SEMINARUL AL XII-LEA DE LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

~ MATERIAL PENTRU STUDENȚI ~

~ 2015 – 2016 ~

(S.XII, PG. 1)

Exercițiul 1: Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.

REZOLVARE: Orice algebră Boole este nevidă ($\ni$ conține $0, 1$). Algebra Boole trivială (singura algebră Boole cu exact 1 element) și algebra Boole standard (singura algebră Boole cu exact 2 elemente) sunt lanțuri ($0=1$ în $\mathcal{L}_1$ și $0<1$ în $\mathcal{L}_2$).

$0=1$

$(\mathcal{L}_1)$

1

0

$(\mathcal{L}_2)$

Fie $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$ o algebră Boole cu $|B| \geq 3$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\, x \in B \setminus \{0, 1\}$.

Presupunem prin absurd că B este lanț. $\Leftrightarrow \vee = \max$ și $\wedge = \min$ în B.

B este lanț. $\Rightarrow \begin{cases} x \leq \overline{x} \\ \overline{x} \leq x. \end{cases}$ sau SXII, 70.2

Conform definiției complementului:

$\begin{cases} 1 = x \vee \overline{x} = \max\{x, \overline{x}\} & (*) \\ \text{și} \\ 0 = x \wedge \overline{x} = \min\{x, \overline{x}\}. & (**) \end{cases}$

Dacă $\begin{cases} x \leq \overline{x} \xRightarrow{(**)} x = 0; \text{ ⚡ cu } x \notin \{0, 1\}; \\ \overline{x} \leq x \xRightarrow{(*)} x = 1; \text{ ⚡ cu } x \notin \{0, 1\}. \end{cases}$

$\Rightarrow$ B nu este lanț. $\Rightarrow$ Nicio algebră Boole cu 3 sau mai multe elemente nu este lanț.

$\Rightarrow$ Singurele algebre Boole care sunt lanțuri sunt $\mathcal{L}_1$ (algebra Boole trivială) și $\mathcal{L}_2$ (algebra Boole standard).

<u>Definiție</u>: <u>Atomii</u> unei algebre Boole sunt succesorii lui 0 din acea algebră Boole.

SXII pg. 3

Exercițiul 2: Să se demonstreze că:

(a) orice funcție izotonă injectivă păstrează ordinea strictă;

(b) orice izomorfism Boolean duce atomii în atomi.

REZOLVARE:

(a) Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ poseturi, iar $f : A \to B$, f izotonă și injectivă.

Fie $x, y \in A$ a. î. $x < y$. $\Rightarrow \begin{cases} x \leq y \xrightarrow[\text{izotonă}]{f \text{ e}} f(x) \leq f(y) \\ \text{și} \\ x \neq y \xrightarrow[\text{injectivă}]{f \text{ e}} f(x) \neq f(y) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$.

(b) Fie $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ și $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ algebre Boole, iar $f : A \to B$ un izomorfism boolean, $\Rightarrow f$ este funcție izotonă și injectivă. $(*)$

SXII PG. 4

Fie a un atom al lui A

i.e. $a \in A$ a.î. $0 \prec a$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \xrightarrow[(*)]{(a)} 0 = f(0) < f(a), \binom{*}{*} \\ \text{și} \\ (\not\exists\, x \in A)(0 < x < a). \quad (1) \end{cases}$

Presupunem prin absurd că $f(a)$ nu este atom al lui B. $\Rightarrow$

Conform $\binom{*}{*}$, are loc: $0 < f(a)$. $\Big]$

$\Rightarrow (\exists\, y \in B)(0 < y < f(a)). \binom{*}{**}$

f este izomorfism boolean $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ e bijectivă și f^{-1} este tot izomorfism boolean $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ este funcție izotonă și injectivă. $\xrightarrow[\binom{*}{**}]{(a)} 0 = f^{-1}(0) <$

$< \overbrace{f^{-1}(y)}^{\in A} < f^{-1}(f(a)) = a. \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < f^{-1}(y) < a$, $\not\downarrow$ cu (1).

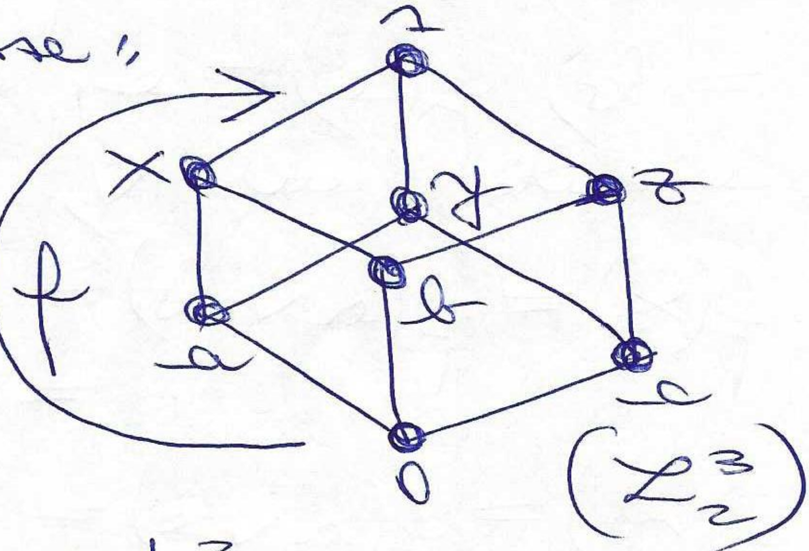
$\Rightarrow 0 \prec f(a)$, i.e. $f(a)$ e atom în B.

Exercițiul 3: Să se determine automorfismele booleene ale cubului!

S XII pg. 5

REZOLVARE:

Fie elementele algebrei Boole $\mathcal{L}_2^3 = (L_2^3, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ (cubul) notate ca în această diagramă Hasse:



Atomii lui $\mathcal{L}_2^3$ sunt: a, b, c. $(*)$

Fie $f : L_2^3 \to L_2^3$ un automorfism boolean al lui $\mathcal{L}_2^3$. $\Longrightarrow f(0) = 0,\ f(1) = 1;$

$\xRightarrow[\text{(Exerc. 2, (b))}]{(*)}$ $\underbrace{f(a), f(b), f(c)}_{}\in \{a, b, c\}$, două câte două distincte, pt. că f e injectivă.

$\Downarrow$

SXII
pg 6

$\Rightarrow$ Tripletul $(f(a), f(b), f(c)) \in$
$\in \{(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c),$
$(b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)\}$ (cele
6 permutări ale tripletului
(a, b, c)),

Dacă $(f(a), f(b), f(c)) =$
$= (a, b, c)$, $\Leftrightarrow$ $f(a) = a$, $f(b) =$
$= b$, $f(c) = c$, atunci, cum f
comută cu $\vee$, rezultă:

$f(x) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) =$
$= a \vee b = x$;

$f(y) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) =$
$= a \vee c = y$

$f(z) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c) =$
$= b \vee c = z$,

$\Rightarrow f = id_{\mathcal{L}_2^3}$, care este,

într-adevăr, automorfism al
algebrei Boole $\mathcal{L}_2^3$.

Dacă de exemplu, (SXII, PG. 7)

$(f(a), f(b), f(c)) = (b, c, a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a,$

atunci, din comutarea lui f cu $\vee$, rezultă:

$f(x) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) =$
$= b \vee c = z,$

$f(y) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) =$
$= b \vee a = x,$

$f(z) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c) =$
$= c \vee a = y.$

Așadar:

u	0	a	b	c	x	y	z	1
$f(u)$	0	b	c	a	z	x	y	1,

f este bijectivă,

f comută cu 0 și 1,

se verifică faptul că f comută cu $\vee$ (și pe celelalte perechi de elemente) $\Rightarrow$

și cu $\wedge$,

Se observă că f e Boole, deci de comutat verificat cu maximele, minimele, perechile de elemente incomparabile, (proprietățile morfismelor booleene) $\Longrightarrow$ f comută și cu $\wedge$,

$\Longrightarrow$ f este izomorfism boolean de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_2^3$, adică automorfism boolean al lui $\mathcal{L}_2^3$.

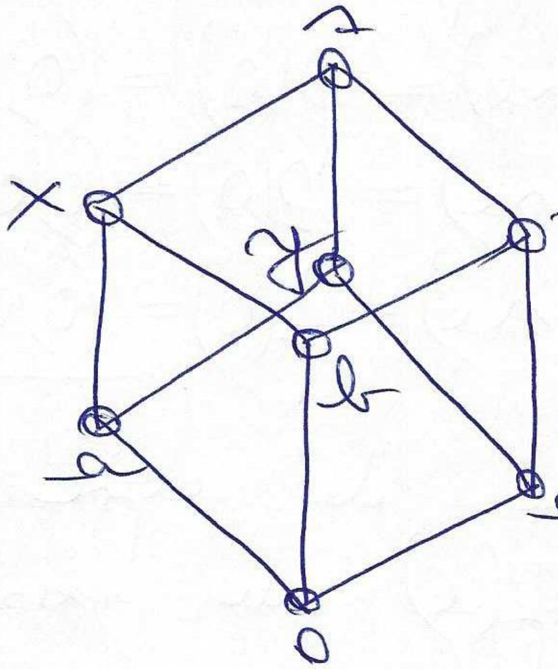
La fel se procedează pt. celelalte 4 valori posibile ale tripletului $(f(a), f(b), f(c))$.

$\Longrightarrow \mathcal{L}_2^3$ are 6 automorfisme, toate putând fi obținute prin procedeul de mai sus.

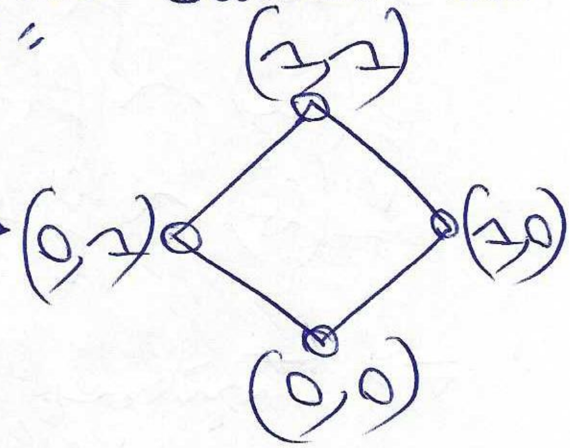
Exercițiul 4: Să se determine morfismele booleene de la cub la romb.

REZOLVARE:

Aici este util să notăm elementele cubului $(\mathcal{L}_2^3)$ la fel ca în exercițiul anterior, dar elementele rombului $(\mathcal{L}_2^2)$ să fie etichetate așa cum rezultă din produsul cartezian $\mathcal{L}_2^2 = \mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_2$, cu $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, \leq, 0, 1)$ (din procedeul obţinut de etichetare a elementelor unui produs direct de poseturi):



$\xrightarrow{f}$



$\mathcal{L}_2^3$ (cubul)

$\mathcal{L}_2^2$ (rombul)

Fie $f: L_2^3 \longrightarrow L_2^2$ un morfism boolean. $\Rightarrow (\forall u \in L_2^3)(f(u) \in L_2^2 = \{0,1\}^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\})$, $f(0) = (0,0)$, $f(1) = (1,1)$, şi au loc următoarele:

$f(a) \vee f(b) \vee f(c) = f(\overbrace{a \vee b \vee c}^{=x}) = f(1) = (1,1)$. $\Rightarrow$ dintre perechile de cifre binare

$f(a), f(b), f(c)$, cel puțin una are 1 pe prima poziție în pereche și cel puțin una are 1 pe a doua poziție. (*)

$$\left.\begin{aligned} f(a) \wedge f(b) &= f(a \wedge b) = f(0) = (0,0) \\ f(a) \wedge f(c) &= f(a \wedge c) = f(0) = (0,0) \\ f(b) \wedge f(c) &= f(b \wedge c) = f(0) = (0,0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ între perechile de cifre binare $f(a), f(b), f(c)$ nu există două cu 1 pe aceeași poziție. (**)

$(*), (**) \Rightarrow (f(a), f(b), f(c)) =$

$=$ una dintre cele $3! = 6$ permutări ale tripletului $((0,0),(0,1),(1,0))$

sau

una dintre cele $\underset{3}{\underset{\|}{}}$ nr. pozițiilor posibile ale lui $(1,1)$ în triplet permutări ale tripletului $((0,0),(0,0),(1,1))$.

De exemplu:

- dacă $f(a)=(0,0)$, $f(b)=(0,1)$, $f(c)=(1,0)$, atunci:

$f(x)=f(a\vee b)=f(a)\vee f(b)=$
$=(0,0)\vee(0,1)=(0\vee 0,0\vee 1)=(0,1)$,
$f(y)=f(a\vee c)=f(a)\vee f(c)=$
$=(0,0)\vee(1,0)=(0\vee 1,0\vee 0)=(1,0)$,
$f(z)=f(b\vee c)=f(b)\vee f(c)=$
$=(0,1)\vee(1,0)=(0\vee 1,1\vee 0)=(1,1)$, așadar:

u	0	a	b	c	x	y	z	1
$f(u)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$

se verifică faptul că f este morfism boolean (comutarea lui f cu operațiile booleene, la fel ca în exercițiul precedent);

- dacă $f(a)=f(b)=(0,0)$ și $f(c)=(1,1)$, atunci, ca mai sus:

$f(x)=f(y)=(0,0)\vee(0,0)=(0,0)$,
$f(z)=(0,0)\vee(1,1)=(1,1)$, așadar:

u	0	a	b	c	x	y	z	1
$f(u)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,1)$	$(1,1)$

se verifică faptul că f este morfism boolean, f

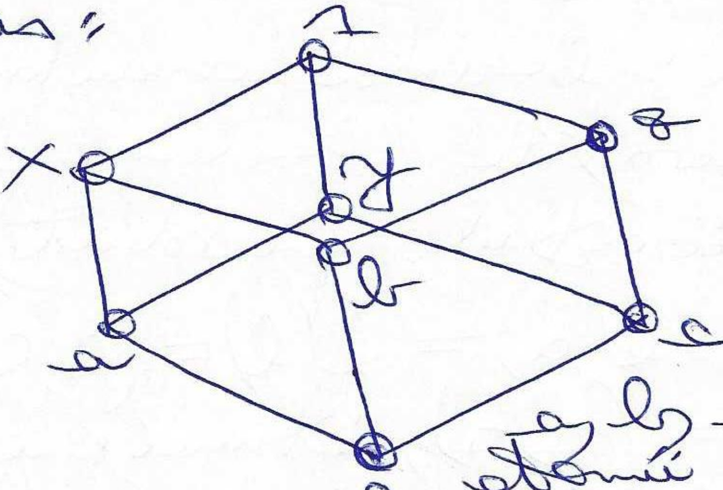
La fel se procedează pt. fiecare dintre cele $6+3=9$ valori posibile ale tripletului $(f(a), f(b), f(c))$. $\Rightarrow$ Există 9 morfisme booleene de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_2^2$, care se obțin prin procedeul de mai sus.

<u>Exercițiul 5:</u> Să se determine subalgebrele Boole ale cubului.

REZOLVARE:

Notăm elementele cubului ca mai sus:

$(\mathcal{L}_2^3)$



a, b, c sunt atomii cubului.

Fie $S \subseteq L_2^3$, a.î. S este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0, 1 \in S$.

Putem avea $S = \{0, 1\}$, care este închisă la $0, 1, \bar{\ }$ $(\bar{0} =$

$= 1, \overline{1} = 0$), $\vee$ ($=\max$ pe $\{0,1\}$ pt. că $0 \leq 1$), $\wedge$ ($=\min$ pe $\{0,1\}$)
$\Rightarrow \{0,1\}$ este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

(SXII, pg. 13)

Dacă $S \ni a \Rightarrow S \ni \overline{a} = z$, $\{0, a, z, 1\}$ este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$: este închisă la $0, 1, \overline{\ }, \vee$ şi $\wedge$.

Dacă $S \ni b \Rightarrow S \ni \overline{b} = y$. Ca mai sus, $\{0, b, y, 1\}$ este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

Dacă $S \ni c \Rightarrow S \ni \overline{c} = x$. Ca mai sus, $\{0, c, x, 1\}$ este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

Dar dacă S conţine 2 atomi ai lui $\mathcal{L}_2^3$? Dacă $S \ni a, b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} S \ni a \vee b = x \Rightarrow S \ni \overline{x} = c \text{ (S conţine şi al treilea atom);} \\ S \ni \overline{a} = z; \\ S \ni \overline{b} = y. \end{cases} \Rightarrow S = L_2^3.$$

Analog, dacă $S \ni a, c, \Rightarrow S = L_2^3$ (SXII, pg. 14) $\Rightarrow S = L_2^3$ și dacă $S \ni b, c \Rightarrow S = L_2^3$.

Așadar, subalgebrele Boole ale lui $\mathcal{L}_2^3$ sunt: $\{0, 1\}$, $\{0, a, z, 1\}$, $\{0, b, y, 1\}$, $\{0, c, x, 1\}$, L_2^3 (cu ~~toată~~ structura de algebră Boole: cu operațiile și relația de ordine), dintre care, notând cu $\cong$ existența unui ~~izo~~morfism boolean:

$\mathcal{L}_2 \cong \{0, 1\}$, care nu conține niciun atom al lui $\mathcal{L}_2^3$;

$\mathcal{L}_2^2 \cong \{0, a, z, 1\} \cong \{0, b, y, 1\} \cong \{0, c, x, 1\}$, dintre care fiecare conține exact câte 1 atom al lui $\mathcal{L}_2^3$;

$\mathcal{L}_2^3 \cong \mathcal{L}_2^3$, care conține ~~toți~~ cei 3 atomi ai lui $\mathcal{L}_2^3$.

$\mathcal{L}_2^3$ nu are subalgebre Boole care ~~să~~ conțină exact 2 atomi ai lui $\mathcal{L}_2^3$.

Exercițiul 6: Fie $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice distributivă mărginită. Notăm cu $C(L)$ mulțimea elementelor complementate ale lui L. Să se demonstreze că: $C(L)$ este sublatice mărginită a lui L și este algebră Boole (cu operațiile de latice mărginită induse de cele de pe L). (SXII, PG. 15)

REZOLVARE:

$C(L) = \{x \in L \mid (\exists\, y \in L)(x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0)\} \subseteq L$.

Cum L este distributivă $\Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall\, x \in C(L))(\exists!\, y \in L)(x \vee y = 1$ și $x \wedge y = 0)$. Pt. fiecare $x \in C(L)$, pe acest unic complement y al lui x în L îl vom nota cu $\overline{x} \in L$.

$0 \vee 1 = 1$ și $0 \wedge 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0, 1 \in C(L)$, cu $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$. (*)

Fie $x, y \in C(L)$.

S XII, 16/16

$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} \overset{\text{(distrib. } \wedge \text{ față de } \vee)}{=}$

$= \underbrace{(\underbrace{x \wedge \overline{x}}_{=0} \wedge \overline{y})}_{=0} \vee \underbrace{(y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y})}_{= \underbrace{\overline{x} \wedge \underbrace{y \wedge \overline{y}}_{=0}}_{=0}} = 0$,

$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \overset{\text{(distrib. } \vee \text{ față de } \wedge)}{=}$

$= \underbrace{(x \vee y \vee \overline{x})}_{= \underbrace{\underbrace{x \vee \overline{x}}_{=1} \vee y}_{=1}} \wedge \underbrace{(x \vee \underbrace{y \vee \overline{y}}_{=1})}_{=1} = 1$

$\Rightarrow x \vee y \in C(L)$, cu $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$. (**)

Analog $\Rightarrow x \wedge y \in C(L)$, cu $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$. (***)

(*), (**), (***) $\Rightarrow C(L)$ este sublatice mărginită a lui L, $\Rightarrow$

(L este distributivă) $\Longrightarrow$ C(L) este latice distributivă mărginită.

$\left\{\begin{array}{l} x \vee \bar{x} = 1 \\ \text{şi} \\ x \wedge \bar{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} \in C(L)$, cu $\bar{\bar{x}} = x$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ C(L) este latice distributivă mărginită complementată $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ C(L) este algebră Boole.

Exercițiul 7: Fie T o mulțime şi $M \subseteq T$. Definim pe $\mathcal{P}(T)$ relația binară $\sim$, astfel: pt. orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $A \sim B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap M = B \cap M$. Să se demonstreze că $\sim$ este o congruență a algebrei Boole $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \bar{\ }, \subseteq, \emptyset, T)$, şi să se determine filtrul asociat acestei congruențe.

REZOLVARE:

Conform unui rezultat din curs, $\sim$ este exact congruența asociată filtrului principal $[M)$ al lui $\mathcal{P}(T)$, așadar este congruență a algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$, având pe $[M)$ ca filtru asociat.

Iată și o demonstrație directă pt. acest caz particular:

$M \in \mathcal{P}(T)$; $\sim \subseteq (\mathcal{P}(T))^2 = \mathcal{P}(T) \times \mathcal{P}(T)$.

Fie $A, B, C \in \mathcal{P}(T)$.

$A \cap M = A \cap M \Rightarrow A \sim A$. $(*)$

$A \sim B \Leftrightarrow A \cap M = B \cap M \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B \cap M = A \cap M \Leftrightarrow B \sim A$. $(**)$

SXII PG. 18

Dacă $A \sim B$ și $B \sim C$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap M = B \cap M$ și $B \cap M = C \cap M \Rightarrow A \cap M = C \cap M \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \sim C$. (***)

(*), (**), (***) $\Rightarrow \sim \in Eq(\mathcal{P}(T))$. (1)

Fie $A, A', B, B' \in \mathcal{P}(T)$ a.î. $A \sim A'$ și $B \sim B'$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \cap M = A' \cap M$ și $B \cap M = B' \cap M \Rightarrow A \cap B \cap M = A \cap M \cap B \cap M = A' \cap M \cap B' \cap M = A' \cap B' \cap M \Rightarrow A \cap B \sim A' \cap B'$. (2)

$A \cap M = A' \cap M \Rightarrow \overline{A} \cap M = M \cap \overline{A} = M \setminus A = M \setminus (A \cap M) = M \setminus (A' \cap M) = M \setminus A' = M \cap \overline{A'} = \overline{A'} \cap M \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A} \sim \overline{A'}$ (3).

(1), (2), (3) $\xrightarrow[\text{congruențelor}]{\text{proprietățile}}$ $\sim \in Con(\mathcal{P}(T))$.

$F_{\sim} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X \sim T\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X \cap M = T \cap M = M\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid M \subseteq X\} = [M)$.

Exercițiul 8: Fie T o mulțime, iar F mulțimea părților cofinite, i.e. având complementara finită, ale lui T.

(a) Să se demonstreze că F este un filtru al algebrei Boole $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \bar{\ }, \subseteq, \emptyset, T)$ (cu $\overline{X} = T \setminus X$ pt. orice $X \in \mathcal{P}(T)$).

(b) Să se demonstreze că: filtrul F este finit generat $\Leftrightarrow$ T este mulțime finită.

(c) Să se determine congruența asociată lui F.

REZOLVARE:

$$F = \{A \in \mathcal{P}(T) \mid |\overline{A}| < \infty\} = \{A \in \mathcal{P}(T) \mid |T \setminus A| < \infty\}.$$

(a) $T \in \mathcal{P}(T)$, $|\overline{T}| = |T \setminus T| = |\emptyset| = 0 < \infty$ $\Rightarrow T \in F \Rightarrow$ $F \neq \emptyset$. $(*)$

Fie $A, B \in \mathcal{P}(T) \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(T)$.

Dacă $A, B \in F \Leftrightarrow |\overline{A}| < \infty$ și $|\overline{B}| < \infty \Rightarrow |\overline{A} \cup \overline{B}| = |\overline{A}| + |\overline{B}| - |\overline{A} \cap \overline{B}| \leq |\overline{A}| + |\overline{B}| < \infty$

$\overline{A \cap B} \overset{\text{(de Morgan)}}{=} \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\Rightarrow |\overline{A \cap B}| < \infty \Leftrightarrow A \cap B \in F$ (**).

Dacă $A \in F$ și $A \subseteq B$, atunci:

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{A}| < \infty \\ \text{și} \\ \overline{B} \subseteq \overline{A} \end{array}\right\} \Rightarrow |\overline{B}| \leq |\overline{A}| < \infty \Rightarrow |\overline{B}| < \infty \Leftrightarrow B \in F \ (***)$$

(*), (**), (***) $\Rightarrow F \in Filt(\mathcal{P}(T))$.

(b) Știm de la curs că filtrele finit generate coincid cu filtrele principale, pt. că în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq,$

$0, 1)$: $[\emptyset) = \{1\} = [1)$ și, desigur, $(\forall X \in B)([X) = [\{X\}))$, iar $|\{X\}| = 1 < \infty$;

$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x_1, \dots, x_n \in B)$

$([\{x_1, \dots, x_n\}) = [x_1 \wedge \dots \wedge x_n))$.

Așadar, avem de demonstrat că: F este filtru principal $\Leftrightarrow |T| < \infty$.

„$\Leftarrow$": Presupunem că $|T| < \infty$.

Fie $A \in \mathcal{P}(T)$. $\Rightarrow \underbrace{\overline{A}}_{T \setminus A} \subseteq T$.

$\Rightarrow |\overline{A}| \leq |T| < \infty \Rightarrow |\overline{A}| < \infty \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A \in F$. $\Rightarrow \mathcal{P}(T) \subseteq F \subseteq \mathcal{P}(T) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = \mathcal{P}(T) = \underbrace{[\{\emptyset\})}_{[\emptyset)}$.

$\mathcal{P}(T) = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid \emptyset \subseteq X\}$

„$\Rightarrow$": Presupunem că $F = [M)$ pentru un $M \in \mathcal{P}(T)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow F = [M) = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid M \subseteq X\}$.

Presupunem prin absurd că

$$|T| \neq \infty \Rightarrow |\overline{\emptyset}| = |T \setminus \emptyset| = |T| \neq \infty \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \emptyset \notin F \\ M \in [M) = F \end{array}\right\} \Rightarrow M \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, a \in M \Rightarrow M \setminus \{a\} \not\supseteq M \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M \setminus \{a\} \notin [M) = F \quad (*)$$

Dar $M \in [M) = F \Leftrightarrow |\overline{M}| < \infty \quad (**)$

$$|\overline{M \setminus \{a\}}| = |\overline{M \cap \overline{\{a\}}}| = |\overline{M} \cup \overline{\overline{\{a\}}}| =$$

$$= |\overline{M} \cup \{a\}| = |\overline{M}| + |\{a\}| -$$

$$- |\overline{M} \cap \{a\}| \leq |\overline{M}| + |\{a\}| =$$

$$= |\overline{M}| + 1 \overset{(**)}{<} \infty \Rightarrow M \setminus \{a\} \in F,\ \text{✗}$$

cu $(*) \Rightarrow |T| < \infty$.

(c) $\sim_F = \{(A,B) \mid A, B \in \mathcal{P}(T),$

$A \leftrightarrow B \in F\} = \{(A,B) \mid A, B \in$

$\in \mathcal{P}(T), |\overline{A \leftrightarrow B}| < \infty \}$, (**/***)

unde $\leftrightarrow$ este echivalenţa booleană în $\mathcal{P}(T)$.

$$\overline{A \leftrightarrow B} = \overline{(A \to B) \cap (B \to A)} =$$
$$= \overline{(\bar{A} \cup B) \cap (\bar{B} \cup A)} \text{ (de Morgan)}$$
$$= \overline{(\bar{A} \cup B)} \cup \overline{(\bar{B} \cup A)} \text{ (de Morgan)}$$
$$= (\bar{\bar{A}} \cap \bar{B}) \cup (\bar{\bar{B}} \cap \bar{A}) =$$
$$= (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) =$$
$$= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B. \overset{(**/***)}{\Longrightarrow}$$
$$\Rightarrow \sim_F = \{(A, B) \mid A, B \in \mathcal{P}(T), |A \triangle B| < \infty\}.$$

<u>Exercitiul 9:</u> Fie $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ şi $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ algebre Boole, $F \in Filt(A)$, $G \in Filt(B)$, iar $f: A \to B$ un morfism boolean. Să se demonstreze că:

(a) $f^{-1}(G) \in Filt(A)$;

(b) dacă f e surjectiv $\Rightarrow f(F) \in Filt(B)$.

REZOLVARE: (SXII, PG. 25)

(a) $G \in Filt(B) \Rightarrow \begin{rcases} \xrightarrow{} G \subseteq B \Rightarrow f^{-1}(G) \subseteq A \\ 1 \in G \\ f(1) = 1 \end{rcases} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) \in G \Leftrightarrow 1 \in f^{-1}(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(G) \neq \emptyset$. $(*)$

Fie $x, y \in A$.

Dacă $x, y \in f^{-1}(G) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x), f(y) \in G \xRightarrow{(G \in Filt(B))} f(x \wedge y) =$

$= f(x) \wedge f(y) \in G. \Rightarrow x \wedge y \in f^{-1}(G)$. $(**)$

Dacă $x \in f^{-1}(G)$ și $x \leq y \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in G$ și $f(x) \leq f(y) \Rightarrow$

$\xrightarrow{(G \in Filt(B))} f(y) \in G \Leftrightarrow y \in f^{-1}(G)$. $\left(\begin{matrix} * \\ ** \end{matrix}\right)$

$(*), (**), \left(\begin{matrix} * \\ ** \end{matrix}\right) \Rightarrow f^{-1}(G) \in Filt(A)$.

(b) Presupunem că f e surjectivă. (1)

$$F \in Filt(A) \Rightarrow \begin{cases} F \subseteq A \Rightarrow f(F) \subseteq B; \\ F \neq \emptyset \Rightarrow f(F) \neq \emptyset. \ (\mathrm{I}) \end{cases}$$

Fie $u, v \in B$.

Dacă $u, v \in f(F) \Leftrightarrow (\exists\, x, y \in F)$ $(u = f(x),\ v = f(y))$.

$x, y \in F \in Filt(A) \Rightarrow x \wedge y \in F$.

$\Rightarrow u \wedge v = f(x) \wedge f(y) =$
$= f(x \wedge y) \in f(F)$. (II)

Dacă $u \in f(F)$ și $u \leq v$, atunci:

$(\exists\, x \in F)(u = f(x))$.

$v \in B \xRightarrow{(1)} (\exists\, y \in A)(f(y) = v)$.

$u \leq v \Leftrightarrow u \vee v = v$.

$\Rightarrow f(y) = v = u \vee v = f(x) \vee f(y)$
$= f(x \vee y)$.

$\left.\begin{array}{l} x \leq x \vee y \\ x \in F \in Filt(A) \end{array}\right\} \Rightarrow x \vee y \in F \Rightarrow$

$\Rightarrow v = f(x \vee y) \in f(F)$. (III)

(I), (II), (III) $\Rightarrow f(F) \in Filt(B)$.

<u>Exercițiul 10:</u> Fie $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ și $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$ algebre Boole și $f: A \to B$ un morfism boolean.

Să se demonstreze că:

(a) $f^{-1}(\{1\}) \in Filt(A)$;

(b) $f(A)$ este subalgebră Boole a lui B, izomorfă cu algebra Boole factor $A/f^{-1}(\{1\})$;

(c) pentru orice subalgebră Boole S a lui A, $f(S)$

este subalgebră Boole a lui B;

(d) pentru orice subalgebră Boole T a lui B, $f^{-1}(T)$ este subalgebră Boole a lui A.

RESOLVARE:

(a) $\{1\} \in Filt(B) \xrightarrow{(Exerc. 9, (a))} \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) \in Filt(A)$.

(b) $f(A) \subseteq B$.

$0 = f(0) \in f(A)$, $1 = f(1) \in f(A)$. $(*)$

Fie $u, v \in f(A)$. $\Leftrightarrow (\exists x, y \in A)$ $(u = f(x), v = f(y))$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} u \vee v = f(x) \vee f(y) = \\ \quad = f(x \vee y) \in f(A), \ (**) \\ \overline{u} = \overline{f(x)} = f(\overline{x}) \in f(A). \ (***) \end{cases}$$

$(*), (**), (***) \xrightarrow{(\text{propr. subalg. Boole})}$

$\Rightarrow f(A)$ e subalgebră Boole a lui B.

Fie $\varphi : A/_{f^{-1}(\{1\})} \longrightarrow f(A)$,

$(\forall x \in A)\left(\varphi\left(x/_{f^{-1}(\{1\})}\right) = f(x)\right)$.

Fie $x, y \in A$.

Au loc echivalențele: $x/_{f^{-1}(\{1\})} = y/_{f^{-1}(\{1\})} \Leftrightarrow (x, y) \in \sim_{f^{-1}(\{1\})} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x \leftrightarrow y) \in \{1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) \leftrightarrow f(y) = 1 \xrightarrow[\text{de alg. Boole)}]{\text{(propr. aritmetice}}$

$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow \varphi\left(x/_{f^{-1}(\{1\})}\right) = \varphi\left(y/_{f^{-1}(\{1\})}\right)$. Așadar,

φ este $\underbrace{\text{bine definită}}_{\text{conform „}\Rightarrow\text{” din acest șir de echivalențe}}$ și $\underbrace{\text{injectivă}}_{\text{conform „}\Leftarrow\text{” din acest șir de echivalențe}}$,

$$(\forall u \in f(A))(\exists x \in A)\left(u = f(x) = \varphi\left(x/f^{-1}(\{1\})\right)\right) \Rightarrow \varphi \text{ este surjectivă.}$$

Așadar, φ e bijectivă. (I).

$$0 = f(0) = \varphi\left(0/f^{-1}(\{1\})\right) \text{ și}$$

$$1 = f(1) = \varphi\left(1/f^{-1}(\{1\})\right). \quad \text{(II)}$$

Fie $x, y \in A$.

$$\varphi\left(x/f^{-1}(\{1\}) \vee y/f^{-1}(\{1\})\right) = \varphi\left((x \vee y)/f^{-1}(\{1\})\right) = f(x \vee y) =$$

$$= f(x) \vee f(y) = \varphi\left(x/f^{-1}(\{1\})\right) \vee$$

$\vee\, \varphi\left(\overline{x}/_{f^{-1}(\{1\})}\right)$. $\boxed{\text{III}}$,

$$\varphi\left(\overline{x/_{f^{-1}(\{1\})}}\right) = \varphi\left(\overline{x}/_{f^{-1}(\{1\})}\right) = $$

$$= f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{\varphi\left(x/_{f^{-1}(\{1\})}\right)}. \boxed{\text{IV}}$$

$\boxed{\text{II}}, \boxed{\text{III}}, \boxed{\text{IV}} \xrightarrow[\text{booleene})]{(\text{propr. morfismelor}} \varphi$ este morfism boolean. $\xrightarrow{\boxed{\text{I}}} \varphi$ este izomorfism boolean.

(c) TEMĂ OBLIGATORIE.
(d) TEMĂ OBLIGATORIE.

<u>Exercițiul 11:</u> Fie $(B, \vee, \wedge, \overline{\ }, \leq, 0, 1)$ o algebră Boole și $F \in Filt(B)$. Să se demonstreze că:
(a) $1/_F = F$;
(b) F este ultrafiltru al lui $B \Leftrightarrow$ algebra Boole

factor B/F este izomorfă cu algebra Boole standard.

REZOLVARE:

(a) $1/F = \{a \in B \mid a \sim_F 1\} = \{a \in B \mid a \leftrightarrow 1 \in F\}$.

Pt. orice $a \in B$, avem:

$a \leftrightarrow 1 = (a \to 1) \wedge (1 \to a) = \underbrace{(\overline{a} \vee 1)}_{=1} \wedge \underbrace{(\overline{1} \vee a)}_{=0 \vee a = a} = 1 \wedge a = a$

$\Rightarrow 1/F = \{a \in B \mid a \in F\} = F$.

(b) "$\Leftarrow$": $B/F \cong \mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}, \max, \min, \overline{\cdot}, \leq, 0, 1)$, cu $0 \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |B/F| = 2$,
$0/F = \min(B/F)$,
$1/F = \max(B/F)$

$\Rightarrow B/F = \{0/F, 1/F\}$, cu $0/F \neq \underbrace{1/F}_{\overset{(a)}{=} F}$ $\Rightarrow$

$0/F \cap 1/F = \emptyset$.

$0 \in 0/F$

$\Rightarrow 0 \notin F. \Rightarrow F \neq B.$ $(*)$

Fie $a \in B. \Rightarrow a/F \in B/F = \{0/F, 1/F\}. \Rightarrow a/F = 0/F$ sau $a/F = 1/F$.

Dacă $\underbrace{a/F}_{\psi_a} = 1/F \overset{(a)}{=} F \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in F.$ $\binom{*}{*}$

Dacă $a/F = 0/F \Leftrightarrow \overline{a/F} = \overline{a}/F \Rightarrow$

$= \overline{a/F} = \overline{0/F} = \overline{0}/F = 1/F \overset{(a)}{=} F.$

$\Rightarrow \overline{a} \in F.$ $\binom{*}{**}$

$\binom{*}{*}, \binom{*}{**} \Rightarrow (\forall a \in B)(a \in F$ sau $\overline{a} \in F) \xrightarrow[\text{(caracterizare a ultrafiltrelor)}]{(*)} F \in \mathrm{Max}(B).$

$\text{"}\Leftarrow\text{"}:$ $F \in \mathrm{Max}(B) \Rightarrow F \neq B. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \notin F \overset{(a)}{=} 1/F. \xrightarrow{(0 \in 0/F)} 0/F \neq$

$\neq 1/F$. (I)

SXII, PG. 34.

Fie $a \in B$, $\xrightarrow[\text{(caracterizare a ultrafiltrelor)}]{(F \in Max(B))} a \in F$

sau $\bar{a} \in F$.

Dacă $a \in F \xRightarrow{(a)} 1/F \Rightarrow$

$\Rightarrow a/F = 1/F$. (1)

Dacă $\bar{a} \in F \xRightarrow{(a)} 1/F \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{a}/F = 1/F$, $\Leftrightarrow a/F = \overline{\bar{a}}/F =$

$= \overline{\bar{a}/F} = \overline{1/F} = \bar{1}/F = 0/F$. (2)

(1), (2) $\Rightarrow B/F = \{0/F, 1/F\}$. (II)

(I), (II) $\Rightarrow |B/F| = 2 \Rightarrow B/F \cong \mathcal{L}_2$.

<u>Exercițiul 12:</u> $n \in \mathbb{N}^*$;

$F \in Filt(\mathcal{L}_2^n)$.

(a) Ce valori poate avea $|F|$?

Dar dacă $F \in Max(\mathcal{L}_2^n)$?

(b) Ce valori poate avea $\left|L_2^n / F\right|$? Dar dacă $F \in Max(\mathcal{L}_2^n)$?

REZOLVARE:

(a) $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$, cu $0 \neq 1$: algebra Boole standard. $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n, \vee, \wedge, \bar{\ }, \leq, 0, 1)$, cu operațiile și relația de ordine definite pe componente.

$L_2^n = \{0,1\}^n = \underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{\text{de } n \text{ ori } \{0,1\}} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}\}$.

$\mathcal{L}_2^n$ este o algebră Boole finită: $\left|L_2^n\right| = 2^n < \infty$. $\Rightarrow$ Toate filtrele lui $\mathcal{L}_2^n$ sunt principale, $F \in Filt(\mathcal{L}_2^n)$,

$\Rightarrow (\exists x \in L_2^n)(F = [x))$.

$x \in L_2^n \Leftrightarrow (\exists x_1, \dots, x_n \in L_2 = \{0,1\})(x = (x_1, \dots, x_n))$. Not. $k = x_1 + \dots + x_n = |\{i \in \overline{1,n} \mid x_i = 1\}|$. (*)

$F = [x) = \{a \in L_2^n \mid x \leq a\} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}, (\forall i \in \overline{1,n})(x_i \leq a_i)\} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid (\forall i \in \overline{1,n}) [(x_i = 0 \Rightarrow a_i \in \{0,1\}) \;\&\; (x_i = 1 \Rightarrow a_i = 1)]\}$. (**)

$$\left.\begin{array}{l} (*), (**) \Rightarrow |F| = 2^{n-k}, \\ \text{Evident } k \in \overline{0,n}. \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |F| \in \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n\}$.

Într-o algebră Boole finită

ultrafiltrele sunt exact filtrele (principale) generate de atomi, așadar: $\underbrace{F}_{=[x)} \in Max(\mathcal{L}_2^n) \Leftrightarrow$ (SXII, PG. 37)

$\Leftrightarrow x$ este atom al lui $\mathcal{L}_2^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=1. \Rightarrow |F| = 2^{n-k} = 2^{n-1}$.

(b) $L_2^n / F = \{a/F \mid a \in L_2^n\}$.

~~Pt. orice~~ $a, b \in L_2^n$: $a=(a_1,...,a_n)$ și $b=(b_1,...,b_n)$, cu $a_1,...,a_n, b_1,...,b_n \in L_2 = \{0,1\}$, și au loc:

$a/F = b/F \Leftrightarrow a \sim_F b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a \sim_{[x)} b \Leftrightarrow a \wedge x = b \wedge x$

$\Leftrightarrow (a_1,...,a_n) \wedge (x_1,...,x_n) =$
$= (b_1,...,b_n) \wedge (x_1,...,x_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a_1 \wedge x_1, ..., a_n \wedge x_n) =$
$= (b_1 \wedge x_1, ..., b_n \wedge x_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i\in\overline{1,n})(\underbrace{a_i\wedge x_i}_{=\begin{cases}0, \text{ dacă } x_i=0\\ a_i, \text{ dacă } x_i=1\end{cases}} = \underbrace{b_i\wedge x_i}_{=\begin{cases}0, \text{ dacă } x_i=0\\ b_i, \text{ dacă } x_i=1\end{cases}}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall i\in\overline{1,n})(x_i=1 \Rightarrow a_i=b_i)$. (***)

Fie $a\in L_2^n \Leftrightarrow a=(a_1,\dots,a_n)$ cu $a_1,\dots,a_n\in L_2=\{0,1\}$. Avem: $a/_F=\{b\in L_2^n \mid a\sim_F b\} \overset{(***)}{=}$

$=\{(b_1,\dots,b_n) \mid b_1,\dots,b_n\in\{0,1\}, (\forall i\in\overline{1,n})(x_i=1\Rightarrow a_i=b_i)\} \Rightarrow$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} |a/_F| = 2^{n-k}$. (****)

$L_2^n/_F=\{a/_F \mid a\in L_2^n\}$. $\Rightarrow$

$L_2^n=\bigcup\limits_{\alpha=a/_F\in L_2^n/_F} a/_F$ şi $(\forall \alpha=a/_F,\ \beta=b/_F\in L_2^n/_F)(\alpha\neq\beta\Leftrightarrow\alpha\cap\beta=\emptyset)$, SXII, PG. 39

$$\Rightarrow 2^n = |L_2^n| = \sum_{\alpha \in L_2^n/F} |\alpha| \overset{(**)}{\underset{(**)}{=}} \sum_{\alpha \in L_2^n/F} 2^{n-k} = 2^{n-k} \cdot |L_2^n/F| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |L_2^n/F| = \frac{2^n}{2^{n-k}} = 2^k \in \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n\}. \quad (1)$$

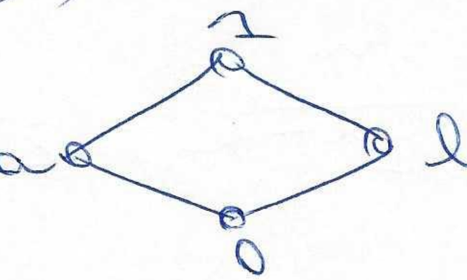
Dacă $F \in Max(\mathcal{L}_2^n) \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$
$\overset{(1)}{\Rightarrow} |L_2^n/F| = 2^1 = 2$, cum era de așteptat, pt. că în acest caz, $L_2^n/F \cong L_2$, conform (b) din Exercițiul 11.

TEMĂ: Să se citească din EXPZLMCAAA2.PDF, exercițiul cu determinarea filtrelor și algebrelor Boole factor ale cubului.

Exercițiu: Să se determine (SXII pg. 40)
filtrele și algebrele Boole
factor ale rombului.

REZOLVARE:

Rombul: $\mathcal{L}_2^2=(L_2^2=\{0,a,b,1\},\vee,$
$\wedge,\bar{\ },\leq,0,1)$, cu această diagramă
Hasse:



(Atomii: a, b.) $(\mathcal{L}_2^2)$

$|L_2^2|=4<\infty \Rightarrow \mathcal{L}_2^2$ are toate
filtrele principale $\Rightarrow \mathrm{Filt}(\mathcal{L}_2^2)=$
$=\{[0),[a),[b),[1)\}.$

$(\forall x\in L_2^2)([x)=\{u\in L_2^2 \mid x\leq$
$\leq u\})$, așadar: $[0)=L_2^2$,

filtrul impropriu
ultrafiltrele lui $\mathcal{L}_2^2$: $[a)=\{a,1\}$, $[b)=\{b,1\}$,

filtrul trivial $\leftarrow [1)=\{1\}$.

Pt. orice $x\in L_2^2$, $L_2^2/[x)=$
$=\{0/[x), a/[x), b/[x), 1/[x)\}$,

unde $(\forall u \in L_2^2 = \{0, a, b, 1\})$

$\left(u/_{[x)} = \{v \in L_2^2 \mid u \sim_{[x)} v\} = \right.$

$\left. = \{v \in L_2^2 \mid u \wedge x = v \wedge x\} \right)$

$0/_{[x)} \cup a/_{[x)} \cup b/_{[x)} \cup 1/_{[x)} =$

$= L_2^2 = \{0, a, b, 1\}$ și mulțimile

$0/_{[x)}, a/_{[x)}, b/_{[x)}, 1/_{[x)}$ sunt

două câte două disjuncte,

$0/_{[0)} = \{v \in L_2^2 \mid 0 = 0 \wedge 0 = v \wedge 0\} =$

$= \{v \in L_2^2 \mid 0 = 0\} = L_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow L_2^2/_{[0)} = L_2^2/_{L_2^2} = \{0/_{[0)}\} =$

$= \{L_2^2\} \simeq \mathcal{L}_1 \simeq \mathcal{L}_2^0.$

$(\forall u \in L_2^2)(u/_{[1)} = \{v \in L_2^2 \mid u \wedge 1 =$

$= v \wedge 1\} = \{v \in L_2^2 \mid u = v\} = \{u\} \Rightarrow$

$\Rightarrow L_2^2/_{[1)} = \{\{0\},\{a\},\{b\},\{1\}\}$

$\cong \mathcal{L}_2^2,$

$0/_{[a)} = \{v \in L_2^2 \mid 0 = 0 \wedge a = v \wedge a\} =$

$= \{0, b\},$

$1/_{[a)} = \{v \in L_2^2 \mid a = 1 \wedge a = v \wedge a\} =$

$= \{v \in L_2^2 \mid a \leq v\} = [a) =$

sau direct, $1/_{[a)} = [a)$, conform $= \{a, 1\},$

(a) din Exercițiul 11,

$\Rightarrow L_2^2/_{[a)} = \{0/_{[a)}, 1/_{[a)}\} \cong \mathcal{L}_2 \cong$

$\cong \mathcal{L}_2^1,$

$0/_{[b)} = \{v \in L_2^2 \mid 0 = 0 \wedge b = v \wedge b\} =$

$= \{0, a\},$

$1/_{[b)} = [b) = \{b, 1\}$, conform

(a) din Exercițiul 11,

$\Rightarrow L_2^2/_{[b)} = \{0/_{[b)}, 1/_{[b)}\} \cong \mathcal{L}_2 \cong \mathcal{L}_2^1.$

Exercițiu: Fie T o mulțime. Pentru orice $M \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{M} = T \setminus M$. Fie $A \in \mathcal{P}(T)$. Să se determine cardinalul filtrului $[\overline{A})$ al algebrei Boole $(\mathcal{P}(T), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, T)$.

RESOLVARE:

$[\overline{A}) = \{M \in \mathcal{P}(T) \mid \overline{A} \subseteq M\}$. (1).

Demonstrăm că $|[\overline{A})| = |\mathcal{P}(A)|$.

Fie $f : \mathcal{P}(A) \to [\overline{A})$, $(\forall X \in \mathcal{P}(A))$ $\left(f(X) = \underbrace{\overline{A} \cup \overset{\subseteq A}{X}}_{\subseteq \overline{A} \cup A = T} \overset{(1)}{\in} [\overline{A})\right)$. $\boxed{f \text{ e bijectivă.}}$

Fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, cu $f(X) = f(Y)$. $\Leftrightarrow \overline{A} \cup X = \overline{A} \cup Y \,/\cap A \Rightarrow$

$\Rightarrow (\overline{A} \cup X) \cap A = (\overline{A} \cup Y) \cap A \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(\overline{A} \cap A)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(\overset{\subseteq A}{X} \cap A)}_{=X} = \underbrace{(\overline{A} \cap A)}_{=\emptyset} \cup \underbrace{(\overset{\subseteq A}{Y} \cap A)}_{=Y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = Y. \Rightarrow f$ e injectivă. $(*)$

Fie $M \in [\overline{A})$. $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} M \in \mathcal{P}(T)$, cu $\overline{A} \subseteq M$.

$M \cap A \in \mathcal{P}(A)$

$f(M \cap A) = \overline{A} \cup (M \cap A) = (\underbrace{\overline{A} \cup M}_{=M}) \cap$
$\cap \underbrace{(\overline{A} \cup A)}_{=T} = \underbrace{M}_{\subseteq T} \cap T = M$, $\Rightarrow f$ e surjectivă. $(**)$

$(*), (**) \Rightarrow f$ e bijectivă. $\Rightarrow |[\overline{A})| = |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

cu operațiile și relația de ordine uzuale; în exercițiul anterior le-am ordonat descrescător după aritate, i.e. după nr. de argumente

Exemple de filtre finite în algebre Boole infinite:

- filtrul trivial: $[1) = \{1\}$, are $|[1)| = |\{1\}| = 1$, în orice algebră Boole;
- fie T o mulțime infinită, $n \in \mathbb{N}$ și $A \in \mathcal{P}(T)$, având $|A| = n$, $\xrightarrow{\text{(exercițiul precedent)}}$ în algebra Boole (infinită) $\mathcal{P}(T)$, filtrul $[T \setminus A)$ are $|[T \setminus A)| = 2^{|A|} = 2^n < \infty$;

cazuri particulare: $n = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$: $[T \setminus \emptyset) = [T) = \{T\}$: filtrul trivial: $|[T)| = 1$;
$n = 1 \Leftrightarrow A = \{a\}$, cu $a \in T$: $[T \setminus \{a\}) = \{T \setminus \{a\}, T\}$; $|[T \setminus \{a\})| = 2$.