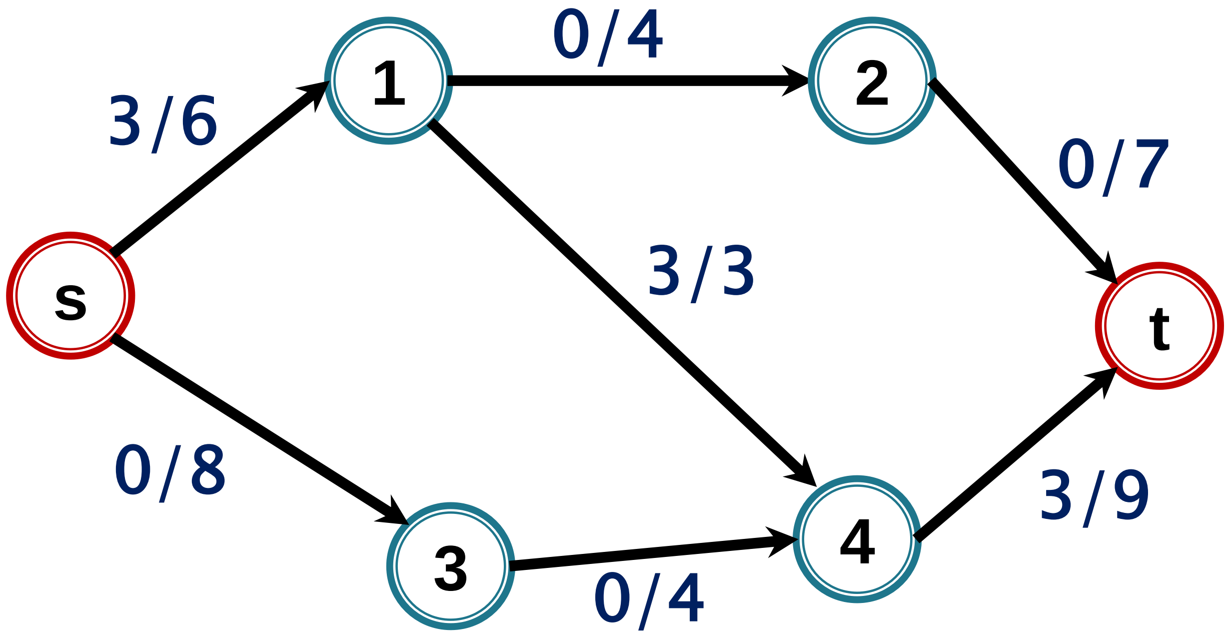




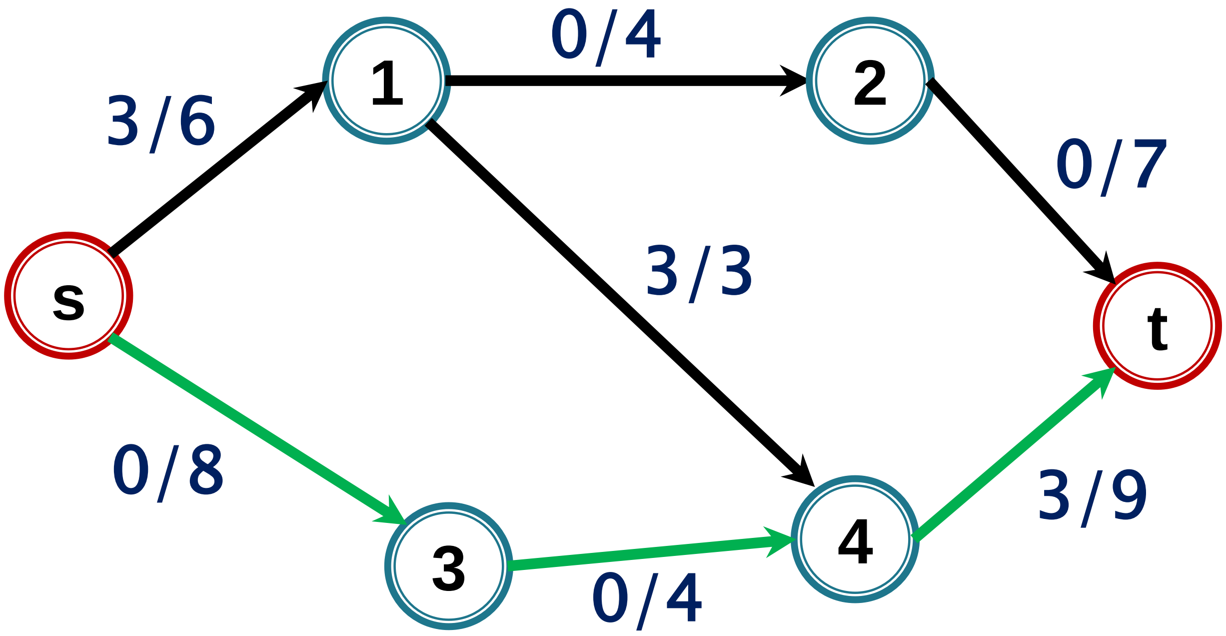
3 unităţi de-a lungul întregului drum



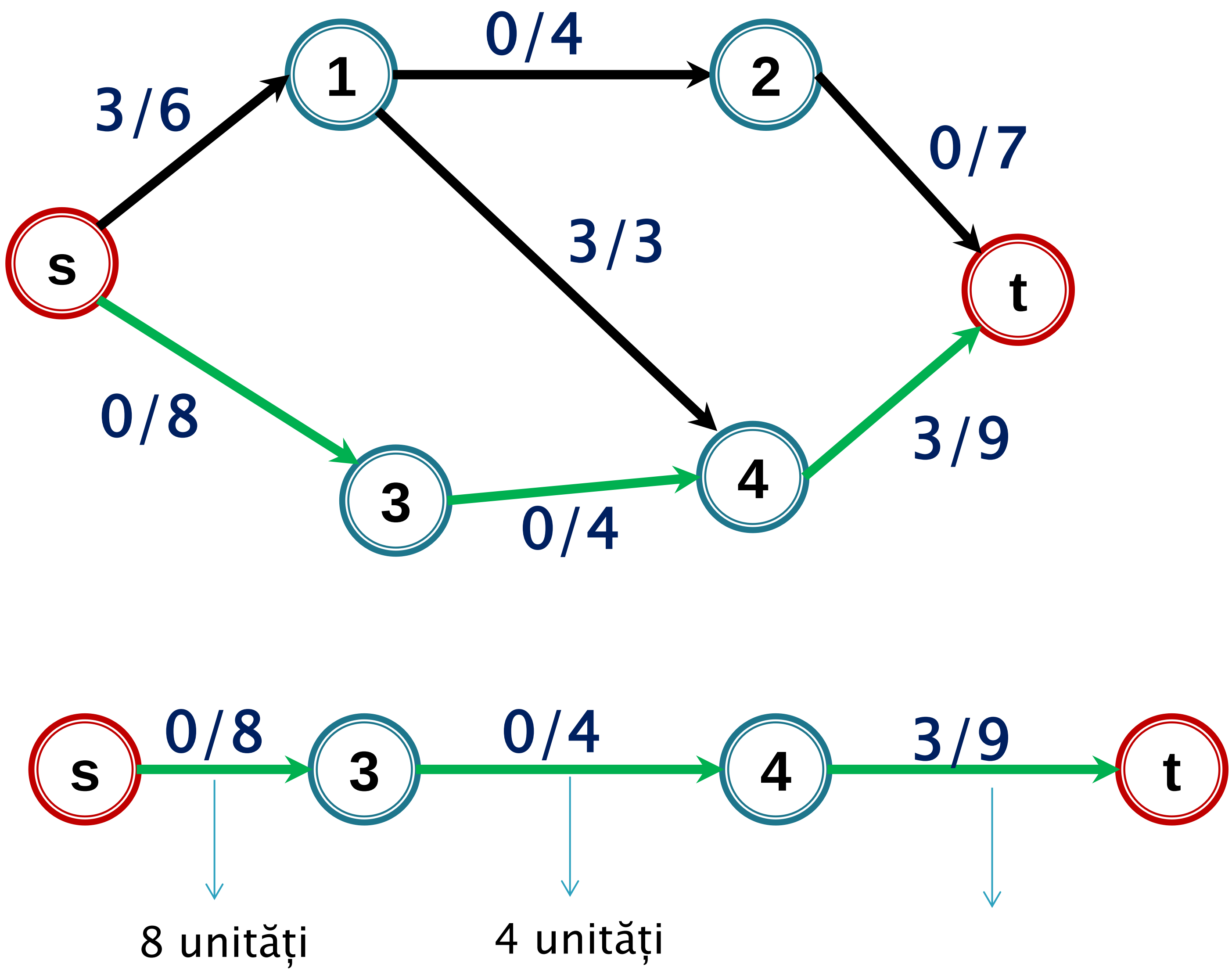
s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9



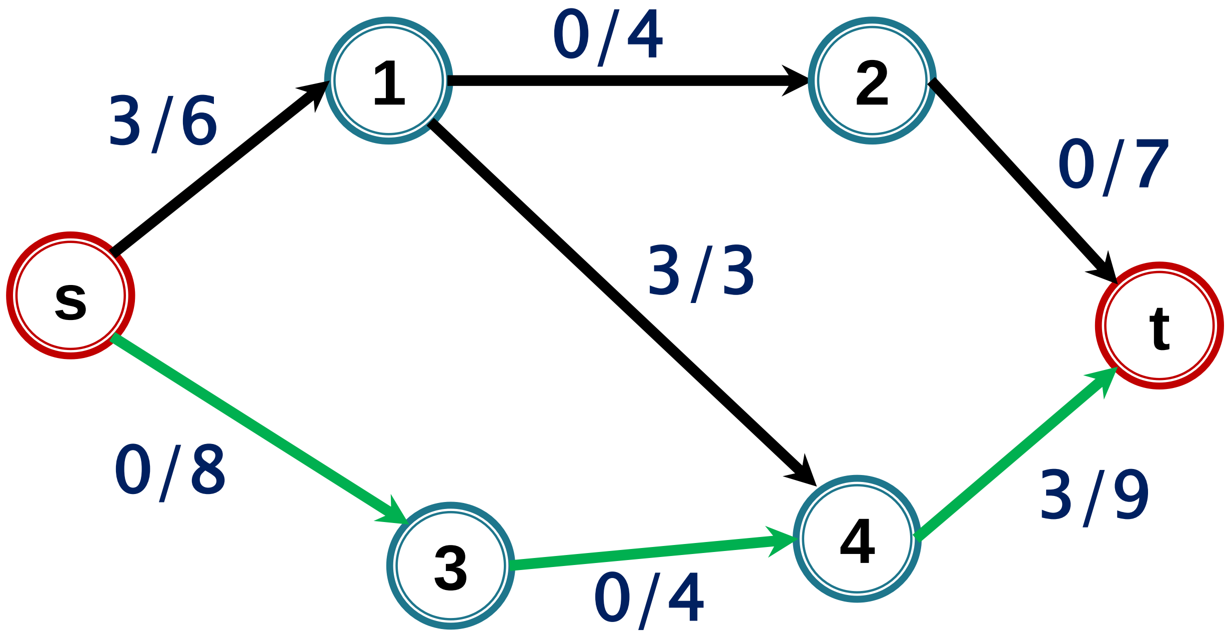
Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

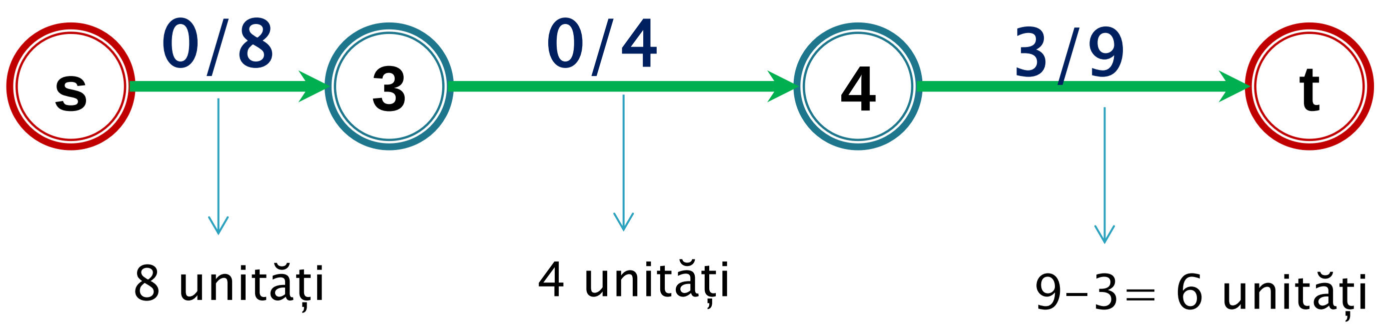


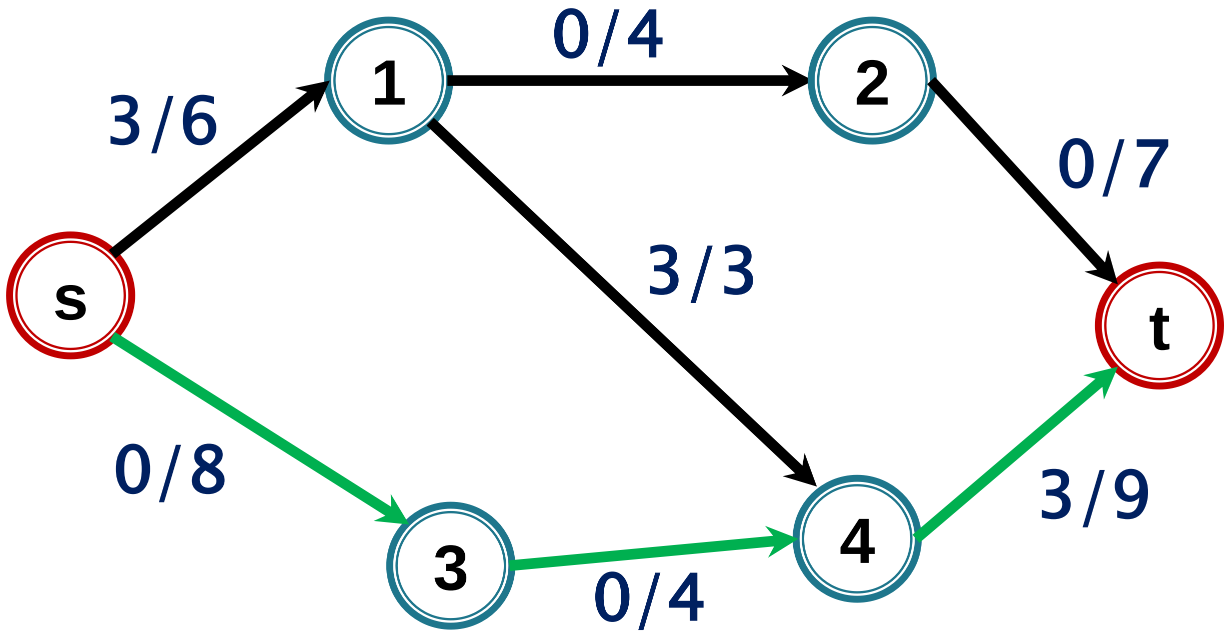
s
1
2
t
3
4
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9

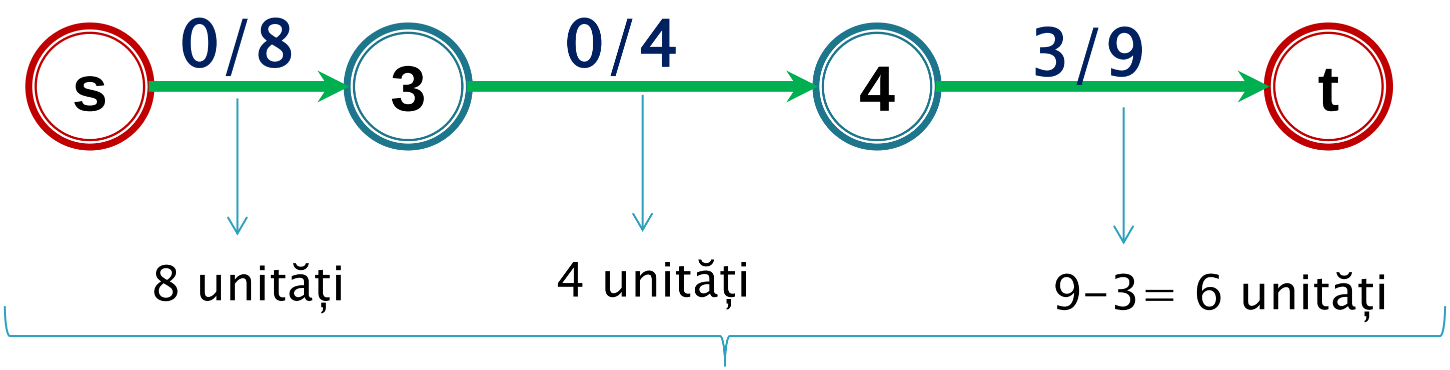


3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
3/9
0/4
s
1
2
t
3
4
0/8
0/4
3/9
s
3
4
t
8 unități
4 unități

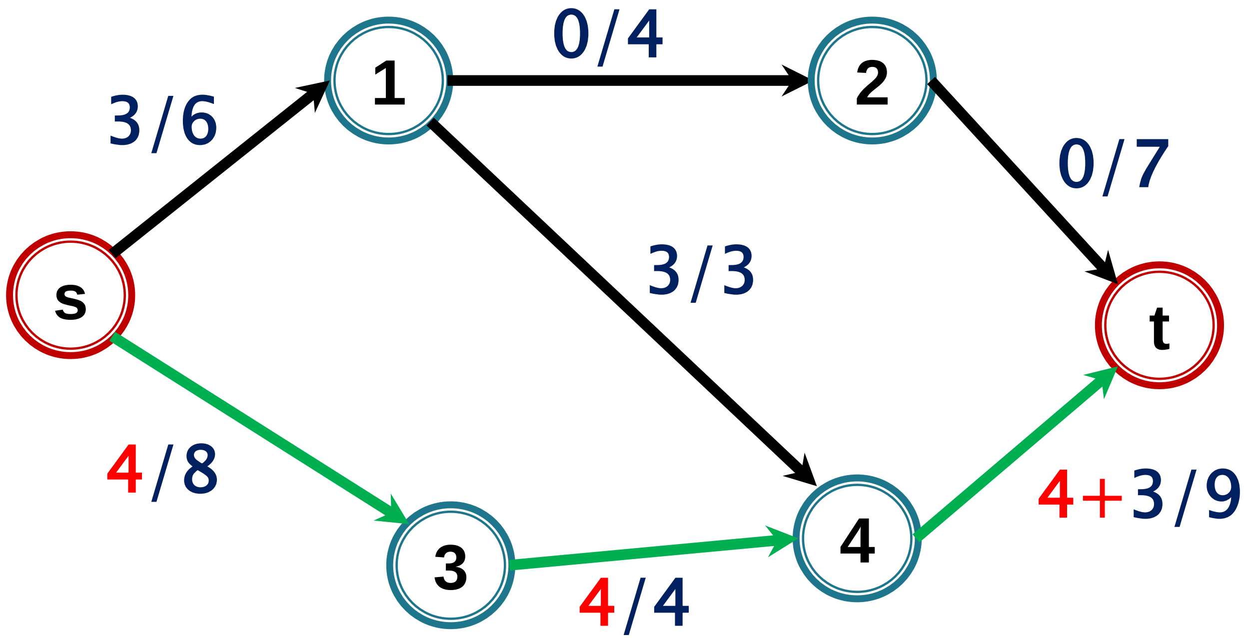

s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
0/8
0/4
3/9

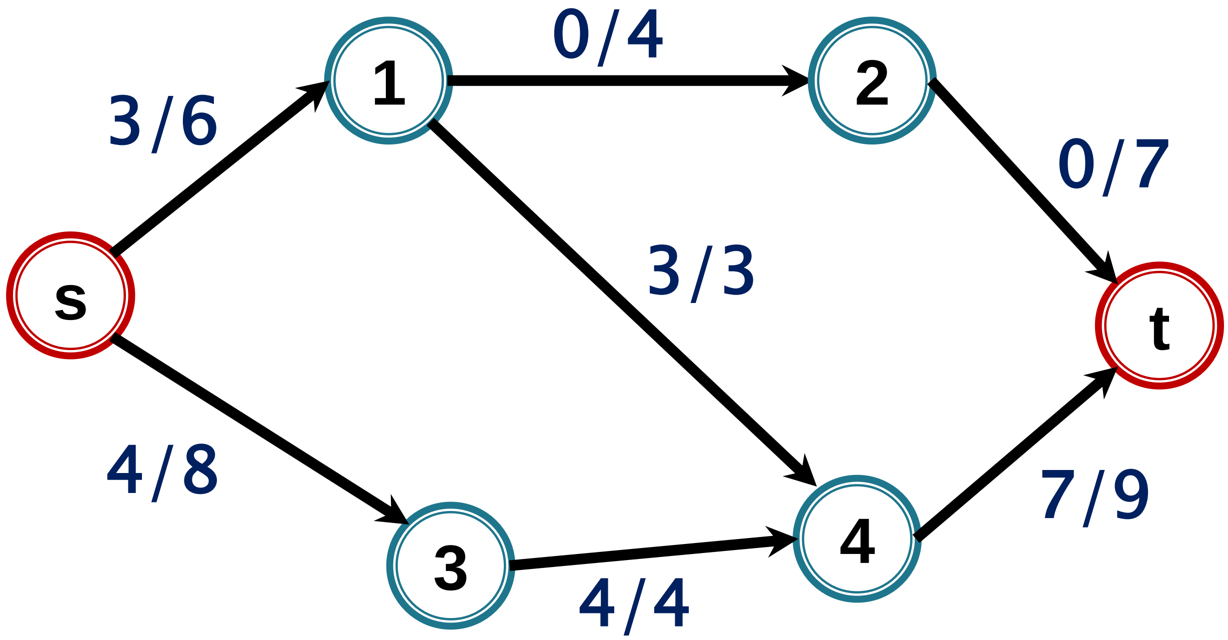

s
3
4
t
0/8
0/4
3/9
8 unități
4 unități
9-3= 6 unități

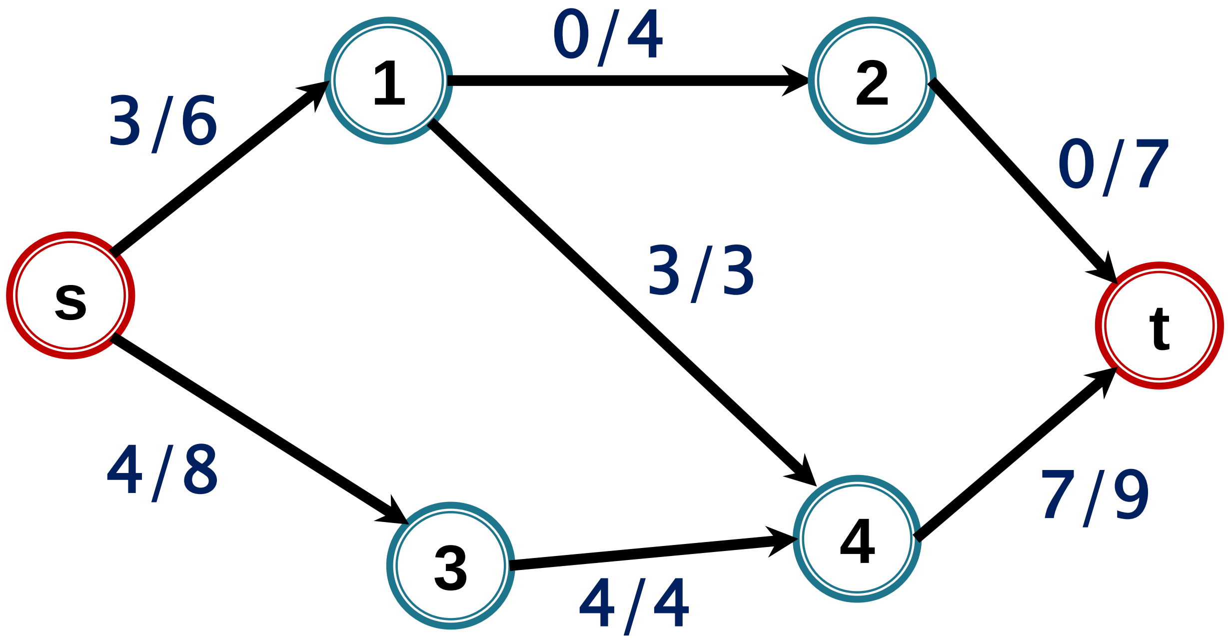




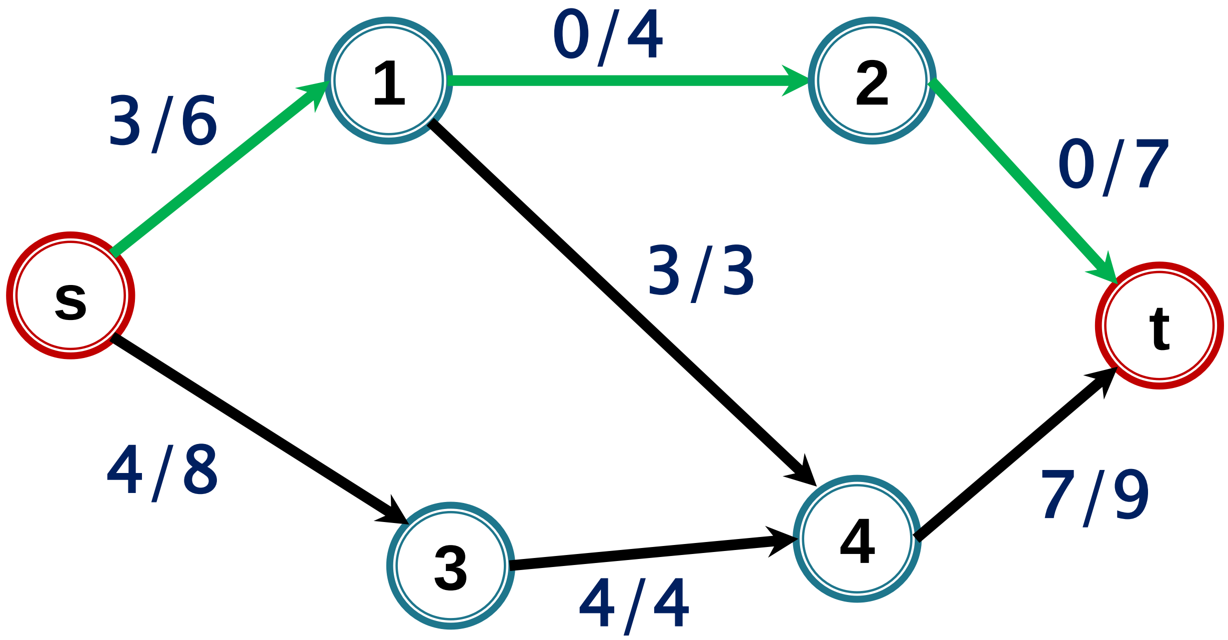
4 unităţi de-a lungul întregului drum

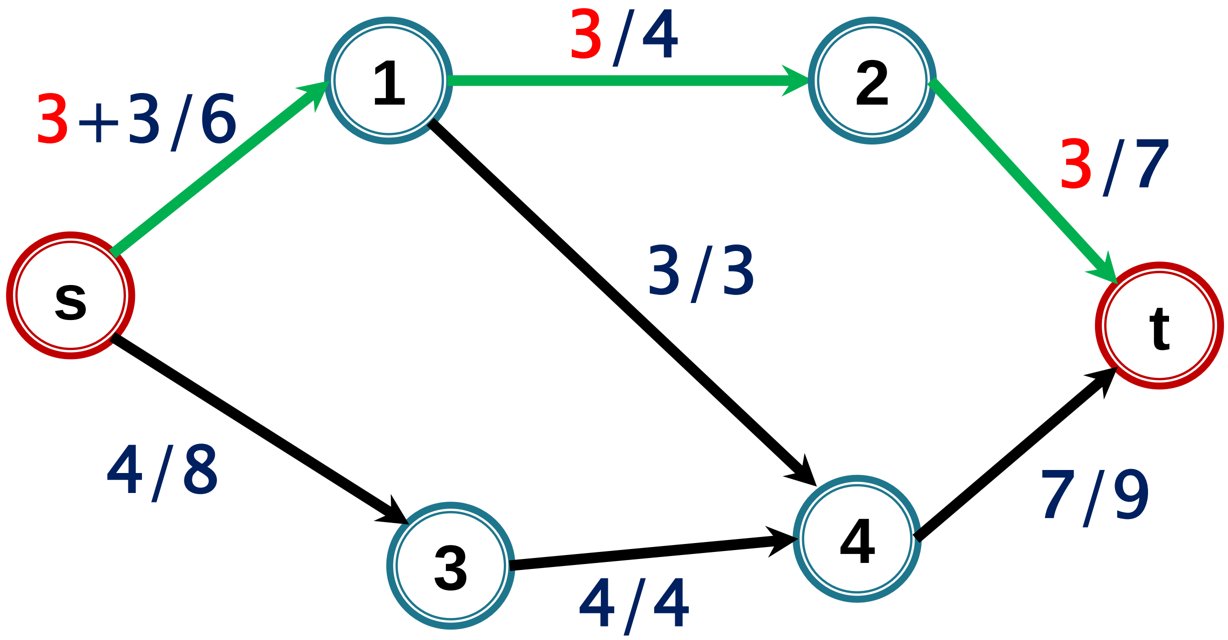

0/4
1
2
3/6
0/7
3/3
s
t
4/8
4+3/9
4
3
4/4


s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
7/9
4/4

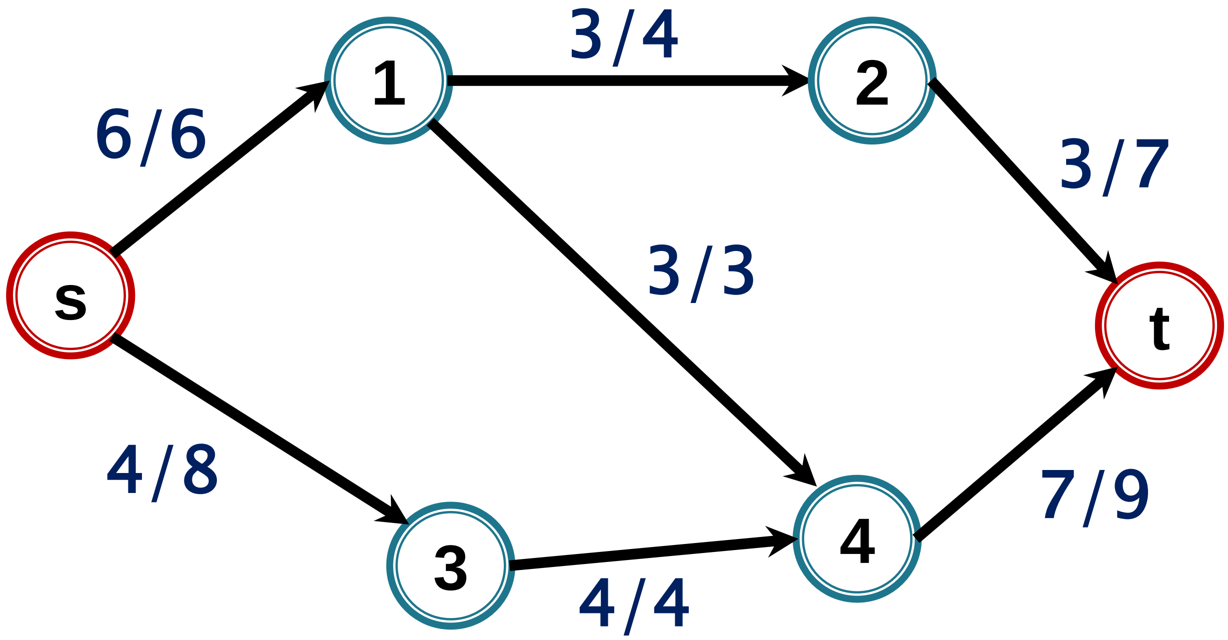


Căutăm alt drum de la s la t pe care mai putem trimite flux

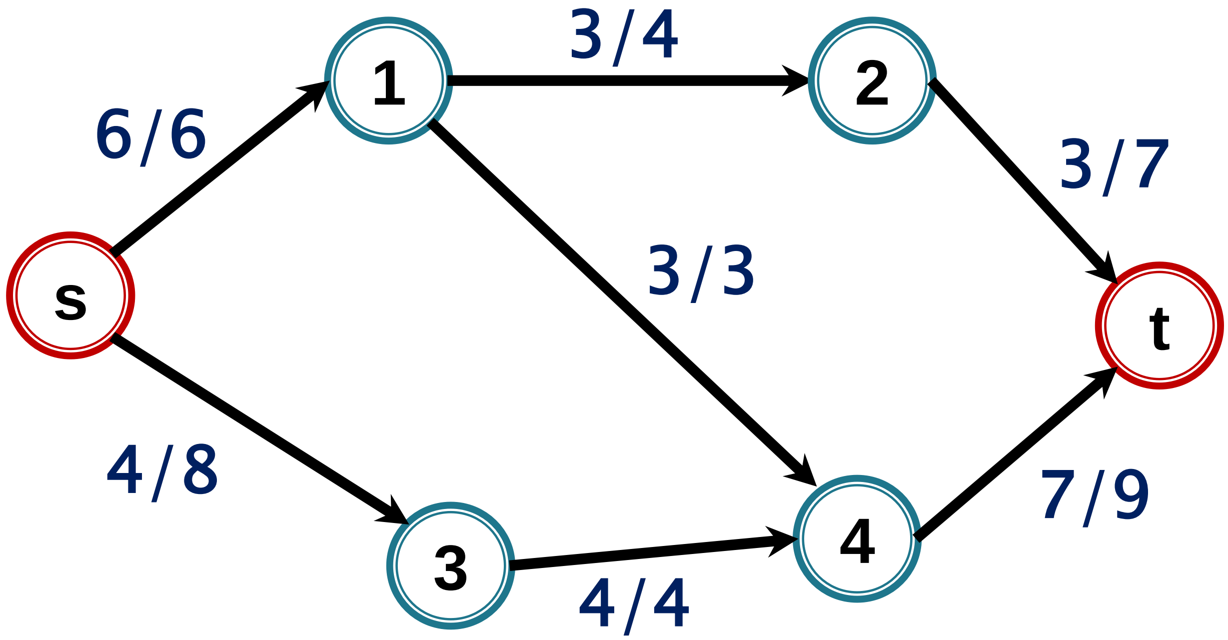

s
1
2
3
4
t
3/6
0/4
0/7
3/3
4/8
4/4
7/9



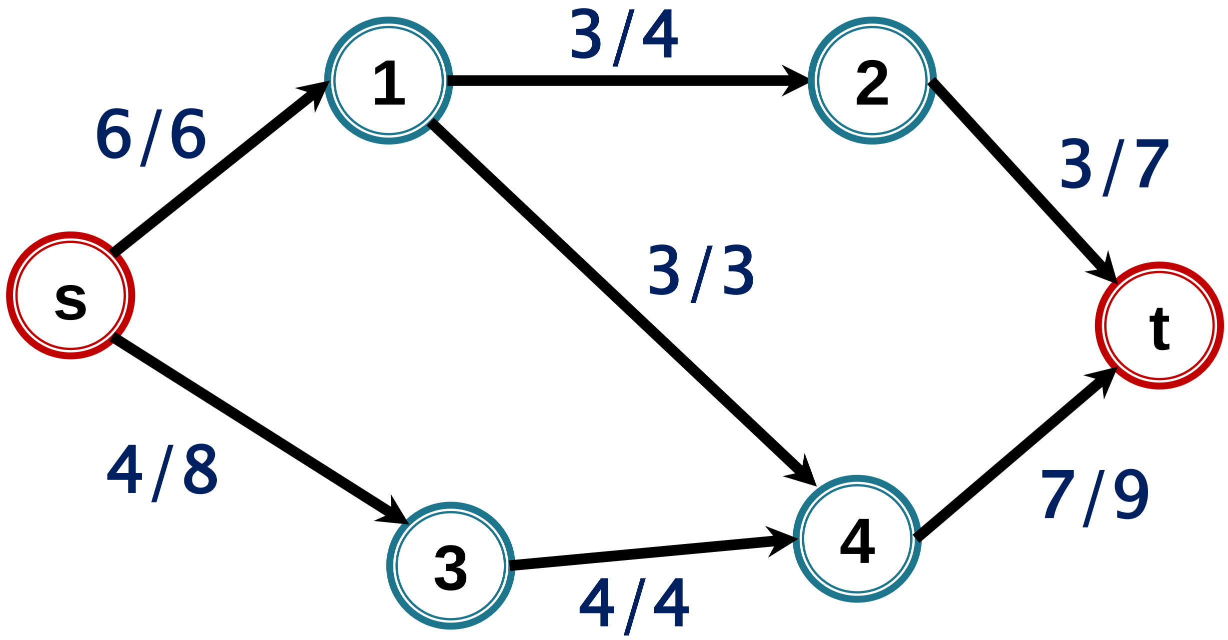
3+3/6
1
3/4
2
3/7
s
3/3
t
4/8
4
7/9
3
4/4



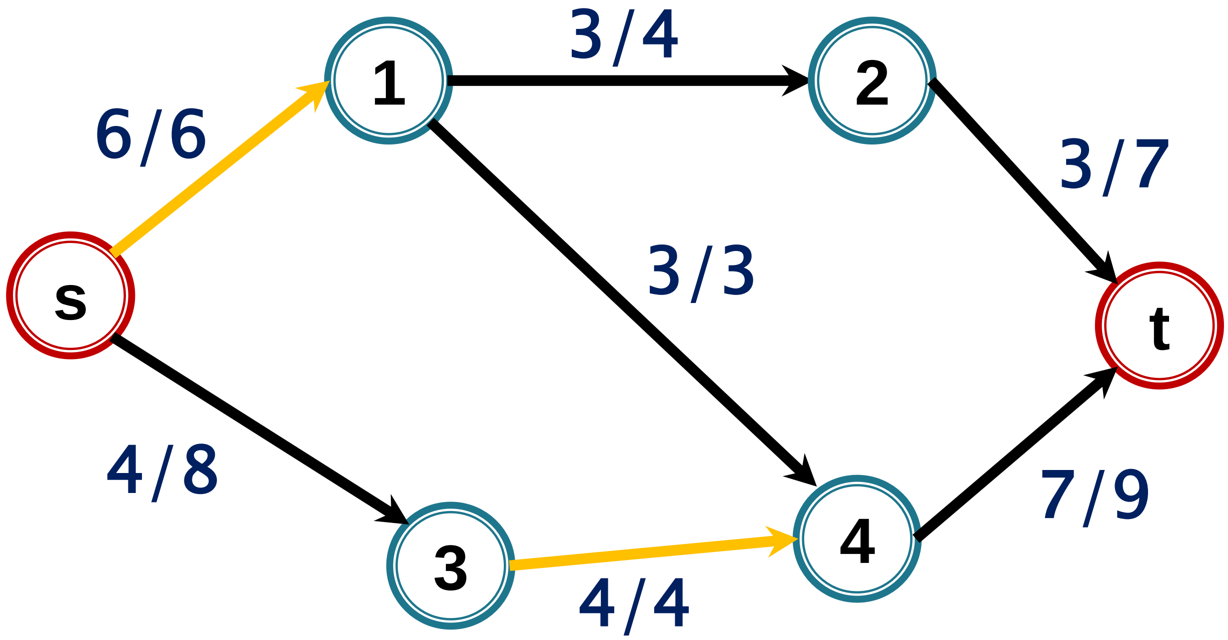
1
2
s
t
3
4
6/6
3/4
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4



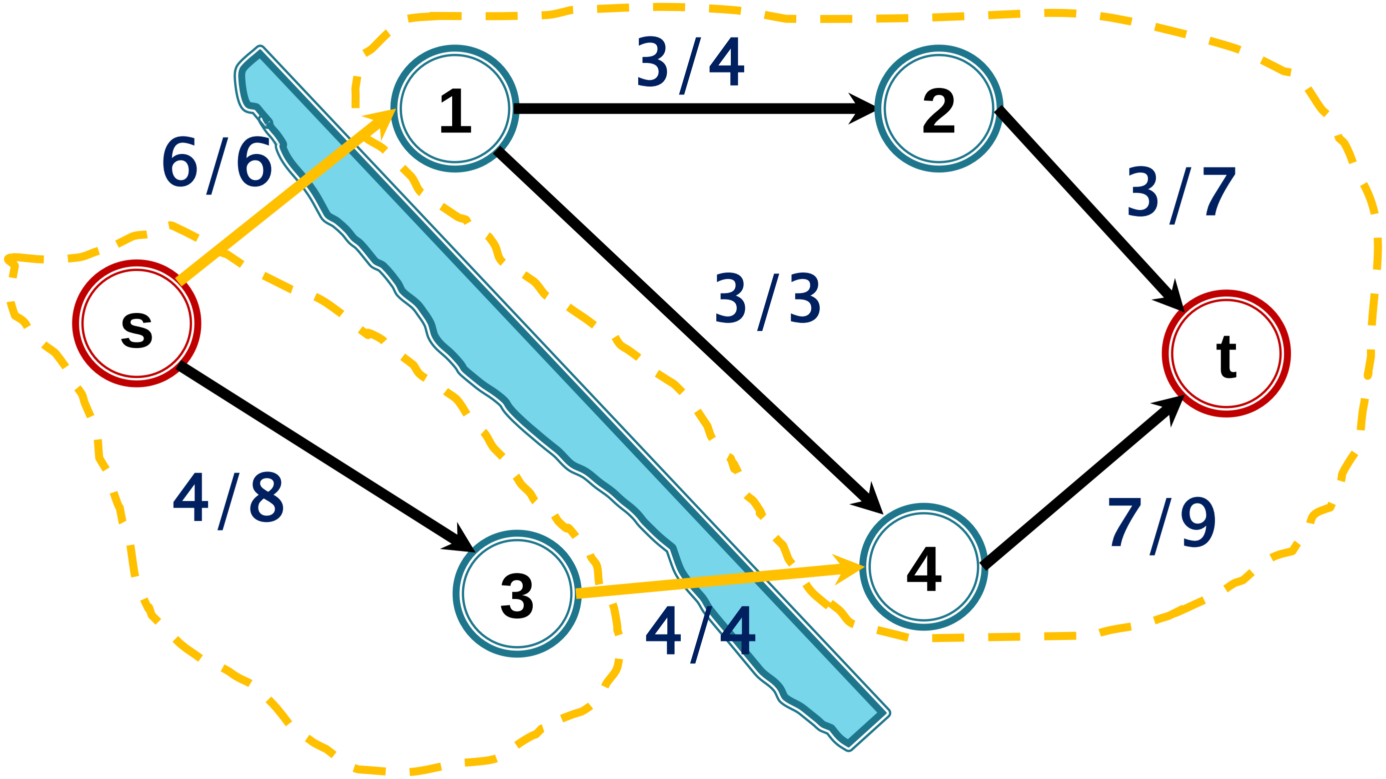
Nu mai există drumuri de la s la t pe care mai putem trimite flux



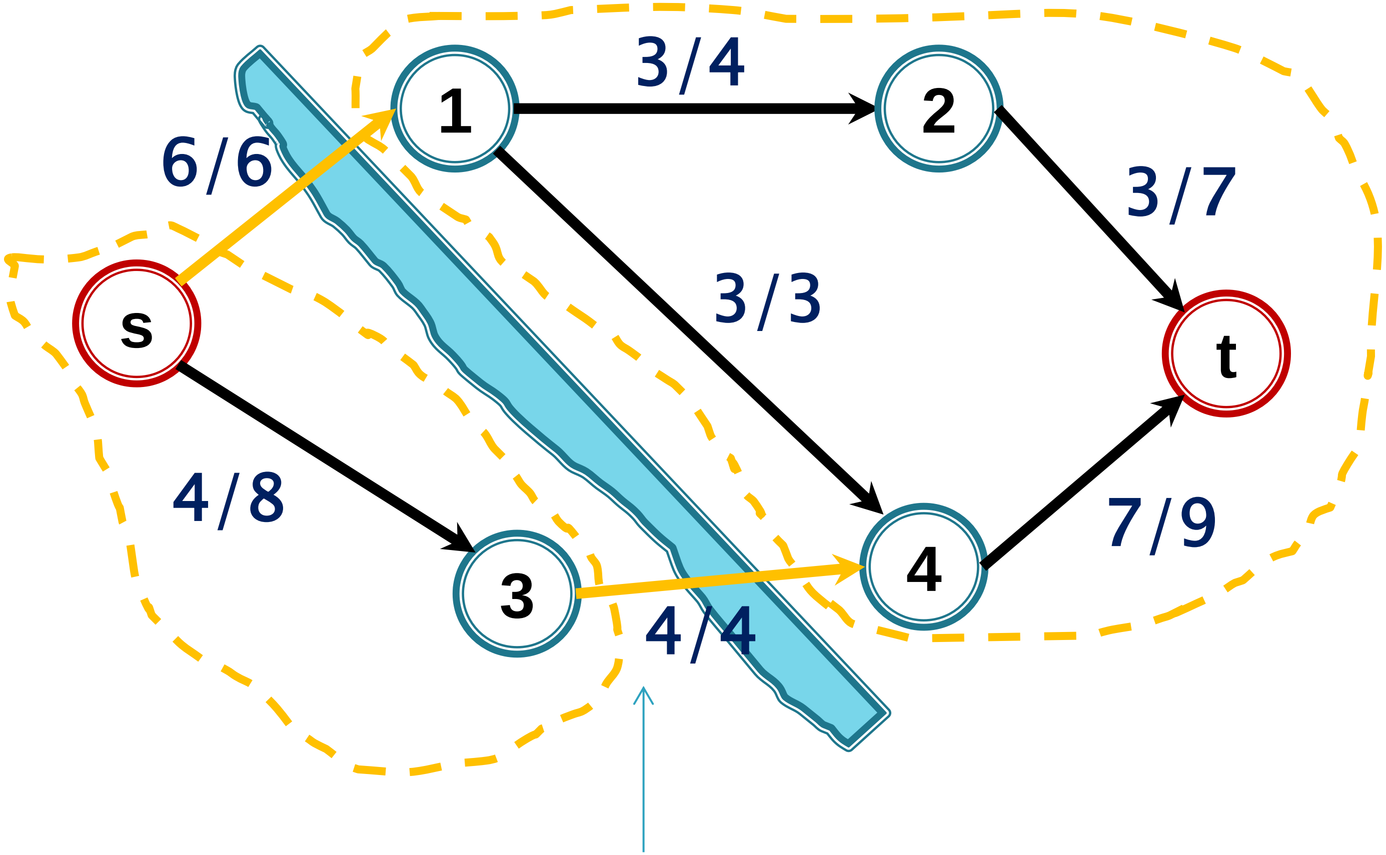
Este maxim fluxul?



3/4
6/6
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4
1
2
s
t
3
4



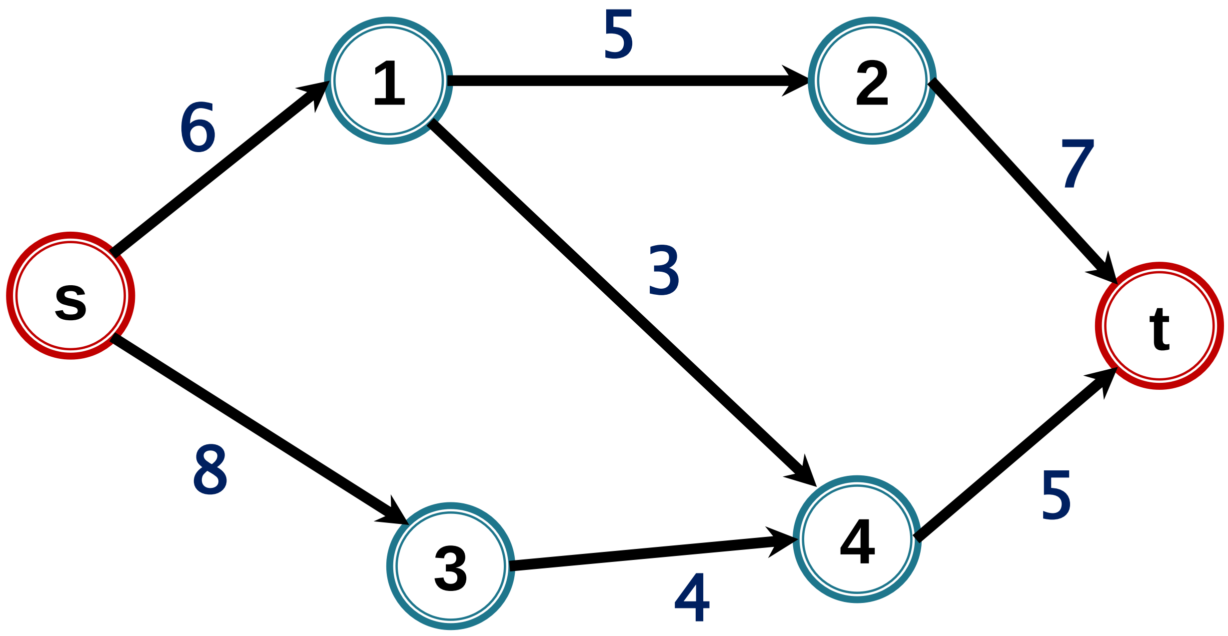
1
2
s
t
3
4
3/4
6/6
3/7
3/3
4/8
7/9
4/4

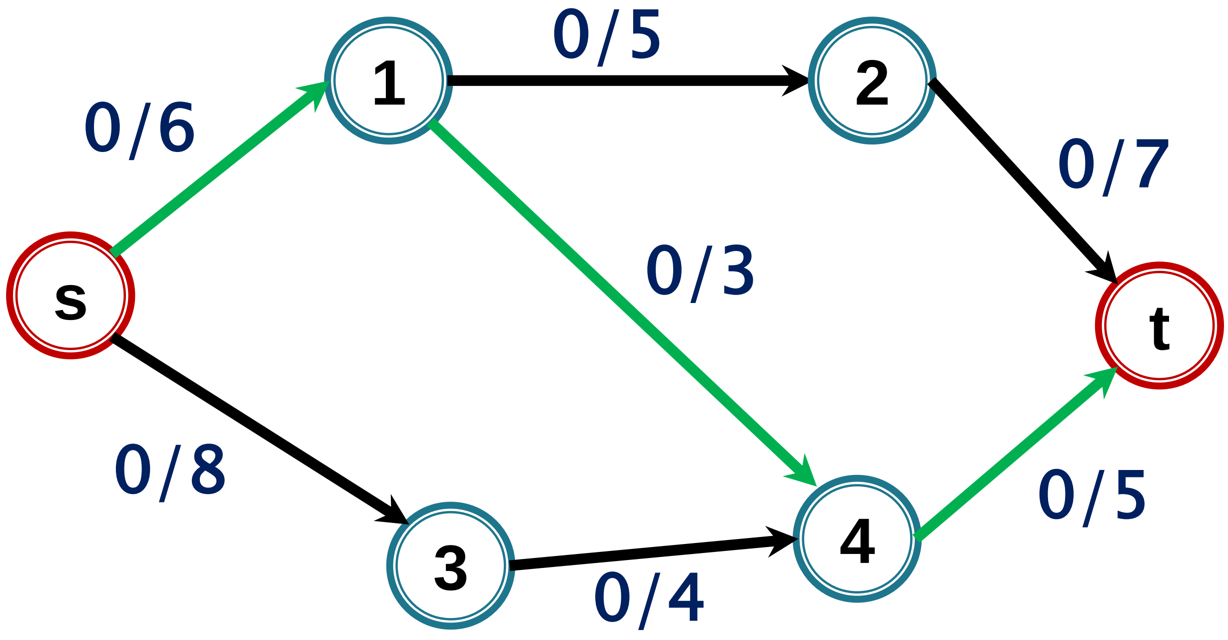


- singurele arce ("poduri ") care trec din regiunea lui s în cea a lui t nu mai pot fi folosite pentru a trimite flux (au fluxul = capacitatea) $\Rightarrow$ fluxul este maxim

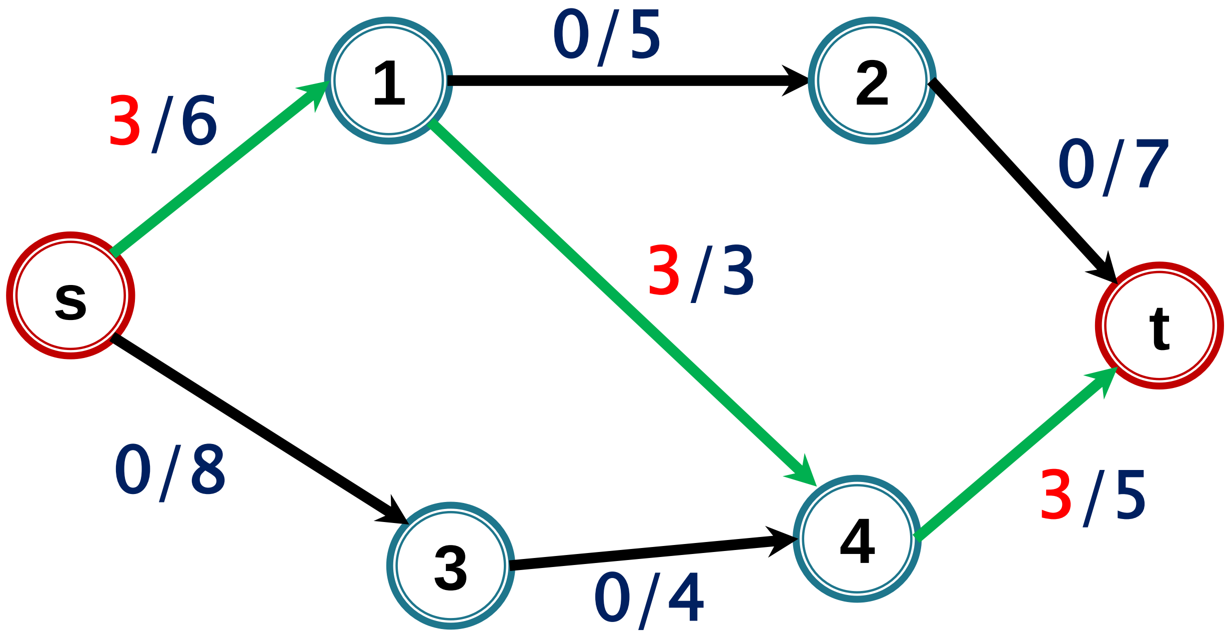
- s-t tăietură

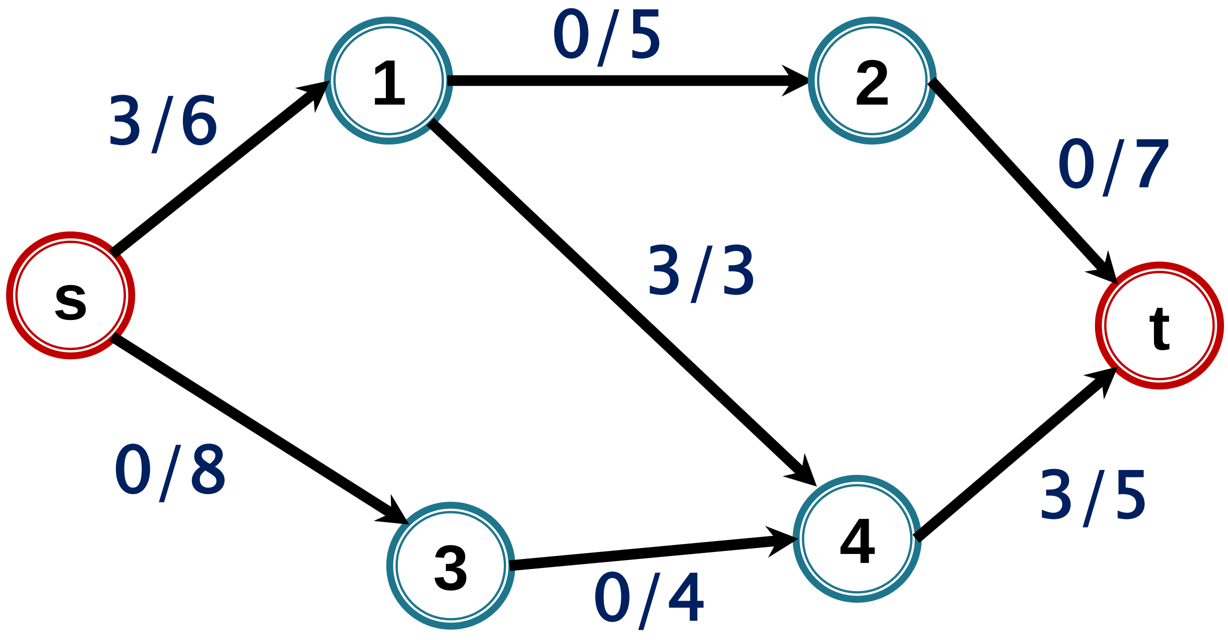
Alt exemplu

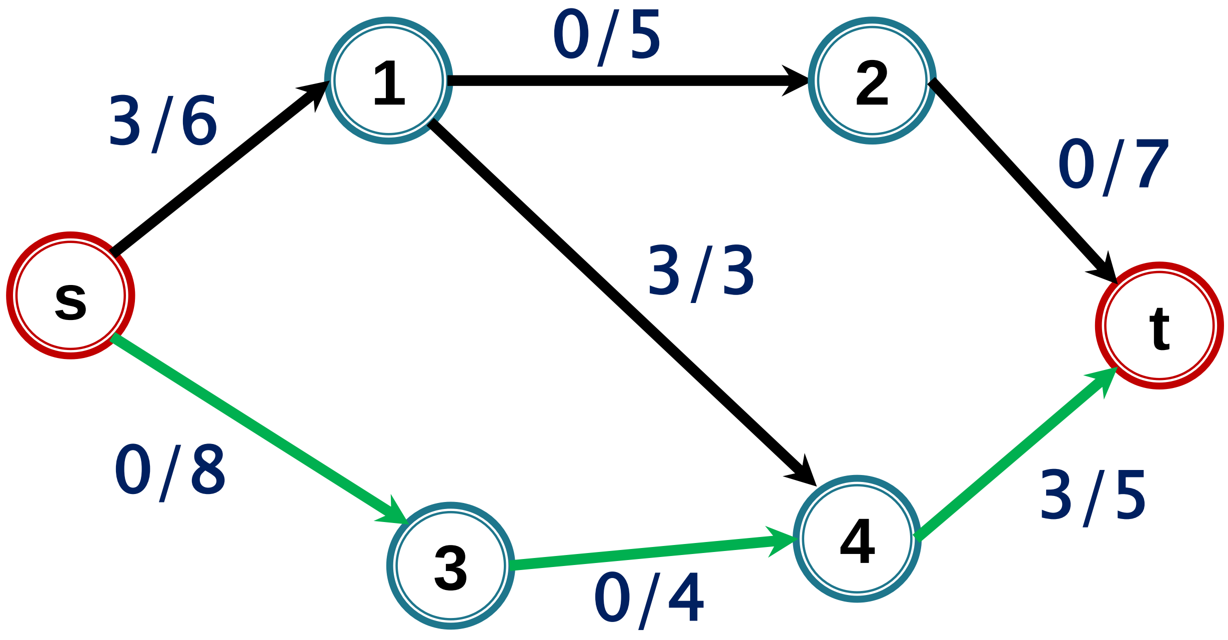

5
6
1
2
7
3
s
t
8
5
3
4
4

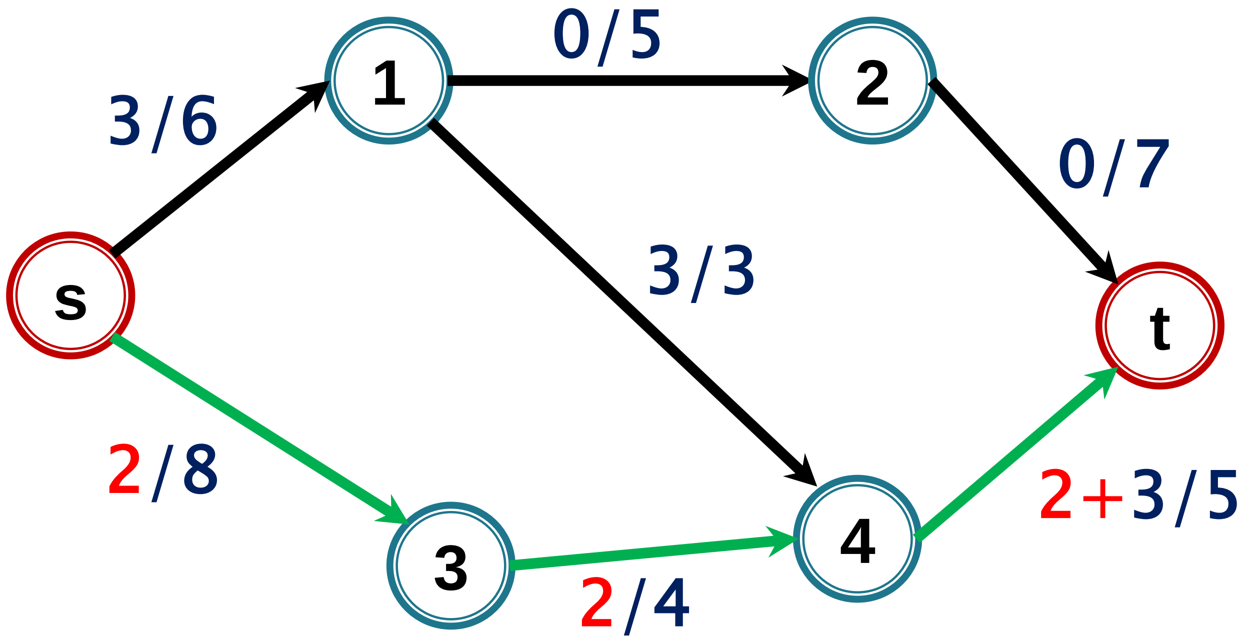


0/5
0/6
1
2
0/7
0/3
s
t
0/8
0/5
3
4
0/4

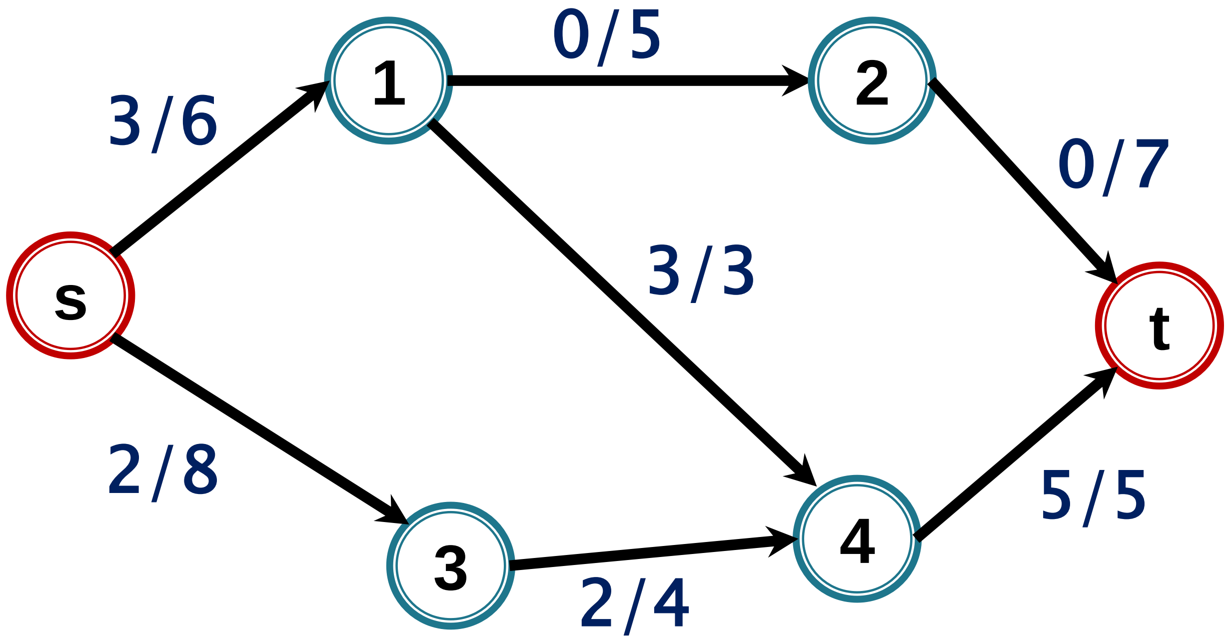

3/6
0/5
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/5
4
3
0/4


0/5
3/6
1
2
0/7
3/3
s
t
0/8
3/5
3
4
0/4

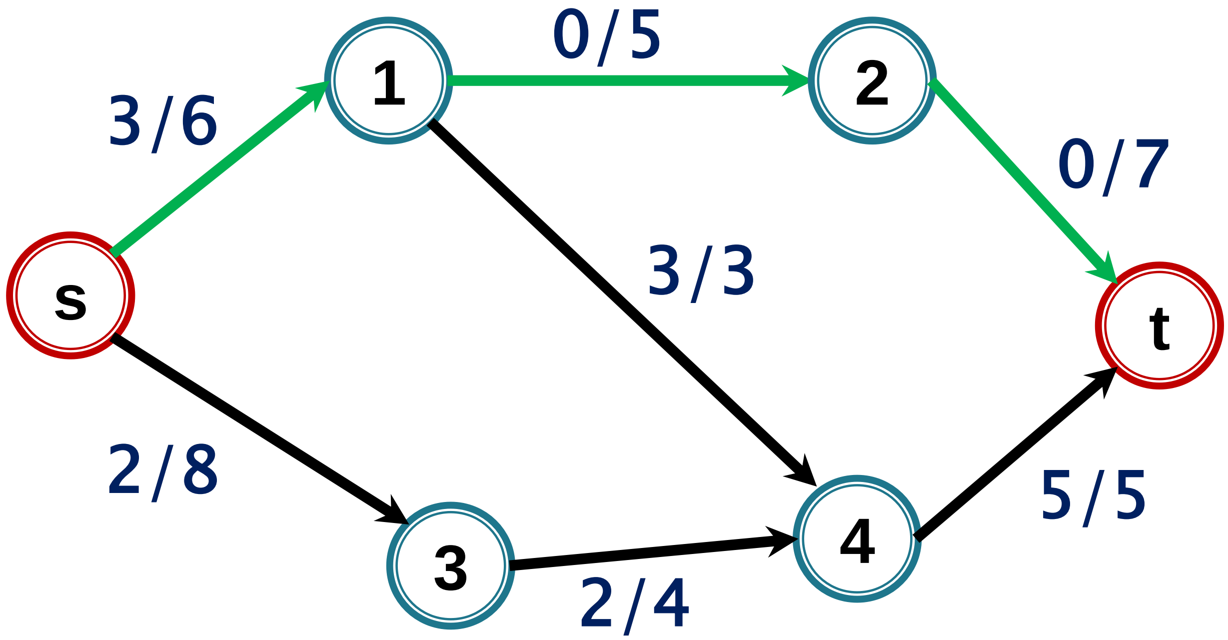

s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
0/8
0/4
3/5



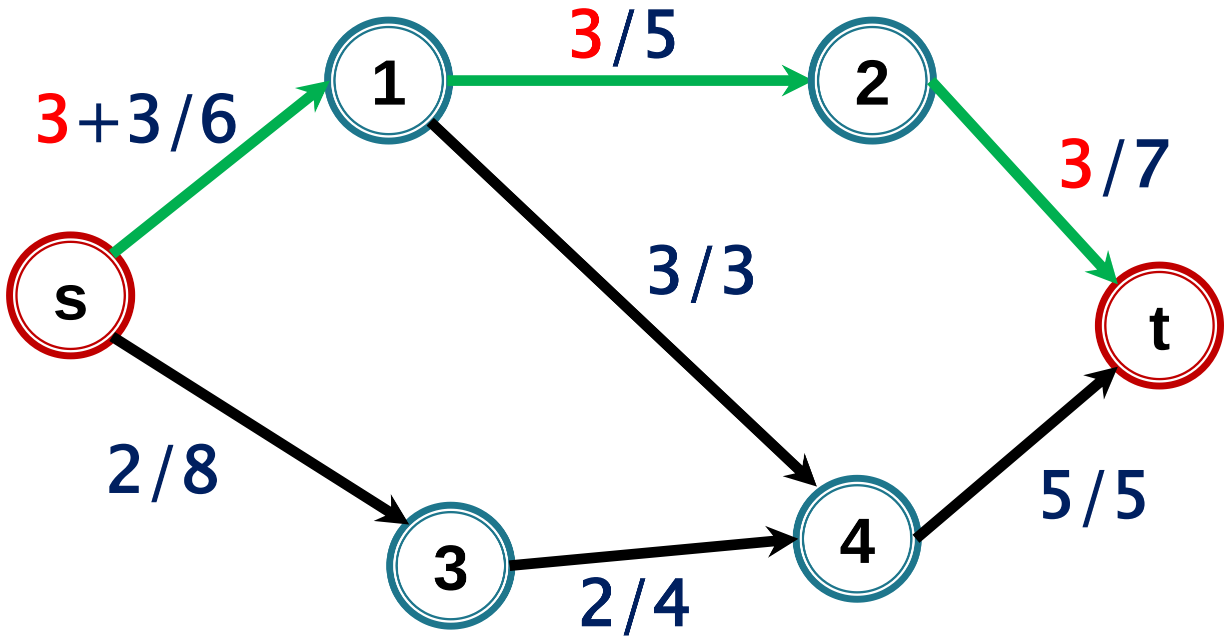
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
2+3/5
s
1
2
3
4
t

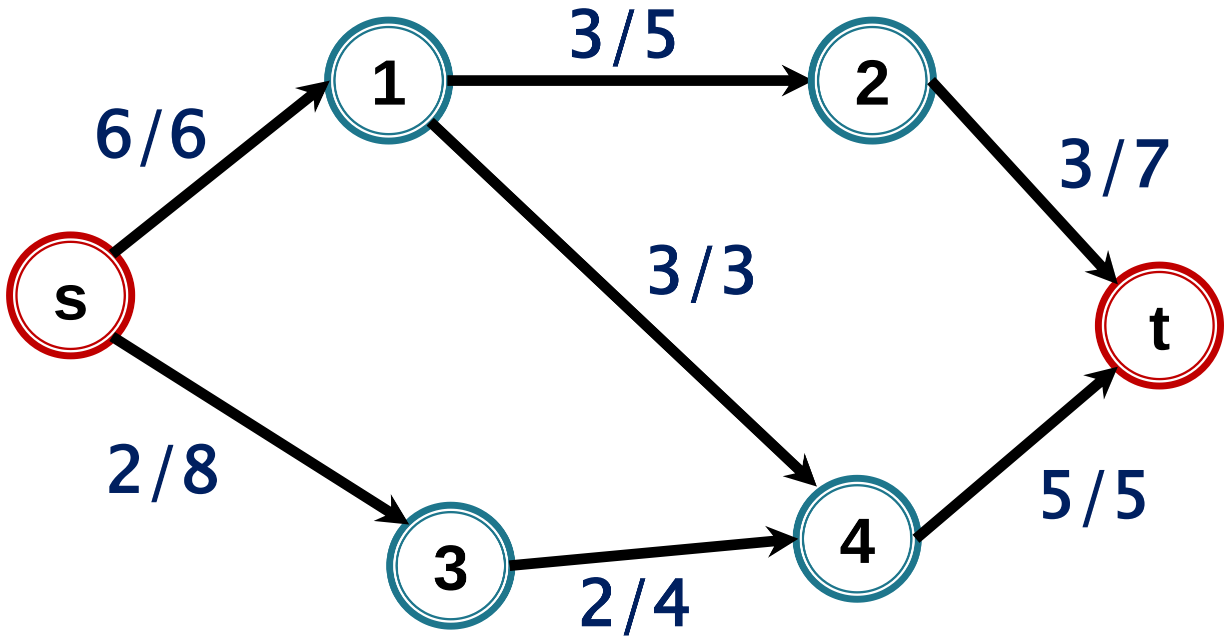


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5

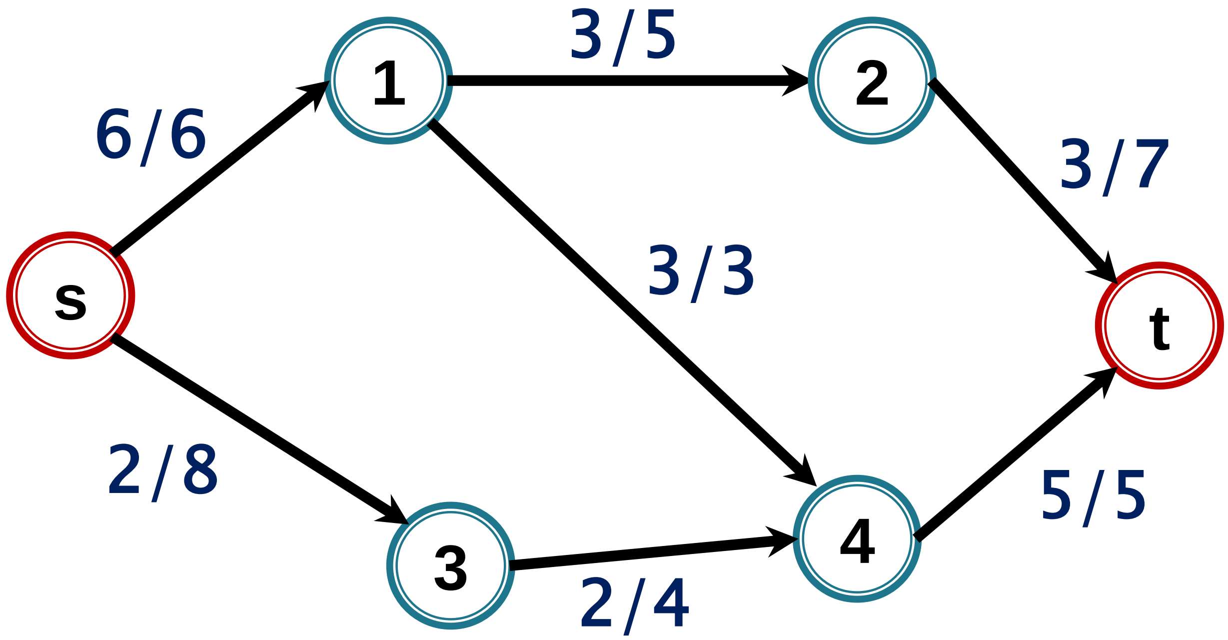


s
1
2
3
4
t
3/6
0/5
0/7
3/3
2/8
2/4
5/5


3+3/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
1
2
3
4
t

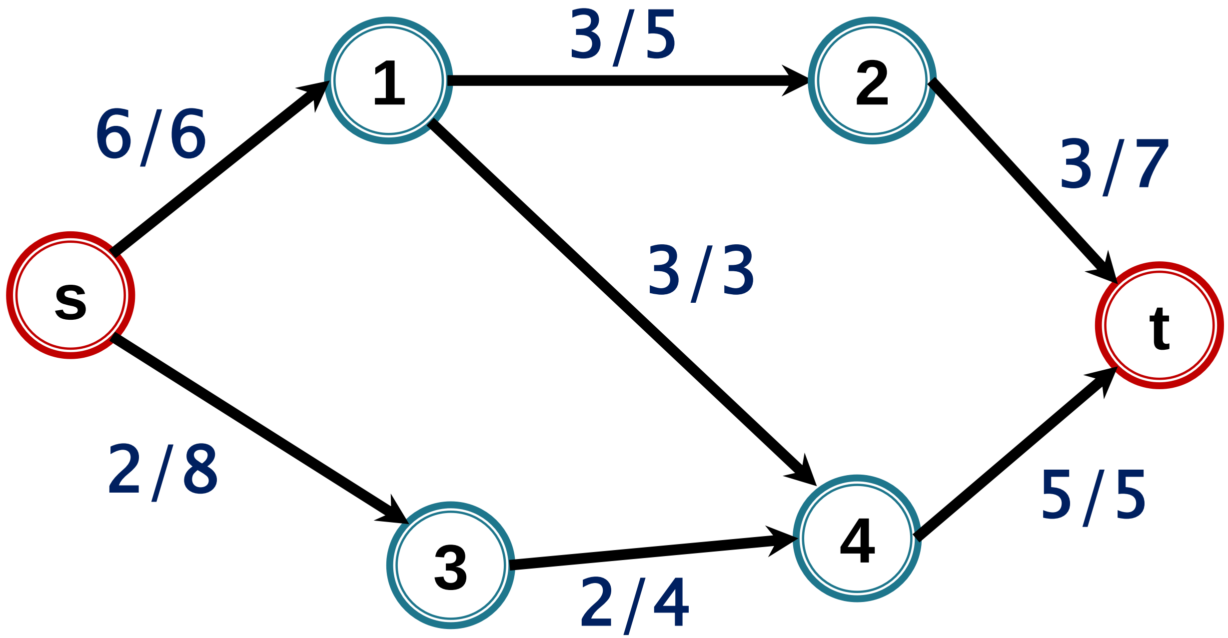


3/5
6/6
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
1
2
s
t
3
4

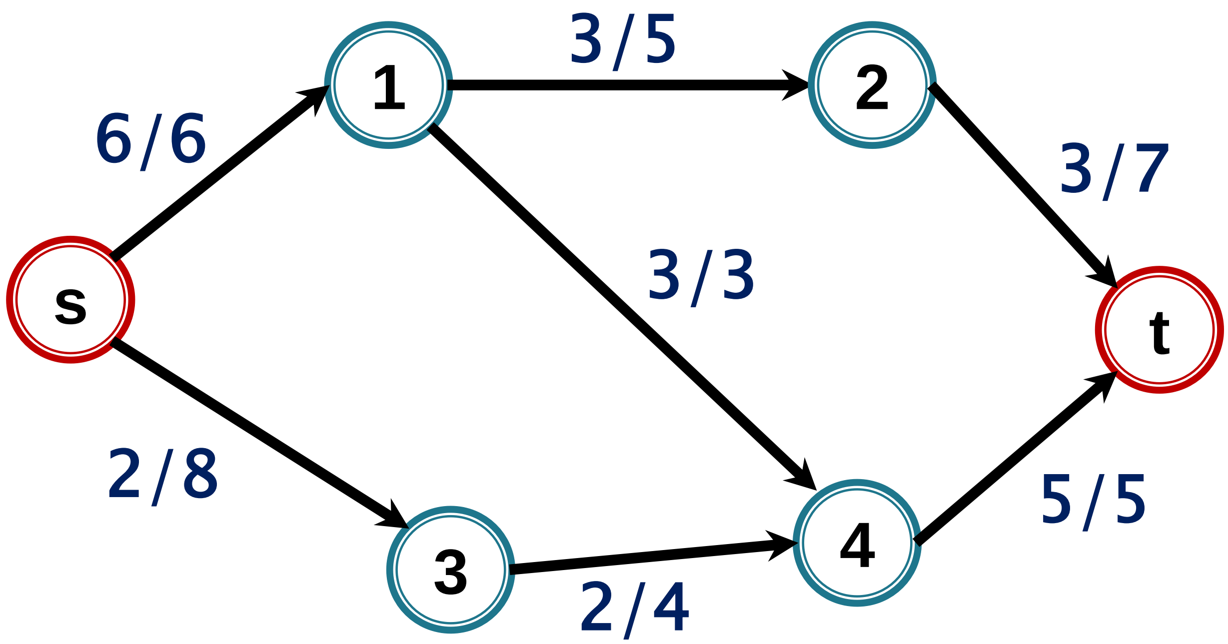


Nu mai putem trimite flux de la s la t

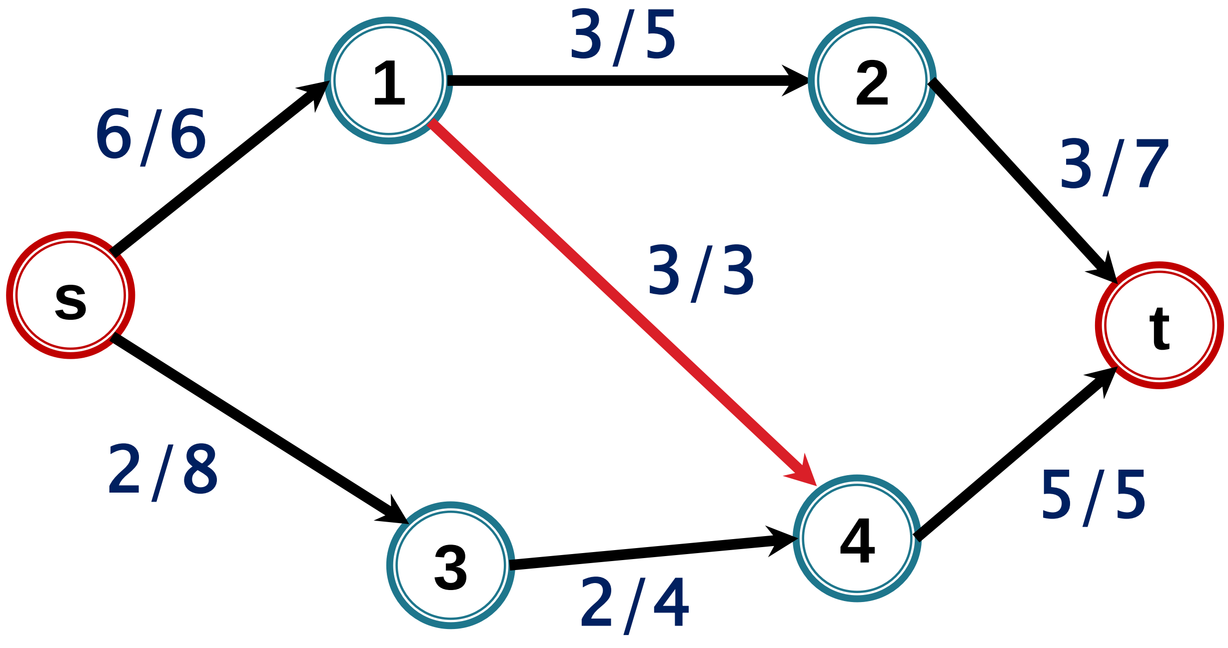
(nu mai există drumuri de la s la t pe care putem crește fluxul)

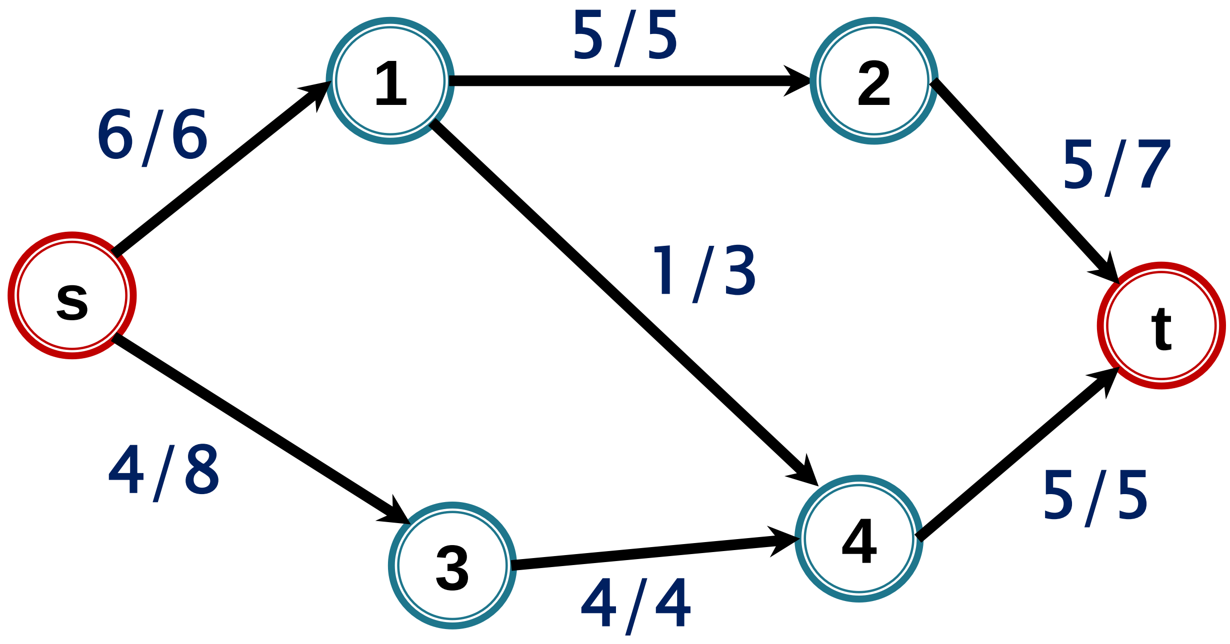


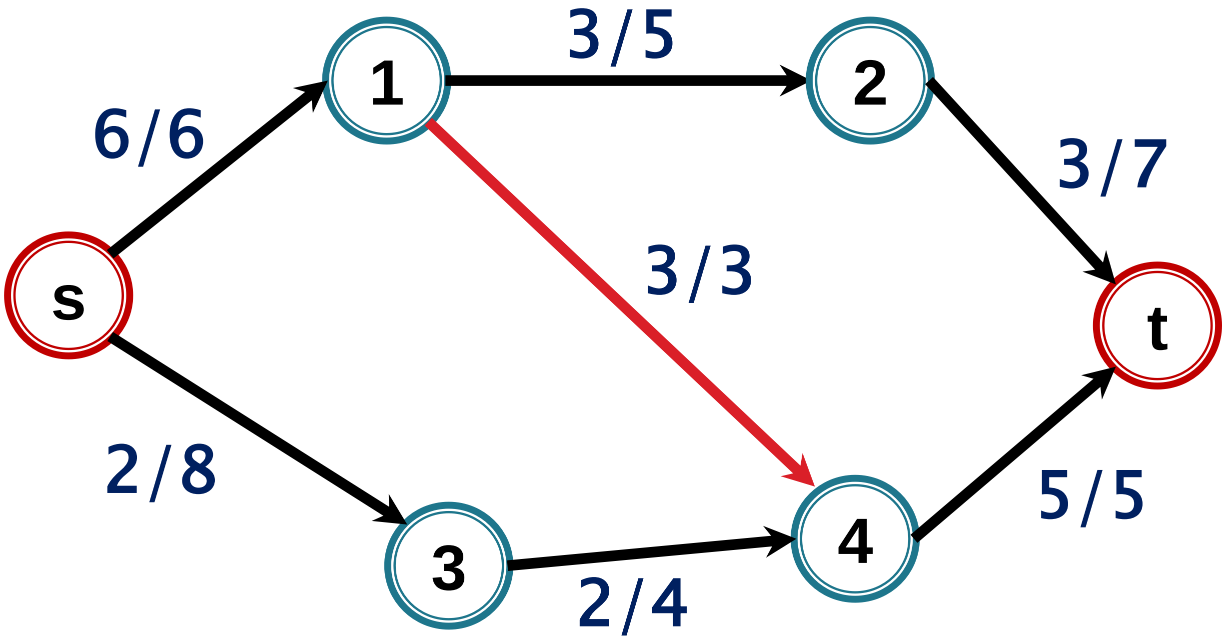
Este maxim fluxul?

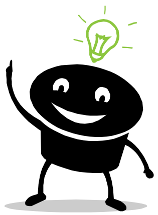


Nu este cantitatea maximă pe care o putem trimite, am trimis greşit pe arcul (1,4) (pe drumul [s, 1, 4, t])

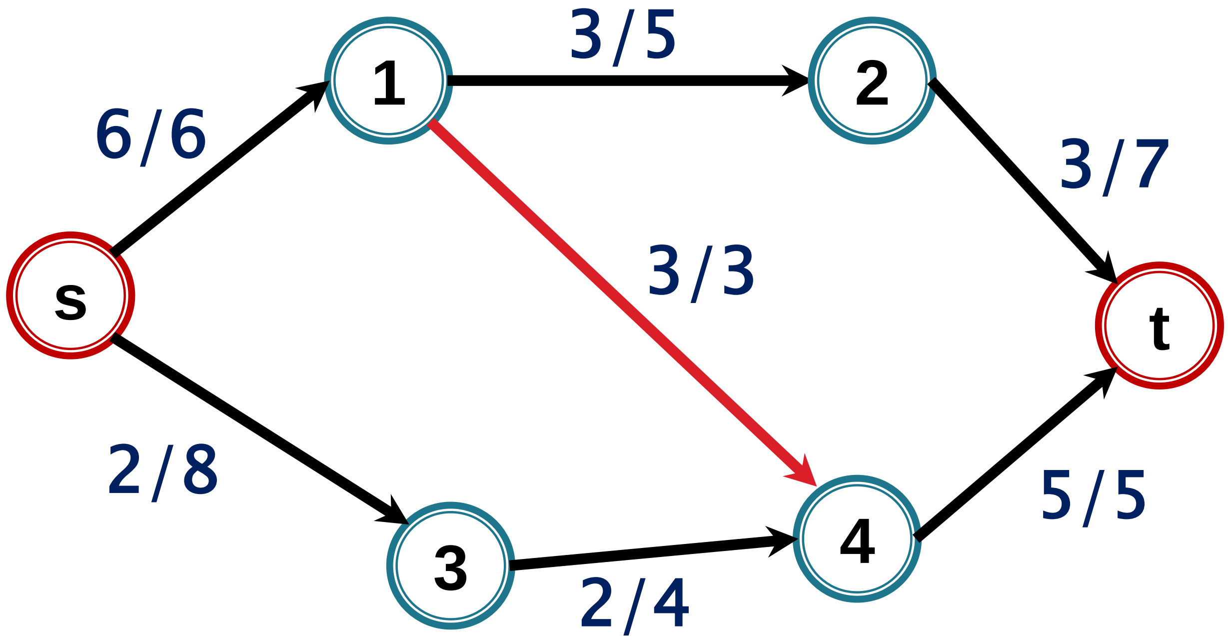

3/5
1
2
6/6
3/7
s
3/3
t
2/8
5/5
3
4
2/4

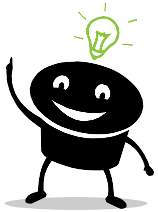

5/5
1
2
6/6
5/7
1/3
s
t
4/8
5/5
3
4
4/4



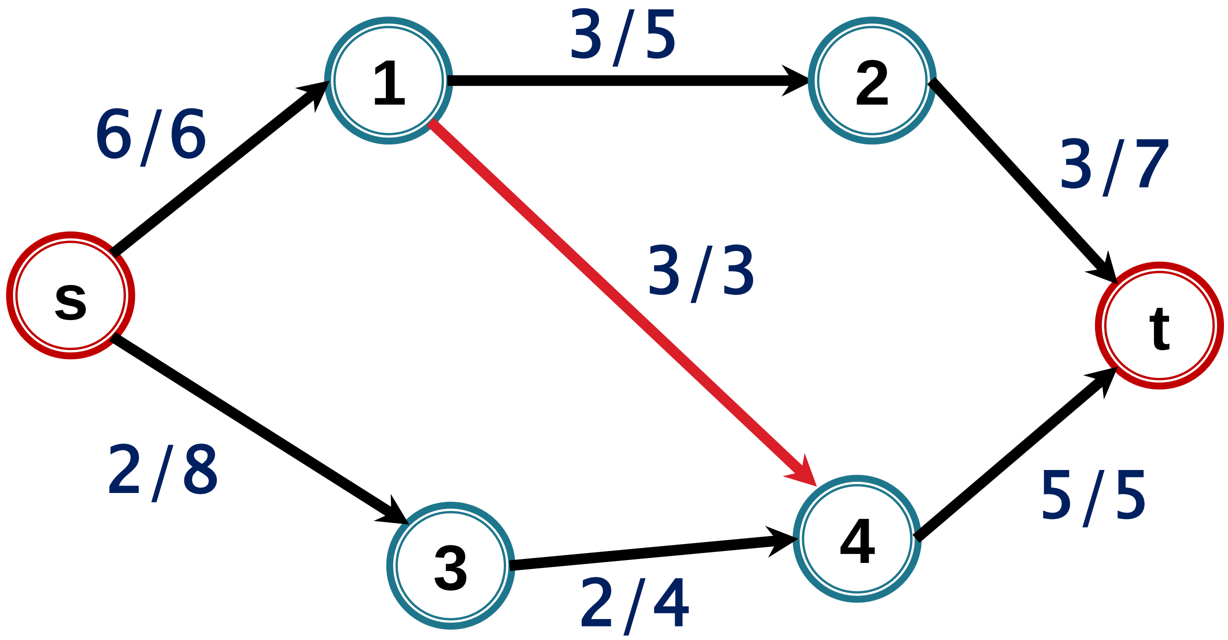


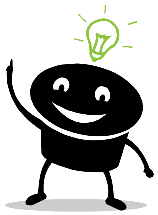
Trebuie să putem corecta (să trimitem flux înapoi pe un arc, pentru a fi direcţionat prin alte arce către destinaţie)



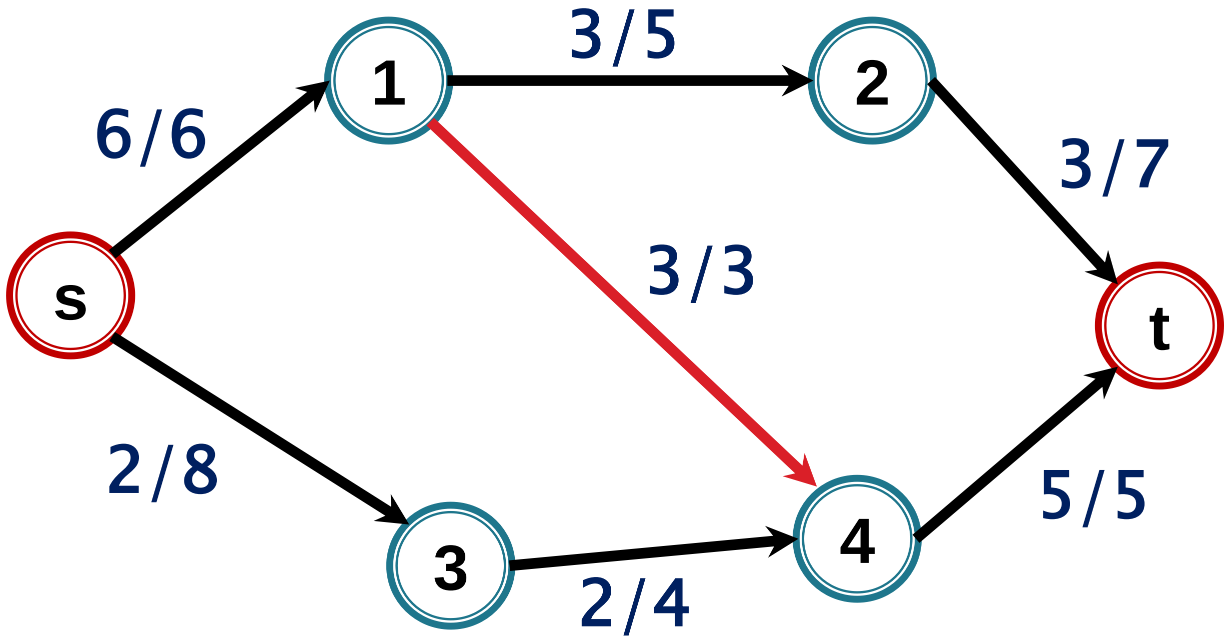


- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)

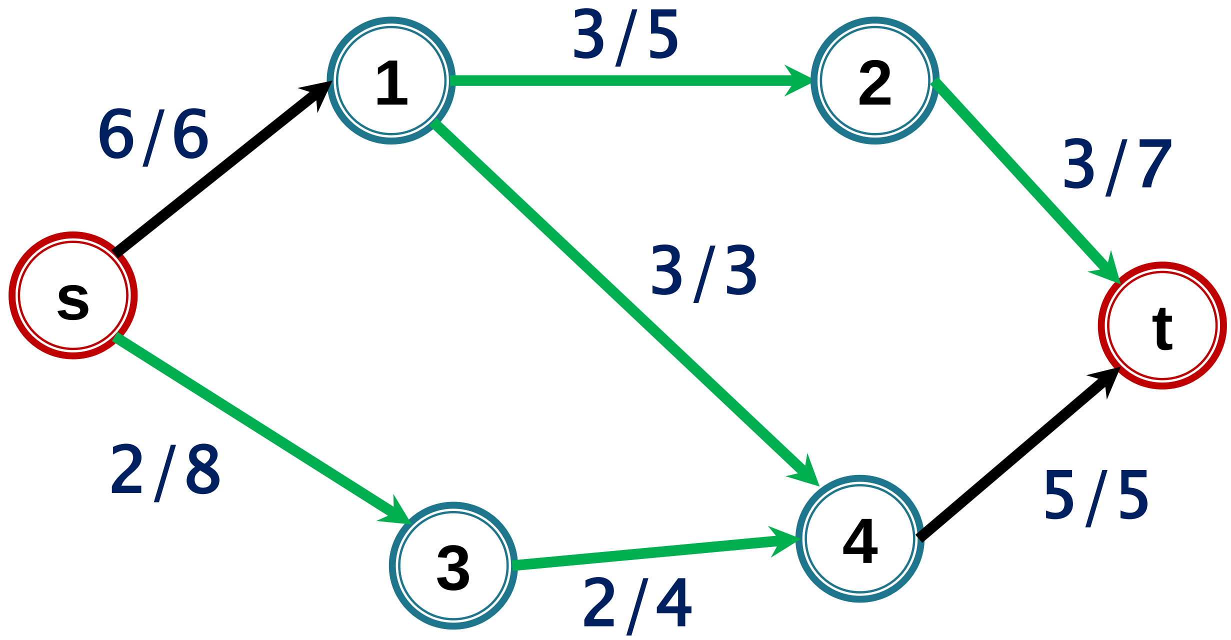




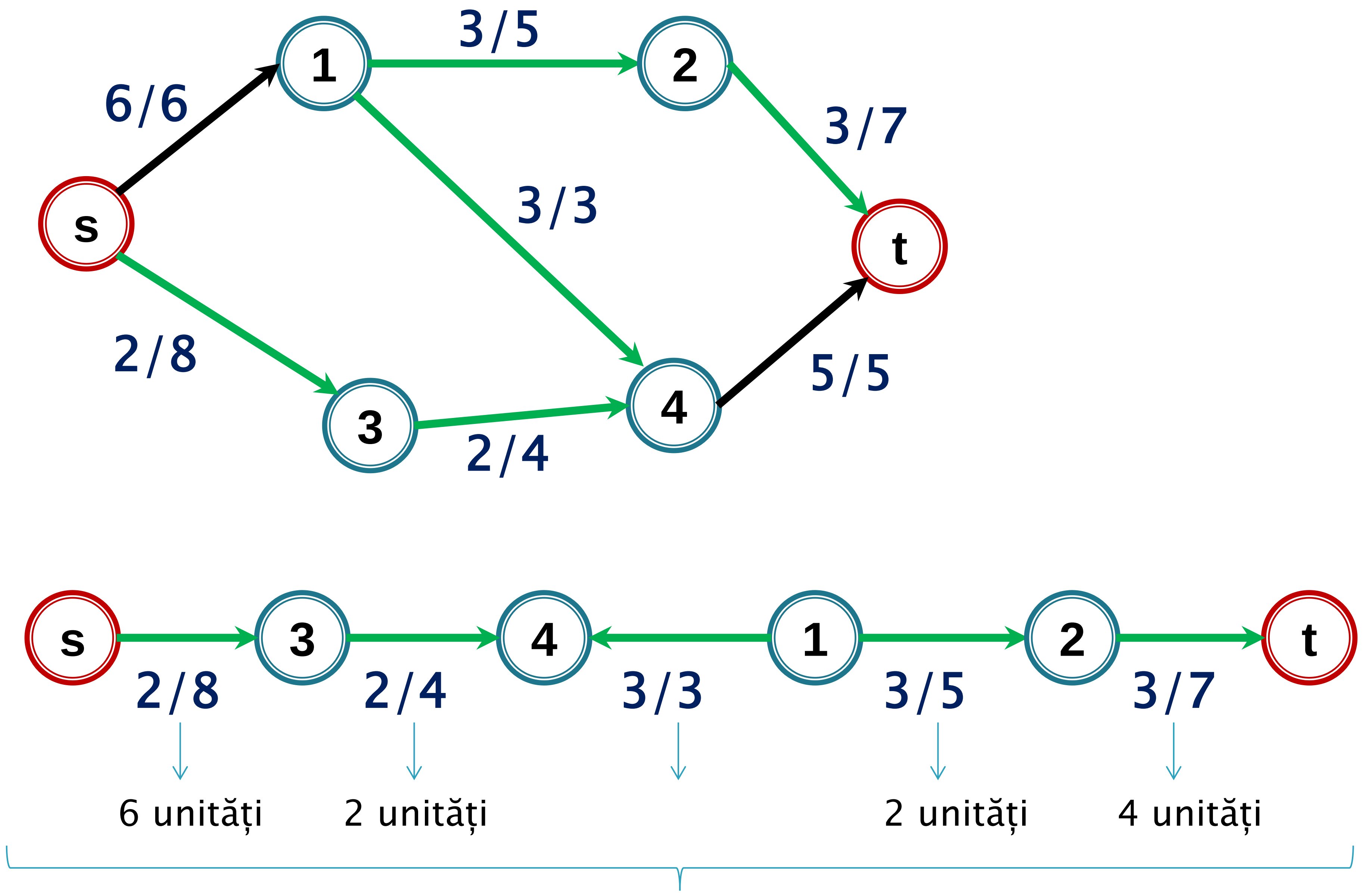
- Trimitem unităţi de flux înapoi pe arcul (1,4)
- Corecţia trebuie făcută pe un lanţ de la s la t, nu doar pe un arc, altfel fluxul (marfa) va rămâne într-un vârf intermediar



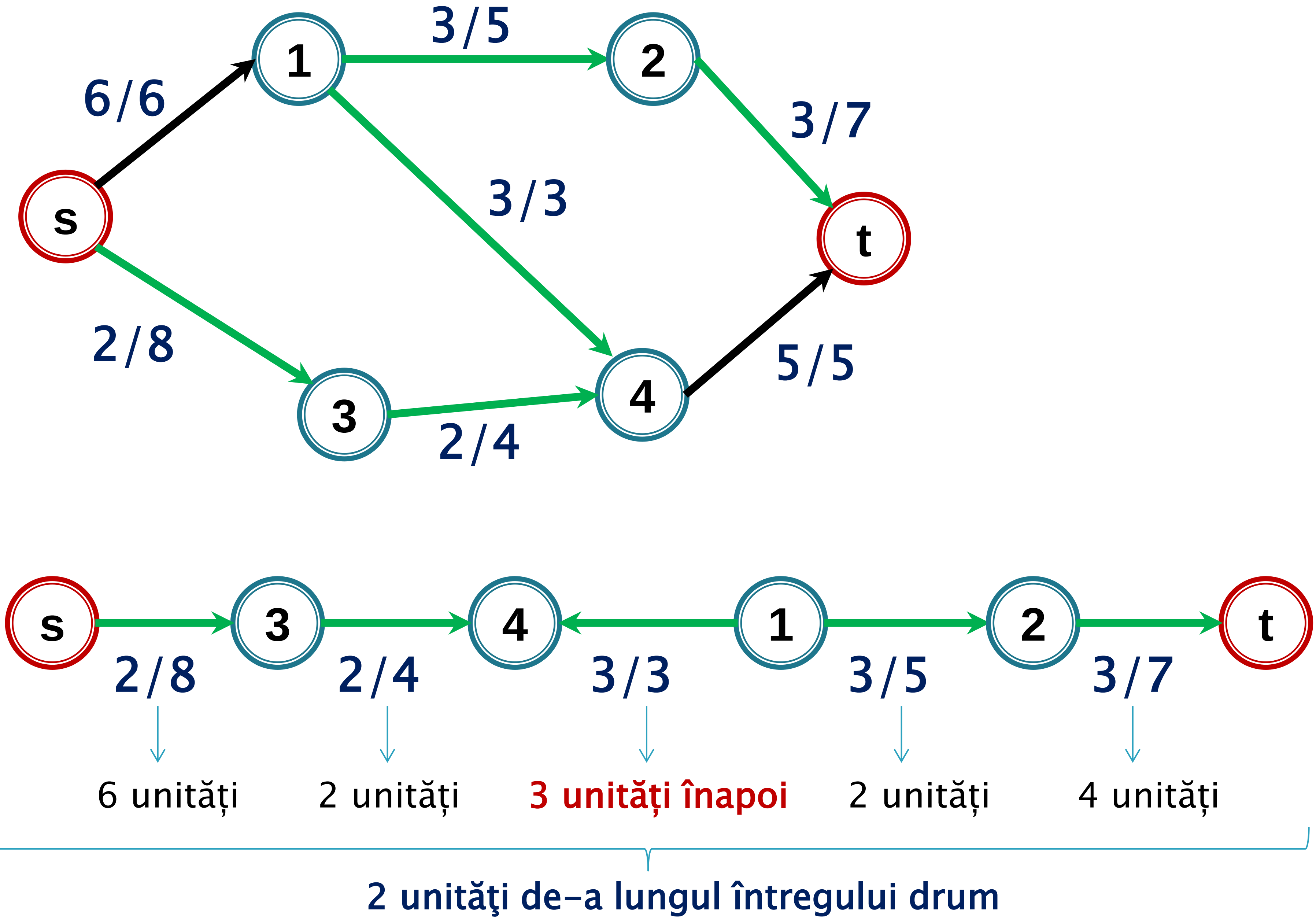
Determinăm un LANȚ (nu drum) de la s la t pe care putem modifica fluxul


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

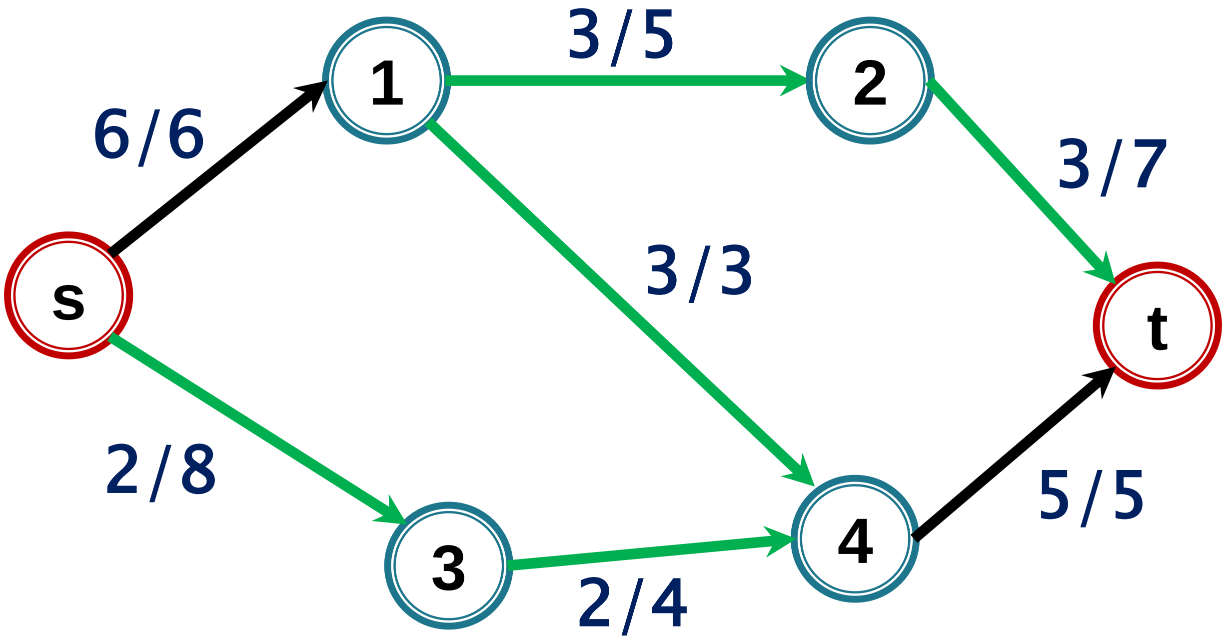

s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7



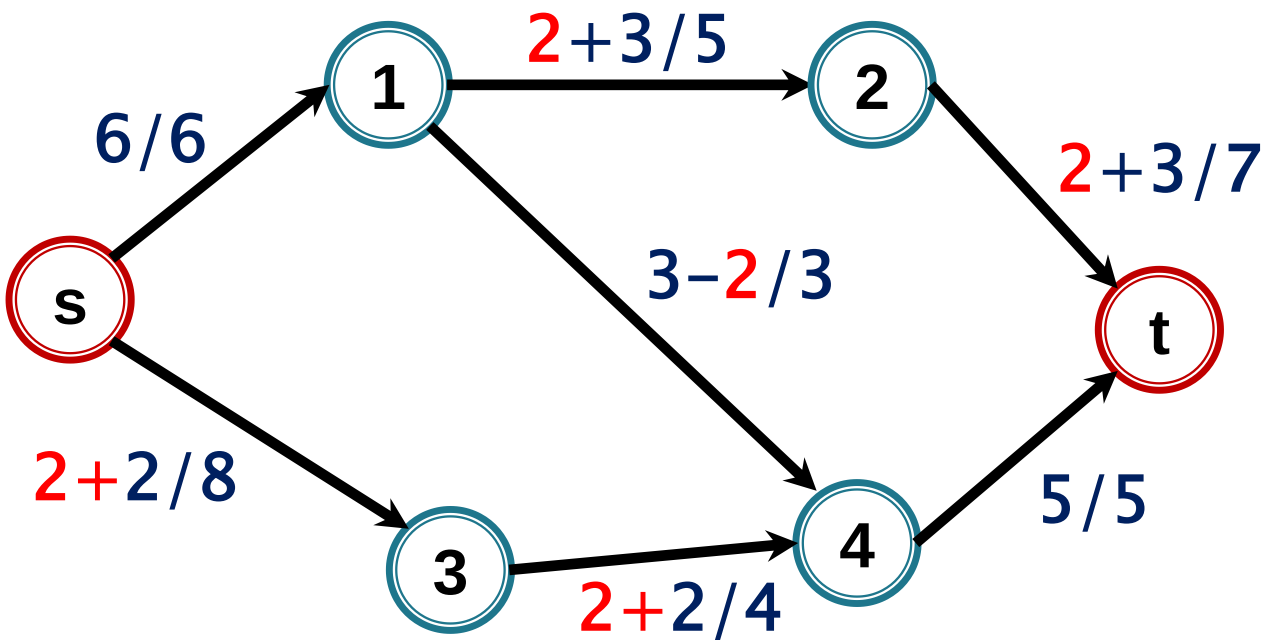
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
2 unități
4 unități



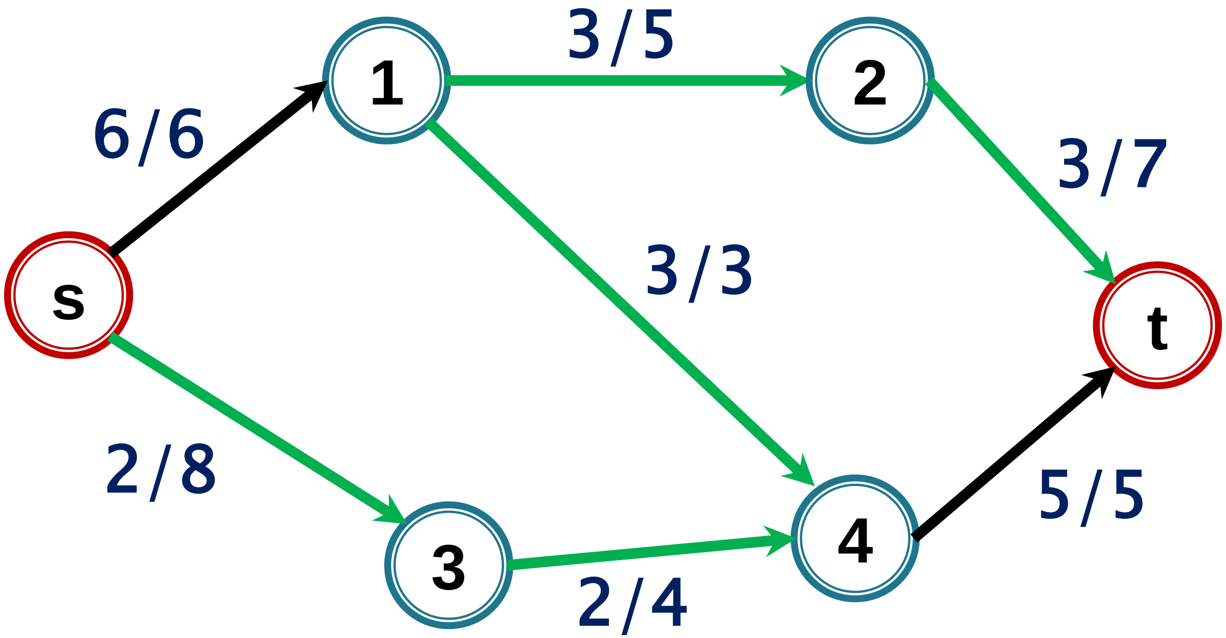
s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5
s
3
4
1
2
t
2/8
2/4
3/3
3/5
3/7
6 unități
2 unități
3 unități înapoi
2 unități
4 unități
2 unităţi de-a lungul întregului drum

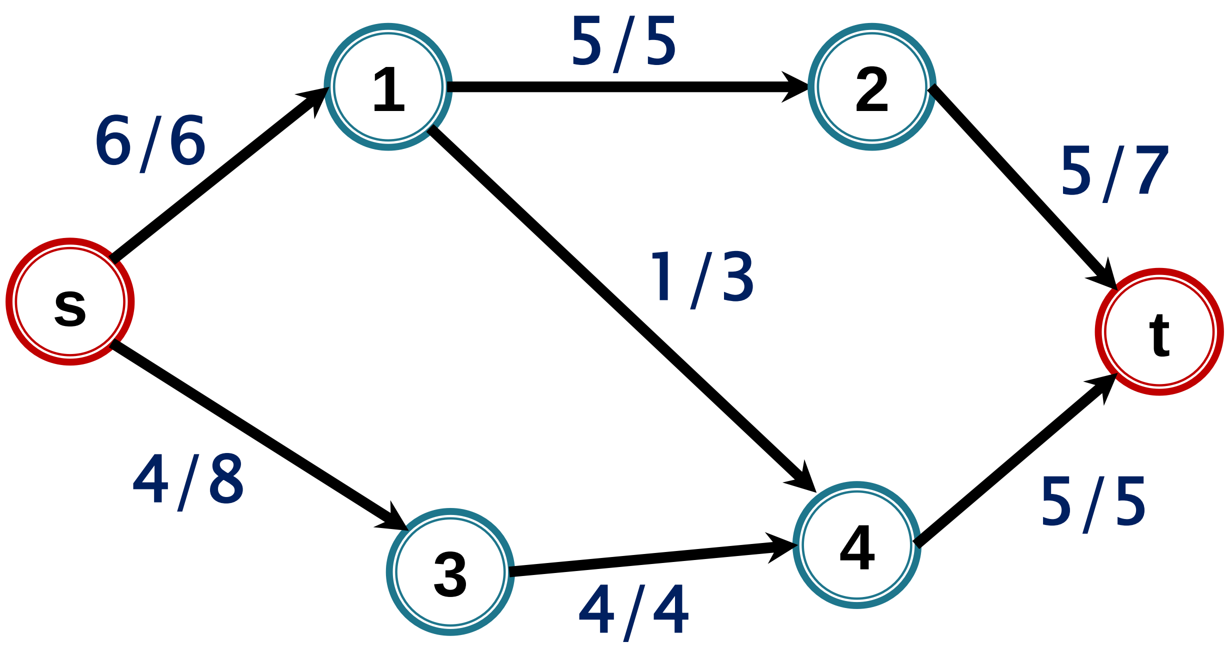


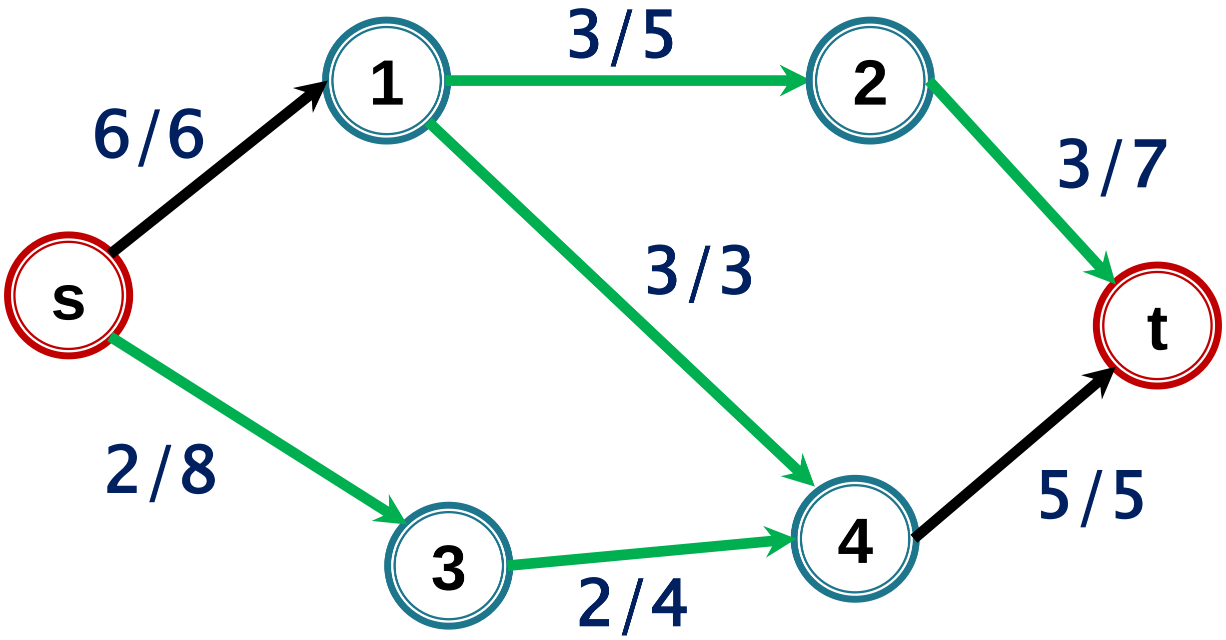
3/5
6/6
3/7
3/3
2/8
5/5
2/4
1
2
s
t
3
4



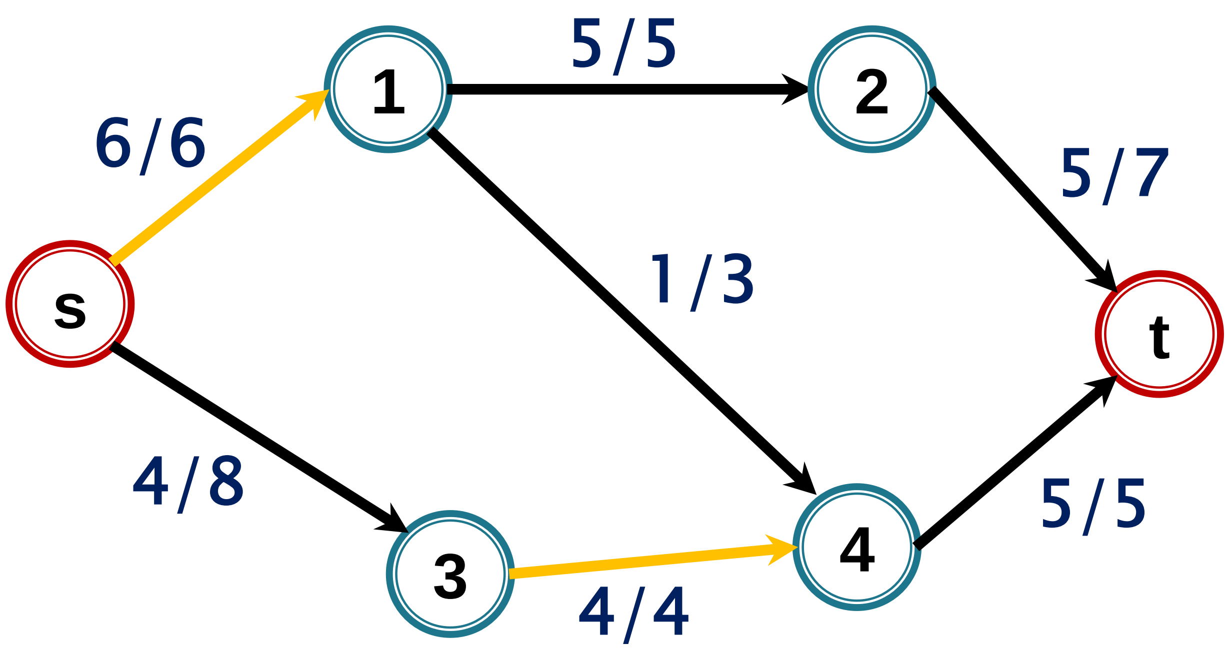
2+3/5
6/6
2+3/7
3−2/3
2+2/8
5/5
2+2/4
1
2
s
t
3
4


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5


s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5



s
1
2
3
4
t
6/6
5/5
5/7
1/3
4/8
4/4
5/5

Definiţii

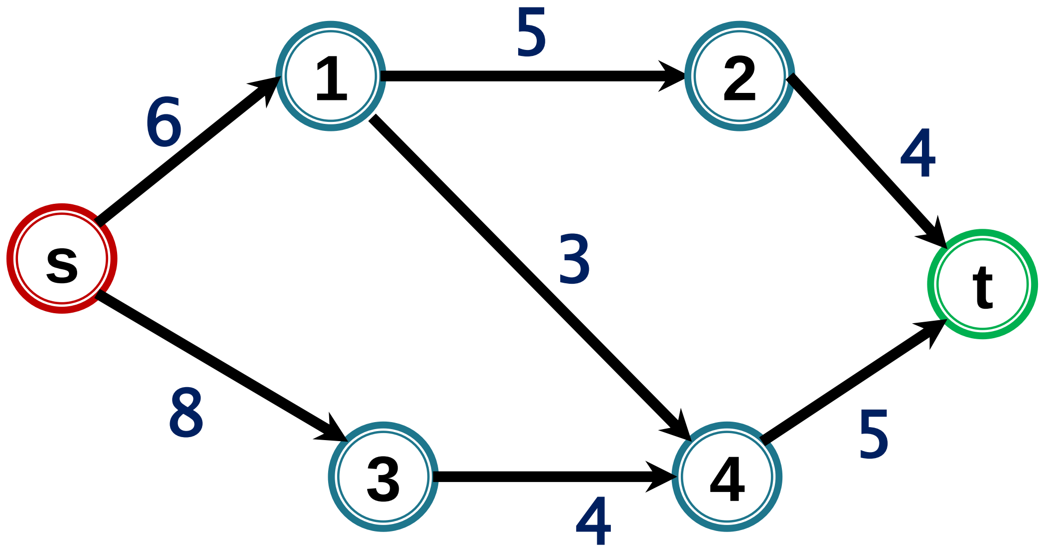
- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$

- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
    - S, I , T disjuncte, nevide
    - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
    - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
    - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**

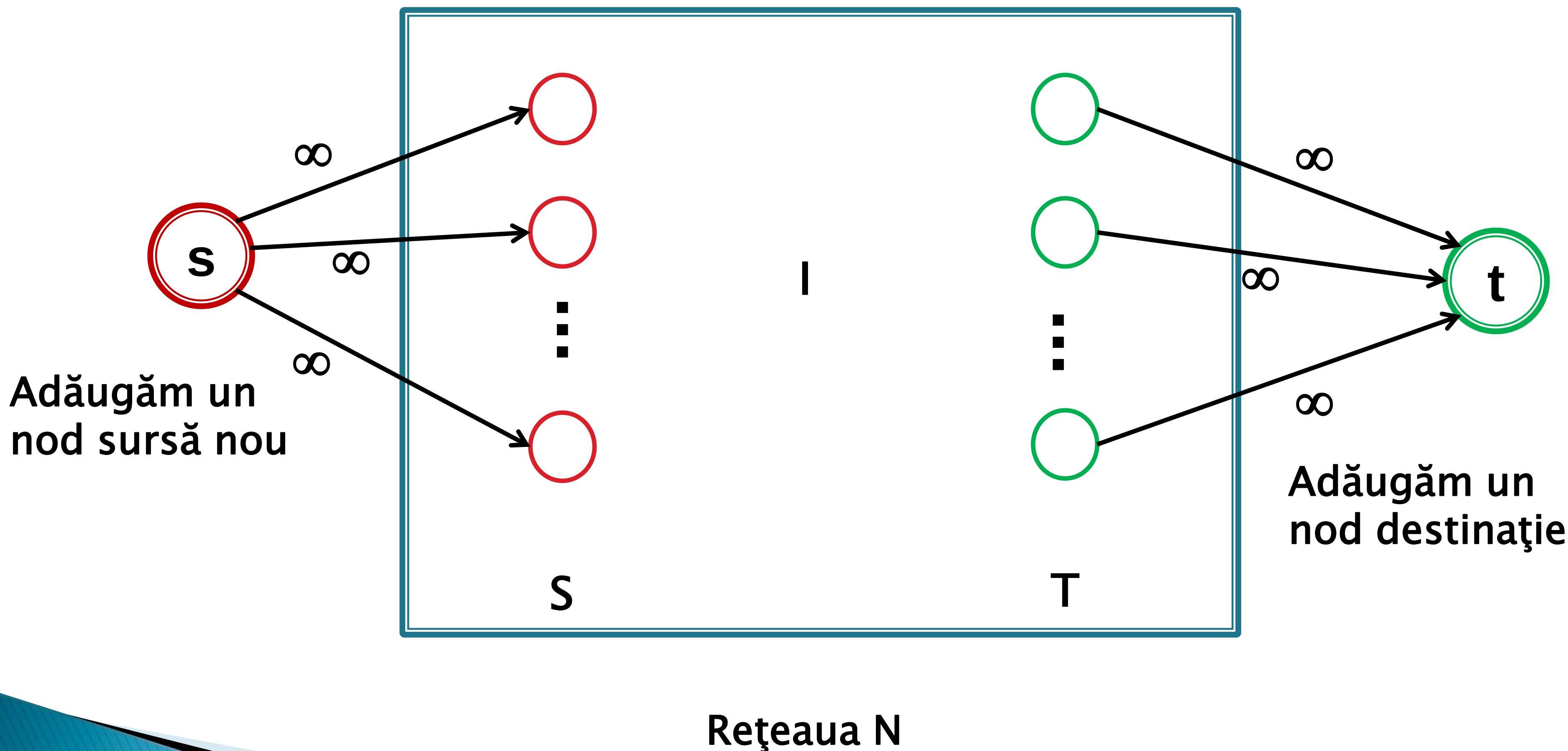
- **Reţea de transport** $N = (G, S, T, I, c)$ unde
  - $G = (V, E)$ – graf orientat cu
    - $V = \mathbf{S} \cup \mathbf{I} \cup \mathbf{T}$
    - S, I , T disjuncte, nevide
    - S – **mulţimea surselor (intrărilor)**
    - T – **mulţimea destinaţiilor (ieşiri)**
    - I – **mulţimea vârfurilor intermediare**
  - $c : E \to \mathbb{N}$ funcţia **capacitate** (cantitatea maximă care poate fi transportată prin fiecare arc)

Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – o singură sursă
- $T = \{t\}$ – o singură destinație
- $d^-(s) = 0$ – în sursă nu intră arce
- $d^+(t) = 0$ – din destinație nu ies arce



- **Ipotezele nu sunt restrictive,** orice reţea poate fi transformată într-o reţea echivalentă de acest tip (din punct de vedere al valorii fluxului)



Ipoteze pentru rețeaua N

- $S = \{s\}$ – **o singură sursă**
- $T = \{t\}$ – **o singură destinație**
- $d^{-}(s) = 0$ – **în sursă nu intră arce**
- $d^{+}(t) = 0$ – **din destinație nu ies arce**
- **orice vârf este accesibil din s**

- Un **flux** într-o reţea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcţie $f : E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

- Un **flux** într-o reţea de transport $N = (G, S, T, I, c)$ este o funcţie $f: E \to \mathbb{N}$ cu proprietăţile

  1) $0 \leq f(e) \leq c(e), \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

- Un **flux** într-o reţea de transport N = (G, S, T, I, c) este o funcţie f : E → ℕ cu proprietăţile

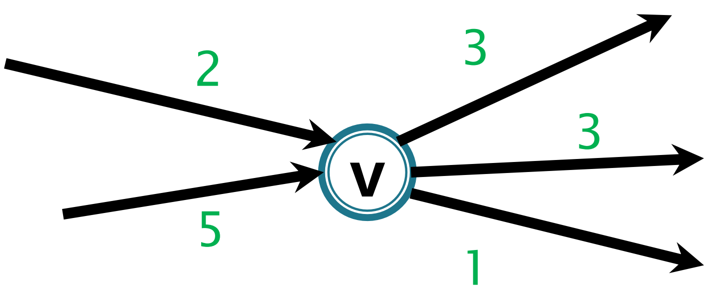
  1) $0 \le f(e) \le c(e),\ \forall\ e \in E(G)$ *condiţia de **mărginire***

  2) Pentru orice vârf **intermediar** $v \in I$

$$\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$$

*condiţia de **conservare a fluxului***

(fluxul total care intră în v = fluxul total care iese din v)



- Notaţii
  - $\overline{X}$
  - $f^{+}(v)$
  - $f^{-}(v)$
  - $f(X,Y)$, $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$
  - $f^{+}(X)$, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$
  - $f^{-}(X)$

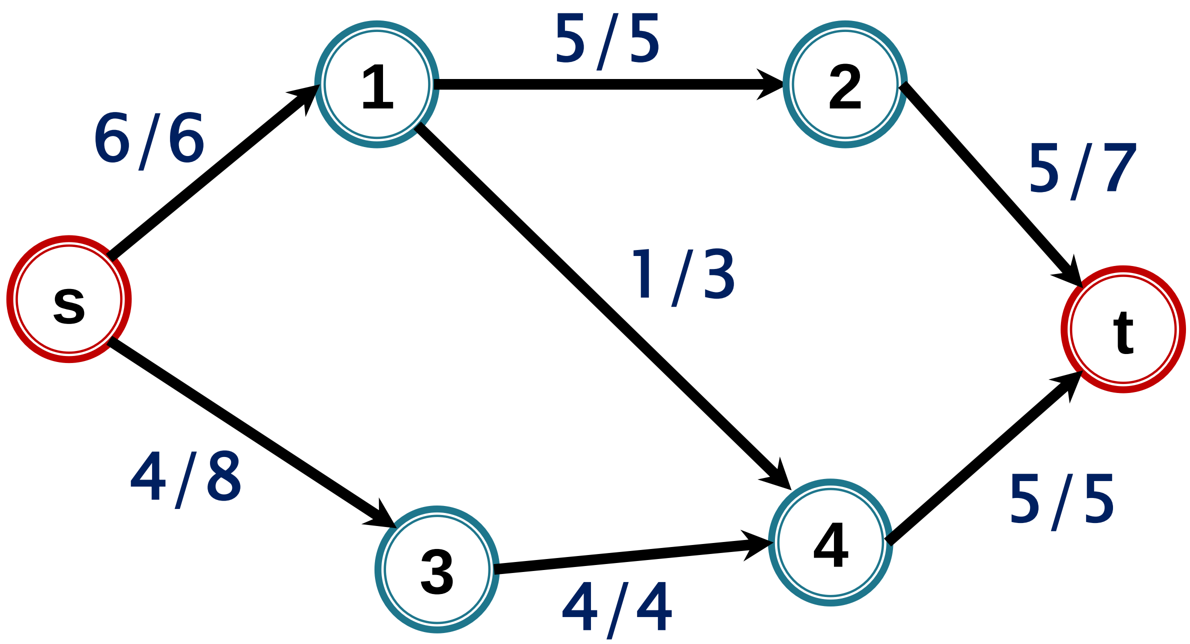
- În general, pentru orice funcție $g : E \to \mathbb{N}$ **vom folosi notaţii similare**

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s) = \sum_{su \in E} f(su)$$



val(f) = ?

- **Valoarea fluxului** *f* se defineşte ca fiind

$$val(f) = f^{+}(s)$$

- Vom demonstra ulterior că are loc relaţia

$$val(f) = f^{+}(s) = f^{-}(t)$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \mathbf{max}\{val(f) \mid f \text{ } \mathbf{este\ flux\ în\ N}\}$$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Un flux f* se numeşte **flux maxim în N** dacă

$$val(f^*) = \max\{val(f) \mid f \text{ este flux în N}\}$$

- **Observaţie**: Orice reţea admite cel puţin un flux, spre exemplu fluxul vid:

  $f(e) = 0, \forall e \in E$

Problema fluxului maxim

- Fie N o reţea.

  Să se determine f* un **flux maxim în N**

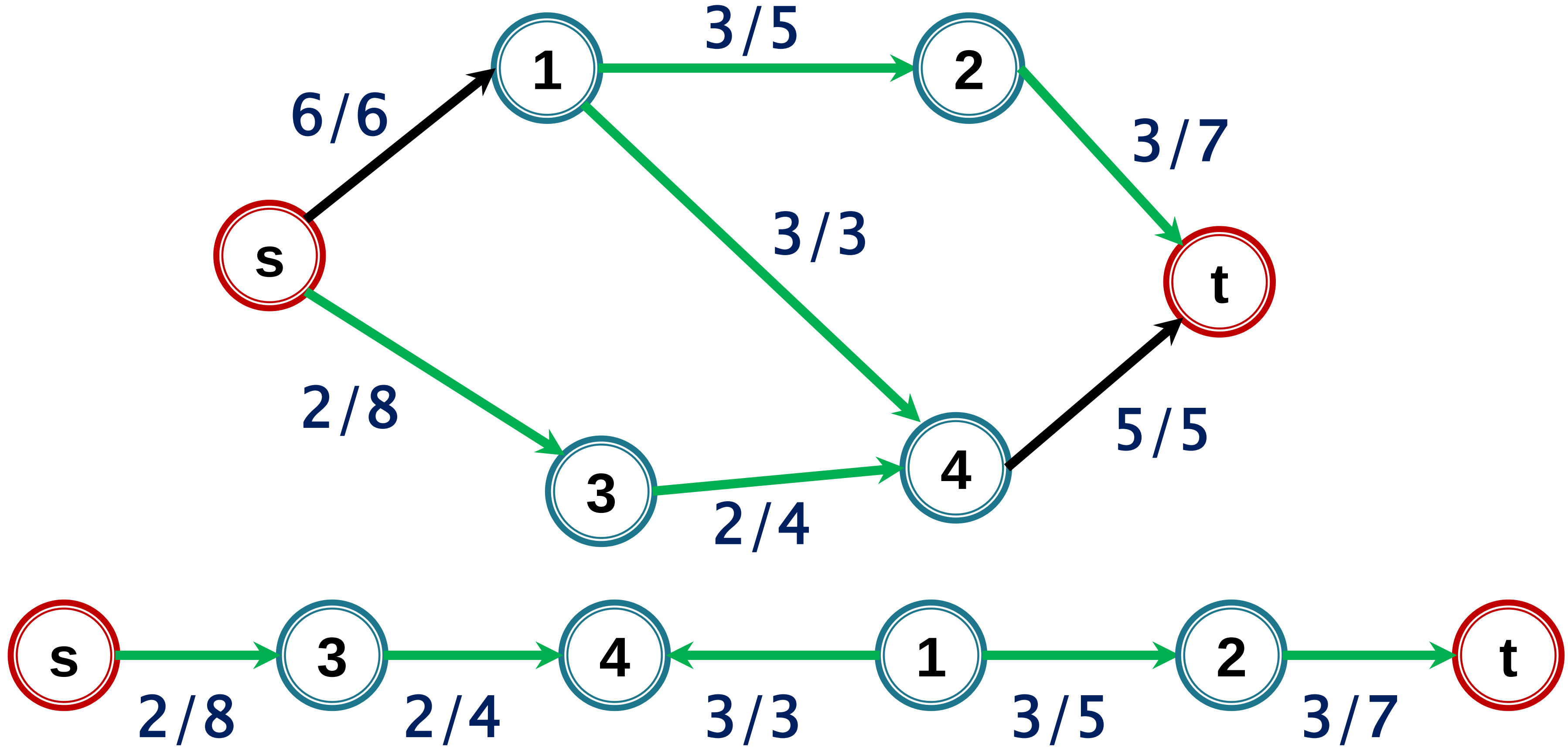
Algoritmul FORD-FULKERSON

de determinare a unui flux maxim

+ a unei tăieturi minime

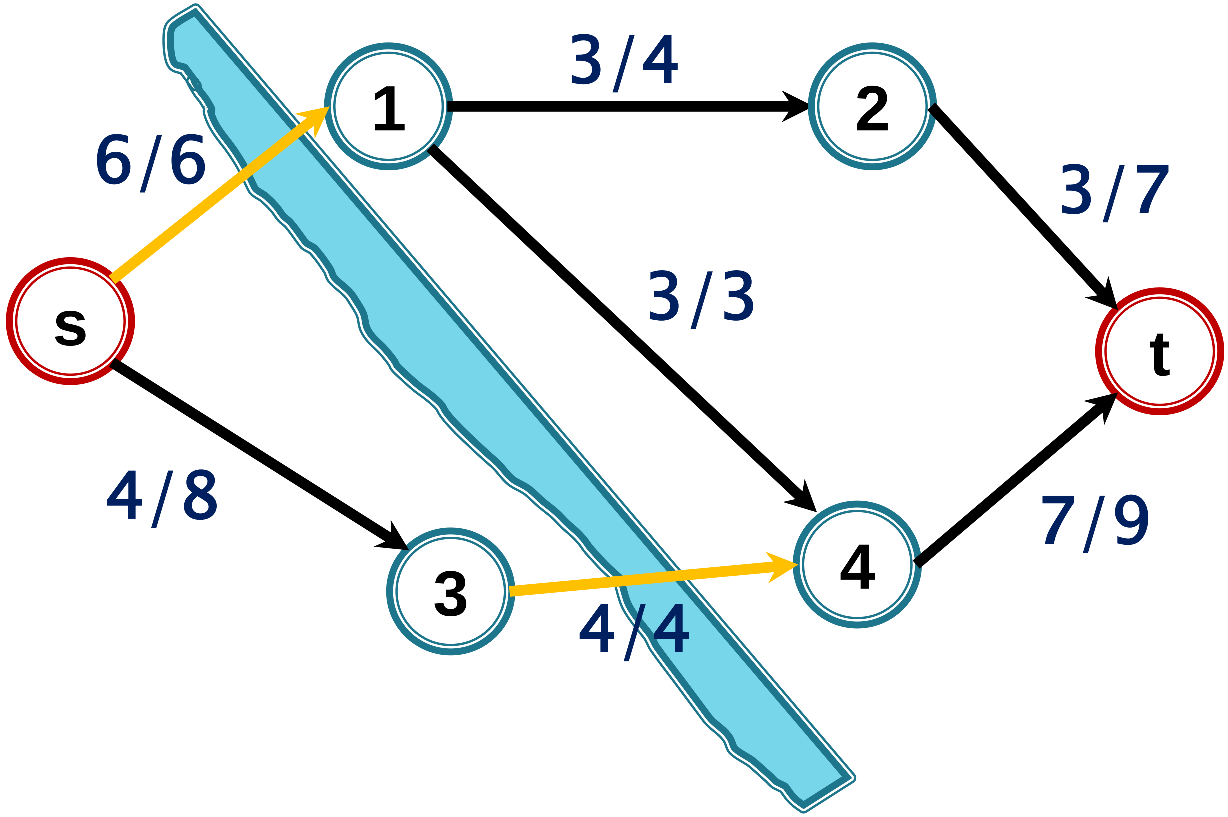
Algoritmul Ford-Fulkerson

Amintim din exemplele anterioare:



arc în sens invers,
putem trimite înapoi 3 unități de flux

arc în sens direct,
mai putem trimite 5−3=2 unități

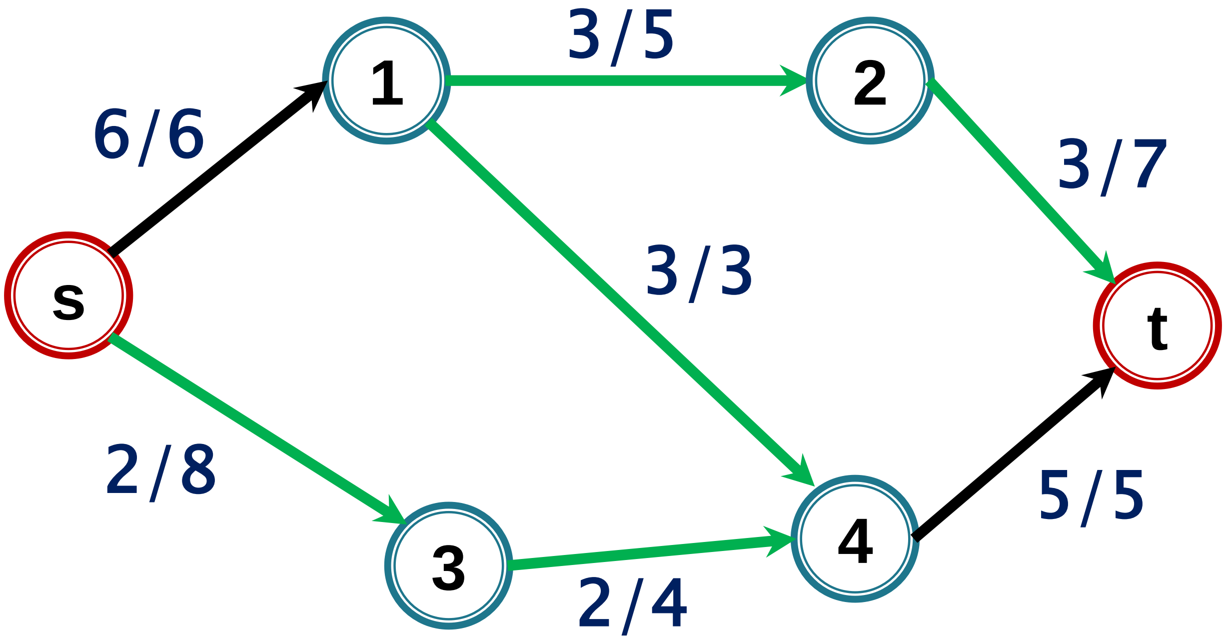


Fluxul este maxim – în mulțimea de arce evidențiată toate arcele au flux=capacitate și nu putem construi drumuri de la s la t care nu conțin arce din această mulțime (s-t tăietură)

Algoritmul Ford-Fulkerson

Definim noțiunile necesare descrierii și studiului algoritmului:

- **s-t lanț f-nesaturat**
  - arc direct
  - arc invers
  - capacitate reziduală arc, lanţ
- Operația de **revizuire a fluxului** de-a lungul unui s-t lanț *f-nesaturat*
- **Tăietură în rețea**
  - capacitatea unei tăieturi

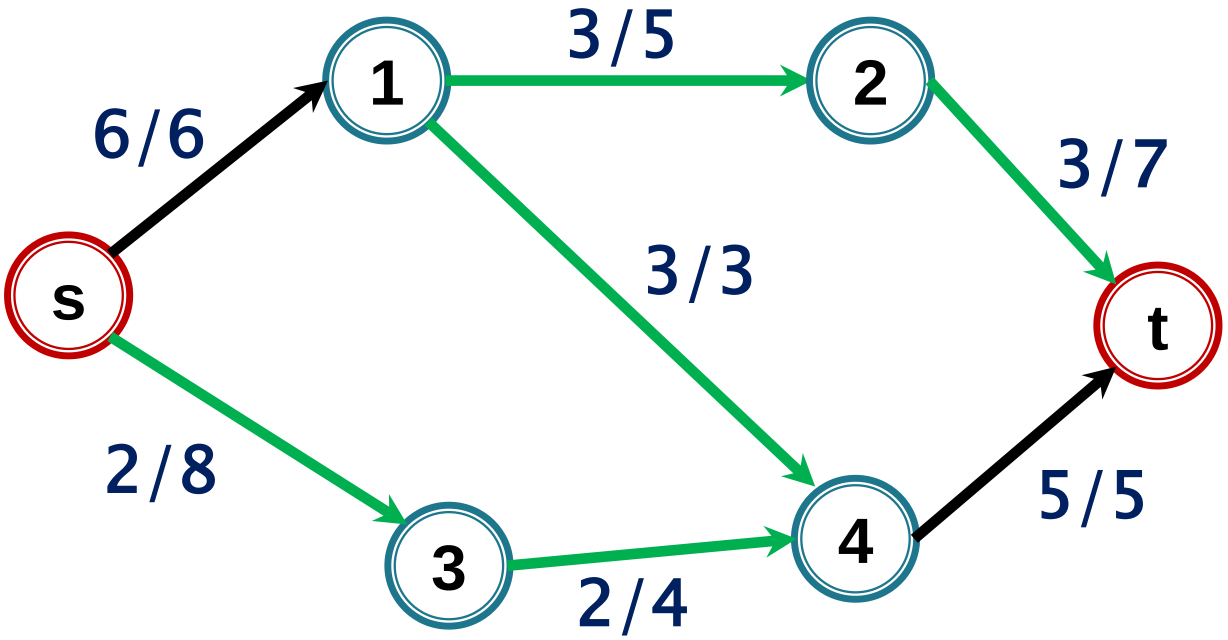


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5

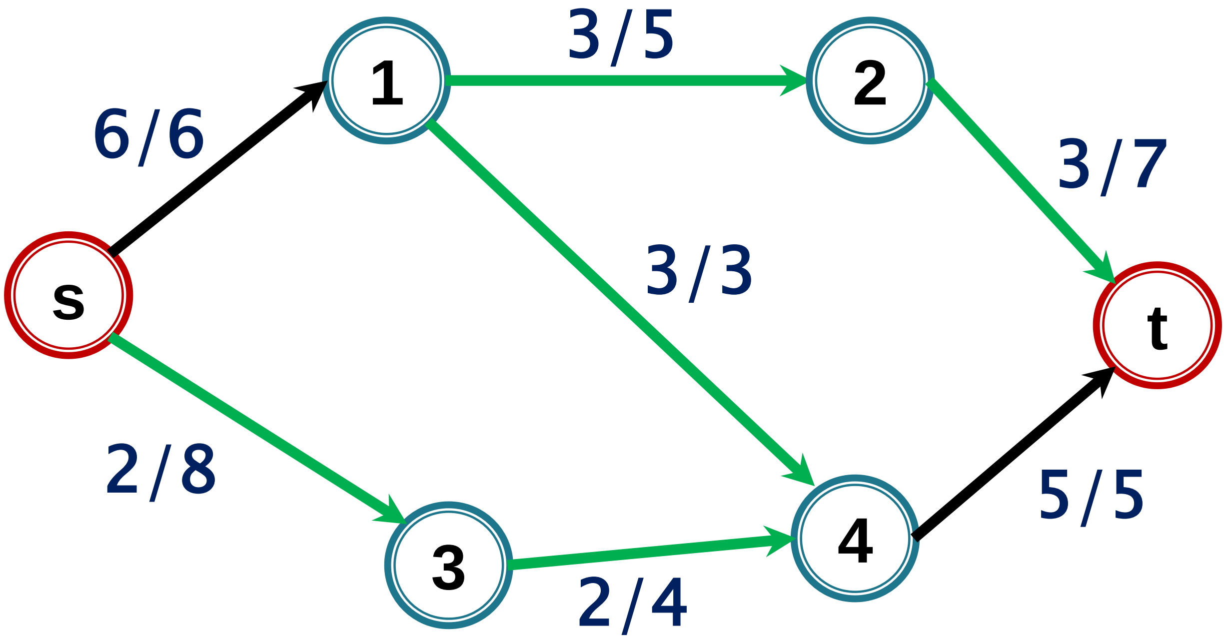
s
3
4
1
2
t
arc direct
arc invers

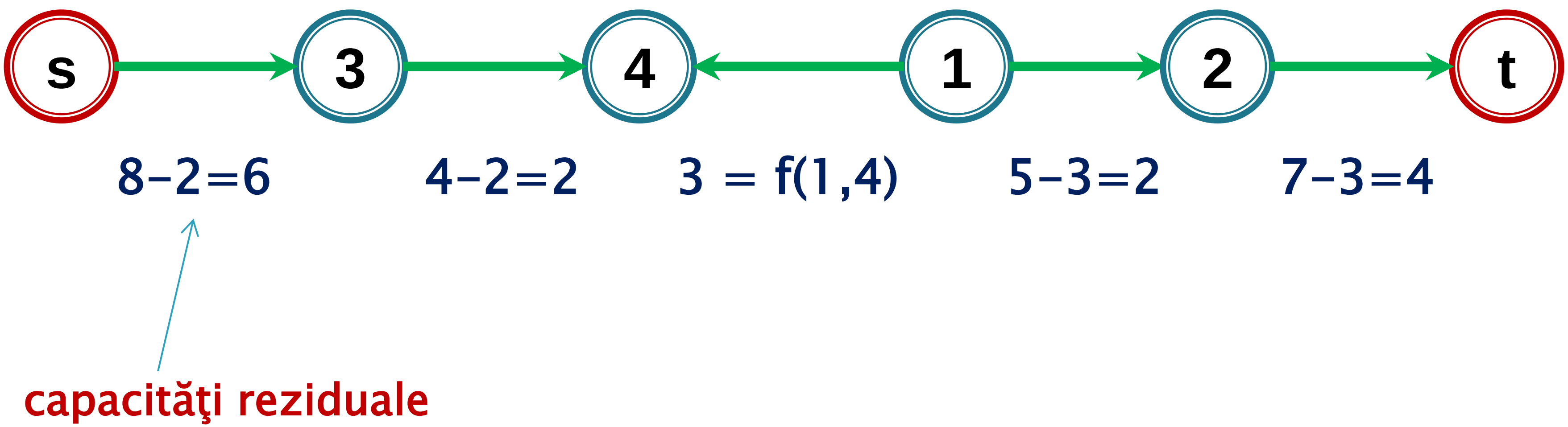
- Fie N reţea, f flux în N, P un s-t lanţ

- Asociem fiecărui arc *e* din P o pondere, numită **capacitate reziduală** în P



capacităţi reziduale?


s
1
2
3
4
t
6/6
3/5
3/7
3/3
2/8
2/4
5/5


s
3
4
1
2
t
8-2=6
4-2=2
3 = f(1,4)
5-3=2
7-3=4
capacităţi reziduale

- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

i(P) = ?

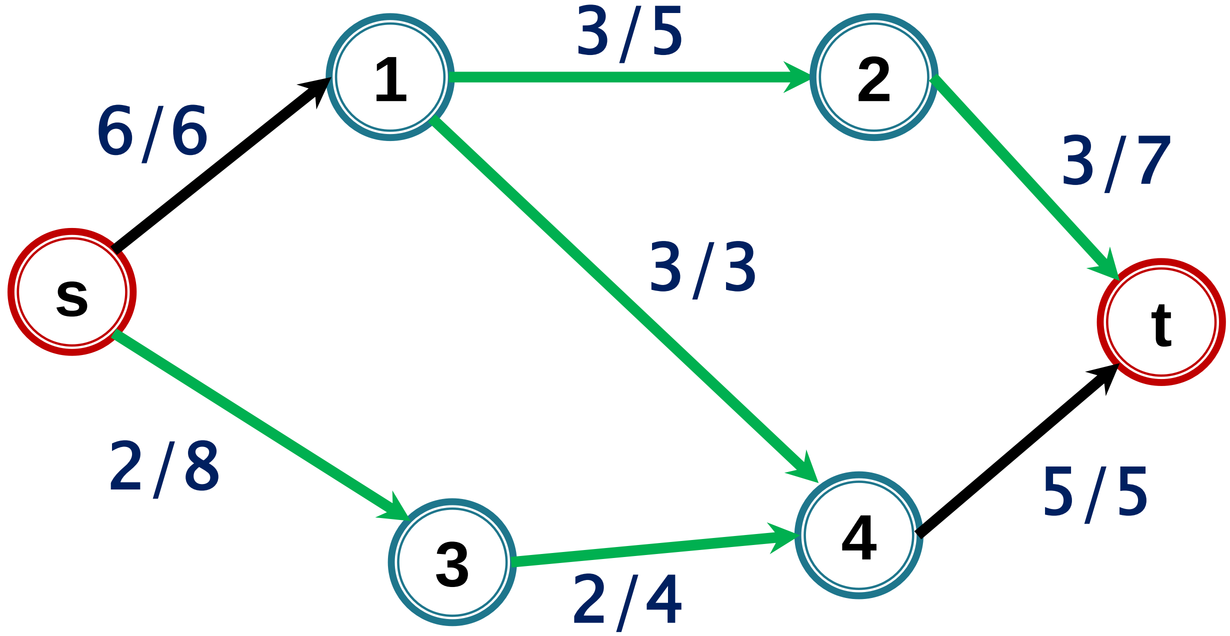
- **Capacitatea reziduală** a lanţului P

$$i(P) = \min\{6, 2, 3, 2, 4\} = 2$$

- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind $f' : E \to \mathbb{N}$,

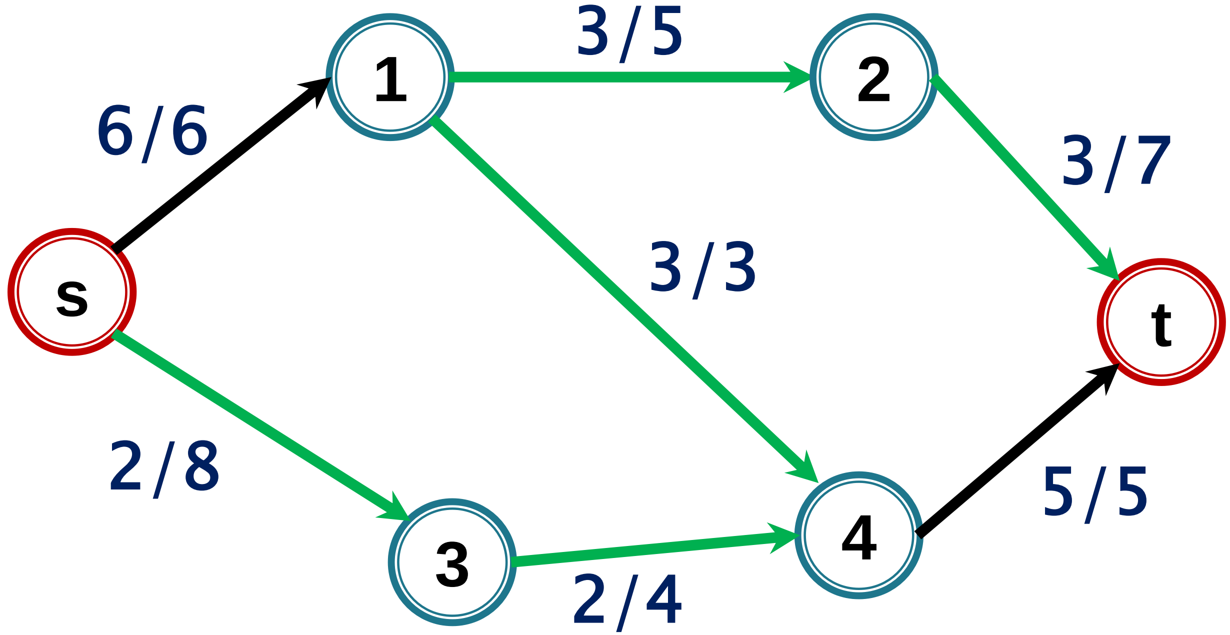
- Fie N- rețea, f flux în N, P un s-t lanţ **f-nesaturat**.
- **Fluxul revizuit de-a lungul lanţului P** se defineşte ca fiind $f' : E \to \mathbb{N}$,

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & \textbf{dacă } e \textbf{ este arc invers în } P \\ f(e), & \textbf{altfel} \end{cases}$$

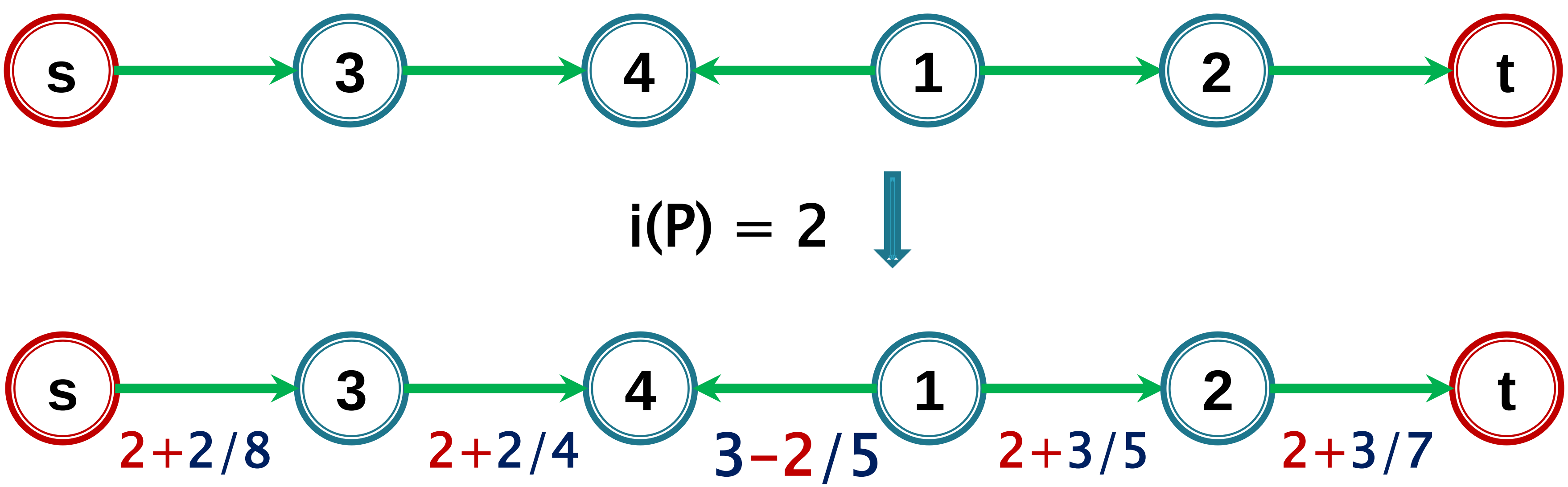


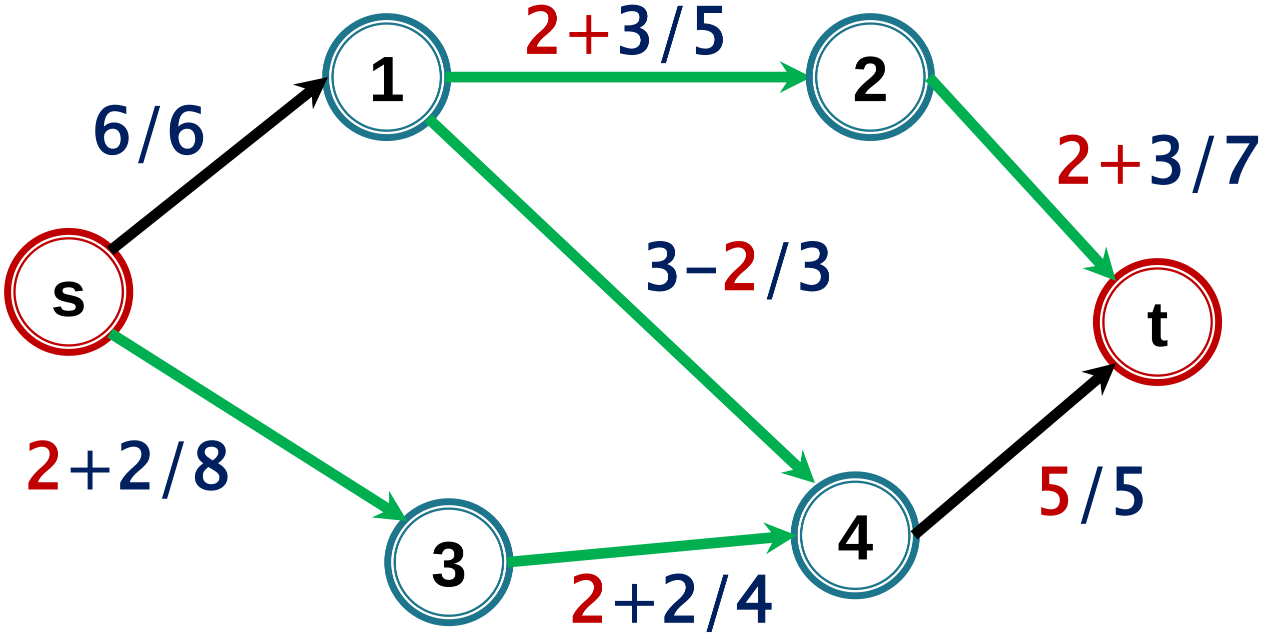
Considerăm s-t lanţul P evidenţiat

i(P) = 2

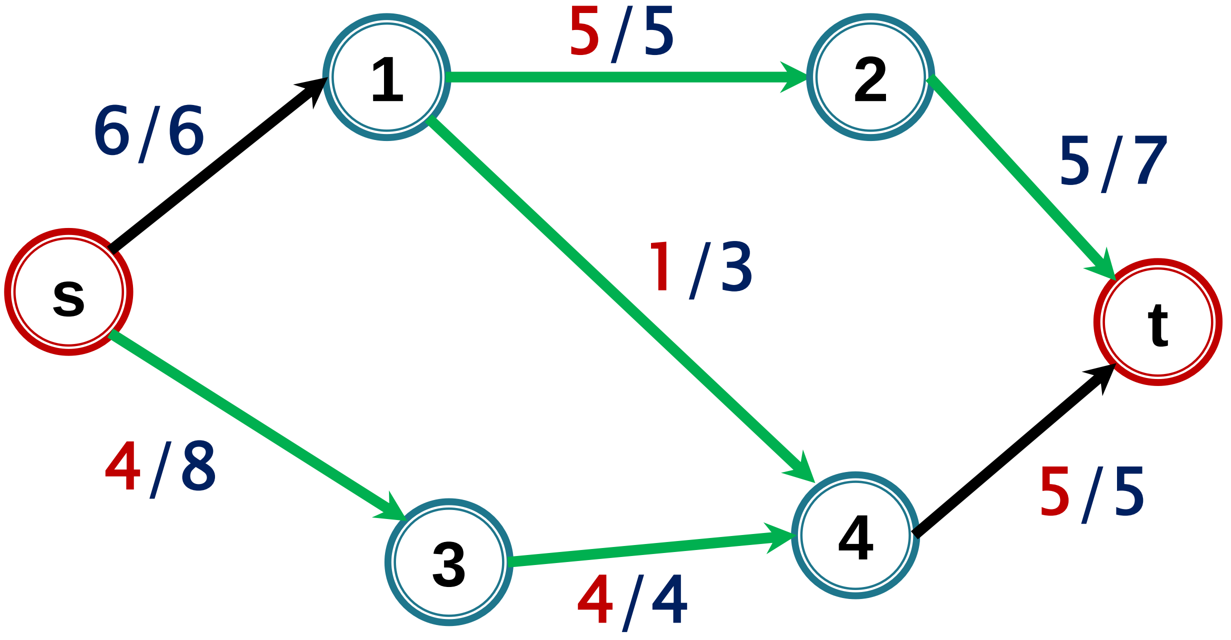


Considerăm s-t lanţul P evidenţiat





6/6
2+3/5
2+3/7
3−2/3
2+2/8
5/5
2+2/4
s
1
2
3
4
t



Fluxul după revizuirea de-a lungul lanţului P

Proprietăţi ale fluxului revizuit

Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea și f flux în N.

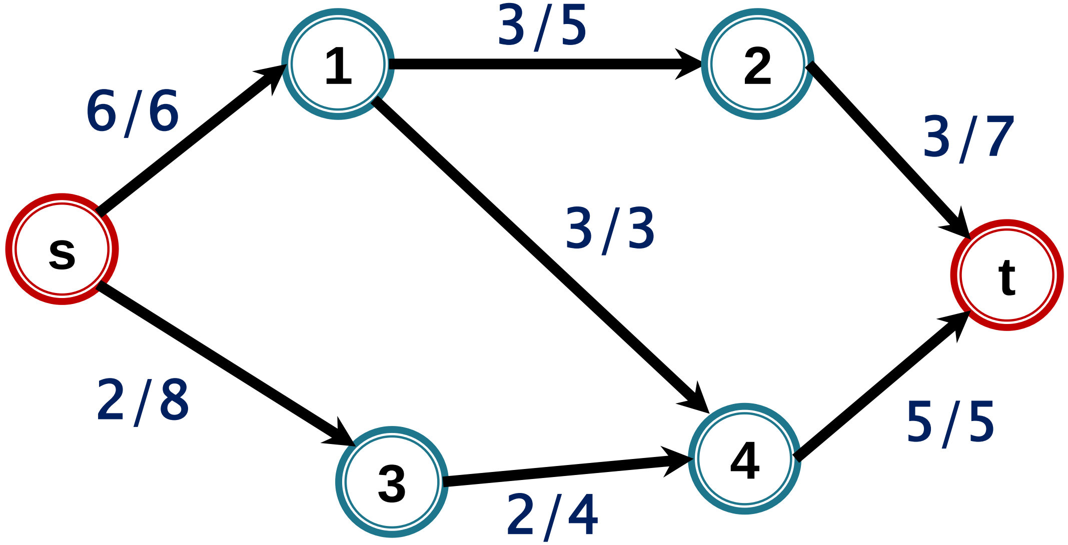
Fie P un s-t lanţ f-nesaturat în G și f' fluxul revizuit de-a lungul lanţului P. Atunci

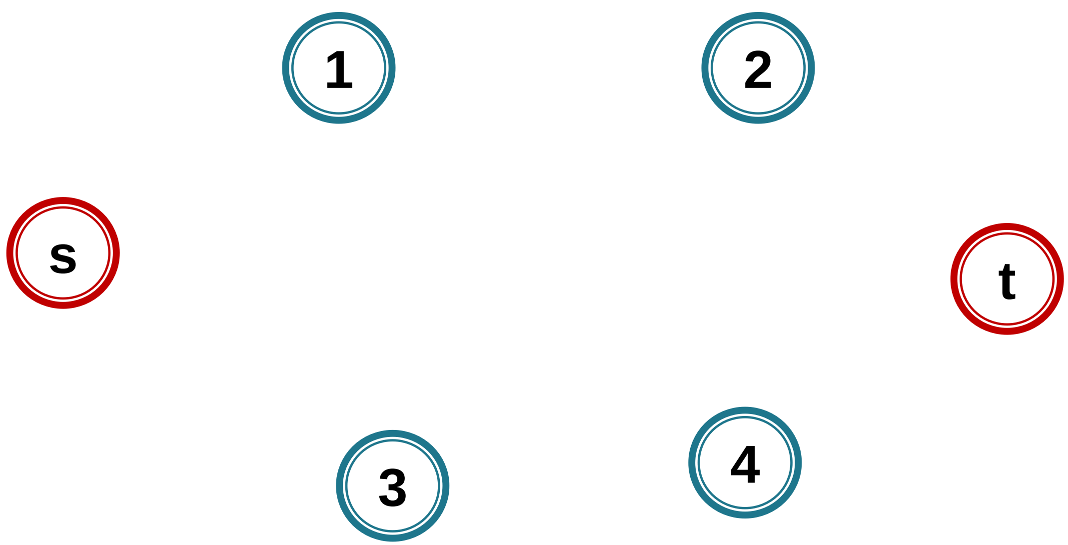
- f' este flux în G

și

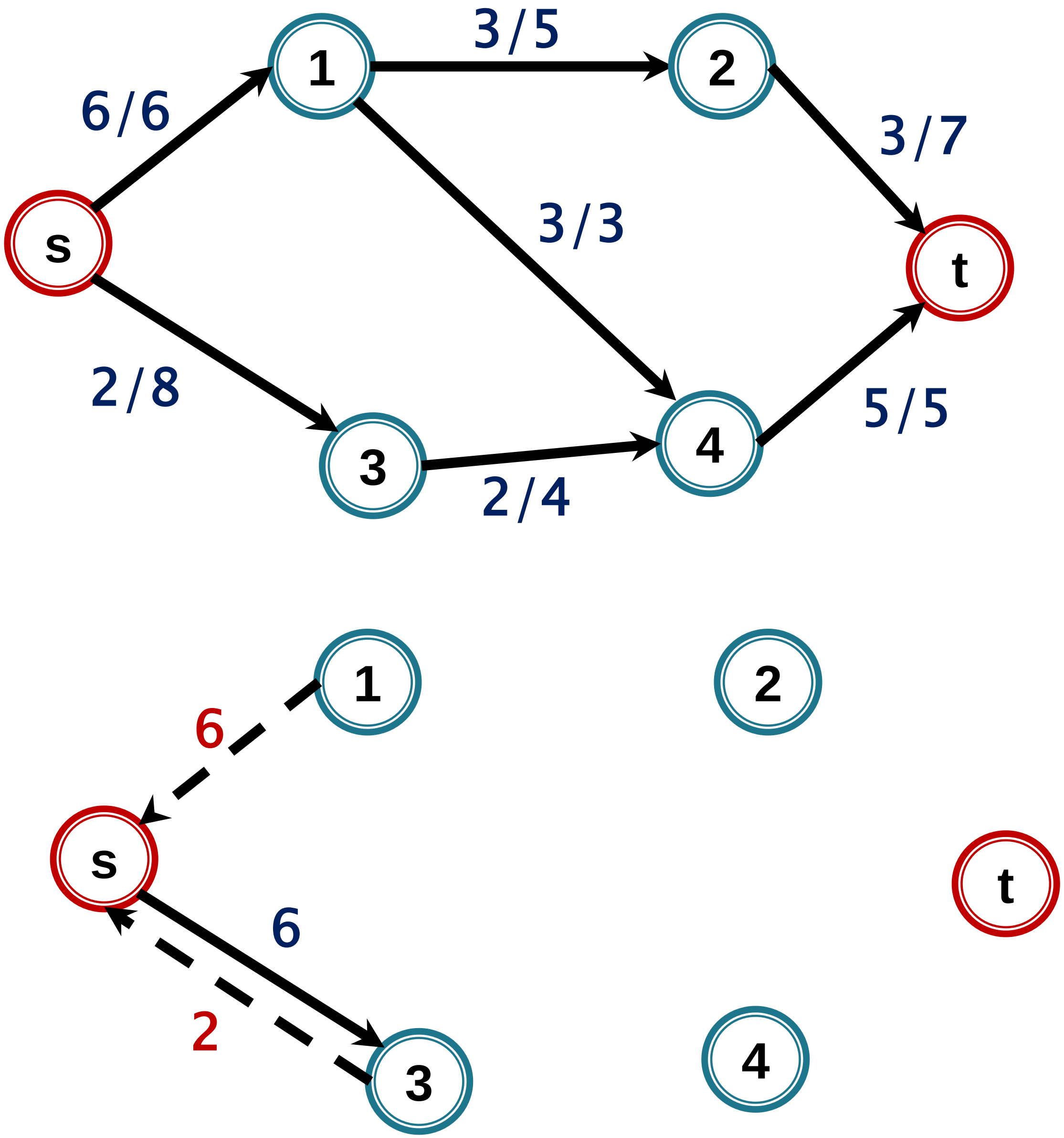
- $val(f') = val(f) + i(P) \geq val(f) + 1$

Graf rezidual (suplimentar)

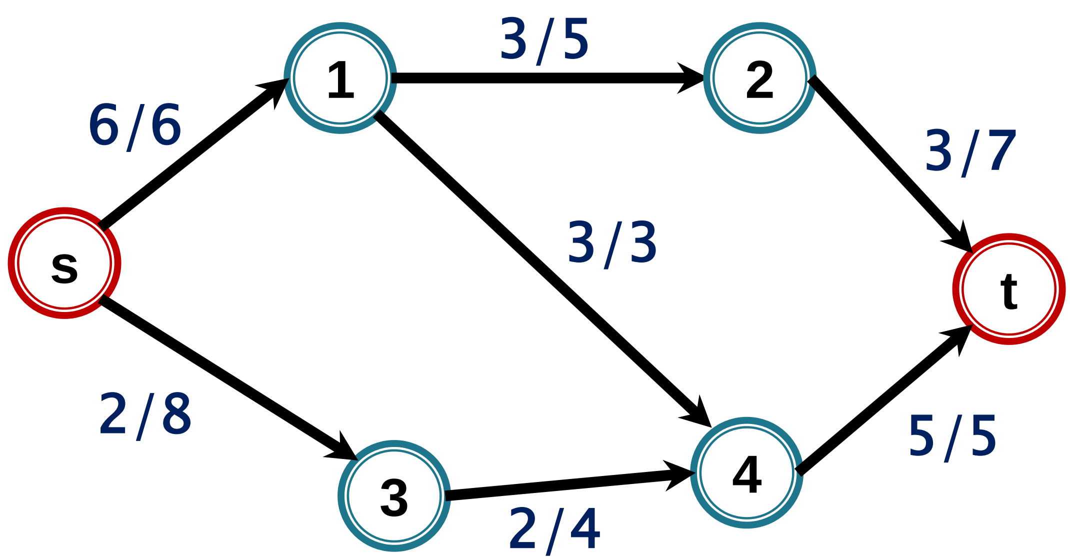


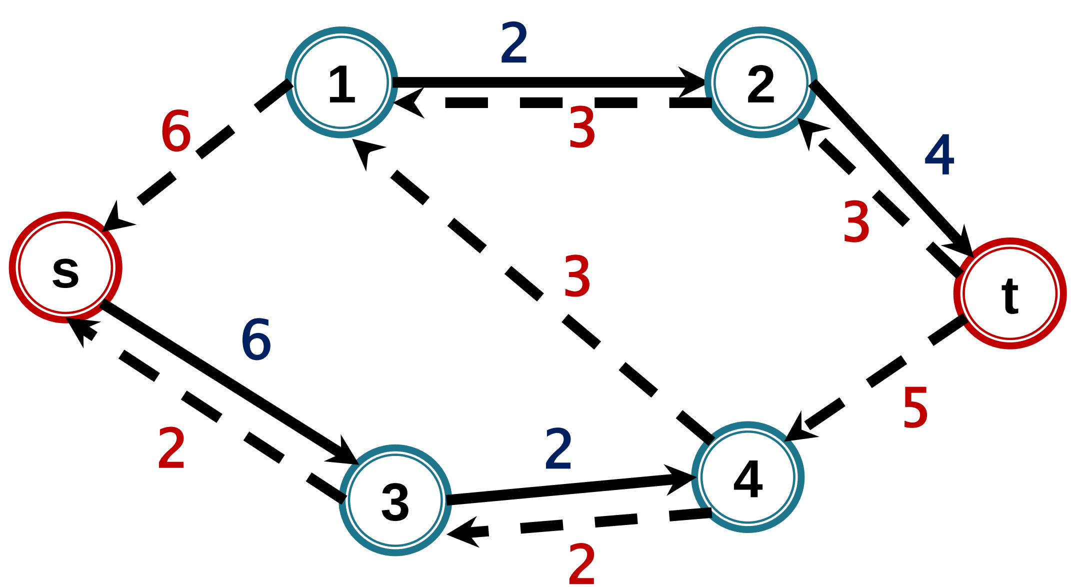


Graf rezidual

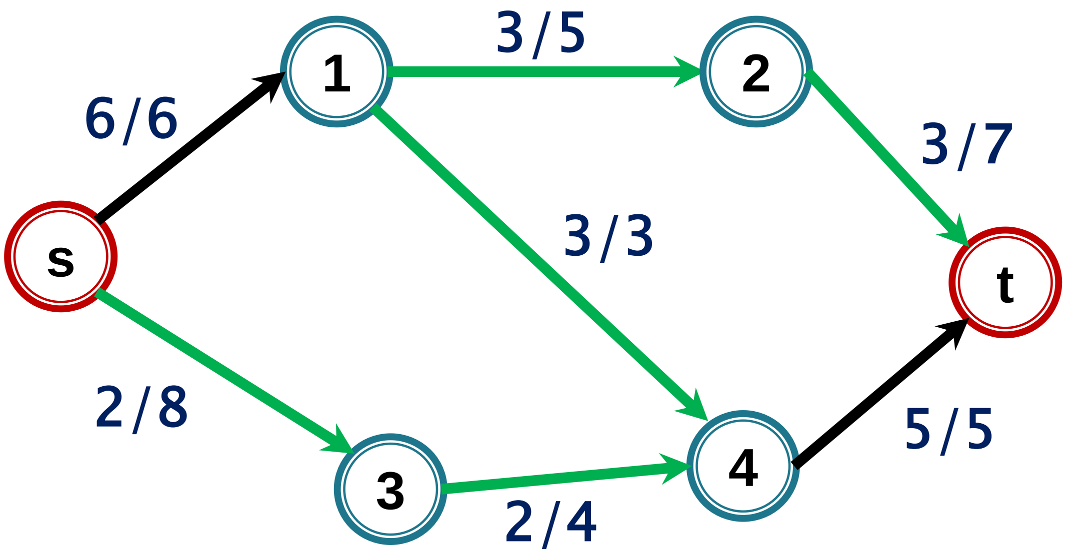


Graf rezidual

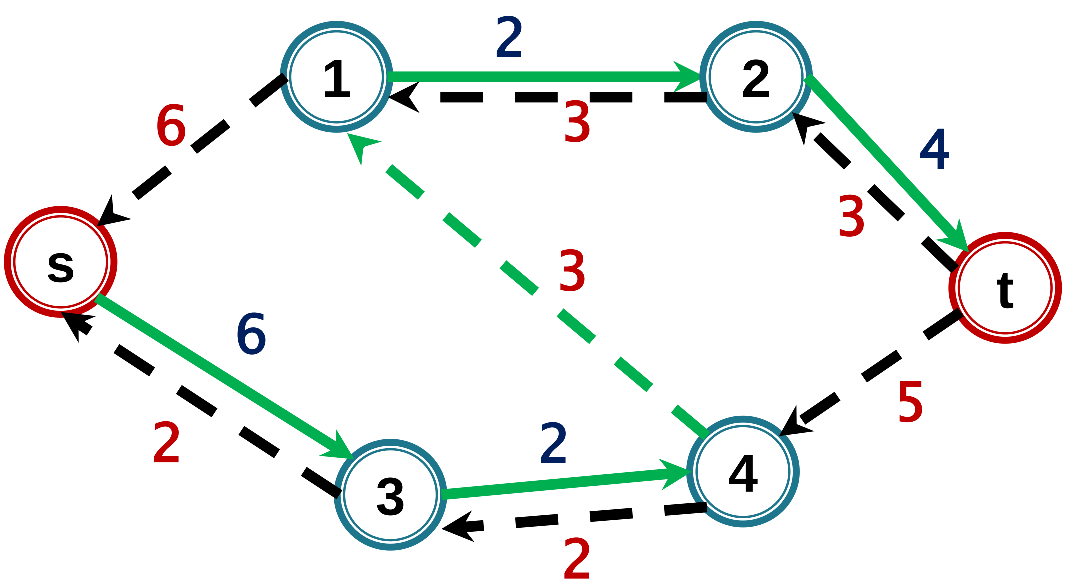




Graf rezidual



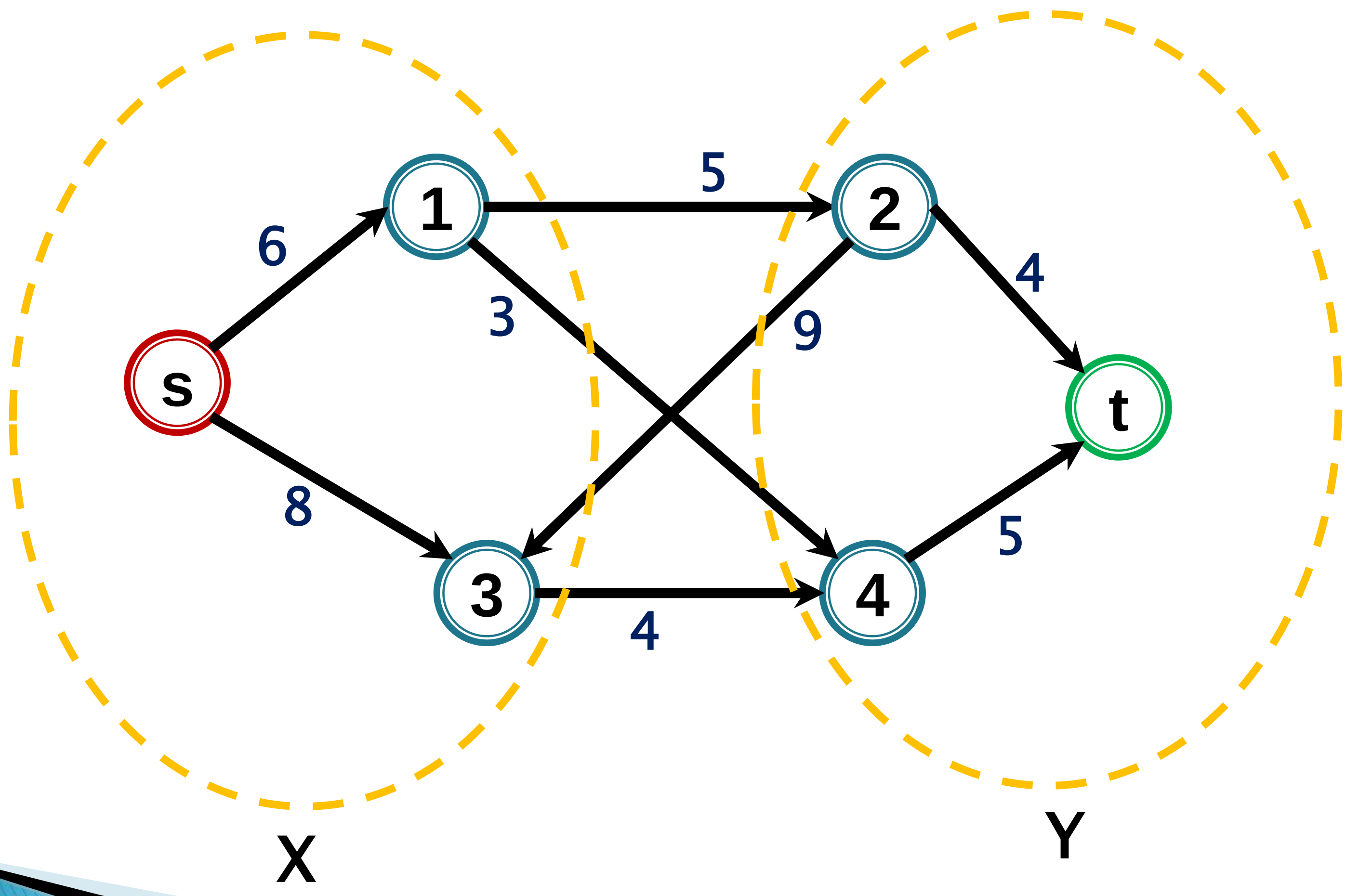
s–t lanț f–nesaturat



s–t drum în graful rezidual

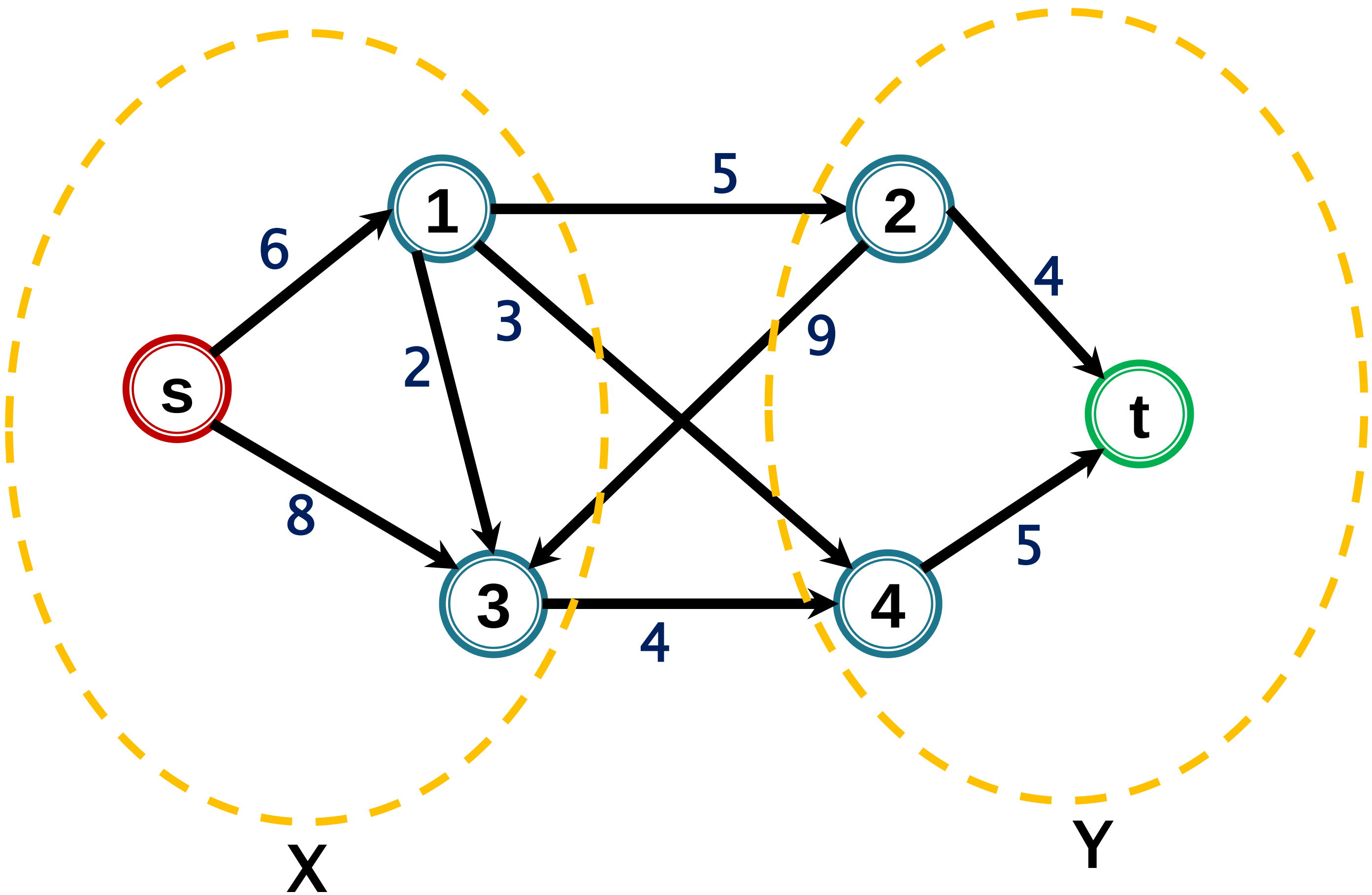
Fie N = (G, {s}, {t}, I, c) o reţea

- O **tăietură** K= (X, Y) în reţea



Fie K= (X, Y) o tăietură

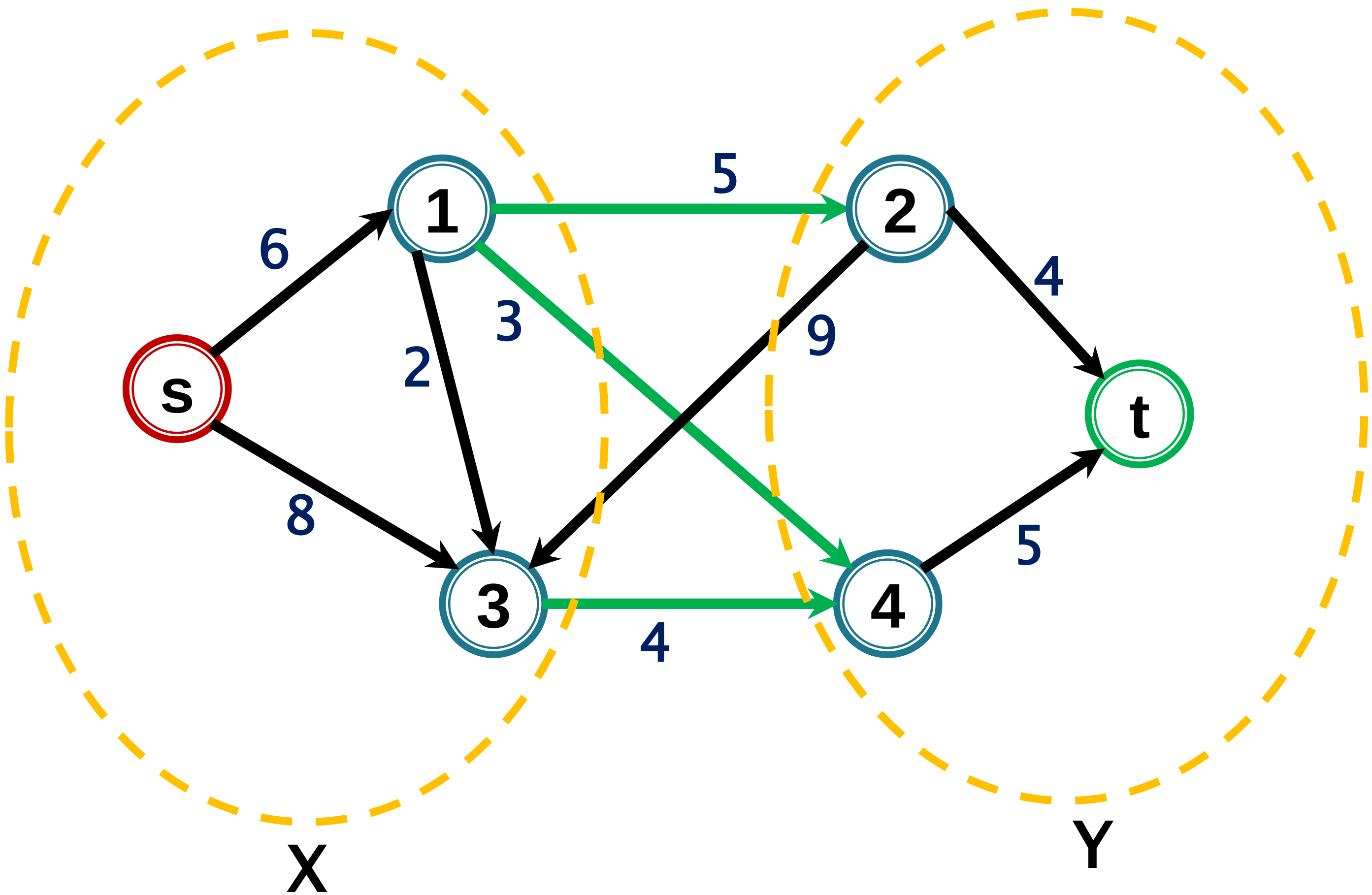
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X, Y) = ?$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

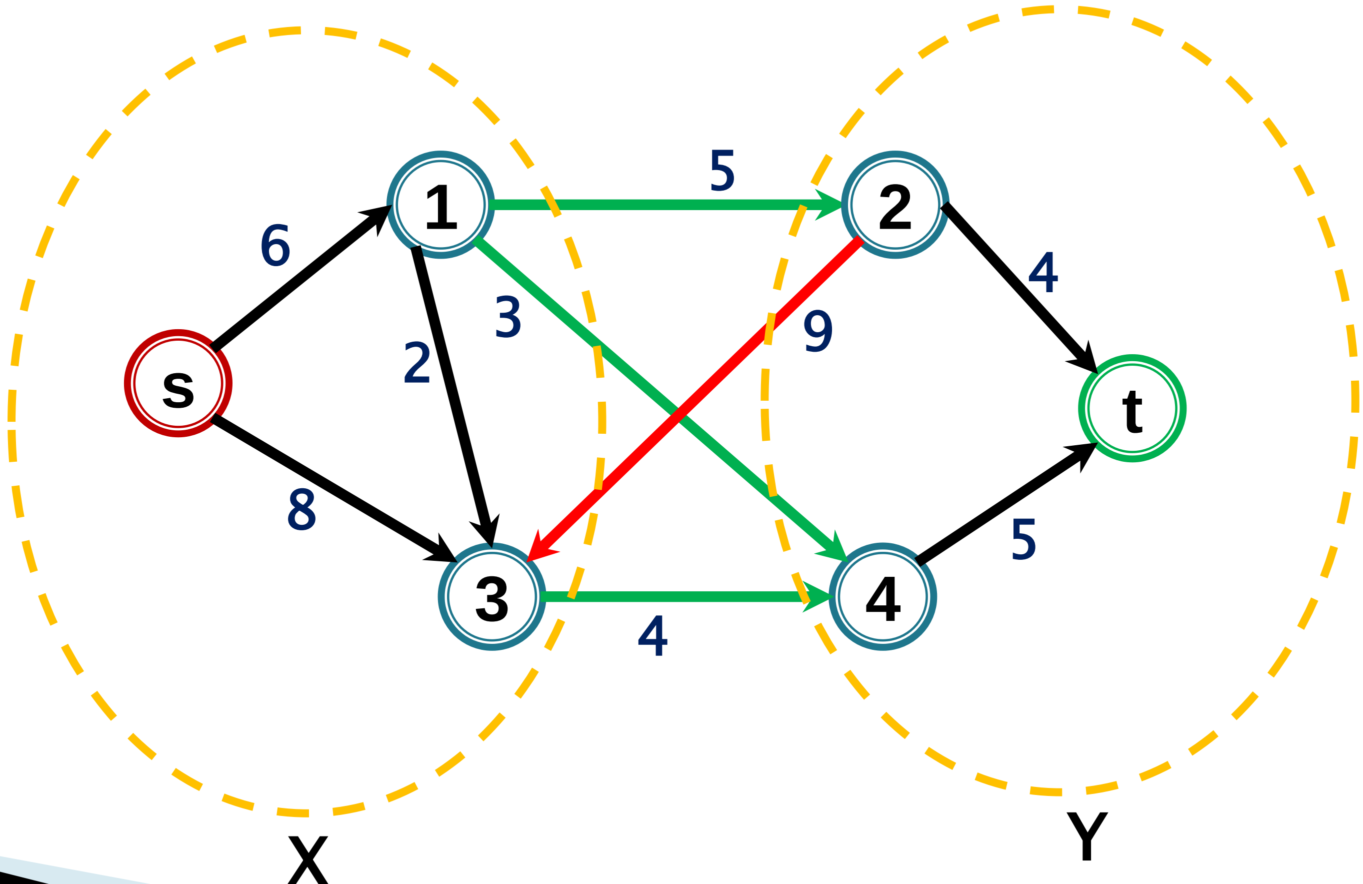
- **Capacitatea tăieturii** K = (X, Y)



$$c(K) = c(X,Y) = 5 + 3 + 4 = 12$$

Fie K= (X, Y) o tăietură

- $xy \in E$ cu $x \in X$, $y \in Y$ = **arc direct** al lui K
- $yx \in E$ cu $x \in X$, $y \in Y$ = **arc invers** al lui K



Tăietură minimă

- Fie N o reţea.

  O tăietură $\widetilde{K}$ se numeşte **tăietură minimă în N** dacă

$$c(\tilde{K}) = \min\{c(K) \mid K \text{ este tăietură în N}\}$$

Tăietură minimă

- Vom demonstra

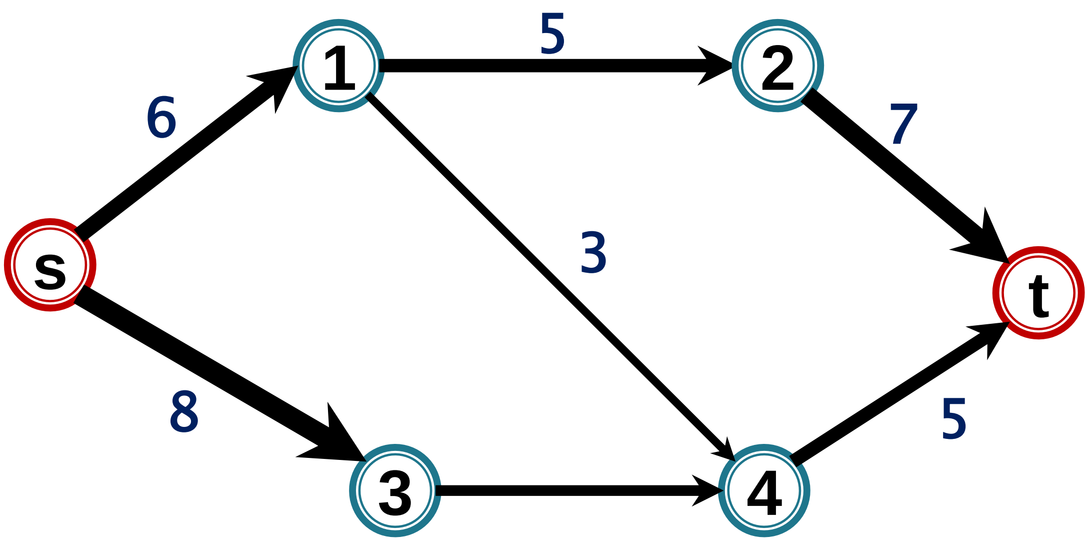
$$val(f) \leq c(K)$$

- Dacă avem egalitate $\Rightarrow$ f flux maxim, K tăietură minimă

Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - Arce = poduri, capacitate = costul dărâmării podului.

  Ce poduri trebuie dărâmate a.î. teritoriul sursă să nu mai fie conectat cu destinația și costul distrugerilor să fie minim?



Tăietură minimă

- Determinarea unui flux maxim $\Rightarrow$ determinarea unei tăieturi minime
- **Aplicații**
  - **Fiabilitatea rețelelor**
  - **Probleme de proiectare, planificare**
  - **Segmentarea imaginilor**

Algoritmul FORD-FULKERSON

Pseudocod

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – algoritmul FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid ($f(e) = 0, \forall\ e \in E$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid ($f(e) = 0, \forall\ e \in E$)
- Cât timp **există un s–t lanţ f–nesaturat P în G**
  - determină un astfel de lanţ P
  -
-

Algoritm generic de determinare a unui flux maxim – **algoritmul** FORD – FULKERSON

- Fie $f \equiv 0$ fluxul vid ($f(e) = 0, \forall\ e \in E$)
- Cât timp **există un s-t lanţ f-nesaturat P în G**
    - determină un astfel de lanţ P
    - revizuieşte fluxul f de-a lungul lanţului P
- returnează f

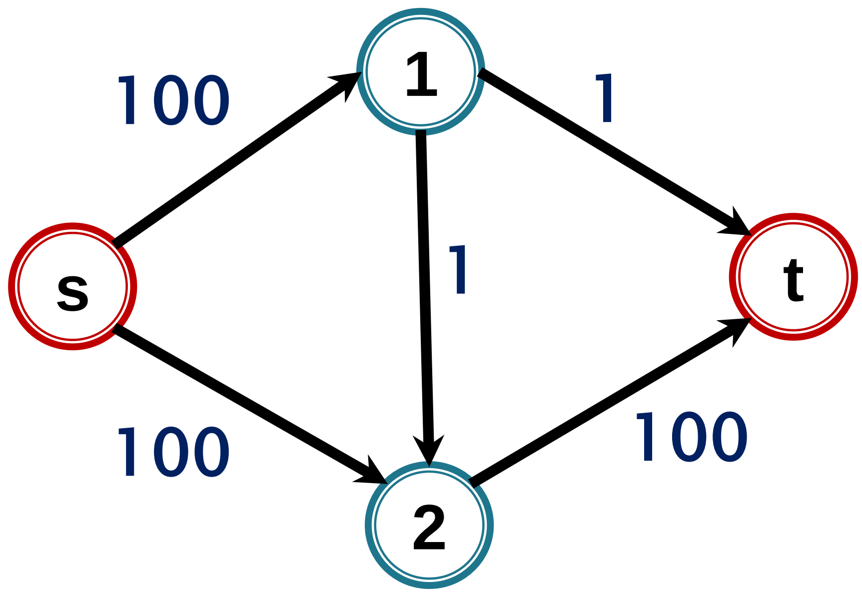
Algoritmul FORD-FULKERSON

Complexitate

Algoritmul Ford-Fulkerson

- Algoritmul se termină?
- De ce este necesară ipoteza că fluxul are valori întregi?
- Care este numărul maxim de etape?
  - Cum determinăm un lanţ f-nesaturat?
  - Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape (iteraţii cât timp)?

Criteriul după care construim lanţul f-nesaturat influenţează numărul de etape



Algoritm FORD – FULKERSON

- Complexitate

Algoritm FORD – FULKERSON

- Complexitate O(mL), unde

$$L = \sum_{su \in E} c(su)$$

Algoritmul FORD-FULKERSON

Corectitudine

Algoritmul Ford-Fulkerson

- **Fluxul determinat de algoritm are valoare maximă, sau putem determina un flux de valoare mai mare prin alte metode?**