CURS #9

CONȚINUTUL CURSULUI #9:

VI.1. Modalitate de calcul a polinomului Hermite.

Vom deduce în continuare forma funcțiilor de bază $H_{n,k}, K_{n,k}$ care intră în reprezentarea polinomului Hermite.
Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Considerăm $y_i = f(x_i)$, $z_i = f'(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$. Polinomul Hermite se reprezintă sub forma:

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1}(H_{n,k}(x)y_k + K_{n,k}(x)z_k) \tag{1}$$

Funcțiile de bază $H_{n,k}$, $K_{n,k}$ se determină din relațiile:

$$H_{2n+1}(x_i) = y_i,\ \ H'_{2n+1}(x_i) = z_i, i = \overline{1, n+1} \tag{2}$$

sau

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(H_{n,k}(x_i)y_k + K_{n,k}(x_i)z_k) = y_i \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(H'_{n,k}(x_i)y_k + K'_{n,k}(x_i)z_k) = z_i \end{cases} \tag{3}$$

Egalitățile din (3) sunt satisfăcute dacă și numai dacă

$$\begin{cases} H_{n,k}(x_i) = \delta_{ik}, K_{n,k}(x_i) = 0 \\ H'_{n,k}(x_i) = 0, K'_{n,k}(x_i) = \delta_{ik} \end{cases} \tag{4}$$

Observăm că pentru $i \neq k$ atât $H_{n,k}(x_i) = 0$, cât și $H'_{n,k}(x_i) = 0$, de unde deducem că $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ sunt rădăcini duble pentru polinomul $H_{n,k}(x)$, deci

$$(x - x_i)^2 \mid H_{n,k}(x),\ \ i \neq k \Leftrightarrow \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1}(x - x_i)^2 \mid H_{n,k}(x) \Leftrightarrow$$

$$(L_{n,k}(x))^2 \mid H_{n,k}(x) \tag{5}$$

Deoarece $grad(H_{n,k}(x)) = 2n + 1$ rezultă $H_{n,k}(x) = (L_{n,k}(x))^2 p_{1,k}(x)$, unde $p_{1,k}(x) = a_k + b_k x$ este polinom de gradul întâi.
Coeficienții a_k, b_k se deduc din condițiile $H_{n,k}(x_k) = 1, H'_{n,k}(x_k) = 0$.
Deoarece $H'_{n,k}(x) = 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)p_{1,k}(x) + (L_{n,k}(x))^2 p'_{1,k}(x)$ avem:

$$\begin{cases} (L_{n,k}(x_k))^2 p_{1,k}(x_k) = 1 \\ 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x_k)p_{1,k}(x_k) + (L_{n,k}(x_k))^2 p'_{1,k}(x_k) = 0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_k + b_k x_k = 1 \\ 2L'_{n,k}(x_k)(a_k + b_k x_k) + b_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_k + b_k x_k = 1 \\ 2L'_{n,k}(x_k) + b_k = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_k = 1 + 2L'_{n,k}(x_k)x_k \\ b_k = -2L'_{n,k}(x_k) \end{cases} \Rightarrow$$

$$H_{n,k}(x) = (L_{n,k}(x))^2(1 + 2L'_{n,k}(x_k)x_k - 2L'_{n,k}(x_k)x) \Rightarrow$$

$$H_{n,k}(x) = (L_{n,k}(x))^2(1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x - x_k)) \tag{6}$$

În mod analog se demonstrează că $K_{n,k}(x) = (L_{n,k}(x))^2 p^*_{1,k}(x)$ cu $p^*_{1,k}(x) = a^*_k + b^*_k x$. Din

$$K'_{n,k}(x) = 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)p^*_{1,k}(x) + (L_{n,k}(x))^2(p^*_{1,k})'(x)$$

și relațiile:

$$\begin{cases} K_{n,k}(x_k) = 0 \\ K'_{n,k}(x_k) = 1 \end{cases}$$

rezultă următoarele echivalențe:

$$\begin{cases} p^*_{1,k}(x_k) = 0 \\ 2L'_{n,k}(x_k)p^*_{1,k}(x_k) + (p^*_{1,k})'(x_k) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^*_k + b^*_k x_k = 0 \\ b^*_k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^*_k = -x_k \\ b^*_k = 1 \end{cases}, \text{ prin urmare } K_{n,k}(x) = (L_n, k(x))^2(x - x_k).$$

VI.2. Reprezentarea polinomului Hermite cu ajutorul diferențelor divizate.

Datorită faptului că în cazul interpolării Hermite numărul condițiilor se dublează, se vor defini nodurile duble $\bar{x}_i, i = \overline{1, 2n+2}$ după cum urmează:

$$\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_1, \bar{x}_3 = x_2, \bar{x}_4 = x_2, ..., \bar{x}_{2n+1} = x_{n+1}, \bar{x}_{2n+2} = x_{n+1}$$

sau echivalent

$$\bar{x}_{2k-1} = x_k, \bar{x}_{2k} = x_k, k = \overline{1, n+1} \tag{7}$$

Pentru a da formula polinomului Hermite cu diferențe divizate vom extinde definiția diferențelor divizate de ordinul întâi în cazul nodurilor duble:

$$f[x_i, x_i] = f'(x_i), i = \overline{1, n+1} \tag{8}$$

Teorema (VI.1. Formula cu DD a polinomului de interpolare Hermite)

Dacă $f \in C^1([a, b])$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, atunci are loc formula

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) = & f[\bar{x}_1] + f[\bar{x}_1, \bar{x}_2](x - \bar{x}_1) \\ & + f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3](x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) + ... \\ & + f[\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{2n+2}](x - \bar{x}_1) \cdot ... \cdot (x - \bar{x}_{2n+1}) \end{aligned} \tag{9}$$

unde $\bar{x}_{2k-1} = x_k, \bar{x}_{2k} = x_k, k = \overline{1, n+1},\ f[\bar{x}_1, \bar{x}_2] = f[x_1, x_1] = f'(x_1)$.

Tabel (Polinomul Hermite cu DD)

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
$\bar{x}_1 = x_1$	$\boxed{f[\bar{x}_1] = f(\bar{x}_1)}$				
$\bar{x}_2 = x_1$	$f[\bar{x}_2] = f(\bar{x}_2)$ $\searrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2] = f'(\bar{x}_1)}$ $\searrow$			
$\bar{x}_3 = x_2$	$f[\bar{x}_3] = f(\bar{x}_3)$ $\longrightarrow$	$f[\bar{x}_2, \bar{x}_3]$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]}$ $\searrow$		
$\bar{x}_4 = x_2$	$f[\bar{x}_4] = f(\bar{x}_4)$ $\searrow$	$f[\bar{x}_3, \bar{x}_4] = f'(\bar{x}_3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$f[\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4]}$ $\searrow$	
...	...	...	...	...	...

ALGORITM (Polinomul Hermite cu diferențe divizate)

Date de intrare: $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}; (y_i)_{\overline{1,n+1}}; (z_i)_{\overline{1,n+1}}; x$;

Date de ieșire: $y; z$;

STEP 1: $\bar{x}_{2i-1} = x_i, \bar{x}_{2i} = x_i, i = \overline{1, n+1}$;

STEP 2: `Se determină matricea` Q

$$Q_{i1} = f(\bar{x}_i), i = \overline{1, 2n+2};\ \ Q_{2i,2} = z_i, i = \overline{1, n+1};$$

$$Q_{2i-1,2} = \frac{Q_{2i-1,1} - Q_{2i-2,1}}{\bar{x}_{2i-1} - \bar{x}_{2i-2}}, i = \overline{2, n+1};$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{\bar{x}_i - \bar{x}_{i-j+1}}, i = \overline{3, 2n+2}, j = \overline{3, i};$$

STEP 3: `Determină` $H_{2n+1} = Q_{11} + \sum_{k=2}^{2n+2} Q_{kk}(x - \bar{x}_1)...(x - \bar{x}_{k-1})$;

$H'_{2n+1} = (Q_{11} + \sum_{k=2}^{2n+2} Q_{kk}(x - \bar{x}_1)...(x - \bar{x}_{k-1}))'$ `(se calculează derivata polinomului Hermite);`

STEP 4: $y = H_{2n+1};\ \ z = H'_{2n+1}$.

Exemplu 1: Să se determine polinomul Hermite, $H_3(x)$, astfel încât

$$H_3(0) = 0,\ \ H_3(1) = 1,\ \ H'_3(0) = 1, H'_3(1) = 0.$$

Rezolvare: Construim tabelul:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3
$\bar{x}_1 = 0$	$\boxed{f[\bar{x}_1] = 0}$			
$\bar{x}_2 = 0$	$f[\bar{x}_2] = 0$ $\searrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2] = f'(\bar{x}_1) = 1}$ $\searrow$		
$\bar{x}_3 = 1$	$f[\bar{x}_3] = 1$ $\longrightarrow$	$f[\bar{x}_2, \bar{x}_3] = 1$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3] = 0}$ $\searrow$	
$\bar{x}_4 = 1$	$f[\bar{x}_4] = 1$	$f[\bar{x}_3, \bar{x}_4] = f'(\bar{x}_3) = 0$ $\longrightarrow$	$f[\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = -1$ $\longrightarrow$	$\boxed{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = -1}$

Obs.: În tabel valorile și derivatele funcției f au fost înlocuite cu valorile, respectiv cu derivatele polinomului Hermite H_3.

Polinomul Hermite în cazul a două noduri se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} H_3(x) = & f[\bar{x}_1] + f[\bar{x}_1, \bar{x}_2](x - \bar{x}_1) + f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3](x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) \\ & + f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4](x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(x) & = 0 + 1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (x - 0)(x - 0) + (-1)(x - 0)(x - 0)(x - 1) \\ & = x - x^2(x - 1) = -x^3 + x^2 + x \end{aligned}$$

VII. Interpolarea cu funcții spline.
VII.1. Interpolare cu funcții spline liniare.

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$. Fie $I_j = [x_j, x_{j+1})$ cu $\bar{I}_j = [x_j, x_{j+1}]$, $j = \overline{1, n-1}$, $I_n = \bar{I}_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Definiția (VII.1.)

Funcția $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline liniară pentru funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă:

(a) *S este liniară pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x), \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{10}$$

unde

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j), \quad j = \overline{1, n} \tag{11}$$

cu $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.

Definiția (VII.1. (continuare))

(b) *S interpolează f în x_j, $j = \overline{1, n+1}$:*

$$S(x_j) = f(x_j), \quad j = \overline{1, n+1} \tag{12}$$

(c) *S este continuă în nodurile interioare, i.e. x_{j+1}, $j = \overline{1, n-1}$:*

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{13}$$

Relațiile (12)–(13) ne furnizează sistemul de ecuații liniare, i.e. $2n$ ecuații liniare pentru necunoscutele $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.
Conform condiției (b) și ținând cont de faptul că $x_j \in I_j, j = \overline{1, n}$ rezultă

$$S(x_j) = S_j(x_j) = f(x_j), \quad \text{deci} \quad a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n}$$

Nodul $x_{n+1} \in I_n$, deci

$$S(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1}) \Rightarrow a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) = f(x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$b_n = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \tag{14}$$

Conform condiției (c) se obțin succesiv următoarele relații:

$$(a_j + b_j(x - x_j))\,|_{x=x_{j+1}} = (a_{j+1} + b_{j+1}(x - x_{j+1}))\,|_{x=x_{j+1}}$$

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}$$

$$b_j = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{15}$$

Rezultă următoarea schemă numerică de determinare a coeficienților $a_j, b_j, j = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), & j = \overline{1, n} \\ b_j = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}, & j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{16}$$

ALGORITM (Interpolarea spline liniară)

Date de intrare: $X; Y; x$;
Date de ieșire: y;

STEP 1: `Determină` n;
STEP 2: `for` $j = 1 : n$ `do`

$$a_j = Y_j; \quad b_j = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{X_{j+1} - X_j};$$

`endfor`
STEP 3: `for` $j = 1 : n$ `do`
`if` $x \in [X_j, X_{j+1}]$ `do`
$S = a_j + b_j(x - X_j)$;
`STOP`
`endif`
`endfor`
$y = S$;

Obs.: Vectorul X conține nodurile de interpolare $x_1, \ldots, x_{n+1}$, iar vectorul Y conține valorile funcției în nodurile de interpolare, $f(x_1), \ldots, f(x_{n+1})$.

Exemplu 2: Să se afle funcția spline liniară pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-1,\ 0,\ 1)$.

Rezolvare:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde $S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1)$ și $S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2)$. Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x+1), & x \in [-1, 0) \\ a_2 + b_2 x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece S interpolează f în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = f(x_1), S(x_2) = f(x_2), S(x_3) = f(x_3)$$

echivalent:

$$S_1(-1) = e^{-2},\ S_2(0) = 1,\ S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2},\ a_2 = 1,\ a_2 + b_2 = e^2$, deci $b_2 = e^2 - 1$.
Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e. $S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 = a_2$, de unde rezultă $b_1 = 1 - e^{-2}$. Obținem astfel, următoarea reprezentare:

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + (1 - e^{-2})(x+1), & x \in [-1, 0) \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 + (1 - e^{-2})x, & x \in [-1, 0) \\ 1 + (e^2 - 1)x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$