CURSUL 3: RELAŢII

G. MINCU

1. Relaţii

Definiţia 1. Numim **relaţie** orice triplet format din trei mulţimi A, B, G astfel încât $G \subset A \times B$.

Observaţia 2. Noţiunea de relaţie este o generalizare a noţiunii de funcţie.

Observaţia 3. În cele ce urmează, vom lua în discuţie numai relaţii (A, B, G) în care $A = B$.

2. relaţii pe o mulţime

Definiţia 4. Numim **relaţie pe mulţimea nevidă** A orice submulţime a lui $A \times A$.

Observaţia 5. Dacă ρ este o relaţie pe mulţimea A iar $a, b \in A$, vom utiliza frecvent notaţia $a\rho b$ pentru a desemna situaţia $(a, b) \in \rho$ şi notaţia $a \not\rho b$ pentru a desemna situaţia $(a, b) \in \rho$.

Fie ρ o relaţie pe mulţimea A.

Definiţia 6. Spunem că ρ este **reflexivă** dacă $\forall a \in A \;\; a\rho a$.

Definiţia 7. Spunem că ρ este **ireflexivă** dacă $\forall a \in A \;\; a \not\rho a$.

Definiţia 8. Spunem că ρ este **simetrică** dacă $\forall a, b \in A \;\; a\rho b \Rightarrow b\rho a$.

Definiţia 9. Spunem că ρ este **antisimetrică** dacă

$$\forall a, b \in A \;\; a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b$$

Definiţia 10. Spunem că ρ este **tranzitivă** dacă

$$\forall a, b, c \in A \;\; a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$$

.

3. RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ. MULŢIMI FACTOR

Definiţia 11. Fie ρ o relaţie pe mulţimea nevidă A. ρ se numeşte **relaţie de echivalenţă** dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Definiţia 12. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă A şi $a \in A$. Prin **clasa de echivalenţă a lui** a **în raport cu** ρ înţelegem mulţimea $\{b \in A : b\rho a\}$.

Vom nota clasa de echivalenţă a lui a în raport cu ρ prin $\dfrac{a}{\rho}$ sau $\hat{a}$. Vor exista de asemenea situaţii în care în locul acestor notaţii se vor folosi unele adaptate contextului.

Propoziţia 13. Dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A, iar $a, b \in A$, atunci $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$.

Demonstraţie: Dacă $a\rho b$, atunci $c \in \hat{a} \Leftrightarrow c\rho a \stackrel{b\rho a}{\Leftrightarrow} c\rho b \Leftrightarrow c \in \hat{b}$. Prin urmare, $\hat{a} = \hat{b}$.
Dacă $a \not\rho b$, să presupunem că există $c \in \hat{a} \cap \hat{b}$. Atunci $a\rho c$ şi $c\rho b$, de unde $a\rho b$, contradicţie. Rămâne deci că $\hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$. $\square$

Definiţia 14. Numim **partiţie** a mulţimii nevide A orice familie $(A_i)_{i\in I}$, $I \neq \emptyset$, de submulţimi nevide ale lui A cu proprietăţile:
1. $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
2. Pentru orice $i, j \in I$ cu $i \neq j$ avem $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Observaţia 15. Propoziţia 13 se reformulează cu ajutorul noţiunii de partiţie astfel: „Clasele de echivalenţă determinate de o relaţie de echivalenţă pe o mulţime constituie o partiţie a acelei mulţimi”.

Definiţia 16. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Notăm $\dfrac{A}{\rho}$ şi numim **mulţimea factor (cât)** a lui A în raport cu ρ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă ale elementelor lui A în raport cu ρ.

Observaţia 17. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Funcţia $\pi : A \to \dfrac{A}{\rho}$, $\pi(a) = \hat{a}$ este surjectivă.

Definiţia 18. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. Funcţia din observaţia 17 numeşte **surjecţia canonică** (sau **proiecţia canonică**) **a mulţimii factor** $\dfrac{A}{\rho}$.

Definiţia 19. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A. O submulţime $\mathcal{S}$ a lui A se numeşte **sistem complet şi independent de**

reprezentanţi (pentru elementele mulţimii A) relativ la relaţia ρ dacă îndeplineşte condiţiile:
1. Pentru orice două elemente distincte $s, t \in \mathcal{S}$ avem $s \not\rho t$.
2. Orice element al lui A este echivalent cu un element al lui $\mathcal{S}$.

Observaţia 20. În cuvinte, dată fiind o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A, un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la ρ este o submulţime a lui A alcătuită cu câte exact un element din fiecare clasă de echivalenţă.

Observaţia 21. Dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A iar $\mathcal{S}$ este un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la ρ, atunci funcţia $f : \mathcal{S} \to \dfrac{A}{\rho}$, $f(s) = \hat{s}$ este bijectivă.

3.1. **Exemple importante de relaţii de echivalenţă.**

3.1.1. *Egalitatea.*

Exemplul 22. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de echivalenţă.

Observaţia 23. Unicul sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia de egalitate pe mulţimea A este chiar A.

3.1.2. *Congruenţa modulo n.* Fie $n \in \mathbb{Z}$. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{Z}$ relaţia ρ_n dată astfel: $a \rho_n b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n | b - a$.

Definiţia 24. Relaţia ρ_n se numeşte relaţia de **congruenţă modulo** n.

Observaţia 25. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem $\rho_{-n} = \rho_n$.

Notaţie: În mod tradiţional faptul că numerele întregi a şi b sunt congruente modulo n se notează $a \equiv b \pmod{n}$. Începând din momentul de faţă vom folosi şi noi această notaţie, renunţând la provizoriul ρ_n.

Propoziţia 26. Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ relaţia de congruenţă modulo n este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie: Fie $n, a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Evident, $n | 0 = a - a$, de unde $a \equiv a \pmod{n}$, deci relaţia de congruenţă modulo n este reflexivă.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$, atunci $n | b - a$, de unde $n | -(b-a) = a - b$, deci $b \equiv a \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia în discuţie este simetrică.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $b \equiv c \pmod{n}$, atunci $n | b - a$ şi $n | c - b$. De aici, $n | (b-a) + (c-b) = c - a$, deci $a \equiv c \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia de congruenţă modulo n este tranzitivă. $\square$

Observaţia 27. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
a) Clasa de congruenţă modulo n a elementului $a \in \mathbb{Z}$ este $a + n\mathbb{Z}$ (ea constă în elementele care dau acelaşi rest ca şi a la împărţirea prin n).
b) $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{n}} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\} = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\}$.
c) Sistemul complet şi independent de reprezentanţi cel mai frecvent folosit în context este $\{0, 1, \ldots, n-1\}$; el este alcătuit din resturile ce se pot obţine împărţind numerele întregi la n.

Observaţia 28. Congruenţa modulo 0 este de fapt egalitatea pe $\mathbb{Z}$. Prin urmare, conform observaţiilor 21 şi 23, $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{0}}$ este în bijecţie cu $\mathbb{Z}$.

Definiţia 29. Mulţimea factor a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu congruenţa modulo n se numeşte **mulţimea claselor de resturi modulo** n.

Vom folosi notaţia[1] $\mathbb{Z}_n$ pentru a desemna mulţimea claselor de resturi modulo n.

3.1.3. *Relaţia de echivalenţă asociată unei partiţii.* Fie $\mathcal{P} = (A_i)_{i \in I}$ o partiţie a mulţimii nevide A. Definim pe A relaţia

$$a \sim_{\mathcal{P}} b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists i \in I \quad a, b \in A_i.$$

Propoziţia 30. Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ este de echivalenţă pe A.

Temă: Demonstraţi propoziţia 30!

Definiţia 31. Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ se numeşte **relaţia de echivalenţă asociată partiţiei** $\mathcal{P}$.

Propoziţia 32. Dată fiind o mulţime nevidă A, mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A şi mulţimea partiţiilor lui A sunt în corespondenţă bijectivă.

Demonstraţie: Considerăm funcţia Φ care asociază fiecărei relaţii de echivalenţă pe A partiţia lui A în clasele de echivalenţă relative la relaţia respectivă. Considerăm de asemenea funcţia Ψ care asociază fiecărei partiţii $\mathcal{P}$ a lui A relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$. Atunci Φ şi Ψ sunt inverse una celeilalte (lăsăm detaliile în seama cititorului). $\square$

[1] În teoria numerelor, această notaţie este rezervată mulţimii întregilor n-adici (în situaţia în care n este număr prim). În acel context, inelul claselor de resturi modulo n se notează $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sau $\dfrac{\mathbb{Z}}{(n)}$. Noi nu ne vom întâlni cu această situaţie la cursul de Algebră, deci notaţia este neechivocă.

3.1.4. *Relaţia de echivalenţă asociată unei funcţii.* Considerăm mulţimile nevide A şi B şi funcţia $f : A \to B$. Definim în acest context relaţia

$$a_1 \rho_f a_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a_1) = f(a_2).$$

Propoziţia 33. Relaţia ρ_f este de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 33!

Relaţia ρ_f ne permite să prezentăm un rezultat foarte util pentru definirea de funcţii pe mulţimi factor:

Teorema 34. (Proprietatea de universalitate a mulţimii factor) Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea A, $\pi : A \to \dfrac{A}{\rho}$ surjecţia canonică, $f : A \to B$ o funcţie şi ρ_f relaţia de echivalenţă asociată acesteia.
i) Dacă $\rho \subset \rho_f$, atunci există $u : \dfrac{A}{\rho} \to B$ astfel încât $u \circ \pi = f$.
ii) u este injectivă dacă şi numai dacă $\rho = \rho_f$.
iii) u este surjectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă.

4. Relaţii de ordine

Este imediat faptul că relaţia uzuală de ordine pe $\mathbb{R}$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Aceasta ne sugerează

Definiţia 35. Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie pe A. Spunem că ρ este o **relaţie de ordine** dacă ea este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.

Observaţia 36. Relaţia de ordine uzuală pe $\mathbb{R}$ este, desigur, o relaţie de ordine conform definiţiei 35. Pe de altă parte, vom constata în cele ce urmează că în categoria relaţiilor de ordine se vor încadra şi alte relaţii frecvent întâlnite (iar statutul de relaţie de ordine al unora dintre acestea va fi la o primă vedere chiar surprinzător).

Exemplul 37. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de ordine.

Exemplul 38. Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de incluziune pe $\mathcal{P}(A)$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 39. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{N}$ este o relaţie de ordine.

Exemplul 40. Relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$ nu este o relaţie de ordine.

Temă: Argumentaţi afirmaţiile de la exemplele 37, 38, 39 şi 40!

5. Numere cardinale

Aşa cum am precizat încă de la primul curs, considerarea unei mulţimi a tuturor mulţimilor conduce la paradoxuri. Vom conveni că toate mulţimile alcătuiesc un alt tip de entitate, pe care o vom numi **clasă**. Fără a intra în detalii tehnice, vom considera că definiţiile pe care le-am dat pentru relaţiile de ordine şi relaţiile de echivalenţă pot fi utilizate şi în contextul claselor.

Definim relaţia $\sim$ între două mulţimi astfel: $A \sim B$ dacă şi numai dacă există o funcţie bijectivă de la A la B.

Propoziţia 41. Relaţia $\sim$ este de echivalenţă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 41!

Definiţia 42. Dacă pentru mulţimile A şi B avem $A \sim B$, unde $\sim$ este relaţia introdusă mai sus, spunem că A şi B sunt **cardinal echivalente** sau **echipotente**.

Definiţia 43. Clasa de echivalenţă cardinală a unei mulţimi A se numeşte **numărul cardinal al lui** A şi se notează $|A|$ sau Card A.

Definiţia 44. O mulţime se numeşte **numărabilă** dacă ea este cardinal echivalentă cu $\mathbb{N}$.

Definiţia 45. O mulţime se numeşte **cel mult numărabilă** dacă ea este finită sau numărabilă.

Definiţia 46. O mulţime se numeşte **nenumărabilă** dacă nu este cel mult numărabilă.

Propoziţia 47. Mulţimea $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

Demonstraţie: Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ care trimite numerele pare în jumătăţile lor, iar pe cele impare în numerele întregi negative, luate la rând, începând cu -1 şi în ordine descrescătoare este bijectivă. Lăsăm verificările calculatorii în grija cititorului. $\square$

Definim pe clasa numerelor cardinale relaţia $|A| \preceq |B|$ dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă $f : A \to B$.

Observaţia 48. Relaţia $\preceq$ este corect definită deoarece, dacă $f : A \to B$ este injectivă, $|A| = |A'|$, iar $|B| = |B'|$, atunci există funcţii bijective $\alpha : A \to A'$ şi $\beta : B \to B'$; în consecinţă, $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : A' \to B'$ este injectivă.

Observaţia 49. Deoarece pentru orice mulţime funcţia sa identică este injectivă, relaţia $\preceq$ este reflexivă.

Observaţia 50. Deoarece compusa oricăror două funcţii injective este injectivă, relaţia $\preceq$ este tranzitivă.

Teorema 51. (Cantor, Bernstein, Schröder)
Fie două mulţimi A şi B. Dacă există funcţiile injective $f : A \to B$ şi $g : B \to A$, atunci există o funcţie bijectivă $h : A \to B$.

Corolarul 52. Relaţia $\preceq$ este antisimetrică.

Cele precedente demonstrează

Propoziţia 53. Relaţia $\preceq$ este de ordine.

Utilizând cele precedente, putem proba:

Propoziţia 54. Mulţimea $\mathbb{Q}$ este numărabilă.

Temă: Demonstraţi propoziţia 54 utilizând eventual funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{sgn} a \cdot 2^{|a|} \cdot 3^b$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$.

Propoziţia 55. Mulţimile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{C}$ sunt nenumărabile.

References

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.