Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a IX-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de denumiri, notaţii şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată;*
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană.*

Peste tot în acest referat, vom nota:

- pentru orice mulţime A, cu $card(A)$ sau $card\,A$ cardinalul mulţimii A;
- pentru orice mulţime A, cu $A^2 = A \times A = \{(a,b) \mid a,b \in A\}$ (produsul cartezian, produsul direct de mulţimi; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a,b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul; a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice);
- cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente, pentru orice n natural nenul;
- laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;
- cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- cu $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;

- cu $\hat{\varphi} \in E/\sim$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/\sim$;
- cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene a unei interpretări $h : V \to \mathcal{L}_2$;
- cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$.

Amintim că:

- pentru orice relaţie binară R pe o mulţime A (adică orice submulţime $R \subseteq A^2$), se defineşte *inversa lui* R ca fiind relaţia binară pe A notată cu R^{-1} şi dată de: $R^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in R\} \subseteq A^2 = A \times A$; inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- legătura dintre operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- orice lanţ este o latice distributivă, cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;
- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:
  - (i) $\overline{\overline{x}} = x$ (**autodualitatea operaţiei de complementare**);
  - (ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ şi $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ (**legile lui de Morgan**);
  - (iii) $x \to y = \overline{x} \vee y$ (**definiţia implicaţiei într–o algebră Boole**);
  - (iv) $x \leq y$ ddacă $x \to y = 1$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic).

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ o latice nevidă (i. e. cu mulţimea suport $L \neq \emptyset$).*
Pentru orice $a, b \in L$, definim relaţiile binare $R_{a,b}$ şi $S_{a,b}$ pe L, astfel:

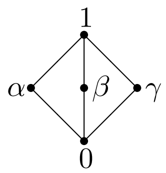
- $R_{a,b} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in L, x \vee a = y \vee b\} \subseteq L^2$;
- $S_{a,b} \stackrel{\text{def.}}{=} \{(x, y) \mid x, y \in L, x \wedge a = y \wedge b\} \subseteq L^2$.

(i) Demonstraţi că, pentru orice $a, b \in L$, au loc egalităţile: $R_{a,b} = R_{b,a}^{-1}$ şi $S_{a,b} = S_{b,a}^{-1}$.

(ii) Fie $a, b \in L$. Să se demonstreze că următoarele patru afirmaţii sunt echivalente:

- (1) *$R_{a,b}$ şi $S_{a,b}$ sunt reflexive;*
- (2) *$(a, a) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$;*
- (3) *$(b, b) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$;*
- (4) *$a = b$.*

(iii) În cazul particular în care $\mathcal{L}$ este diamantul, cu $L = \{0, \alpha, \beta, \gamma, 1\}$ şi diagrama Hasse de mai jos, să se determine $R_{\alpha,\beta}$ şi $S_{\alpha,\beta}$.



Rezolvare: (i) Fie $a, b \in L$, arbitrare. Pentru orice $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $(x, y) \in R_{a,b}$ ddacă $x \vee a = y \vee b$ ddacă $y \vee b = x \vee a$ ddacă $(y, x) \in R_{b,a}$ ddacă $(x, y) \in R_{b,a}^{-1}$. Prin urmare, $R_{a,b} = R_{b,a}^{-1}$. Analog rezultă că $S_{a,b} = S_{b,a}^{-1}$.
(ii) Fie $a, b \in L$, arbitrare. Vom demonstra echivalenţa celor patru condiţii în această ordine: (1) $\Rightarrow$
$$\begin{cases} (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) \text{ şi} \\ (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1). \end{cases}$$
(1) $\Rightarrow$ (2): Trivial.
(1) $\Rightarrow$ (3): Trivial.
(2) $\Rightarrow$ (4): Ipoteza acestei implicaţii este că $(a, a) \in R_{a,b} \cap S_{a,b}$, i. e. $(a, a) \in R_{a,b}$ şi $(a, a) \in S_{a,b}$. $(a, a) \in R_{a,b}$ înseamnă că $a \vee a = a \vee b$, adică $a = a \vee b$, i. e. $b \leq a$. $(a, a) \in S_{a,b}$ înseamnă că $a \wedge a = a \wedge b$, adică $a = a \wedge b$, i. e. $a \leq b$. Deci $b \leq a$ şi $a \leq b$, aşadar $a = b$.
(3) $\Rightarrow$ (4): Analog cu implicaţia anterioară.
(4) $\Rightarrow$ (1): Dacă $a = b$, atunci $R_{a,b} = R_{a,a}$ şi $S_{a,b} = S_{a,a}$. Orice $x \in L$ satisface $x \vee a = x \vee a$, deci $(x, x) \in R_{a,a} = R_{a,b}$. Prin urmare, $R_{a,b}$ este reflexivă. Analog se arată că $S_{a,b}$ este reflexivă.
(iii) $R_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \mid x, y \in L, x \vee \alpha = y \vee \beta\}$. Prin urmare, avem:

- întrucât $0 \vee \alpha = \alpha \vee \alpha = \alpha$, rezultă că $\{y \in L \mid (0, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\alpha, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid \alpha = y \vee \beta\} = \emptyset$, pentru că, dacă ar exista un element $y \in L$ cu $\alpha = y \vee \beta \geq \beta$, atunci ar rezulta că $\beta \leq \alpha$, ceea ce nu este adevărat;

- întrucât $\beta \vee \alpha = \gamma \vee \alpha = 1 \vee \alpha = 1$, rezultă că $\{y \in L \mid (\beta, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\gamma, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (1, y) \in R_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid 1 = y \vee \beta\} = \{\alpha, \gamma, 1\}$.

Aşadar, $R_{\alpha,\beta} = \{(\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\beta, 1), (\gamma, \alpha), (\gamma, \gamma), (\gamma, 1), (1, \alpha), (1, \gamma), (1, 1)\}$.
$S_{\alpha,\beta} = \{(x, y) \mid x, y \in L, x \wedge \alpha = y \wedge \beta\}$. Prin urmare, avem:

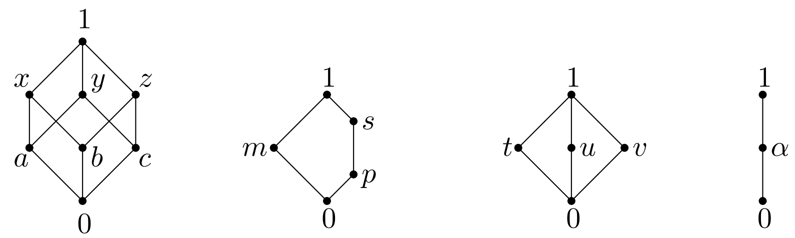
- întrucât $0 \wedge \alpha = \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha = 0$, rezultă că $\{y \in L \mid (0, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\beta, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (\gamma, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid 0 = y \wedge \beta\} = \{0, \alpha, \gamma\}$;
- întrucât $\alpha \wedge \alpha = 1 \wedge \alpha = \alpha$, rezultă că $\{y \in L \mid (\alpha, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid (1, y) \in S_{\alpha,\beta}\} = \{y \in L \mid \alpha = y \wedge \beta\} = \emptyset$, pentru că, dacă ar exista un element $y \in L$ cu $\alpha = y \wedge \beta \leq \beta$, atunci ar rezulta că $\alpha \leq \beta$, ceea ce nu este adevărat.

Aşadar, $S_{\alpha,\beta} = \{(0, 0), (0, \alpha), (0, \gamma), (\beta, 0), (\beta, \alpha), (\beta, \gamma), (\gamma, 0), (\gamma, \alpha), (\gamma, \gamma)\}$.

Exerciţiul 1.2. *Considerăm următoarele latici mărginite:*

- *cubul, notat cu $\mathcal{L}_2^3$, cu mulţimea suport $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$,*
- *pentagonul, pe care îl vom nota cu $\mathcal{P}$, cu mulţimea suport $P = \{0, m, p, s, 1\}$,*
- *diamantul, pe care îl vom nota cu $\mathcal{D}$, cu mulţimea suport $D = \{0, t, u, v, 1\}$,*
- *lanţul cu trei elemente, notat cu $\mathcal{L}_3$, cu mulţimea suport $L_3 = \{0, \alpha, 1\}$,*

cu următoarele diagrame Hasse:



$\mathcal{L}_2^3$ $\qquad$ $\mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{D}$ $\qquad$ $\mathcal{L}_3$

Să se demonstreze că nu există niciun morfism surjectiv de latici:

(i) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{P}$;

(ii) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{D}$;

(iii) de la $\mathcal{L}_2^3$ la $\mathcal{L}_3$.

Rezolvare: După cum ştim, cele patru latici enumerate în enunţ au următoarele caracteristici:

- cubul este o algebră Boole, adică o latice distributivă mărginită complementată;
- pentagonul este o latice mărginită nedistributivă;
- diamantul este o latice mărginită nedistributivă;
- lanţul cu trei elemente este o latice distributivă mărginită.

Vom folosi aceste caracteristici ale celor patru latici pentru a rezolva exerciţiul. Pentru început, să demonstrăm o serie de fapte generale. Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge, \leq)$ două latici nevide arbitrare. Să arătăm că:

- dacă laticea $\mathcal{L}$ este distributivă şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci şi laticea $\mathcal{M}$ este distributivă;
- dacă laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ sunt mărginite şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci h este morfism de latici mărginite şi h duce orice element complementat al lui $\mathcal{L}$ într–un element complementat al lui $\mathcal{M}$, aşadar, dacă $\mathcal{L}$ este complementată, atunci şi $\mathcal{M}$ este complementată.

Aşadar, să presupunem că laticea $\mathcal{L}$ este distributivă şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Fie $\delta, \varepsilon, \varphi \in M$, arbitrare. h este surjectiv, aşadar există $d, e, f \in L$ cu $h(d) = \delta$, $h(e) = \varepsilon$ şi $h(f) = \varphi$. $\mathcal{L}$ este o latice distributivă, deci $d \vee (e \wedge f) = (d \vee e) \wedge (d \vee f)$. Obţinem: $\delta \vee (\varepsilon \wedge \varphi) = h(d) \vee (h(e) \wedge h(f)) = h(d \vee (e \wedge f)) = h((d \vee e) \wedge (d \vee f)) = (h(d) \vee h(e)) \wedge (h(d) \vee h(f)) = (\delta \vee \varepsilon) \wedge (\delta \vee \varphi)$. Echivalenţa celor două legi de distributivitate într–o latice ne asigură de faptul că $\mathcal{M}$ satisface şi cealaltă lege de distributivitate. Aşadar, $\mathcal{M}$ este o latice distributivă.

Acum să presupunem că laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ sunt mărginite şi există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Folosim notaţiile obişnuite 0 şi 1 pentru primul şi ultimul element, respectiv, în fiecare dintre laticile $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$. Fie $\delta \in M$, arbitrar. Surjectivitatea lui h ne asigură de faptul că există $d \in L$ cu $h(d) = \delta$. În $\mathcal{L}$ are loc dubla inegalitate: $0 \leq d \leq 1$. $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ este un morfism de latici şi, prin urmare, o funcţie izotonă între poseturile $(L, \leq)$ şi $(M, \leq)$, aşadar $h(0) \leq h(d) = \delta \leq h(1)$. Am obţinut că, oricare ar fi $\delta \in M$, $h(0) \leq \delta \leq h(1)$. Definiţia şi unicitatea minimului şi maximului într–un poset arată că $h(0) = 0$ şi $h(1) = 1$, deci h este morfism de latici mărginite. Acum, fie $d \in L$ un element complementat al lui $\mathcal{L}$ şi $e \in L$ un complement al lui d, adică un element al lui L care satisface: $\begin{cases} d \vee e = 1 \\ \text{şi} \\ d \wedge e = 0. \end{cases}$ Atunci, în $\mathcal{M}$ avem:

$$\begin{cases} h(d) \vee h(e) = h(d \vee e) = h(1) = 1 \\ \text{şi} \\ h(d) \wedge h(e) = h(d \wedge e) = h(0) = 0, \end{cases}$$

aşadar $h(e)$ este un complement al lui $h(d)$, deci $h(d)$ este element complementat al lui $\mathcal{M}$. Dacă laticea mărginită $\mathcal{L}$ este complementată, adică are toate elementele complementate, iar $\delta \in M$, arbitrar, atunci, cum h este surjectiv, rezultă că există $d \in L$ cu $h(d) = \delta$, iar d este un element complementat, ca toate elementele lui $\mathcal{L}$, prin urmare $\delta = h(d)$ este element complementat al lui $\mathcal{M}$, deci $\mathcal{M}$ are toate elementele complementate, adică laticea mărginită $\mathcal{M}$ este complementată.

După aceste preparative, să trecem la rezolvarea celor trei puncte ale exerciţiului.
(i) $\mathcal{L}_2^3$ este o latice distributivă, aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$, atunci, conform celor de mai sus, ar rezulta că laticea $\mathcal{P}$ este distributivă, ceea ce este fals. Prin urmare, nu există niciun morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$.
(ii) Analog cu (i).
(iii) $\mathcal{L}_2^3$ este o latice mărginită complementată, aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$, atunci, conform celor de mai sus, ar rezulta că laticea $\mathcal{L}_3$ este complementată, deci elementul α ar fi complementat în $\mathcal{L}_3$. Dar, în $\mathcal{L}_3$, $\alpha \vee 0 = \alpha \vee \alpha = \alpha \neq 1$, deci nici 0, nici α nu sunt complemente ale lui α, iar $\alpha \wedge 1 = \alpha \neq 0$, deci 1 nu este complement al lui α, prin urmare α nu are complement în $\mathcal{L}_3$, aşadar am obţinut o contradicţie. Deci nu există niciun morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$.

O altă variantă de rezolvare a punctului (iii) este folosirea observaţiei că, dacă $\mathcal{L}$ este o algebră Boole, i. e. o latice distributivă mărginită complementată, iar $\mathcal{M}$ este o latice mărginită, astfel încât există un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, atunci, conform preparativelor de mai sus, rezultă că $\mathcal{M}$ este o latice distributivă mărginită complementată, i. e. o algebră Boole. Aşadar, dacă ar exista un morfism surjectiv de latici $h : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{L}_3$, atunci ar rezulta că $\mathcal{L}_3$ este o algebră Boole, ceea ce este fals, întrucât $\mathcal{L}_3$ are exact 3 elemente, deci este o latice finită care nu are cardinalul putere a lui 2 (a se vedea **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**, caz particular al **Teoremei de reprezentare a lui Stone**).

Exerciţiul 1.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$, astfel încât:*

$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$$

Să se demonstreze că:

$$\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$$

Rezolvarea 1 (sintactic): Folosim faptele cunoscute (a se vedea, de exemplu, [6]) că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

(i) $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$

(ii) $\vdash \varphi \to (\psi \vee \varphi)$

(iii) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$

(iv) $\vdash (\psi \wedge \varphi) \to \varphi$

(v) $\vdash \varphi \wedge \psi$ ddacă $\begin{cases} \vdash \varphi \\ \text{şi} \\ \vdash \psi \end{cases}$

(vi) este valabilă regula de deducţie: $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash \varphi \to \chi}$

Din (i), relaţia din ipoteză şi (iii), avem:

$$\vdash \alpha \to (\alpha \vee \beta),$$
$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta),$$
$$\vdash (\gamma \wedge \delta) \to \gamma,$$

de unde, prin două aplicări ale regulii de deducţie de la (vi), obţinem:

$$\vdash \alpha \to \gamma \qquad (a)$$

Din (ii), relaţia din ipoteză şi (iv), avem:

$$\vdash \beta \to (\alpha \vee \beta),$$
$$\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta),$$
$$\vdash (\gamma \wedge \delta) \to \delta,$$

de unde, prin două aplicări ale regulii de deducţie de la (vi), obţinem:

$$\vdash \beta \to \delta \qquad (b)$$

Din (a), (b) şi implicaţia reciprocă din (v), rezultă:

$$\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$$

Rezolvarea 2 (algebric): Notăm cu $a = \hat{\alpha}, b = \hat{\beta}, c = \hat{\gamma}, d = \hat{\delta} \in E/_{\sim}$. Conform ipotezei, $\vdash (\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)$, ceea ce este echivalent cu $\widehat{(\alpha \vee \beta) \to (\gamma \wedge \delta)} = 1$, adică $(\hat{\alpha} \vee \hat{\beta}) \to (\hat{\gamma} \wedge \hat{\delta}) = 1$, i. e. $(a \vee b) \to (c \wedge d) = 1$, ceea ce este echivalent cu $a \vee b \leq c \wedge d$. Dar $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$, $c \wedge d \leq c$ şi $c \wedge d \leq d$. Aşadar, $a, b \leq a \vee b \leq c \wedge d \leq c, d$, de unde, prin tranzitivitate, rezultă că $a \leq c$ şi $b \leq d$, ceea ce este echivalent cu $a \to c = 1$ şi $b \to d = 1$, deci $(a \to c) \wedge (b \to d) = 1$, adică $(\hat{\alpha} \to \hat{\gamma}) \wedge (\hat{\beta} \to \hat{\delta}) = 1$, i. e. $\widehat{(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)} = 1$, ceea ce este echivalent cu $\vdash (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \delta)$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un poset nevid (i. e. cu mulţimea elementelor $P \neq \emptyset$).*

Definim următoarea relaţie binară pe mulţimea P: $R = \{(a, b) \mid a, b \in P, card\{x \in P \mid a \leq x \text{ sau } x \leq a\} = card\{x \in P \mid b \leq x \text{ sau } x \leq b\}\} \subseteq P^2$. Cu alte cuvinte, R este formată din perechile (a, b) de elemente din P cu proprietatea că mulţimea elementelor comparabile cu a în posetul $\mathcal{P}$ are acelaşi cardinal cu mulţimea elementelor comparabile cu b în posetul $\mathcal{P}$.

Să se demonstreze că:

(i) R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea P;

(ii) dacă posetul $\mathcal{P}$ este mărginit, atunci $(\min \mathcal{P}, \max \mathcal{P}) \in R$;

(iii) dacă posetul $\mathcal{P}$ este lanţ, atunci $R = P^2$;

(iv) dacă posetul $\mathcal{P}$ este finit şi are minim sau maxim, atunci are loc echivalenţa: $R = P^2$ ddacă $\mathcal{P}$ este lanţ;

(v) dacă posetul $\mathcal{P}$ este infinit sau nu are nici minim, nici maxim, atunci nu are neapărat loc echivalenţa de la punctul (iv), adică: egalitatea $R = P^2$ nu este neapărat echivalentă cu condiţia ca posetul $\mathcal{P}$ să fie lanţ.

Rezolvare: Introducem următoarea notaţie, care va fi utilă pentru redactarea soluţiei acestui exerciţiu: pentru orice $a \in P$, fie $\langle a \rangle$ mulţimea elementelor lui P care sunt comparabile cu a în posetul $\mathcal{P}$, i. e. $\langle a \rangle = \{x \in P \mid a \leq x \text{ sau } x \leq a\} \subseteq P$. Cu această notaţie, putem scrie definiţia lui R în felul următor: $R = \{(a, b) \mid a, b \in P, card\langle a \rangle = card\langle b \rangle\}$. Altfel spus, pentru orice $a, b \in P$, are loc echivalenţa: $(a, b) \in R$ ddacă $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$. Este trivial faptul că, dacă două elemente $a, b \in P$ au proprietatea că $\langle a \rangle = \langle b \rangle$, atunci $(a, b) \in R$ (nu şi reciproc).

(i) Pentru orice $a \in P$, $\langle a \rangle = \langle a \rangle$, aşadar $(a, a) \in R$, deci R este reflexivă.

Pentru orice $a, b \in P$, au loc echivalenţele: $(a, b) \in R$ ddacă $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$ ddacă $card\langle b \rangle = card\langle a \rangle$ ddacă $(b, a) \in R$. Prin urmare, relaţia R este simetrică.

Pentru orice $a, b, c \in P$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $card\langle a \rangle = card\langle b \rangle$ şi $card\langle b \rangle = card\langle c \rangle$, aşadar $card\langle a \rangle = card\langle c \rangle$, adică $(a, c) \in R$. Deci R este tranzitivă.

Prin urmare, R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea P.

(ii) Presupunem că posetul $\mathcal{P}$ este mărginit, i. e. are minim şi maxim. Minimul şi maximul unui poset (mărginit) sunt comparabile cu toate elementele posetului, deci $\langle \min \mathcal{P} \rangle = P = \langle \max \mathcal{P} \rangle$, prin urmare $(\min \mathcal{P}, \max \mathcal{P}) \in R$.

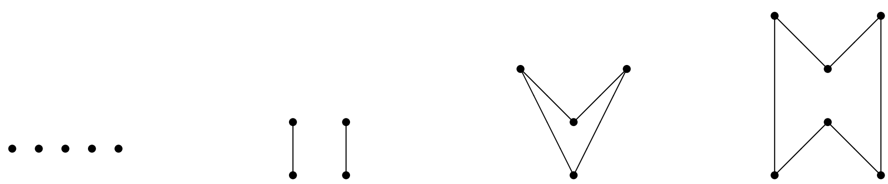
(iii) Dacă $\mathcal{P}$ este lanţ, atunci elementele sale sunt două câte două comparabile, prin urmare, oricare ar fi $x, y \in P$, $\langle x \rangle = P = \langle y \rangle$, aşadar $(x, y) \in R$, deci $R = P^2$.
(iv) Considerăm posetul $\mathcal{P}$ ca fiind finit (i. e. cu mulţimea suport P finită) şi având minim. Fie $n = card(P) \in \mathbb{N}^*$ (întrucât P este finită şi nevidă). Cum $\langle \min \mathcal{P} \rangle = P$, rezultă că are loc: $card\langle \min \mathcal{P} \rangle = card(P) = n$.
"$\Rightarrow$:" Dacă $R = P^2$, atunci, în particular, oricare ar fi $x \in P$, are loc $(\min \mathcal{P}, x) \in R$, i. e. $card\langle x \rangle = card\langle \min \mathcal{P} \rangle = card(P) = n$. Deci, pentru orice $x \in P$, mulţimile finite $\langle x \rangle$ şi P au proprietăţile: $\langle x \rangle \subseteq P$ şi $card\langle x \rangle = card(P) = n$. Rezultă că $\langle x \rangle = P$, pentru orice $x \in P$, adică orice element $x \in P$ este comparabil cu orice element al lui P, cu alte cuvinte toate elementele lui $\mathcal{P}$ sunt două câte două comparabile, adică $\mathcal{P}$ este lanţ.
"$\Leftarrow$:" Această implicaţie rezultă din punctul (iii).

Demonstraţia decurge analog în cazul în care posetul $\mathcal{P}$ este finit şi are maxim.

(v) Implicaţia reciprocă de la punctul (iv) este valabilă întotdeauna, conform punctului (iii). Prin urmare, avem de demonstrat că, în absenţa oricăreia dintre condiţiile de la (iv), implicaţia directă nu are loc. Altfel spus, avem de demonstrat că există poseturi $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu sunt lanţuri, dar în care relaţia R definită ca în enunţ satisface $R = P^2$. Vom demonstra acest lucru prin exemple, pe care le vom căuta printre poseturile infinite, precum şi printre acelea care nu au nici minim, nici maxim, întrucât punctul (iv) ne asigură de faptul că putem elimina celelalte cazuri.

Pentru început, vom da un exemplu de poset infinit $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu este lanţ, dar în care $R = P^2$. Mai mult, acest poset este infinit şi mărginit. Să considerăm posetul $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, |)$: mulţimea numerelor naturale, înzestrată cu divizibilitatea, mai precis relaţia de ordine parţială "divide pe". Acest poset este mărginit: $\min \mathcal{N} = 1$ şi $\max \mathcal{N} = 0$, pentru că, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$, $1 \,|\, x \,|\, 0$. Şi, desigur, acest poset este infinit: $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (cardinalul mulţimilor numărabile). 1 şi 0 sunt minimul şi, respectiv, maximul lui $\mathcal{N}$, deci, în $\mathcal{N}$, $\langle 1 \rangle = \langle 0 \rangle = \mathbb{N}$, aşadar $card\langle 1 \rangle = card\langle 0 \rangle = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Pentru orice $x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $x \,|\, x^n$, iar $x^n \neq x^k$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$, aşadar $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \langle x \rangle \subseteq \mathbb{N}$, iar $card\{x^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = card\{n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = card(\mathbb{N}^*) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$, deci $\aleph_0 \leq card\langle x \rangle \leq \aleph_0$, aşadar $card\langle x \rangle = \aleph_0 = card\langle 1 \rangle = card\langle 0 \rangle$. Prin urmare, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, $card\langle x \rangle = \aleph_0 = card\langle y \rangle$, deci $(x, y) \in R$, aşadar $R = \mathbb{N}^2$. Desigur, $\mathcal{N}$ nu este lanţ, pentru că, de exemplu, 2 nu divide pe 5 şi 5 nu divide pe 2.

Acum vom da mai multe exemple de poseturi $\mathcal{P} = (P, \leq)$ care nu au nici minim, nici maxim, şi nu sunt lanţuri, dar în care relaţia binară corespunzătoare $R = P^2$, adică, pentru orice $x, y \in P$, $card\langle x \rangle = card\langle y \rangle$. Mai mult, aceste poseturi sunt finite şi nu au nici minim, nici maxim. Le vom da prin reprezentarea diagramelor lor Hasse:



$\mathcal{P}_1 = (P_1, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2 = (P_2, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_3 = (P_3, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_4 = (P_4, \leq)$

Posetul $\mathcal{P}_1$ este un antilanţ, adică oricare două elemente diferite ale sale sunt incomparabile, aşadar, pentru orice $x \in P_1$, $card\langle x \rangle = 1$ (fiecare element al acestui poset este comparabil numai cu el însuşi).

În posetul $\mathcal{P}_2$, orice $x \in P_2$ are $card\langle x \rangle = 2$ (fiecare element al acestui poset este comparabil doar cu el însuşi şi cu încă un element).

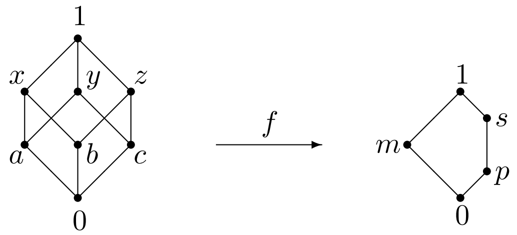
În $\mathcal{P}_3$, orice $x \in P_3$ are $card\langle x \rangle = 3$.

În $\mathcal{P}_4$, orice $x \in P_4$ are $card\langle x \rangle = 3$.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm următoarele latici mărginite:*

- *cubul, notat cu* $\mathcal{L}_2^3$*, cu mulţimea suport* $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$*,*
- *pentagonul, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{P}$*, cu mulţimea suport* $P = \{0, m, p, s, 1\}$*,*

cu diagramele Hasse de mai jos, şi fie $f : \mathcal{L}_2^3 \to \mathcal{P}$ *un morfism de latici mărginite.*



$\mathcal{L}_2^3$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{P}$

Să se demonstreze că:

(i) dacă $p \in Im(f)$*, atunci* $s \notin Im(f)$*;*

(ii) dacă $s \in Im(f)$*, atunci* $p \notin Im(f)$*.*

Rezolvare: Vom începe prin a demonstra unele fapte teoretice. Cu toate că acestea sunt, în general, cunoscute, şi că raţionamentele necesare pentru a le demonstra sunt similare celor pe care le–am aplicat în rezolvarea Exerciţiului 1.2, vom expune aici aceste raţionamente, pentru completitudine.

Primul rezultat teoretic pe care îl vom folosi în cele ce urmează este faptul că imaginea oricărui morfism de latici mărginite este o sublatice mărginită a codomeniului acelui morfism. Să demonstrăm, aşadar, că imaginea lui f ($Im(f) = f(L_2^3)$) este o sublatice mărginită a codomeniului lui f ($\mathcal{P}$).

$Im(f) \subseteq P$. Cum $L_2^3 \neq \emptyset$, rezultă că $Im(f) = f(L_2^3) \neq \emptyset$.

Fie $\delta, \varepsilon \in Im(f)$. Atunci există $d, e \in L_2^3$, astfel încât $f(d) = \delta$ şi $f(e) = \varepsilon$. Rezultă că $\delta \vee \varepsilon = f(d) \vee f(e) = f(d \vee e) \in Im(f)$ şi $\delta \wedge \varepsilon = f(d) \wedge f(e) = f(d \wedge e) \in Im(f)$, aşadar $Im(f)$ este închisă la operaţiile de latice ($\vee$ şi $\wedge$), deci $Im(f)$ este o sublatice a lui $\mathcal{P}$.

$1 = f(1) \in Im(f)$ şi $0 = f(0) \in Im(f)$.

Prin urmare, $Im(f)$ este închisă la operaţiile de latice mărginită ($\vee$, $\wedge$, 0 şi 1), deci $Im(f)$ este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{P}$.

Al doilea rezultat de care vom avea nevoie este faptul că imaginea unei latici distributive printr–un morfism de latici este o latice distributivă. Să demonstrăm, aşadar, că $Im(f)$ este o latice distributivă.

Fie $\delta, \varepsilon, \tau \in Im(f)$, aşadar există $d, e, t \in L_2^3$ astfel încât $f(d) = \delta$, $f(e) = \varepsilon$ şi $f(t) = \tau$. Folosind faptul că $\mathcal{L}_2^3$ este o latice distributivă, obţinem: $(\delta \vee \varepsilon) \wedge \tau = (f(d) \vee f(e)) \wedge f(t) = f(d \vee e) \wedge f(t) = f((d \vee e) \wedge t) = f((d \wedge t) \vee (e \wedge t)) = f(d \wedge t) \vee f(e \wedge t) = (f(d) \wedge f(t)) \vee (f(e) \wedge f(t)) = (\delta \wedge \tau) \vee (\varepsilon \wedge \tau)$. Prin urmare, laticea $Im(f)$ satisface una dintre legile de distributivitate, şi, deci, pe amândouă, aşadar $Im(f)$ este o latice distributivă.

Am obţinut că $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită (ca fapt general, imaginea unei latici distributive mărginite printr–un morfism de latici mărginite este o latice distributivă mărginită).

Un alt rezultat necesar pentru a rezolva acest exerciţiu spune că imaginea printr–un morfism de latici mărginite a complementului unui element al domeniului morfismului este un complement al imaginii acelui element în codomeniul morfismului, precum şi în imaginea morfismului.

Fie, aşadar, $d, e \in L_2^3$ astfel încât e este complement al lui d în $\mathcal{L}_2^3$; să demonstrăm că $f(e)$ este complement al lui $f(d)$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Conform definiţiei unui complement, avem: $d \vee e = 1$ şi $d \wedge e = 0$. Rezultă că $f(d) \vee f(e) = f(d \vee e) = f(1) = 1$ şi $f(d) \wedge f(e) = f(d \wedge e) = f(0) = 0$, deci $f(e)$

este complement al lui $f(d)$ în $\mathcal{P}$, dar şi în $Im(f)$, pentru că toţi termenii din P care apar în aceste relaţii aparţin sublaticii mărginite $Im(f)$ a lui $\mathcal{P}$.

Şi acum să demonstrăm că nu putem avea $p, s \in Im(f)$.

Presupunem prin absurd că $p, s \in Im(f)$, adică există $u, v \in L_2^3$ astfel încât $f(u) = p$ şi $f(v) = s$. u şi v sunt elemente ale laticii mărginite complementate $\mathcal{L}_2^3$, deci au complemente în $\mathcal{L}_2^3$. Fie $\overline{u}, \overline{v} \in L_2^3$, astfel încât $\overline{u}$ este complement al lui u în $\mathcal{L}_2^3$ şi $\overline{v}$ este complement al lui v în $\mathcal{L}_2^3$. Atunci $f(\overline{u})$ este complement al lui $f(u) = p$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$ şi $f(\overline{v})$ este complement al lui $f(v) = s$ în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Dar singurul complement al lui p în $\mathcal{P}$ este m, şi tot m este singurul complement al lui s în $\mathcal{P}$. Rezultă că $m = f(\overline{u}) = f(\overline{v}) \in Im(f)$. Prin urmare, $m \in Im(f)$ are doi complemenţi distincţi, anume p şi s, în $\mathcal{P}$ şi în $Im(f)$. Dar $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită, deci satisface proprietatea de unicitate a complementului, conform unui rezultat teoretic binecunoscut: orice element al lui $Im(f)$ are cel mult un complement în laticea distributivă mărginită $Im(f)$. Am obţinut o contradicţie; aşadar nu putem avea simultan $p \in Im(f)$ şi $s \in Im(f)$.

(i) Conform celor de mai sus, dacă $p \in Im(f)$, atunci $s \notin Im(f)$.

(ii) Similar, dacă $s \in Im(f)$, atunci $p \notin Im(f)$.

Ca o observaţie suplimentară, întrucât $\mathcal{L}_2^3$ este o algebră Boole, adică o latice distributivă mărginită complementată, iar f este un morfism de latici mărginite, rezultă că şi $Im(f)$ este o latice distributivă mărginită complementată, adică o algebră Boole (a se revedea raţionamentul anterior, precum şi rezolvarea Exerciţiului 1.2). În plus, elementele lui $\mathcal{P}$ $0, 1 \in Im(f)$. Dacă am avea $p, s \in Im(f)$, atunci şi complementul acestor elemente din $\mathcal{P}$, anume m, ar satisface $m \in Im(f)$ (ca mai sus). Deci am avea întregul $P \subseteq Im(f) \subseteq P$, adică $P = Im(f)$. Iar aici am putea argumenta că, atunci, $card(Im(f)) = card(P) = 5$, iar 5 nu este o putere naturală a lui 2, deci am obţine o contradicţie cu faptul că $Im(f)$ este o algebră Boole (a se vedea **Teorema de structură a algebrelor Boole finite**). Sau am putea observa că $Im(f)$, ca latice mărginită, ar fi exact $\mathcal{P}$ (ca mai sus), iar $\mathcal{P}$ nu este o algebră Boole, deci, iarăşi, am avea o contradicţie. Acestea sunt alte două moduri în care am putea încheia rezolvarea exerciţiului.

Exerciţiul 2.3. *Fie $\alpha, \beta, \gamma \in E$, arbitrare. Să se demonstreze că:*

$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma) \quad \textit{ddacă} \quad \{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Rezolvarea 1 (parţial sintactic, parţial algebric): Conform **Teoremei deducţiei**, $\{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$ ddacă $\vdash \gamma \rightarrow \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Fie $a = \hat{\alpha}, b = \hat{\beta}, c = \hat{\gamma} \in E/\!\sim$. Au loc echivalenţele: $\vdash \gamma \rightarrow \neg\,(\alpha \wedge \beta)$ ddacă $\gamma \rightarrow \widehat{\neg\,(\alpha} \wedge \beta) = 1$ ddacă $\hat{\gamma} \rightarrow (\overline{\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}}) = 1$ ddacă $c \rightarrow (\overline{a \wedge b}) = 1$ ddacă $\overline{c} \vee (\overline{a \wedge b}) = 1$ ddacă $\overline{c} \vee \overline{a} \vee \overline{b} = 1$ ddacă $\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c} = 1$ ddacă $a \rightarrow (\overline{b} \vee \overline{c}) = 1$ ddacă $a \rightarrow (b \rightarrow \overline{c}) = 1$ ddacă $\hat{\alpha} \rightarrow (\hat{\beta} \rightarrow \overline{\hat{\gamma}}) = 1$ ddacă $\hat{\alpha} \rightarrow (\hat{\beta} \rightarrow \widehat{\neg\,\gamma}) = 1$ ddacă $\alpha \rightarrow \widehat{(\beta \rightarrow} \neg\,\gamma) = 1$ ddacă $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)$. Am folosit definiţia implicaţiei într–o algebră Boole, **legile lui de Morgan** şi comutativitatea operaţiei $\vee$ într–o latice.

Am obţinut echivalenţa din enunţ.

Rezolvarea 2 (semantic): Conform **Teoremei de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic, au loc următoarele echivalenţe:

$$\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma) \text{ ddacă } \vDash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma) \text{ şi}$$

$$\{\gamma\} \vdash \neg\,(\alpha \wedge \beta) \text{ ddacă } \{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Vom demonstra, prin dublă implicaţie, echivalenţa:

$$\vDash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma) \quad \text{ddacă} \quad \{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta).$$

Şi aici vom folosi definiţia implicaţiei într–o algebră Boole, **legile lui de Morgan** şi comutativitatea operaţiei $\vee$ într–o latice, dar şi autodualitatea complementării. De data aceasta, algebra Boole în care vom lucra va fi $\mathcal{L}_2$ (algebra Boole standard, cu mulţimea suport $\{0, 1\}$).

"$\Rightarrow$:" Presupunem că $\vDash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)$.

Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ astfel încât $h \vDash \gamma$, i. e. $\tilde{h}(\gamma) = 1$. Cum $\vDash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)$, are loc: $\tilde{h}(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = 1$, i. e. $\tilde{h}(\alpha) \rightarrow (\tilde{h}(\beta) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\gamma)}) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) \rightarrow (\tilde{h}(\beta) \rightarrow \overline{1}) = 1$, deci $\tilde{h}(\alpha) \rightarrow (\tilde{h}(\beta) \rightarrow 0) = 1$, adică $\tilde{h}(\alpha) \rightarrow (\overline{\tilde{h}(\beta)} \vee 0) = 1$, i. e. $\tilde{h}(\alpha) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\beta)} = 1$, deci $\overline{\tilde{h}(\alpha)} \vee \overline{\tilde{h}(\beta)} = 1$, aşadar $\overline{\tilde{h}(\alpha) \wedge \tilde{h}(\beta)} = 1$, i. e. $\tilde{h}(\neg\,(\alpha \wedge \beta)) = 1$, aşadar $h \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Prin urmare, $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

"$\Leftarrow$:" Presupunem că $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$.

Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare arbitrară.

Dacă $\tilde{h}(\gamma) = 0$, atunci $\tilde{h}(\neg\,\gamma) = \overline{\tilde{h}(\gamma)} = \overline{0} = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \rightarrow 1 = 1$, aşadar $\tilde{h}(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow 1 = 1$.

Dacă $\tilde{h}(\gamma) = 1$, atunci $h \vDash \gamma$, aşadar, întrucât $\{\gamma\} \vDash \neg\,(\alpha \wedge \beta)$, rezultă că $\tilde{h}(\neg\,(\alpha \wedge \beta)) = 1$, adică $\overline{\tilde{h}(\alpha \wedge \beta)} = 1$, deci $\tilde{h}(\alpha \wedge \beta) = \overline{\overline{\tilde{h}(\alpha \wedge \beta)}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha) \wedge \tilde{h}(\beta) = 0$, aşadar $\tilde{h}(\alpha) = 0$ sau $\tilde{h}(\beta) = 0$, deoarece $\tilde{h}(\alpha)$ şi $\tilde{h}(\beta)$ sunt elemente ale lui $\mathcal{L}_2$. Dacă $\tilde{h}(\alpha) = 0$, atunci $\tilde{h}(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma) = 0 \rightarrow \tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma) = 1$. Dacă $\tilde{h}(\beta) = 0$, atunci $\tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\beta) \rightarrow \tilde{h}(\neg\,\gamma) = 0 \rightarrow \tilde{h}(\neg\,\gamma) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow \tilde{h}(\beta \rightarrow \neg\,\gamma) = \tilde{h}(\alpha) \rightarrow 1 = 1$.

În fiecare caz posibil obţinem $\tilde{h}(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)) = 1$. Aşadar, $\vDash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\,\gamma)$.

Am obţinut echivalenţa din enunţ.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).