Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a VII-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Vom nota operaţiile unei latici mărginite în modul uzual: $\vee, \wedge, 0, 1$, reprezentând respectiv disjuncţia, conjuncţia, primul şi ultimul element.

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe* A este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a, b) \in A^2$ vom înţelege: $a \in A$ şi $b \in A$; de asemenea, pentru orice relaţie binară R pe A, prin scrierea $(a, b) \in R$ se va subînţelege că $a, b \in A$; faptul că $(a, b) \in R$ se mai notează aRb.

Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists\, b \in A)\, (a, b) \in S \text{ şi } (b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin:

$$\begin{cases} R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \ (\textit{diagonala lui } A), \\ R^{n+1} = R^n \circ R, \text{ pentru orice } n \text{ natural.} \end{cases}$$

Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

O relaţie binară R pe A se zice *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $(a, c) \in R$.

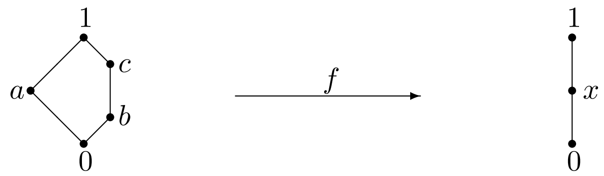
Este imediat că intersecţia oricărei familii nevide de relaţii binare tranzitive pe A este o relaţie binară tranzitivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară tranzitivă pe A (care include orice relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară R pe A, există o cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare tranzitive pe A care includ pe R (care formează o familie nevidă, pentru că A^2 aparţine acestei familii). Această cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe R se notează cu $T(R)$ şi se numeşte *închiderea tranzitivă a relaţiei R.*

Se demonstrează că, pentru orice relaţie binară R pe A, $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Determinaţi toate morfismele de latici mărginite de la pentagon la lanţul cu* 3 *elemente.*

Rezolvare: Fie pentagonul $P = \{0, a, b, c, 1\}$ şi lanţul cu 3 elemente $\mathcal{L}_3 = \{0, x, 1\}$, ca în diagramele Hasse din figura de mai jos.



(P) $(\mathcal{L}_3)$

Fie $f : P \to \mathcal{L}_3$ un morfism de latici mărginite. Atunci $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$. Să vedem ce valori pot lua $f(a), f(b), f(c) \in \mathcal{L}_3 = \{0, x, 1\}$.

Să observăm că pentagonul are toate elementele complementate: în P, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia, la fel a şi b, respectiv a şi c. Sigur că unicitatea complementului nu este satisfăcută: a are doi complemenţi, anume b şi c.

În lanţul cu 3 elemente, elementele complementate sunt 0 şi 1, acestea fiind complemente unul altuia, iar x nu are niciun complement, după cum se verifică foarte uşor, observând că, la fel ca în orice lanţ, $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$ în $\mathcal{L}_3$.

Un morfism de latici mărginite duce elemente complementate în elemente complementate. Într–adevăr, dacă $\alpha, \beta \in P$, astfel încât β este complement al lui α, atunci $\alpha \vee \beta = 1$ şi $\alpha \wedge \beta = 0$ în P, prin urmare în $\mathcal{L}_3$ au loc: $f(\alpha) \vee f(\beta) = f(\alpha \vee \beta) = f(1) = 1$ şi $f(\alpha) \wedge f(\beta) = f(\alpha \wedge \beta) = f(0) = 0$, deci $f(\beta)$ este complement al lui $f(\alpha)$.

Prin urmare, imaginea lui f este inclusă în mulţimea elementelor complementate ale lui $\mathcal{L}_3$, anume $\{0, 1\}$. În plus, conform calculului de mai sus, $f(b)$ şi $f(c)$ trebuie să fie complemente ale lui $f(a)$ în $\mathcal{L}_3$, aşadar, dacă $f(a) = 0$, atunci $f(b) = f(c) = 1$, iar, dacă $f(a) = 1$, atunci $f(b) = f(c) = 0$.

Am obţinut două funcţii $f_1, f_2 : P \to \mathcal{L}_3$, anume cele date în tabelul de mai jos, şi se verifică uşor că fiecare dintre ele este morfism de latici mărginite:

α	0	a	b	c	1
$f_1(\alpha)$	0	0	1	1	1
$f_2(\alpha)$	0	1	0	0	1

Aşadar, f_1 şi f_2 sunt cele două morfisme de latici mărginite de la pentagon la lanţul cu 3 elemente.

Exerciţiul 2.2. *Fie următoarea relaţie binară pe mulţimea numerelor naturale:* $R = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$*. Determinaţi închiderea tranzitivă a lui* R*.*

Rezolvare: Conform formulei generale, închiderea tranzitivă a lui R este $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Demonstrăm că, pentru orice n natural nenul, $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ (de fapt, egalitatea este valabilă şi pentru $n = 0$). Aplicăm inducţie matematică după $n \in \mathbb{N}^*$.

Pasul de verificare: $n = 1$*:* $R^1 = R = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(x, 2^1 x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Pasul de inducţie: $n \in \mathbb{N}^* \rightsquigarrow n + 1$*:* Presupunem că $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Conform definiţiei recursive a puterilor unei relaţii binare pe o mulţime şi definiţiei compunerii de relaţii binare, $R^{n+1} = R^n \circ R = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists\, y \in \mathbb{N})\, (x, y) \in R, (y, z) \in R^n\} = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid (\exists\, y \in \mathbb{N})\, y = 2x, z = 2^n y\} = \{(x, z) \in \mathbb{N}^2 \mid z = 2^{n+1} x\} = \{(x, 2^{n+1} x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\}$, prin urmare $T(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{(x, 2^n x) \mid x \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova, 2003.

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1974, 1975, 1976.

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti, 1978.

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti, 2010.

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1982.

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti, 1996.

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.