CURS #4

CONȚINUTUL CURSULUI #4:

II. Metode numerice de rezolvare a sistemelor liniare.
- II.1. Metode directe de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.
- II.1.9. Factorizarea (descompunerea) QR.Metoda directă de calcul a matricelor Q, R. Metoda Givens de calcul a matricelor Q, R.
- II.2 Valori proprii. Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii unei matrice simetrice.

II.1.9. Factorizarea QR.

Definiția (II.6.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunere QR a matricei A, descompunerea de forma

$$A = QR \tag{1}$$

unde $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală, i.e. $Q^TQ = QQ^T = I$, iar $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară.

Teorema (II.3.)

Dacă $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inversabilă. Atunci există și este unică descompunerea QR a matricei A cu $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice ortogonală și $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice superior triunghiulară având componentele pe diagonala principală $r_{kk} > 0, k = \overline{1,n}$.

I. METODA DIRECTĂ DE CALCUL A MATRICILOR Q, R.

CALCULUL MATRICILOR Q, R : Rescriem relația $A = QR$ sub formă matricială

$$\begin{pmatrix} & & \\ & a_{kk} \cdots a_{kj} & \\ & \vdots & \\ & a_{ik} & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & q_{kk} \cdots q_{kj} & \\ & \vdots & \\ & q_{ik} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & r_{kk} \cdots r_{kj} & \\ & \ddots \vdots & \\ & 0 \quad r_{jj} & \\ & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane ale matricei Q și primele $k-1$ linii ale matricei R. Astfel elementele $q_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k-1}$ și $r_{ij}, i = \overline{1,k-1}, j = \overline{i,n}$ vor fi cunoscute:

ETAPA 1: Calculăm coloana k din Q evaluând componenta $a_{ik}, i = \overline{1,n}$:

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} q_{is} r_{sk} = \sum_{s=1}^{k} q_{is} r_{sk} = q_{ik} r_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \Rightarrow$$

$$q_{ik} = \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right) \tag{3}$$

La această etapă nu avem încă calculată componenta r_{kk}.

ETAPA 2: Aflăm linia k din matricea R, (i.e. $r_{kj}, j = \overline{k+1,n}$) folosindu-ne de faptul că R este ortogonală.

$$A = QR \Rightarrow R = Q^T A \Rightarrow$$

$$r_{kj} = \sum_{s=1}^{n} q^T_{ks} a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sj} \tag{4}$$

Formula de mai sus este validă datorită faptului că elementele coloanei k din matricea Q au fost calculate la ETAPA 1.

ETAPA 3: A rămas să calculăm r_{kk}. Din relația (4) avem:

$$r_{kk} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sk} = \sum_{i=1}^{n} q_{ik} a_{ik},$$

iar conform (3) avem:

$$
\begin{aligned}
r_{kk} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right) a_{ik} \\
&= \frac{1}{r_{kk}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk} \left(\sum_{i=1}^{n} q_{si}^T a_{ik} \right) \right) \\
&= \frac{1}{r_{kk}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2 \right) \Rightarrow
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
r_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2} \tag{6}
$$

Obs.: Datorită faptului că A este inversabilă ($detA \neq 0$), rezultă că R este inversabilă, i.e. $r_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$, deci formulele (3) au sens.
Sistemul $Ax = b$ este echivalent cu $Rx = Q^T b$, de unde rezultă $x =$SubsDesc$(R, Q^T b)$.

ALGORITM (Metoda de descompunere QR)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
Date de ieșire: $Q = (q_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $r_{11} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^2}$;

```
for i = 1 : n do
    q_i1 = a_i1 / r_11;
endfor
for j = 2 : n do
    r_1j = sum_{s=1}^{n} q_s1 a_sj;
endfor
```


STEP 2: for $k = 2 : n$ do

$$r_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 - \sum_{s=1}^{k-1} r_{sk}^2};$$

for $i = 1 : n$ do

$$q_{ik} = \frac{1}{r_{kk}} \left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} q_{is} r_{sk} \right);$$

endfor

for $j = k+1 : n$ do

$$r_{kj} = \sum_{s=1}^{n} q_{sk} a_{sj};$$

endfor

endfor

STEP 3: $x =$SubsDesc$(R, Q^T b)$.

Exemplu 1: Să se rezolve prin metoda QR directă sistemul $Ax = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Conform metodei de descompunere QR avem:

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} = \sqrt{2}; \\
q_{i1} &= \frac{a_{i1}}{r_{11}}, i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ q_{21} = 0,\ q_{31} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
r_{1j} &= q_{11}a_{1j} + q_{21}a_{2j} + q_{31}a_{3j},\ j = \overline{2,3} \Rightarrow r_{12} = \sqrt{2},\ r_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
r_{22} &= \sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 - r_{12}^2} = \sqrt{3} \\
q_{i2} &= \frac{1}{r_{22}} (a_{i2} - q_{i1} r_{12}),\ i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{12} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q_{22} = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q_{32} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
r_{2j} &= q_{12}a_{1j} + q_{22}a_{2j} + q_{32}a_{3j}, j = \overline{3,3} \Rightarrow r_{23} = 0 \\
r_{33} &= \sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 - r_{13}^2 - r_{23}^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\
q_{i3} &= \frac{1}{r_{33}} (a_{i3} - q_{i1} r_{13} - q_{i2} r_{23}),\ i = \overline{1,3} \Rightarrow q_{13} = -\frac{\sqrt{6}}{6},\ q_{23} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \\
& q_{33} = \frac{\sqrt{6}}{6}.
\end{aligned}
$$

Astfel

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}$$

Rezultă $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

II. METODA GIVENS DE DETERMINARE A MATRICELOR Q, R.

Definiția (II.7.)

Matricea $R(\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$ *cu* $\theta \in \mathbb{R}$ *se numește matrice de rotații în două dimensiuni.*

Obs.: Matricea $R(\theta)$ rotește vectorii în planul xOy cu unghiul θ în sensul acelor de ceasornic.

Exemplu 2: Vectorul $e_1 = (1,0)^T$ este vectorul $e_2 = (0,1)^T$ rotit cu $\theta = \frac{\pi}{2}$ conform acelor de ceasornic. Într-adevăr,

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) e_2 = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & sin(\pi/2) \\ -sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 \tag{8}$$

Definiția (II.8.)

Fie $n \in \mathbb{N}, i < j = \overline{1,n}$ *și un unghi* $\theta \in \mathbb{R}$. *Cu notația* $c = cos\theta, s = sin\theta$, *se definește matricea de rotație Givens, matricea ortogonală*

$$R^{ij}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

unde elementele c, s *se află la intersecția liniilor* i *și* j *cu coloanele* i *și* j.

Dacă $r_{k\ell}, k, \ell = \overline{1,n}$, sunt componentele matricei $R^{(ij)}(\theta)$, atunci acestea se exprimă prin:

$$r_{ii} = c, \quad r_{ij} = s, \quad r_{ji} = -s, \quad r_{jj} = c \tag{10}$$

$$r_{kl} = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1,n}, \quad k, l \neq i, j. \tag{11}$$

Obs.: Pentru $n = 3$ matricea de rotație Givens rotește vectorii $u \in \mathbb{R}^3$ în planul generat de vectorii $e_i, e_j, i < j$.

Exemplu 3: Să se afle vectorul rotit în planul Oe_1e_3 al vectorului $e_1 = (1,0,0)^T$ cu un unghi $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Se observă că $c = cos\frac{\pi}{2} = 0, s = sin\frac{\pi}{2} = 1$, de unde rezultă matricea de rotație

$$R^{(13)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Astfel că

$$R^{(13)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_3$$

Dacă aplicăm matricea $R^{(ij)}(\theta)$ unui vector $a \in \mathbb{R}^n$, acesta își va schimba doar elementele i și j.
Fie

$$b = R^{(ij)}(\theta)a$$

sau scris pe componente

$$b_k = \sum_{s=1}^{n} r_{ks} a_s, k = \overline{1,n}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} b_i = r_{ii}a_i + r_{ij}a_j = ca_i + sa_j \\ b_j = r_{ji}a_i + r_{jj}a_j = -sa_i + ca_j \\ b_k = a_k, k = \overline{1,n}, k \neq i,j \end{cases} \tag{12}$$

Dacă aplicăm matricea $R^{(ij)}(\theta)$ unei matrice $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, atunci matricea A își va schimba doar liniile i și j. Fie

$$B = R^{(ij)}(\theta)A$$

sau scris pe componente

$$b_{k\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{ks} a_{s\ell}, k,\ell = \overline{1,n}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} b_{i\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{is}a_{s\ell} = r_{ii}a_{i\ell} + r_{ij}a_{j\ell} = ca_{i\ell} + sa_{j\ell},\ \ \ell = \overline{1,n} \\ b_{j\ell} = \sum_{s=1}^{n} r_{js}a_{s\ell} = r_{ji}a_{i\ell} + r_{jj}a_{j\ell} = -sa_{i\ell} + ca_{j\ell},\ \ \ell = \overline{1,n} \\ b_{k\ell} = a_{k\ell},\ k,\ell = \overline{1,n},\ k,\ell \neq i,j \end{cases} \tag{13}$$

Ideea metodei Givens este să aplicăm succesiv rotații Givens matricei A până când aceasta se transformă într-o matrice superior triunghiulară. Matricea obținută reprezintă chiar matricea R din descompunerea QR, iar prin înmulțirea succesivă a matricelor de rotație Givens se obține matricea ortogonală Q^T.
Am văzut că rotația $R^{(ij)}(\theta)$ aplicată matricei A afectează doar liniile i, j.

La fiecare iterație se vor calcula valori pentru c și s astfel încât elementul ji din matricea rezultată să se anuleze, i.e.,

$$b_{ji} = -sa_{ii} + ca_{ji} = 0$$

Relației $-sa_{ii} + ca_{ji} = 0$ i se atașează relația $c^2 + s^2 = 1$ și se rezolvă sistemul format

$$\begin{cases} -sa_{ii} + ca_{ji} = 0 \\ c^2 + s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{sa_{ii}}{a_{ji}} \\ \dfrac{s^2a_{ii}^2}{a_{ji}^2} + s^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm\dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \\ c = \pm\dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \end{cases}$$

Se aleg de exemplu

$$\begin{cases} s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \\ c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} \end{cases}$$

Procedeul se repetă pentru $i = \overline{1,n-1}$ și $j = \overline{i+1,n}$, obținându-se astfel

$$R = R^{(n-1,n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)}R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(12)}A \tag{14}$$

cu R matrice superior triunghiulară. Fie

$$Q^T = R^{(n-1,n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)}R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(12)} \tag{15}$$

sau echivalent

$$Q = \left(R^{(n-1,n)} \cdot \ldots \cdot R^{(2n)} \cdot \ldots \cdot R^{(23)}R^{(1n)} \cdot \ldots \cdot R^{(12)}\right)^T \tag{16}$$

atunci din (14) rezultă

$$R = Q^T A$$

Ținând cont de faptul că matricea Q este ortogonală, fiind produs de matrice ortogonale rezultă

$$A = QR$$

Sistemul $Ax = b$ este echivalent cu $QRx = b$ sau $Rx = Q^T b$. În algoritm vom aplica rotații și asupra vectorului b.

Se obține următoarea schemă numerică:

$Q = I_n$
for $i = 1 : n$ do
  for $j = i+1 : n$ do
   $s = \dfrac{a_{ji}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}, \quad c = \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}}$
   $A \leftarrow R^{(ij)}(\theta)A, \quad Q \leftarrow R^{(ij)}(\theta)Q, \; b \leftarrow R^{(ij)}(\theta)b$
  endfor
endfor
$R = A, \; Q = Q^T.$

Este important să notăm că matricea $R^{(ij)}(\theta)$ nu este nevoie să fie formată explicit, ci vom memora doar numerele $c = cos\theta, s = sin\theta$.

ALGORITM (Metoda Givens)

Date de intrare: A; b;
Date de ieșire: Q, R, x

STEP 1: Se inițializează $Q = I_n$;
STEP 2: for $i = 1 : n$ do
  for $j = i+1 : n$ do
   $\sigma = \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}; \; c = \dfrac{a_{ii}}{\sigma}; \; s = \dfrac{a_{ji}}{\sigma};$
   for $\ell = 1 : n$ do
    $u = ca_{i\ell} + sa_{j\ell};$
    $v = -sa_{i\ell} + ca_{j\ell};$
    $a_{i\ell} = u; a_{j\ell} = v;$
    $u = cq_{i\ell} + sq_{j\ell};$
    $v = -sq_{i\ell} + cq_{j\ell};$
    $q_{i\ell} = u; q_{j\ell} = v;$
   endfor

    $u = cb_i + sb_j; \; v = -sb_i + cb_j;$
    $b_i = u; b_j = v;$
   endfor
  endfor
STEP 3: $R = A; \; Q = Q^T$;
STEP 4: $x =$**SubsDesc**(R, b).

Exemplu 2: Să se afle factorizarea QR prin metoda Givens și să se rezolve sistemul $Ax = b$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece $a_{21} = 0$ vom aplica doar $R^{(13)}(\theta)$ matricei A. În acest scop calculăm $c = \dfrac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \; s = \dfrac{a_{31}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{31}^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, astfel că

$$R^{(13)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aplicând matricea de rotație $R^{(13)}$ matricei A se obține

$$A \leftarrow R^{(13)}A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Urmează să aplicăm $R^{(23)}$ matricei curente A obținute la pasul precedent. În mod analog calculăm $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \; s = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ și

$$R^{(23)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Matricea finală după ce aplicăm și rotația $R^{(23)}$ este:

$$A \leftarrow R^{(23)}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} =: R$$

Matricea Q^T se calculează prin formula:

$$Q^T = R^{(23)}R^{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

Vectorul b se transformă astfel:

$$b = Q^T b = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

În urma rezolvării sistemului $Rx = b$ se obține:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

II.2. Valori proprii. Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii unei matrice simetrice.

Definiția (II.9.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un număr complex λ se numește valoare proprie a matricei A dacă $\exists\ v \in C^n \setminus \{0\}$ astfel încât $Av = \lambda v$. Vectorul v se numește vector propriu asociat valorii λ.

O formă echivalentă a relației $Av = \lambda v$ este:

$$(A - \lambda I_n)v = 0 \qquad (17)$$

Se obține astfel un sistem omogen care depinde de parametrul λ și are drept necunoscute componentele $v_1, v_2, ..., v_n$ ale vectorului v. Acest sistem admite soluție nenulă dacă și numai dacă

$$det(A - \lambda I_n) = 0 \qquad (18)$$

Definiția (II.10.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Polinomul de grad n, $P_n(\lambda) = det(A - \lambda I_n)$ se numește polinomul caracteristic al matricei A.

Rădăcinile polinomului $P_n(\lambda)$ sunt valorile proprii ale matricei A. Mulțimea valorilor proprii ale matricei A se numește spectrul matricei A și se notează cu $\sigma(A)$.

Propoziție (II.3.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\lambda_i, i = \overline{1,n}$, valorile proprii asociate matricei A.

a) *Dacă A este simetrică, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$;*
b) *Dacă A este simetrică și semipozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, i = \overline{1,n}$;*
c) *Dacă A este simetrică și pozitiv definită, atunci $\lambda_i \in \mathbb{R}_{>0}, i = \overline{1,n}$.*

Definiția (II.11.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se definește raza spectrală $\rho(A)$ a matricei A astfel:

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| \tag{19}$$

unde $\lambda_i \in \sigma(A), i = \overline{1,n}$. Dacă $\lambda = a + bi \in C$ atunci $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Fie în continuare matricea B de forma

$$B = (R^{(pq)}(\theta)^T)A(R^{(pq)}(\theta) \tag{20}$$

Această transformare afectează atât liniile cât și coloanele p, q ale matricei A. În urma unui calcul elementar rezultă componentele matricei B :

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij}, i, j \neq p, q, \\ b_{pj} = b_{jp} = ca_{pj} - sa_{qj}, j \neq p, q \\ b_{qj} = b_{jq} = sa_{pj} + ca_{qj}, j \neq p, q \\ b_{pp} = c^2 a_{pp} - 2csa_{pq} + s^2 a_{qq} \\ b_{qq} = s^2 a_{pp} + 2csa_{pq} + c^2 a_{qq} \\ b_{pq} = b_{qp} = sc(a_{pp} - a_{qq}) + (c^2 - s^2)a_{pq} \end{cases} \tag{21}$$

Ideea acestei metode este să se aplice matricei A rotații succesive de forma (20) până se obține o matrice diagonală.
La fiecare rotație de forma $B = (R^{(pq)}(\theta)^T)A(R^{(pq)}(\theta))$ vom impune condiția ca elementele nediagonale b_{pq}, b_{qp} să fie nule, astfel

$$b_{pq} = b_{qp} = sc(a_{pp} - a_{qq}) + (c^2 - s^2)a_{pq} = 0$$

sau echivalent

$$a_{pq} cos 2\theta + \frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq}) sin 2\theta$$

Dacă $a_{pp} \neq a_{qq}$ obținem

$$tg 2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}$$

de unde rezultă

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \left(\frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}} \right)$$

Se observă că $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Dacă $a_{pp} = a_{qq}$ rezultă $cos 2\theta = 0$, deci $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Metoda Jacobi aproximează valorile proprii ale unei matrice simetrice prin construirea unui șir de matrice, $(A_m)_{m \ge 0}$, obținut cu ajutorul matricilor de rotație, ale căror valori de pe diagonală converg către valorile proprii ale matricei A. Șirul $(A_m)_{m \ge 0}$ este construit conform schemei numerice:

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_m = (R^{pq}(\theta))^T A_{m-1} R^{pq}(\theta), \; m \ge 1 \end{cases} \tag{22}$$

Metoda Jacobi clasică presupune alegerea perechii (p, q) cu proprietatea ca

$$|a_{pq}^{(m)}| = \max_{i<j} |a_{ij}^{(m)}| \tag{23}$$

unde $a_{ij}^{(m)}, i, j = \overline{1,n}$ sunt elementele matricei curente A_m. În această manieră se vor elimina două elemente care sunt cele mai mari în valoarea absolută. Trebuie să remarcăm că elementele care s-au anulat la o iterație dată sunt în general înlocuite cu elemente nenule în timpul rotațiilor succesive. Vom repeta procedeul până când toate elementele nediagonale sunt mai mici decât o valoare ε (numită toleranța) sub care un număr este considerat 0.

Definiția (II.10.)

Se numește modul al matricei A numărul

$$|A| = \sqrt{\sum_{i \neq j = 1}^{n} a_{ij}^2} \tag{24}$$

ALGORITM (Metoda Jacobi de aproximare a valorilor proprii)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ − simetrică, ε;
Date de ieșire: $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$.

STEP 1: `while` $|A| \ge \varepsilon$ `do`

`Determină` p, q `a.î.` $|a_{pq}| = \max_{1 \le i < j \le n} |a_{ij}|$;

`if` $a_{pp} = a_{qq}$ `then`

$\theta = \frac{\pi}{4}$

`else`

$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{pq}}{a_{qq} - a_{pp}}$;

endif

$c = cos\theta, s = sin\theta;$

for $j = 1 : n$ do

if $j \neq p, q$ then

$u = a_{pj}c - a_{qj}s;\ \ v = a_{pj}s + a_{qj}c;$

$a_{pj} = u; a_{qj} = v; a_{jp} = u; a_{jq} = v;$

endif

endfor

$u = c^2 a_{pp} - 2cs a_{pq} + s^2 a_{qq};$

$v = s^2 a_{pp} + 2cs a_{pq} + c^2 a_{qq};$

$a_{pp} = u; a_{qq} = v;$

$a_{pq} = 0; a_{qp} = 0;$

endwhile

STEP 2: $\lambda_i = a_{ii}, i = \overline{1, n}.$

Teorema (II.4.)

Fie $n \geq 3, \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1$ valorile proprii ale matricei simetrice A și $\alpha_n^{(m)} \geq \alpha_{n-1}^{(m)} \geq ... \geq \alpha_1^{(m)}$ elementele diagonale ale matricei A_m construită iterativ conform formulei (22) unde p, q, θ sunt calculați conform algoritmului (Metoda Jacobi). Atunci

$$|\lambda_i - \alpha_i^{(m)}| \leq |A_m| \leq q^m |A|, \forall i = \overline{1, n} \tag{25}$$

cu $q = \sqrt{1 - \dfrac{2}{n^2 - n}}$.

Se observă că $\lim\limits_{m \to \infty} \alpha_i^{(m)} = \lambda_i, i = \overline{1, n}.$

Exemplu 3: Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 3\sqrt{3} \\ -2 & 8 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Folosind metoda Jacobi, să se determine valorile proprii ale matricei A. Evident că A este simetrică. Se determină $p < q$, astfel încât $|a_{pq}| = \max\limits_{1 \leq i < j \leq 3} |a_{ij}|$. Se observă că

$$|a_{pq}| = \max\{|a_{12}|, |a_{13}|, |a_{23}|\} = |a_{13}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow p = 1, q = 3$$

Deoarece $a_{11} \neq a_{33}$ rezultă

$$\theta = \frac{1}{2} arctg \frac{2a_{13}}{a_{33} - a_{11}} = \frac{1}{2} arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{6}$$

Matricea de rotație este:

$$R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{6} & 0 & -sin\frac{\pi}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\frac{\pi}{6} & 0 & cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Se recalculează A :

$$A = \left(R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^T A R^{(13)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Se reia algoritmul.

$$|a_{pq}| = \max\{|a_{12}|, |a_{13}|, |a_{23}|\} = |a_{23}| = 4 \Rightarrow p = 2, q = 3$$

Deoarece $a_{22} = a_{33}$ rezultă $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Atunci

$$R^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\frac{\pi}{4} & sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & -sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Se recalculează matricea A :

$$A = \left(R^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^T AR^{(23)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Procesul iterativ se oprește datorită faptului că toate elementele nediagonale ale matricei A sunt nule.