Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Addenda la Partea a II–a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: cmuresan11@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine o completare pentru Partea a II–a din seria de referate conţinând probleme date de autoare la examenul de logică matematică şi computaţională.

1 Introducere

În acest text:

- abrevierea *ddacă* semnifică "dacă şi numai dacă";
- abrevierea *i. e.* provine de la "id est" şi semnifică "adică".

Următoarea listă de exerciţii conţine:

- un exerciţiu de logică propoziţională rezolvat semantic în Partea a II–a, cerând, de data aceasta, o demonstraţie sintactică;
- o completare la exerciţiul cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$, în care extind cerinţa, şi în care aleg să folosesc o altă notaţie pentru filtrele principale decât cea utilizată în Partea a II–a.

Pentru preliminariile necesare, a se consulta cartea "Logică matematică", de George Georgescu şi Afrodita Iorgulescu, tipărită la Editura ASE, din Bucureşti, în anul 2010, sau cursul de logică matematică şi computaţională al autoarei, de pe serverul de cursuri al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (a se vedea şi bibliografia dată în primul curs).

2 Lista de exerciţii

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional clasic, în care notăm cu E mulţimea enunţurilor. Să se demonstreze sintactic că, pentru orice mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$ şi pentru orice enunţuri $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \cup \{\neg \psi\} \vdash \neg \varphi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Rezolvare: Fie $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate. Avem de demonstrat că:

$$\Sigma \cup \{\neg\,\psi\} \vdash \neg\,\varphi \ \text{ ddacă } \ \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

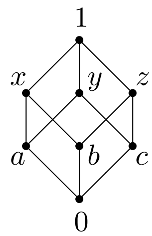
Conform Teoremei deducţiei, este suficient să demonstrăm că:

$$\Sigma \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi \ \text{ ddacă } \ \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

"$\Rightarrow$": Presupunem că $\Sigma \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi$. Cum $(\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ este axioma (A_3), are loc: $\vdash (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$, aşadar: $\Sigma \vdash (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$. Din ipoteza acestei implicaţii, proprietatea anterioară şi regula de deducţie (MP), rezultă că: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.
"$\Leftarrow$": Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. Dintre proprietăţile sintactice valabile în calculul propoziţional clasic, amintesc faptul că: $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi)$, prin urmare: $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi)$. Din ipoteza acestei implicaţii, proprietatea anterioară şi regula de deducţie (MP), rezultă că are loc: $\Sigma \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi$.

Exerciţiul 2.2. *Să se determine toate filtrele, congruenţele şi algebrele Boole factor ale cubului.*

Rezolvare: Cubul este algebra Boole dată de puterea a 3–a a lanţului cu 2 elemente: $\mathcal{L}_2^3$. Amintesc diagrama Hasse a acestei algebre Boole:



Vom păstra notaţiile uzuale pentru operaţiile, relaţia de ordine şi operaţiile derivate ale unei algebre Boole, precum şi notaţiile pentru elementele cubului figurate în diagrama Hasse de mai sus: mulţimea suport a cubului, pe care o notăm, cum este uzual, cu L_2^3, are următoarele elemente: $L_2^3 = \{0, a, b, c, x, y, z, 1\}$, unde 0 şi 1 sunt primul şi, respectiv, ultimul element al cubului, a, b, c sunt atomii cubului, iar $x = a \vee b$, $y = a \vee c$ şi $z = b \vee c$. Unele algebre Boole care vor interveni în acest text vor fi referite prin mulţimile lor suport.

Toate filtrele unei algebre Boole finite sunt principale (mai mult, toate filtrele finite ale unei algebre Boole sunt principale; şi încă mai mult, toate filtrele finit generate ale unei algebre Boole sunt principale), adică generate de câte un singur element. Pentru orice element α al unei algebre Boole B, filtrul principal generat de α în B este: $[\alpha) = \{\beta \in B \mid \alpha \leq \beta\} \subseteq B$.

Cubul este o algebră Boole finită, având $2^3 = 8$ elemente. Prin urmare, filtrele cubului sunt în număr de 8, anume cele 8 filtre generate de câte unul dintre cele 8 elemente ale cubului:

$[0) = \{\beta \in L_2^3 \mid 0 \leq \beta\} = L_2^3$ (filtrul impropriu);
$[a) = \{\beta \in L_2^3 \mid a \leq \beta\} = \{a, x, y, 1\}$ (ultrafiltru);
$[b) = \{\beta \in L_2^3 \mid b \leq \beta\} = \{b, x, z, 1\}$ (ultrafiltru);
$[c) = \{\beta \in L_2^3 \mid c \leq \beta\} = \{c, y, z, 1\}$ (ultrafiltru);
$[x) = \{\beta \in L_2^3 \mid x \leq \beta\} = \{x, 1\}$;
$[y) = \{\beta \in L_2^3 \mid y \leq \beta\} = \{y, 1\}$;
$[z) = \{\beta \in L_2^3 \mid z \leq \beta\} = \{z, 1\}$;
$[1) = \{\beta \in L_2^3 \mid 1 \leq \beta\} = \{1\}$ (filtrul trivial).

Filtrele şi congruenţele unei algebre Boole sunt în corespondenţă bijectivă. Bijecţia de la mulţimea filtrelor unei algebre Boole B la mulţimea congruenţelor sale asociază fiecărui filtru principal $[\alpha)$ generat de un element $\alpha \in B$ congruenţa $\sim_{[\alpha)}$ a lui B definită astfel:

$$\begin{aligned} \sim_{[\alpha)} &= \{(\beta,\gamma) \mid \beta,\gamma \in B, \beta \leftrightarrow \gamma \in [\alpha)\} \\ &= \{(\beta,\gamma) \mid \beta,\gamma \in B, \alpha \leq \beta \leftrightarrow \gamma\} \\ &= \{(\beta,\gamma) \mid \beta,\gamma \in B, \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha\} \subseteq B^2; \end{aligned}$$

am explicitat definiţia dată de prima dintre egalităţile anterioare; ultima egalitate se demonstrează folosind **legea de reziduaţie**. Aşadar, pentru orice elemente $\beta, \gamma \in B$:

$$\beta \sim_{[\alpha)} \gamma \ \text{ ddacă } \ \beta \wedge \alpha = \gamma \wedge \alpha.$$

Să determinăm congruenţa asociată fiecăruia dintre cele 8 filtre ale cubului, şi, concomitent, algebra Boole factor prin fiecare dintre aceste congruenţe, sau, echivalent, algebra Boole factor prin fiecare filtru al cubului. Fiecare dintre aceste algebre Boole factor are drept mulţime subiacentă mulţimea factor a lui L_2^3 prin congruenţa corespunzătoare (care, în acest context, este privită doar ca relaţie de echivalenţă), adică mulţimea claselor acestei congruenţe. Cât despre structura de algebră Boole a unei astfel de algebre factor, ea se determină cu ajutorul **Teoremei de structură a algebrelor Boole finite**, conform căreia, dacă o algebră Boole finită are cardinalul 2^n, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci acea algebră Boole este izomorfă cu algebra Boole $\mathcal{L}_2^n$. În cele ce urmează, vom folosi şi legătura dintre $\wedge$ şi $\leq$ într–o latice, aplicată algebrei Boole $\mathcal{L}_2^3$.

- Corespunzător filtrului $[0)$ (filtrul impropriu):

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[0)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge 0 = \gamma \wedge 0$ ddacă $0 = 0$, iar aceasta este o proprietate adevărată indiferent de valorile lui β şi γ, ceea ce înseamnă că orice $\beta, \gamma \in L_2^3$ satisfac $\beta \sim_{[0)} \gamma$ şi deci au aceeaşi clasă de echivalenţă, adică $\sim_{[0)} = (L_2^3)^2$, şi mulţimea factor prin $\sim_{[0)}$ este formată dintr–o singură clasă de echivalenţă, care cuprinde toate elementele cubului: $L_2^3/_{[0)} = \{0/_{[0)}\} = L_2^3 = \{u/_{[0)}\}$, pentru orice $u \in L_2^3$ (oricare ar fi $u \in L_2^3$, $0/_{[0)} = u/_{[0)}$), aşadar algebra Boole factor $L_2^3/_{[0)}$ este algebra Boole trivială (izomorfă cu $\mathcal{L}_2^0$ şi cu $\mathcal{L}_1$).

- Corespunzător filtrului $[a)$:

$[a)$ este un filtru generat de un atom, aşadar este ultrafiltru, prin urmare calculele de mai jos trebuie sa ne conducă la concluzia că algebra Boole factor a cubului prin filtrul $[a)$ este izomorfă cu algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente).

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[a)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge a = \gamma \wedge a$. Să enumerăm clasele congruenţei $\sim_{[a)}$, cu toate elementele care le compun:

$0/_{[a)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 0 \wedge a\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 0\} = \{0, b, c, z\} = b/_{[a)} = c/_{[a)} = z/_{[a)}$;

$1/_{[a)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = 1 \wedge a\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge a = a\} = \{u \in L_2^3 \mid a \leq u\} = \{a, x, y, 1\} = [a) = a/_{[a)} = x/_{[a)} = y/_{[a)}$; de fapt, din corespondenţa biunivocă între filtre şi congruenţe, ştim că, pentru orice filtru F al unei algebre Boole B, $1/F = F = u/F$, oricare ar fi $u \in B$.

În concluzie, algebra Boole factor $L_2^3/_{[a)} = \{0/_{[a)}, 1/_{[a)}\}$, deci are 2 elemente, aşadar $L_2^3/_{[a)}$ este izomorfă cu algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$.

- Aceeaşi situaţie pentru filtrele $[b)$ şi $[c)$: calculele decurg la fel ca pentru filtrul $[a)$, iar algebrele Boole factor sunt izomorfe tot cu $\mathcal{L}_2$.

- Corespunzător filtrului $[x)$:

$0/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 0 \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 0\} = \{0, c\} = c/_{[x)}$;
$1/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = 1 \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = x\} = \{u \in L_2^3 \mid x \leq u\} = \{x, 1\} = [x) = x/_{[x)}$; ca mai sus, puteam folosi direct faptul că orice filtru F al unei algebre Boole este o clasă a congruenţei asociate lui F;
$a/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = a \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = a\} = \{a, y\} = y/_{[x)}$;
$b/_{[x)} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = b \wedge x\} = \{u \in L_2^3 \mid u \wedge x = b\} = \{b, z\} = z/_{[x)}$.
În concluzie, algebra Boole factor $L_2^3/_{[x)} = \{0/_{[x)}, a/_{[x)}, b/_{[x)}, 1/_{[x)}\}$, deci are 2^2 elemente, aşadar $L_2^3/_{[x)}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul).

- Aceeaşi situaţie pentru filtrele $[y)$ şi $[z)$: calculele decurg la fel ca pentru filtrul $[x)$, iar algebrele Boole factor sunt izomorfe tot cu $\mathcal{L}_2^2$.

- Corespunzător filtrului $[1)$ (filtrul trivial):

Pentru orice $\beta, \gamma \in L_2^3$, $\beta \sim_{[1)} \gamma$ ddacă $\beta \wedge 1 = \gamma \wedge 1$ ddacă $\beta = \gamma$, ceea ce înseamnă că toate clasele lui $\sim_{[1)}$ sunt singletonuri: orice $\beta \in L_2^3$ are $\beta/_{[1)} = \{\beta\}$, adică $\sim_{[1)} = \Delta_{L_2^3}$ (diagonala mulţimii L_2^3), iar $L_2^3/_{[1)} = \{\{\beta\} \mid \beta \in L_2^3\}$, aşadar algebra Boole factor $L_2^3/_{[1)}$ este cardinal echivalentă cu $\mathcal{L}_2^3$, deci această algebră Boole factor este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^3$ (cubul).