2) Să se determine func. spline cubică $S(x)$ care interpolează datele:

$$(1,2),(2,3),(3,5),\ S'(1)=2,\ S'(3)=1$$

$$X=(x_1,x_2,x_3)=(1,2,3)$$

$$Y=(f(x_1),f(x_2),f(x_3))=(2,3,5)$$

Intervale: $[x_1,x_2),[x_2,x_3]$

$$S(x)=\begin{cases} a_1+b_1(x-x_1)+c_1(x-x_1)^2+d_1(x-x_1)^3, & x\in[x_1,x_2) \\ a_2+b_2(x-x_2)+c_2(x-x_2)^2+d_2(x-x_2)^3, & x\in[x_2,x_3] \end{cases}$$

- $\left.\begin{array}{l} a_i=f(x_i) \\ i=\overline{1,2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a_1=2 \\ a_2=3 \end{array}}$

- $b_1=f'(x_1)=2$

$$b_1+4b_2+b_3=\frac{3}{h}(f(x_3)-f(x_1))$$

$h=1$ (pasul de discretizare)

$b_3=f'(x_3)=1$

$2+4b_2+1=3\cdot 3$

$4b_2=6\Rightarrow b_2=3/2$

- $c_i=\frac{3}{h^2}(f(x_{i+1})-f(x_i))-\frac{b_{i+1}+2b_i}{h}$ $\quad i=\overline{1,2}$

$c_1=3(3-2)-3/2+4=3-11/2=-5/2$

$c_2=3(5-3)-(1+3)+2.$

③

$k > 1$

$L_{p,1:k-1} \Leftrightarrow L_{k,1:k-1}$

$k=2,\ p=3$

$L_{3,1:1} \Leftrightarrow L_{2,1:1} \implies L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/8 & 1 \end{pmatrix}$

$$b = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 18 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$L\underbrace{Ux}_{y} = b$$

$$Ly = b \implies y_1 = 18$$

$$-y_1 + y_2 = 20 \implies y_2 = 38$$

$$\tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{8}y_2 + y_3 = 5 \implies y_3 = \tfrac{3}{4}$$

$$Ux = y \implies 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 18 \implies x_1 = 0$$

$$8x_2 + 15x_3 = 38 \implies x_2 = 1$$

$$\tfrac{3}{8}x_3 = \tfrac{3}{4} \implies x_3 = 2$$

• $d_i = -2/h^3\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right) + \frac{b_{i+1}+b_i}{h^2}$ $\quad i=\overline{1,2}$

$d_1 = -2 + 7/2 = 3/2$

$d_2 = -4 + (3/2+1) = -3/2$

$$S(x) = \begin{cases} 2 + 2(x-1) - 5/2(x-1)^2 + 3/2(x-1)^3, & x \in [1,2) \\ 3 + 3/2(x-2) + 2(x-2)^2 - 3/2(x-2)^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

3) Fiind dat tabelul diferențelor divizate

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_1=0$	$f[x_1]=c$		
$x_2=0,4$	$f[x_2]=b$	$f[x_1,x_2]=a=5$	
$x_3=0,7$	$f[x_3]=6$	$f[x_2,x_3]=10$	$f[x_1,x_2,x_3]=50/7$

să se calculeze $P_2(x)$ conform met. Newton cu DD.

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} =$$

$$\frac{50}{7} = \frac{10-a}{0,7} \Rightarrow \frac{100-10a}{7} \Rightarrow 10-a=5$$
$$a=5$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2} \Leftrightarrow \frac{6-b}{0,3} = 10 \Leftrightarrow 6-b=3$$
$$b=3$$

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} \Leftrightarrow 5 = \frac{3-c}{0,4} \Leftrightarrow 3-c=2$$
$$c=1.$$

$$P_2(x) = f[x_1] + f[x_1,x_2](x-x_1) + f[x_1,x_2,x_3](x-x_1)(x-x_2) =$$
$$= 1 + 5x + 50/7\, x(x-0,4).$$

Examen iarnă 2019 - Calcul Numeric

I. Metoda poziţiei false.

II. Diferenţe finite progresive pentru aproximarea derivatei. progresive, regresive, centrale

Metoda de extrapolare Richardson.

III. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

a) Să se afle descompunerea LU a matricei A, utilizând Gauss cu pivotare parţială.

b) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b = (2, 6, 14)^T$, folosind factorizarea LU.

IV. Să se afle funcţia de interpolare spline pătratică S pentru funcţia $f(x) = cos2x$ relativ la diviziunea $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

V. Fie ecuaţia $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$.

a) Să se construiască în Matlab o procedură cu sintaxa $[x_{aprox}] =$ **MetBisectie**(f, a, b, ε).

b) Într-un fişier script să se construiască în Matlab graficul funcţiei $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ pe intervalul $[0, 4]$. Să se calculeze soluţia aproximativă x_{aprox} cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$, apelând procedura **MetBisectie** pentru fiecare interval în parte: 1. $[0, 1]$; 2. $[1; 3, 2]$; 3. $[3, 2; 4]$.

c) Să se construiască punctele $(x_{aprox}, f(x_{aprox}))$ calculate la punctul b) în acelaşi grafic cu graficul funcţiei. hold on

ALGORITM (Metoda bisecţiei)

Date de intrare: f, a, b, ε;
Date de ieşire: x_{aprox};

STEP 1: $a_0 = a$; $b_0 = b$; $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$;
$N = \left[log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) - 1\right] + 1$;

STEP 2: for $k = 1 : N$ do
 if $f(x_{k-1}) = 0$ then
 $x_k = x_{k-1}$;
 break
 elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) < 0$ then
 $a_k = a_{k-1}$; $b_k = x_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
 elseif $f(a_{k-1})f(x_{k-1}) > 0$ then
 $a_k = x_{k-1}$; $b_k = b_{k-1}$; $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;
 endif
endfor

STEP 3: $x_{aprox} = x_k$.

4) Fie $P_2(x)$ polin de interp. pt datele $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, y)$, $(1, 3)$.
Să se afle y conform met. Neville a.î. $P_2(1,5)=0$

$$P_{m_1,m_2,\dots m_{k+1}}(x) = \frac{(x-x_{m_1})P_{m_2,\dots,m_{k+1}}(x)-(x-x_{m_{k+1}})P_{m_1\dots m_k}(x)}{x_{m_{k+1}}-x_{m_1}}$$

x_i	P_{m_i}	$P_{m_i,m_{i+1}}$	$P_{m_i,m_{i+1},m_{i+2}}$
x_1	$P_1(x)$		
x_2	$P_2(x)$	$P_{1,2}(x)$	
x_3	$P_3(x)$	$P_{2,3}(x)$	$P_{1,2,3}(x) = P_2(x)$.

$$P_{1,2,3}(1,5) = \frac{1,5\cdot P_{2,3}(1,5) - 0,5\, P_{1,2}(1,5)}{1}$$

$$P_{1,2}(1,5) = \frac{1,5\, P_2(1,5) - 1\, P_1(1,5)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{=0,5}} = \frac{1,5\cdot y - 0}{0,5} = 3y.$$

$$P_{2,3}(1,5) = \frac{1\, P_3(1,5) - 0,5\, P_2(1,5)}{\underbrace{x_3 - x_2}_{=0,5}} = \frac{3 - y/2}{0,5} = 6 - y.$$

$$P_{1,2,3}(1,5) = 1,5\cdot(6-y) - 0,5\cdot 3y$$

$$P_{1,2,3}(1,5) = 9 - 1,5y - 1,5y = 9 - 3y = 0 \Rightarrow y = 3$$

5) Fiind dat urm. tabel cf. met Neville

x_i	$P_{m_i}(0,5)$	$P_{m_i,m_{i+1}}(0,5)$	$P_{m_i,m_{i+1},m_{i+2}}(0,5)$
0	0		
0,4	2,8	3,5	
0,7	$f(0,7)=b$	$P_{2,3}(0,5)=a$	$27/7$

VI. Fie următoarele date: $f(x) = cos2x, n = 3, a = 0, b = \frac{\pi}{2}$.

a) Să se construiască în Matlab procedura $y =$**MetNDD**(X, Y, x) conform algoritmului Newton cu diferenţe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n. Vectorii X, Y reprezintă nodurile de interpolare, respectiv valorile funcţiei f în nodurile de interpolare; y este valoarea calculată numeric a polinomului $P_n(x)$.

b) Să se construiască în Matlab în aceeaşi figură, graficele funcţiei f pe intervalul $[a, b]$, punctele $(X_i, Y_i), i = \overline{1, n+1}$ şi polinomul P_n obţinut numeric conform procedurii **MetNDD**. Se va considera diviziunea $(X_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ echidistantă. Pentru construcţia graficelor funcţiei f şi P_n, folosiţi o discretizare cu 100 noduri.

ALGORITM (Metoda Newton cu diferenţe divizate)

Date de intrare: $(X_i)_{i=\overline{1,n+1}}; (Y_i)_{\overline{1,n+1}}; x;$
Date de ieşire: y;

`STEP 1: Se determină matricea` Q

$$Q_{i1} = Y_i, i = \overline{1, n+1}$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{X_i - X_{i-j+1}}, i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

`STEP 2: Determină` $P_n = Q_{11} + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{kk}(x - X_1)...(x - X_{k-1})$

`STEP 3:` $y = P_n$.

EXAMEN

→ 6 subiecte → 2 teorie

↘ 4 exerciții (2 probleme matlab)

→ teoria va fi selectată dintr-o listă, asemenea exercițiilor.

Exerciții

1) Fie $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$

a) det. mat. L,U folosind Gauss fără piv. si Gauss cu piv. part.

b) să se rezolve sist. $Ax=b$ conform met. de fact. LU

~~a)~~ GAUSS FĂRA PIV

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

• $k=1$

$a_{p1} \neq 0 \Rightarrow A(1,1)=2 \Rightarrow p=1$

$a_{p1}=2$

$m_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{4}{2}=2$

$m_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}}=\frac{-4}{2}=-2$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21}L_1 = 4\ 8\ 5 - 4\ 6\ 2 = 0\ 2\ 3$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31}L_1 = -4\ 0\ 10 + 4\ 6\ 2 = 0\ {-6}\ 12$

$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 12 \end{pmatrix}$

Calc. $f(0{,}7)$.

$P_{1,2,3}(0{,}5) = 27/7$

$$P_{1,2,3}(0{,}5) = \frac{P_{2,3}(0{,}5)\cdot(0{,}5 - x_1) - P_{1,2}(0{,}5)(0{,}5 - x_3)}{x_3 - x_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a\cdot 0{,}5 + 3{,}5\cdot 0{,}2}{0{,}7} = \frac{27}{7} \Rightarrow$$

$$5a + 3{,}5\cdot 2 = 27 \Rightarrow 5a = 20 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$P_{2,3}(0{,}5) = \frac{P_3(0{,}5)(0{,}5 - x_2) - P_2(0{,}5)(0{,}5 - x_3)}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{0{,}1b - 2{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}3} = 4 \Rightarrow b + \underbrace{2{,}8\cdot 2}_{=5{,}6} = 12 \Rightarrow \boxed{b = 6{,}4}$$

$f(0{,}7) = 6{,}4$.

• GAUSS PIV. PART

a) • $K=1$

$|a_{p1}| = \max_{i=1}^{3}(|a_{i1}|) \Rightarrow p=2$

$L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow A \sim \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & -8 & 15 \end{pmatrix}$

$m_{21} = 2/4 = 1/2$

$m_{31} = -4/4 = -1$

$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1 = \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \; - \\ 2 & 4 & 5/2 \\ \hline 0 & -1 & -3/2 \end{array}$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_2 = \begin{array}{ccc} -4 & 0 & 10 \; + \\ 4 & 8 & 5 \\ \hline 0 & -8 & 15 \end{array}$

• $K=2$

$|a_{p2}| = \max_{i=1}^{3}(|a_{i2}|) \Rightarrow p=3$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$m_{32} = -1/8$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2 = \begin{array}{ccc} 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 15/2 \\ \hline 0 & 0 & 3/8 \end{array}$

$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 0 & 8 & 15 \\ 0 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} = U$

• $K=2$

$a_{p2}\neq 0 \Rightarrow 2 \Rightarrow p=2$

$m_{32}=\frac{a_{32}}{a_{22}}=3$

$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32}L_2 = 0\ -6\ 12\ -$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 6 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $Ax=b$

$LUx=b$

(2) $UX=Y$

(1) $LY=b$

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1+y_2 \\ -2y_1+3y_2+y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1=5 \\ 2\cdot 5+y_2=18 \Rightarrow y_2=8 \\ -10+24+y_3=20 \Rightarrow 6 \end{cases}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_3=2$

$x_2=1$

$x_1=0$