Exercițiul 1

Fie densitatea comună a variabilelor aleatoare (X, Y):

$$f(x,y) = x(ay+b)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Determinați a și b știind că $a+b=0$.

b) Calculați media și varianța lui X și Y

c) Determinați repartițiile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[X|Y]$ și $Var(X|Y)$

d) Verificați dacă are loc relația: $Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y])$

Soluție

a) Pentru a determina a și b folosim faptul că f este o densitate de probabilitate:

$$1 = \iint f(x,y)\,dxdy = \iint x(ay+b)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x,y)\,dxdy = \int_0^1\int_0^1 x(ay+b)\,dxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}\,(ay+b)\;dy$$

ceea ce conduce la $\frac{a}{2}+b=2$ și cum $a+b=0$ deducem că $a=-4$ și $b=4$.

b) Vom determina densitățile marginale ale lui X și Y, $f_X(x)$ și $f_Y(y)$. Pentru variabila aleatoare X avem

$$f_X(x) = \int f(x,y)\,dy = \int_0^1 4x(1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dy = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

iar pentru Y găsim

$$f_Y(y) = \int f(x,y)\,dx = \int_0^1 4x(1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\,dx = 2(1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int x f_X(x)\,dx = \frac{2}{3}\\
\mathbb{E}[X^2] &= \int x^2 f_X(x)\,dx = \frac{1}{2}\\
\mathbb{E}[Y] &= \int y f_Y(y)\,dy = \frac{1}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \int y^2 f_Y(y)\,dy = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

de unde $Var(X) = \frac{1}{18}$ și $Var(Y) = \frac{1}{18}$.

c) Pentru a găsi repartiția variabilei aleatoare $\mathbb{E}[X|Y]$ trebuie să determinăm densitatea condiționată a lui X la $Y=y$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{4x(1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)}{2(1-y)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)} = 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Astfel avem

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \int x f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

prin urmare $\mathbb{E}[X|Y] = \frac{2}{3} = \mathbb{E}[X]$ este constantă. Pentru $Var(X|Y)$ avem

$$Var(X|Y=y) = \mathbb{E}[X^2|Y=y] - (\mathbb{E}[X|Y=y])^2 = \int x^2 \cdot 2x\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

deci $Var(X|Y) = \frac{1}{18} = Var(X)$ este constantă.

Cum $Var(\mathbb{E}[X|Y]) = Var\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, ca varianță a unei variabile constante și $\mathbb{E}[Var(X|Y)] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{18}\right] = \frac{1}{18}$ deducem că afirmația din enunț este adevărată:

$$Var(X) = \mathbb{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbb{E}[X|Y]).$$

d)

Notă: O soluție mult mai simplă se bazează pe observația că densitatea cuplului se factorizează în funcție de x și y de unde deducem că variabilele aleatoare X și Y sunt independente. Astfel $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ iar $Var(X|Y) = Var(X)$.