Tema 3

Soluții

Exercițiul 1

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i, T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 1 \text{ şi } 2,\ 3,\ 4^e \text{ OK deci } 5 \text{ e defect})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 2 \text{ şi } N_2 = 2 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi } N_2 = 1 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi primele } 3 \text{ OK atunci } 4 \text{ şi } 5 \text{ defecte})
\end{aligned}
$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$
N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exercițiul 2

a) Observăm că legea lui X este (făcand suma pe linii) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ şi legea lui Y este (făcand suma pe coloane) $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$ prin urmare

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 2 \times 0.35 + 4 \times 0.4 + 6 \times 0.25 = 3.8,\\
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(2^2 \times 0.35 + 4^2 \times 0.4 + 6^2 \times 0.25\right) - 3.8^2 = 2.36.
\end{aligned}
$$

b) Pentru legea v.a. condiţionate $\mathbb{E}[Y|X]$ avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X=0] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=0) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=0) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=0)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.4} + 4\times\frac{0.2}{0.4} + 6\times\frac{0.1}{0.4} = 4,\\
\mathbb{E}[Y|X=1] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=1) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=1) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=1)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.3} + 4\times\frac{0.1}{0.3} + 6\times\frac{0.1}{0.3} = 4,\\
\mathbb{E}[Y|X=2] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=2) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=2) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=2)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.2} + 4\times\frac{0.1}{0.2} + 6\times\frac{0}{0.2} = 3,\\
\mathbb{E}[Y|X=3] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=3) + 4\mathbb{P}(Y=4|X=3) + 6\mathbb{P}(Y=4|X=3)\\
&= 2\times\frac{0.05}{0.1} + 4\times\frac{0}{0.1} + 6\times\frac{0.05}{0.1} = 4,
\end{aligned}$$

deci $\mathbb{E}[Y|X] \sim \begin{pmatrix} 3 & 4\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$ deoarece $\mathbb{E}[Y|X]$ ia valoarea 3 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X\neq 2)$.

Pentru legea v.a. $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
Var[Y|X=0] &= \mathbb{E}[Y^2|X=0] - \mathbb{E}[Y|X=0]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.4} + 4^2\times\frac{0.2}{0.4} + 6^2\times\frac{0.1}{0.4}\right) - 16 = 2,\\
Var[Y|X=1] &= \mathbb{E}[Y^2|X=1] - \mathbb{E}[Y|X=1]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.3} + 4^2\times\frac{0.1}{0.3} + 6^2\times\frac{0.1}{0.3}\right) - 16 = 2.66,\\
Var[Y|X=2] &= \mathbb{E}[Y^2|X=2] - \mathbb{E}[Y|X=2]^2 = \left(2^2\times\frac{0.1}{0.2} + 4^2\times\frac{0.1}{0.2} + 6^2\times\frac{0}{0.2}\right) - 9 = 1,\\
Var[Y|X=3] &= \mathbb{E}[Y^2|X=3] - \mathbb{E}[Y|X=3]^2 = \left(2^2\times\frac{0.05}{0.1} + 4^2\times\frac{0}{0.1} + 6^2\times\frac{0.05}{0.1}\right) - 16 = 4,
\end{aligned}$$

astfel $Var(Y|X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2.66 & 4\\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1\end{pmatrix}$ deoarece v.a. $Var(Y|X)$ ia valoarea 1 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$, valoarea 2 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=0)$, valoarea 2.66 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=1)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=3)$.

c) Cunoscand legile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Var[Y|X]] &= 1\times 0.2 + 2\times 0.4 + 2.66\times 0.3 + 4\times 0.1 \approx 2.2,\\
Var[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]^2] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2 = \left(3^2\times 0.2 + 4^2\times 0.8\right) - \mathbb{E}[Y]^2 = 0.16,\\
Var[Y] &= 2.36,
\end{aligned}$$

deci $Var[Y] = 2.2 + 0.16 = 2.26$ de unde $Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$.

Exerciţiul 3

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X>n) = \mathbb{P}(X=n+1) + \mathbb{P}(X=n+2) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)$$

şi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) &= (\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\dots)+(\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\dots)\\ &+(\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\dots)+\dots\\ &= 1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)+3\cdot\mathbb{P}(X=3)+\dots\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}[X].\end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq x)\,dx=\int_0^{+\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\,dx\overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=}\mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\,dx\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X}\,dx\right]=\mathbb{E}[X].$$

Exercițiul 4

a) Din condiția $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$ obținem

$$\int_0^{\infty}\alpha x^2e^{-kx}\,dx\overset{y=kx}{=}\frac{\alpha}{k^3}\int_0^{\infty}y^2e^{-y}\,dy=\frac{2\alpha}{k^3}=1$$

de unde rezultă $\alpha=\frac{k^3}{2}$. Pentru această valoare a lui α se indeplinește și condiția $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Aplicând definiția funcției de repartiție, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$, efectuând calculele obținem

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}, & 0<x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

c) Avem

$$\mathbb{P}\left(0<X<\frac{1}{k}\right)=F\left(\frac{1}{k}\right)-F(0)=F\left(\frac{1}{k}\right)=1-\frac{5}{2e}.$$

Exercițiul 5

a) Dacă $X\sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x)=(1-e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X>t)=1-\mathbb{P}(X\leq t)=1-F(t)=e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X>t+s|X>s)=\frac{\mathbb{P}(X>t+s,X>s)}{\mathbb{P}(X>s)}=\frac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>s)}=\frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}}=e^{-\alpha t}=\mathbb{P}(X>t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că X a funcţionat deja un timp s ($X>s$), probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t suplimentar ($X>t+s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t. Faptul că a funcţionat deja un timp s nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp t in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s+t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t \log \frac{1}{h(1)}}$.

Exercițiul 6

Densitatea variabilei aleatoare X se mai poate scrie sub forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}, & x \le \alpha \\ \frac{1}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}, & x > \alpha \end{cases}$$

de unde, aplicând definiția mediei rezultă

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\, dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx$$

În prima integrală din membrul drept facem schimbarea de variabilă $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$ iar în a doua schimbarea de variabilă $t = \frac{-x+\alpha}{\beta}$ și obținem

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha + \beta t) e^t\, dt + \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha - \beta t) e^t\, dt = \alpha.$$

Momentul de ordin 2 se calculează în mod similar și obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\, dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha + \beta t)^2 e^t\, dt + \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha - \beta t)^2 e^t\, dt \\ &= \alpha^2 + 2\beta^2 \end{aligned}$$

prin urmare varianța este $Var[X] = \alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 = 2\beta^2$.

Exercițiul 7

Fie N numărul de clienţi care intră in magazin şi fie X_k v.a. care reprezintă suma cheltuită de clientul k. Din ipoteză ştim că $\mathbb{E}[N] = 50$, $\mathbb{E}[X_i] = 30$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ şi $X_i \perp\!\!\!\perp N$ ($\perp\!\!\!\perp$ - semnul pentru independenţă). Putem observa că cifra de afaceri a magazinului este dată de v.a. $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{cifrei de afaceri}] &= \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n\right]\mathbb{P}(N=n)\\
&= \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right]\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[X_i | N = n\right]\right)\mathbb{P}(N=n)\\
&\overset{indep.}{=} \sum_{n\geq 1} n\mathbb{E}[X_1]\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]\\
&= 30 \times 50 = 1500,
\end{aligned}$$

prin urmare cifra de afaceri pe care o inregistrează magazinul in ziua respectivă este de 1500 RON.