# LIMITĂ, CONTINUITATE, DERIVABILITATE

## I CONTINUITATE

Fie $f: A \to B$ ; f este continuă dacă:

$a \in A$

- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

SAU

- a este punct izolat (vezi analiză topologică)

exemplu

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x<1 \\ 2x^2-6x+5, & x \geq 1 \end{cases}$$

f continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ( pentru că $\left.\begin{matrix} 2x-1 \\ 2x^2-6x+5 \end{matrix}\right\}$ funcții elementare

Verificăm continuitatea în punctul $\boxed{x=1}$

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 2x-1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 2x^2-6x+5 = 1 \\ f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ funcția f este continuă în $\boxed{a=1}$ $\Rightarrow$ f continuă.

OBS ~~: Orice funcție~~

## II FUNCȚII UNIFORM CONTINUE (UNIFORM CONTINUITATE)

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ uniform continuă dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, a.î. $\forall x, y \in A$, cu $|x-y| < \delta$,
$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ; $|x-y|$ este $d(x,y)$, pe spațiul metric.

Exemplu:

Demonstrați că $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ;

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ este uniform continuă.

Pornim cu definiția.

Fie $\varepsilon > 0$. Alegem $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

$|x-y| < \delta$ ; $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{y^2 - x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{|x^2 - y^2|}{|1+x^2||1+y^2|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|x-y||x+y|}{|1+x^2||1+y^2|} = \frac{|x+y|}{|1+x^2||1+y^2|} \cdot \underbrace{|x-y|}_{< \delta}$$

$$\frac{|x|}{|1+x^2||1+y^2|} + \frac{|y|}{|1+x^2||1+y^2|} = \underbrace{\frac{|x|}{|1+x^2|}}_{<1} + \underbrace{\frac{|y|}{1+y^2}}_{<1} \Rightarrow (1+1)|x-y|$$

$\Rightarrow |x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow$ fct unif cont. $\Rightarrow \cancel{2\delta} = \varepsilon$

$2|x-y| < 2\delta$

## OBS

Orice funcție uniform continuă este funcție continuă. Reciproca NU!!

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă $\Rightarrow$ f uniform continuă (ptr că $[a,b]$ e interval compact)

Dacă f este derivabilă și derivata este mărginită, $\Rightarrow$ f este continuă

$|f'(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ ~~derivabil~~ continuă

Fie $(A,d)$ și $(B,d')$ două spații metrice
o funcție $f: A \to B$ se numește contracție:
dacă $\exists\, c \in [0,1]$ a.î.:

$\forall x,y \in A,\ d(f(x),f(y)) \leq c(d(x,y))$

$\boxed{\text{Orice contracție este o funcție uniform continuă.}}$

Spețe de discontinuitate: $f: A \to \mathbb{R}$ și $a \in A$.

- Prima speță: a este punct de discontinuitate de prima speță, dacă limitele laterale sunt finite.
- A doua speță: a este punct de discontinuitate de a doua speță, dacă cel puțin una din limitele laterale este infinită sau nu există.

Teoremă: O funcție monotonă are cel mult discontinuități de prima speță.

# PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Fie $f: A \to B$. Spunem că $f$ are proprietatea lui Darboux dacă:

$\forall\, a, b \in A,\ a < b$ și $\alpha$ cuprins între $f(a)$ și $f(b)$
$\exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = \alpha$

OBS: • Funcțiile continue au proprietatea lui Darboux. (NU RECIPROC)
- Funcțiile cu proprietatea lui Darboux nu au ~~propuie~~ discontinuitate de speța I.
- $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = 0$

N.B.: Pentru a demonstra că o funcție are proprietatea lui Darboux, putem să arătăm că funcția este continuă.

## Exerciții

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \in (-2, 0] \\ x + 1, & x \in (0; 2]. \end{cases}$$

$f$ continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ca funcție elementară.
Studiem continuitatea în $\boxed{x = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x^3 + 1 = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x + 1 = 1 \\ f(0) = 0^3 + 1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow f \text{ continuă}$$

$\Rightarrow f$ are proprietatea lui Darboux.

# DERIVABILITATE

Fie $f : A \to \mathbb{R}$. Pentru a studia derivabilitatea în punctul $x_0$ vom aplica raportul de derivabilitate:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow \underline{\text{este finită}}$$

$\Rightarrow$ funcție derivabilă în $x_0$.

Aplicație:

Să se studieze derivabilitatea funcției:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Studiem deriv în $\boxed{x=1}$

Aplicăm raportul de derivabilitate:

$$f'_s(1) \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$$

$\Rightarrow f$ este derivabilă în 1.

## ROLLE

Condiții:

- $f$ continuă pe $[a,b]$
- $f$ derivabilă pe $(a,b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î.

$f'(c) = 0$

CONSECINȚĂ:

- Intre oricare două rădăcini consecutive ale funcției, există cel puțin o rădăcină a derivatei.
- Intre oricare 2 rădăcini consecutive ale derivatei, există cel mult o rădăcină a funcției.

## LAGRANGE

CONDIȚII

- $f$ cont. pe $[a,b]$
- $f$ derivabilă pe $(a,b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$

a.î. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Dacă $f$ are derivata nulă pe un interval, atunci este constantă pe acel interval
- Dacă $f$ și $g$ au derivatele egale pe un interval, atunci ele diferă printr-o constantă.
- Dacă $f'(x) \geq 0 \rightarrow$ fct crescătoare
  $f'(x) < \rightarrow$ fct descrescă.
- Dacă $f$ cont ~~pe~~ în $x_0$ și derivabilă peste tot mai puțin $x_0$, atunci $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)$ (valoare finită)

## CAUCHY

CONDIȚII

Fie $f$ și $g$ 2 funcții:

- $f, g$ cont pe $[a,b]$
- $f, g$ deriv. pe $(a,b)$
- $g'(x) \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

## FERMAT

CONDIȚII

- $f: A \rightarrow B$
- $f$ derivabilă pe $A$

$\rightarrow f'(a) = 0$

- Punctele de extrem local se găsesc printre punctele critice ale funcției