Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale

Prof.dr. Ioan Roşca

Cuprins

Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale

Acest capitol este destinat studiului ecuaţiilor diferenţiale.

După ce în §1 se prezintă noţiunea de ecuaţie diferenţială, sînt prezente cîteva ecuaţii integale prin cuadraturi şi modele matematice reprezentate prin ecuaţii diferenţiale. Problema Cauchy asociată unei ecuaţii sau sistem de ecuaţii diferenţiale este tratată în §2.

Ecuaţiile diferenţiale liniare sînt studiate în §3 iar în §4 se studiază nişte sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întîi.

1 Ecuaţii diferenţiale

1.1 Noţiunea de ecuaţie diferenţială

Studiul ecuaţiilor diferenţiale a început odată cu apariţia calculului diferenţial şi integral. Necesitatea considerării ecuaţiilor diferenţiale apare direct din cele două modele care au condus la constituirea conceptelor fundamentale ale analizei, tangente la o curbă şi viteza în mişcarea neuniformă.

Incă în secolul al XVII-lea se studia aşa numită problemă inversă a tangentelor, constînd în determinarea unei curbe plecînd de la proprietăţile cunoscute ale tangentei la o curbă: aceasta era aşa cum vom vedea, o problemă de ecuaţii diferenţiale.

Intr-o scrisoare din 1638 a matematicianului *F. Debeaune*, pe care *Mersenne* i-a transmis-o lui *Descartes*, se formulează problema determinării unei curbe pentru care raportul dintre ordonată şi subtangentă este egal cu raportul dintre un segment dat şi diferenţa între ordonată şi abscisă. In răspunsul său, din 20 februarie 1639, *Descartes* recunoaşte importanţa unor astfel de probleme, dar consideră imposibilă rezolvarea lor cu ajutorul regulilor pe care *Fermat* şi el însuşi le dăduseră pentru determinarea tangentelor. Aceasta se petrecea încă înainte ca, în lucrările lui *Leibniz* şi a lui *Newton*, calculul diferenţial şi integral să se fi construit în mod sistematic. In limbajul de astăzi, problema propusă de *Debeaune* se rezolvă astfel:

Fie $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ funcţia a cărui grafic este căutat, $x_0 \in [a,b]$; ecuaţia tangentei la grafic în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Tangenta intersectează axa Ox în punctul dat de $-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$; subtangenta este $f(x)/f'(x_0)$. Relaţia care trebuie să determine curba este deci
$$\frac{f(x_0)}{f(x_0)/f'(x_0)} = \frac{k}{f(x_0) - x_0} \text{ sau } f'(x_0) = \frac{k}{f(x_0) - x_0}.$$

Ecuaţia la care am ajuns se scrie
$$y' = \frac{k}{y - x}$$

iar funcţiile f care verifică relaţia $f'(x) = \dfrac{k}{f(x) - x}$ se numesc soluţii ale ecuaţiei diferenţiale.

Inainte de a da, în general, definiţia unei ecuaţii diferenţiale şi a formula problemele care se pun în legătură cu aceste ecuaţii să vedem cum se încadrează o ecuaţie diferenţială în clasa ecuaţiilor operatoriale.

Ecuaţii operatoriale.

Fie X şi Y două mulţimi şi $f : X \to Y$ o aplicaţie. Formulăm următoarea problemă: dîndu-se un element $y \in Y$, să se găsească elementele $x \in X$, pentru care

$$f(x) = y. \tag{1.1}$$

Această problemă se numeşte **ecuaţia operatorială.**

Printr-o *soluţie* a unei ecuaţii operatoriale înţelegem un element $x \in X$ ce satisface relaţia (1.1). Teoria ecuaţiilor operatoriale se construieşte în legătură cu structura cu care sînt înzestrate mulţimile X şi Y. Dacă X şi Y sînt înzestrată cu o structură de spaţiu liniar peste un corp K, ecuaţia (1.1) se numeşte liniară, dacă f este o aplicaţie liniară. Dacă $y \neq 0$ vom spune că ecuaţia liniară este *neomogenă sau ecuaţie afină*, iar dacă $y = 0$ ecuaţia (1.1) se zice liniară şi *omogenă* . Notăm cu S_y mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1.1). Observăm că S_0 este nucleul (kerul) lui f adică $S_0 = Kerf$. Deci studiul mulţimii soluţiei ecuaţiei

$$f(x) = 0 \tag{1.2}$$

revine la a studia nucleul operatorului f. O primă concluzie din acest studiu:

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei liniare şi omogene (1.1) *formează un spaţiu liniar al lui X. In cazul ecuaţiei liniare şi omogene, a studia mulţimea soluţiilor revine la a determina dimensiunea lui $Ker(f)$ şi la a construi o bază în $Ker(f)$.* Pentru S_y are loc următoarea teoremă de structură:

Presupunem că $S_y \neq \emptyset$. Fie $x_1 \in S_y$. Atunci $S_y = Kerf + \{x_1\}$.

Alte aspecte privind ecuaţia liniară (1.1) sînt precizate mai jos.

(i) Ecuaţia (1.1) *are cel mult o soluţie, pentru orice $y \in Y$, dacă şi numai dacă aplicaţia f este injectivă.*

(ii) Ecuaţia (1.1) *are cel puţin o soluţie, pentru orice $y \in Y$, dacă şi numai dacă f este surjectivă.*

(iii) Ecuaţia (1.1) *are o soluţie şi numai una, oricare ar fi $y \in Y$, dacă şi numai dacă f este bijectivă.*

Este clar din cele prezentate mai sus că problema studiului mulţimii soluţiilor unei ecuaţii operatoriale (adică a ecuaţiei (1.1)) este foarte complexă. Ea include, printre altele, probleme de tipul următor:

(i) determinarea cardinalului unei mulţimi;

(ii) studiul dimensiunii unui spaţiu liniar;

(iii) studiul injectivităţii, surjectivităţii şi bijectivităţii unui operator dat.

Ecuaţii diferenţiale

Dacă X şi Y sînt mulţimi de funcţii atunci ecuaţia (1.1) se numeşte ecuaţie funcţională în sens larg. O ecuaţie funcţională în care apare funcţia necunoscută numai sub operaţii algebrice, se numeşte ecuaţie funcţională în sens restrîns.

O ecuaţie funcţională în care intervine funcţia necunoscută împreună cu anumite derivate ale sale se numeşte **ecuaţie diferenţială** .

Dacă funcţia necunoscută este de o singură variabilă ecuaţia diferenţială se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară* . Dacă funcţia necunoscută este de mai multe variabile, ecuaţia diferenţială se numeşte **cu derivate parţiale**.

Exemple :

1) Considerăm aplicaţia

$$\varphi : \Omega \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad (x, y) \to \varphi(x, y)$$

şi alegem

$$X = \Big\{ y \in C^1[a, b]; (x, y(x)) \in \Omega, \;\; \forall \;\, x \in [a, b], \Big\}, \quad Y = C[a, b]$$

iar aplicaţia $f : X \to Y$, $y \to f(y) = y'(\cdot) - \varphi(\cdot, y(\cdot))$.

Ecuaţia diferenţială $f(y) = 0$ convenim să o scriem sub forma

$$y' = \varphi(x, y)$$

adică o ecuaţie diferenţială de ordinul întîi.

2) Fie

$$F : \Omega \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}$$

$$(x, y_0, y_1, \ldots, y_n) \to F(x.y_0, y_1, \ldots, y_n)$$

şi alegem spaţiile

$$X = \Big\{ y \in C^n[a, b]; (x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in \Omega, \;\; \forall \;\, x \in [a, b] \Big\},$$

$Y = C[a, b]$, iar aplicaţia f definită de legea

$$f : X \to Y, \quad y \to f(y)$$

unde

$$[f(y)](x) = F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)).$$

Obţinem astfel ecuaţia funcţională

$$f(y) = 0$$

pe care convenim să o scriem sub forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.3}$$

şi care este o ecuaţie diferenţială reală de ordinul n.

Graficul unei soluţii a ecuaţiei diferenţiale (1.3) este o curbă în $\mathbf{R}^n$, curbă ce poartă denumirea de **curbă integrală** . Dacă ecuaţia (1.2) poate fi explicitată în raport cu $y^{(n)}$, atunci ea se poate scrie sub forma

$$y^{(n)} = f\Big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\Big). \tag{1.4}$$

Ecuaţia (1.4) se numeşte **forma normală** a ecuaţiei (1.3.)

Ecuaţii integrale

O altă categorie importantă de ecuaţii funcţionale este dată de **ecuaţiile integrale**.

Fie Ω au deschis din $\mathbf{R}^n$, aplicaţiile

$$F : D_1 \subset \mathbf{R}^{n+2} \to \mathbf{R}, \quad K : D_2 \subset \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$$

şi spaţiile

$$X = \Big\{\varphi \in C(\Omega, \mathbf{R}); (x, \varphi(x), \int_\Omega K(x, \xi, \varphi(\xi))d\xi) \in D_1\Big\}, \quad Y = C(\Omega, \mathbf{R}).$$

Ecuaţia funcţională

$$f(\varphi) = 0 \tag{1.5}$$

unde $f : X \to Y$ este definită prin

$$[f(\varphi)](x) = F\Big(x, \varphi(x), \int_\Omega K(x, \xi, \varphi(\xi))d\xi\Big)$$

se numeşte **ecuaţia integrală** de tip Fredholm. Prin diferite particularizări ale lui F şi K obţinem următoarele clase importante de ecuaţii integrale:

$$\int_\Omega K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x) \tag{1.6}$$

$$\varphi(x) = \int_\Omega K(x,\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta + f(x). \tag{1.7}$$

Ecuaţia (1.6) se numeşte **ecuaţia integrală** de tip Fredholm de speţă întîi, iar ecuaţia integrală de tip Fredholm de speţă a doua. Se vede cu uşurinţă că aceste ecuaţii sînt **liniare**, iar dacă $f = 0$, sînt **liniare şi omogene**.

Dacă în (1.7)

$$K(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(\xi) \tag{1.8}$$

ecuaţia corespunzătoare se numeşte cu nucleu degenerat.

Rezolvarea ecuaţiilor integrale cu nucleu degenerat revine la rezolvarea unor sisteme algebrice.

Putem presupune că a_i, b_i, y şi f sînt uniform continue pe Ω şi că $a_1, \dots, a_m$ şi $b_1, \dots, b_m$ sînt liniar independente. Această presupunere nu restrînge generalitatea. Intr-adevăr, să presupunem că există $C_1, \dots, C_m$ astfel ca

$$C_1 a_1 + \dots + C_m a_m = 0$$

şi cel puţin o constantă dintre $C_1, \dots, C_m$ este diferită de zero. Fie $C_m \neq 0$. Atunci putem scrie $a_m = C_1^* a_1 + \dots + C_{m-1}^* a_{m-1}$. Luînd această expresie de forma nucleului obţinem

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sum_{i=1}^{m-1} a_i(x)b_i(y) + \sum_{i=1}^{m-1} C_i^* a_i(x)b_m(y) \\ &\sum_{i=1}^{m-1} a_i(x)[b_i(y) + C_i^* b_m(y)] = \sum_{i=1}^{m-1} a_i(x)b_i^*(y) \end{aligned}$$

Deci, a fost posibil să reprezentăm nucleul $K(x,y)$ ca sumă cu un număr mai mic, ca m, de produse de funcţii în x şi funcţii în y. Dacă a_i or b_i^*, $i = 1, \dots, m_1$, sînt din nou liniar dependente, putem reduce din nou nuumărul lor. In felul acesta putem presupune că $a_1, \dots, a_m$ şi $b_1, \dots, b_m$ sînt funcţii liniar independente în Ω.

Presupunem, acum, că ecuaţia integrală Fredholm, avînd nucleul (1.8), are o soluţie. Atunci

$$\varphi(x) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(y)\varphi(y)dy + f(x)$$

sau

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \int_\Omega b_i(y)\varphi(y)dy + f(x)$$

Luînd

$$\int_\Omega b_i(y)\varphi(y)dy = C_i \tag{1.9}$$

atunci funcţia φ are forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) + f(x) \tag{1.10}$$

Pentru a determina constantle C_i, substituim în (1.9) pe φ şi aceasta dă

$$\int_\Omega b_i(y)\Big[\sum_{j=1}^{m} C_j a_j(y) + f(y)\Big]dy = C_i.$$

Luînd

$$\int_\Omega b_i(y)a_j(y)dy = K_{ij}, \quad \int_\Omega b_i(y)f(y)dy = f_i$$

obţinem, din (1.10)

$$C_i = \sum_{j=1}^{m} K_{ij}C_j + f_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{1.11}$$

Deci oricărei soluţii a ecuaţiei (1.7) îi corespunde o soluţie a sistemului (1.11). In virtutea liniar independenţei funcţiilor $a_1, \dots, a_m$ există numai o soluţie. *Reciproc,* dacă sistemul de ecuaţii algebrice (1.11) are o soluţie, substituind aceasta în (1.10), obţinem o soluţie pentru ecuaţia integrală (1.7), deoarece orice pas făcut în trecerea de la ecuaţia (1.7) la (1.11) est inversabil.

Am redus astfel problema rezolvării ecuaţiei integrale (1.7) cu nucleu degenerat la rezolvarea unui sistem algebric (1.11).

• Dacă $\det(E - K) \neq 0$ sistemul algebric (1.11) are soluţie unică, deci ecuaţia integrală are soluţie unică.

• Dacă $\det(E - K) = 0$ atunci sistemul algebric are soluţie dacă şi numai dacă

$$\sum_{i=1}^{m} f_i C_i^* = 0,$$

unde $(C_1^*, \dots, C_m^*)$ este soluţie arbitrară a sistemului omogen

$$C^* = \sum_{i=1}^{m} K_{ij}C_i^*, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Exemplu : *Să se determine soluţia ecuaţiei integrale*

$$u(x) = x + 2\int_0^1 (x - t)u(t)dt$$

In acest caz $f(x) = x$, $a_1(x) = x$, $a_2(x) = -1$, $b_1(t) = 2$, $b_2(t) = 2t$ deci funcţiile a_1, a_2 şi b_1, b_2 sînt liniar independente. Notînd

$$C_1 = \int_0^1 b_1(t)u(t)dt, \quad C_2 = \int_0^1 b_2(t)u(t)dt$$

soluţia ecuaţiei integrale este de forma $u(x) = x + C_1 x - C_2$, unde (C_1, C_2) verifică sistemul de ecuaţii algebrice

$$2C_2 = 1, \quad \frac{2}{3}C_1 + 2C_2 = \frac{2}{3}.$$

Soluţia sistemului algebric este $C_1 = -1/2$, $C_2 = 1/2$, iar soluţia ecuaţiei integrale este dată de

$$u(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Fie acum

$$F : D_1 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}, \quad K : D_2 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$$

şi spaţiile

$$X = \Big\{\varphi \in C(I, R); (x, \varphi(x), \int_a^x K(x, \xi, \varphi(\xi))d\xi) \in D_1\Big\}, \quad Y = C(I, \mathbf{R})$$

Ecuaţia funcţională

$$g(\varphi) = 0 \tag{1.12}$$

unde $g : X \to Y$ este definită prin

$$[g(\varphi)](x) = F\Big(x, \varphi(x), \int_a^x K(x, \xi, \varphi(\xi))d\xi\Big) \tag{1.13}$$

se numeşte **ecuaţie integrală de tip Volterra**.

Prin particularizări ale aplicaţiilor F şi K obţinem următoarele cazuri particulare de ecuaţii Volterra

$$\int_a^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x) \tag{1.14}$$

$$\varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x). \tag{1.15}$$

Ecuaţia (1.14) se numeşte ecuaţie integrală de tip Volterra de speţă întîi, iar ecuaţia (1.15) este o ecuaţie integrală de tip Volterra de speţă a doua.

Inecuaţii operatoriale

Fie $f : X \to Y$, unde Y este înzestrat printre altele cu o structură de ordine. Fie dat $y \in Y$. Se cere să se determine elementele $x \in X$, astfel ca

$$f(x) \leq y. \tag{1.16}$$

Obţinem astfel o **inecuaţie operatorială.** Un element $x \in X$, care satisface (1.16) se numeşte soluţie a acestei inecuaţii. O clasă importantă de inecuaţii operatoriale sînt inecuaţiile diferenţiale şi inecuaţiile integrale. Iată cîteva exemple de asemenea inecuaţii:

$$y' + f(x, y, y') \leq 0 \tag{1.17}$$

$$y(x) \leq \int_a^b K(x, \xi, y(\xi))d\xi \tag{1.18}$$

$$y(x) \leq \int_a^x K(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{1.19}$$

Un rol important în cele ce urmează îl au inecuaţiile liniare de forma

$$y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(s)y(s)ds, \quad x \in [a, b] \tag{1.20}$$

unde funcţiile y, φ şi ψ sînt continue pe $[a, b]$ iar $\psi(x) \geq 0$, pentru $x \in [a, b]$.

LEMA **1.1 (Gronwall)** . *Dacă*

$$y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(s)y(s)ds, \quad x \in [a, b] \tag{1.21}$$

unde funcţiile y, φ, ψ *sînt continue pe* $[a, b]$ *iar* $\psi(x) \geq 0$, *pentru* $x \in [a, b]$, *atunci* y *verifică şi inegalitatea:*

$$y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \varphi(s)\psi(s) \exp\Big(\int_s^x \psi(\tau)d\tau\Big)ds, \quad \forall\ x \in [a, b].$$

Demonstraţie. Fie $u(x) = \displaystyle\int_a^x \psi(s)y(s)ds$. Din egalitatea $u'(x) = \psi(x)y(x)$, utilizînd ipotezele lemei rezultă

$$u'(x) \leq \psi(x)\varphi(x) + \psi(x)u(x).$$

Inmulţind ultima inegalitate cu $\exp\Big(-\int_a^x \psi(s)ds\Big)$ se obţine

$$\frac{d}{dx}\Big[u(x)\exp(-\int_a^x \psi(s)ds)\Big] \le \psi(x)\varphi(x)\exp\Big(-\int_a^x \psi(s)ds\Big).$$

Prin integrare rezultă

$$u(x) \le \int_a^x \psi(s)\varphi(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(\tau)d\tau\Big)ds, \quad \forall\ x \in [a,b]$$

de unde, conform cu (1.21), rezultă inegalitatea dorită. □

COROLARUL **1.1** *Dacă*

$$y(x) \le A + \int_a^x m(s)ds + \int_a^x \psi(s)y(s)ds, x \in [a,b] \tag{1.22}$$

unde funcţiile y, m şi ψ sînt continue pe $[a,b]$, iar $m \ge 0$ şi $\psi \ge 0$ pe $[a,b]$, $A \in \mathbf{R}$, atunci y verifică inegalitatea

$$y(x) \le \Big(A + \int_a^x m(t)dt\Big)\cdot\exp\Big(\int_a^x \psi(s)ds\Big).$$

Demonstraţie. Luînd $\varphi(x) = A + \int_a^x m(s)ds$, utilizînd lema Gronwall, obţinem

$$y(x) \le \varphi(x) + \int_a^x \varphi(s)\psi(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)ds.$$

Cum $\frac{d}{ds}\Big[\exp\int_s^x \psi(t)dt\Big] = -\psi(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)$ avem

$$\int_a^x \varphi(s)\psi(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)ds = -\int_a^x \varphi(s)\frac{d}{ds}\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)ds =$$

$$= -\varphi(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)\Big|_{s=a}^x + \int_a^x \varphi'(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)ds =$$

$$= -\varphi(x) + \varphi(a)\exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big) + \int_a^x m(s)\exp\Big(\int_s^x \psi(t)dt\Big)ds =$$

$$= -\varphi(x) + \varphi(a)\exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big) + \exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big)\cdot\int_a^x m(s)\exp\Big(-\int_a^s \psi(t)dt\Big)ds$$

$$\le -\varphi(x) + A\exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big) + \Big(\int_a^x m(s)ds\Big)\cdot\exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big) \le$$

$$\leq -\varphi(x) + \Big(A + \int_a^x m(s)ds\Big) \cdot \exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big)$$

deci

$$y(x) \leq \Big(A + \int_a^x m(s)ds\Big) \cdot \exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big), \quad \forall\ x \in [a,b].$$

□

Din cele de mai sus constatăm că putem reformula rezultatul anterior astfel:

Dacă

$$y(x) \leq \varphi(x) + \int_a^x \psi(t)y(t)dt, \ \ \forall\ x \in [a,b]$$

unde y, φ, ψ *sînt funcţii continue pe* $[a,b]$, $\psi \geq 0$ *iar* φ *este primitiva unei funcţii integrabile pozitive atunci*

$$y(x) \leq \varphi(x) \cdot \exp\Big(\int_a^x \psi(t)dt\Big), \quad \forall\ x \in [a,b].$$

1.2 Metode elementare de integrare a ecuaţiilor diferentiale

Ecuaţiile diferenţiale pentru care putem să indicăm o procedură *efectivă* pentru determinarea formei generale a soluţiei sînt puţine la număr. Vom analiza în cele ce urmează cîteva tipuri de asemenea ecuaţii.

Prima ecuaţie diferenţială a fost rezolvată o dată cu apariţia calculului integral în secolul XVII,

$$y' = f(x), \quad x \in I \tag{1.23}$$

unde f este o funcţie continuă. Soluţia ecuaţiei (1.23) este dată de formula

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s)da, \quad x \in I.$$

Intreg secolul XVIII şi o parte din secolul XIX a fost dominat de efortul unor matematicieni, printre care L. Euler (1707 – 1783), J. Bernoulli (1667 – 1748), J. Lagrange (1736 – 1813) şi alţii, de a da soluţii prin cuadraturi unui număr cît mai mare de ecuaţii diferenţiale. Astăzi această problemă prezintă un interes secundar. Cu toate acestea, considerăm necesar să prezentăm cîteva tipuri importante de ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi şi care intervin frecvent în exemple şi aplicaţii.

Ecuaţii cu variabile separabile

Numim astfel ecuaţiile diferenţiale de forma

$$y' = f(x)g(y), x \in (a,b) \tag{1.24}$$

unde funcţia f este continuă pe intervalul (a, b), iar funţia g este continuă şi diferită de zero pe un interval (c, d) (eventual nemărginit).

O soluţie a acestei ecuaţii este o funcţie $\varphi : (\alpha, \beta) \subset (a, b) \to (c, d)$ derivabilă şi astfel încît

$$\varphi'(x) = f(x) \cdot g(\varphi(x)), \quad \forall \ x \in (\alpha, \beta).$$

Incercăm, pentru început, să deducem informaţii suficiente despre φ pentru a putea indica un procedeu de determinare a soluţiei.

Deoarece φ este o soluţie, rezultă $\varphi'(x)/g(\varphi(x)) = f(x)$. Fie $G : (c, d) \to \mathbf{R}$ o primitivă a funcţiei $1/g$, deci G este derivabilă şi $G' = 1/g$; atunci $G \circ \varphi$ este derivabilă şi $(G \circ \varphi)' = (G' \circ \varphi)\varphi'$, adică

$$\frac{d}{dx}[G(\varphi(x))] = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{g(\varphi(x))}\,\varphi'(x) = f(x)$$

deci $(G \circ \varphi)' = f$. Prin urmare, dacă F este o primitivă a funcţiei f, în (α, β) avem $G(\varphi(x)) = F(x) + C$, C fiind o constantă.

Deoarece $1/g \neq 0$, funcţia G este strict monotonă, deci inversabilă şi prin urmare

$$\varphi = G^{-1} \circ (F + C).$$

Am obţinut despre φ informaţii care o individualizează pînă la o constantă arbitrară. Să arătăm acum că reciproc, orice funcţie φ din familia de mai sus este o soluţie a ecuaţiei (1.24). Intr-adevăr, dacă $\varphi(x) = G^{-1}(F(x)+C)$, rezultă $G(\varphi(x)) = F(x) + C$ şi derivînd avem $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(x)$, adică $\varphi'(x)/g(\varphi(x)) = f$, deci $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$ şi φ este soluţie. Intervalul de definiţie al funcţiei φ este format din mulţimea punctelor $x \in (a, b)$ astfel încît $F(x)+C$ se află în domeniul de definiţie al funcţiei G^{-1}, deci domeniul valorilor lui G, adică între $\lim_{y\to c} G(y)$ şi $\lim_{y\to d} G(y)$. Iată, acum, regula de integrare a ecuaţiilor diferenţiale cu variabile separabile.

- Se împart ecuaţiile (1.24) cu $g(y)$ şi se obţine ecuaţia

  $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

  care are în primul său membru numai variabila y, iar în al doilea membru numai variabila x.

- Se integrează cei doi membri adăugînd celui de al doilea o constantă.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$y' = (y - 2)tgx, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Procedînd ca mai sus, scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{dy}{y-2} = tgx \cdot dx$$

şi prin integrare obţinem

$$ln|y-2| = -ln|cosx| + C_1.$$

Rezultă pentru soluţia $y(x)$ formula

$$|(y(x)-2)cosx| = C, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Prin urmare, funcţia $(y(x)-2)\cos x$ are valoare constantă pe intervalul $(0, \pi/2)$ şi deci soluţia generală este dată de

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} + 2, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ecuaţia omogenă

Să considerăm acum ecuaţia diferenţială

$$y' = h(\frac{y}{x}) \tag{1.25}$$

unde h este o funcţie continuă pe intervalul (c, d). Ecuaţia (1.25) se numeşte **omogenă.** Deoarece funcţia $f(x, y) = h(y/x)$ este omogenă de gradul zero (reamintim că în general $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ este o funcţie omogenă de gradul α dacă $f(tx) = t^\alpha f(x)$).

Fie φ o soluţie a ecuaţiei (1.25) definită pe un interval (α, β) ce nu conţine punctul $x = 0$. Atunci pentru $x \in (\alpha, \beta)$ avem $\varphi(x)/x \in (c, d)$ şi $\varphi'(x) = h(\varphi(x)/x)$. Să notăm $u(x) = \varphi(x)/x$ şi să observăm că funcţia $u : (\alpha, \beta) \to (c, d)$ este derivabilă şi

$$u'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left[\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\left[h\Big(\frac{\varphi(x)}{x}\Big) - \frac{\varphi(x)}{x}\right] = \frac{1}{x}\left[h(u(x)) - u(x)\right].$$

Rezultă că u este soluţia unei ecuaţii cu variabile separabile şi conform cu cele prezentate anterior, funcţia u poate fi determinată pînă la o constantă, ceea ce implică posibilitatea de a determina soluţia φ. Rămîne numai să observăm că orice soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile asociate generează o soluţie a ecuaţiei omogene date. Intr-adevăr, dacă

$$u'(x) = \frac{1}{x}\Big[h(u(x)) - u(x)\Big] \quad \text{şi} \quad \varphi(x) = xu(x)$$

atunci

$$\varphi'(x) = u(x) + xu'(x) = u(x) + h(u(x)) - u(x) = h(u(x)) = h\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right).$$

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$xy' = y + x, \quad x > 0.$$

Ecuaţia este omogenă deoarece

$$y' = \frac{y}{x} + 1.$$

Făcînd substituţia $y = u \cdot x$ obţinem $u'x + u = u + 1$ sau $u' = 1/x$ care are soluţia

$$u(x) = \ln x + C.$$

Soluţia căutată a ecuaţiei diferenţiale este dată de

$$y(x) = x\big(\ln x + C\big).$$

• Trebuie să menţionăm faptul că diverse ecuaţii de ordinul întîi, chiar dacă nu au forma indicată (1.25) se reduc prin substituţii simple la ecuaţii cu variabile separabile sau omogene. Să considerăm ecuaţia

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{1.26}$$

unde a, b, c, a_1, b_1, c_1 sînt constante

i) Să presupunem că $c^2 + c_1^2 = 0$, adică ecuaţia (1.26) are forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by}{a_1x + b_1y}\right)$$

care este o ecuaţie omogenă. Cu substituţia $y = xz$ ecuaţia de mai sus se transformă în ecuaţia

$$xz' = f\Big(\frac{a + bz}{a_1 + b_1z}\Big) - z$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

ii) Dacă $c^2 + c_1^2 \neq 0$ şi $ab_1 - a_1 b \neq 0$, dreptele

$$(D) : ax + by + c = 0, \quad (D_1) : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

se intersectează in punctul (x_0, y_0). Făcînd schimbarea de variabilă şi de funcţie

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

obţinem ecuaţia

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1 u + b_1 v}\right)$$

care este de forma de mai sus, deci cu schimbarea de funcţie $v = z \cdot u$ se obţine o ecuaţie cu variabilele separabile.

iii) Dacă $c^2 + c_1^2 \neq 0$ şi $ab_1 - a_1 b = 0$ dreptele

$$(D) : ax + by + c = 0, \quad D_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

sînt paralele. Din $ab_1 - a_1 b = 0$ rezultă $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = k$, deci

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + c_1}\right); \tag{1.27}$$

dacă facem schimbarea de funcţie $ax + by = z$, ecuaţia se transformă în

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f\left(\frac{z + c}{kz + c_1}\right)$$

care este o ecuaţie cu variabilele separabile dacă $bf\left(\dfrac{z + c}{kz + a}\right) + a \neq 0$, a cărei soluţie este de forma $x + C = \varphi(z)$, sau $x + C = \varphi(ax + by)$, unde φ este o primitivă pentru funcţia $z \to bf\left(\dfrac{z + c}{kz + c_1}\right) + a$.

Exemple :

1) *Să se integreze ecuaţia*

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}, \quad 2y - x \neq 0.$$

Facem schimbarea de funcţie $y = u \cdot x$, de unde $y' = u' \cdot x + u$, deci

$$u' \cdot x + u = \frac{u - 2}{2u - 1}, \quad \text{sau} \quad u' \cdot x = \frac{-2u^2 + 2u - 2}{2u - 1}$$

care este cu variabile separabile şi care are soluţia

$$\ln |x| + \frac{1}{2} \ln |u^2 - u + 1| + C.$$

Revenind la variabila iniţială obţinem integrala generală

$$y^2 - xy + x^2 = C$$

care reprezintă o familie de elipse cu centrul în origine.
2) *Să se integrexe ecuaţia*

$$y' = -\frac{2(x-2y+1)}{5x-y-4}.$$

Dreptele $x-2y+1=0$, $5x-y-4=0$ se intersectează în punctul $(1,1)$. Efectuînd schimbarea de funcţie şi variabilă $x = u+1$, $y = v+1$ ecuaţia se transformă în

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2u-4v}{5u-v}.$$

Făcînd schimbarea de funcţie $v = u \cdot z$ obţinem $\frac{dv}{du} = u\frac{dz}{du} + z$ şi înlocuind în ecuaţie se obţine

$$\frac{dz}{du} \cdot u + z = -\frac{2-4z}{5-z} \quad \text{sau} \quad \frac{dz}{du} = \frac{z^2-z-2}{u(5-z)}$$

care este cu variabile separabile. Prin integrare se obţine

$$C|u| = \frac{|z-2|}{(z+1)^2}.$$

Dacă revenim la variabilele iniţiale $u = x-1$, $z = (y-1)/(x-1)$, obţinem integrala generală a ecuaţiei date

$$y - 2x + 1 = C(y+x-2)^2.$$

3) *Să se integreze ecuaţia*

$$y' = \frac{x-2y+9}{3x-6y+19}.$$

Dreptele $x-2y+9=0$, $3x-6y+19=0$ sînt paralele. Făcînd schimbarea de funcţie $x-2y=z$ se obţine $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z'$, care înlocuite în ecuaţia iniţială dau $z' = \frac{z+1}{3z+19}$. Soluţia generală a ultimei ecuaţii este dată de

$$3z + 16\ln|z+1| = x + 2C$$

sau pentru ecuaţia iniţială

$$8\ln|x-2y+1| + x - 3y = C.$$

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întîi

O clasă deosebit de importantă de ecuaţii diferenţiale pentru care soluţiile pot fi găsite prin cuadraturi o reprezintă ecuaţiile de forma

$$y' = a(x)y + b(x). \tag{1.28}$$

In cazul $b(x) = 0$, ecuaţia este cu variabile separabile şi admit evident soluţia

$$y(x) = C \cdot \exp(F(x))$$

unde F este o primitivă a funcţiei a. Să observăm că dacă a este o funcţiei continuă pe intervalul I, iar $x_0 \in I$, o primitivă în I este dată de

$$x \to \int_{x_0}^{x} a(s)ds,$$

deci o soluţie a ecuaţiei diferenţiale omogene este dată de

$$y(x) = C \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right).$$

Pentru $x = x_0$ deducem $C = y(x_0)$, deci putem scrie soluţia y sub forma

$$y(x) = y(x_0) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right).$$

Pentru a obţine forma soluţiei în cazul $b \neq 0$, să considerăm o soluţie φ oarecare definită pe I şi să definim funcţia ψ prin

$$\psi(x) = \varphi(x) \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big).$$

Funcţia ψ astfel definită este derivabilă şi avem

$$\psi'(x) = \varphi'(x) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right) - \varphi(x)a(x) \exp(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds) =$$

$$= \Big[a(x)\varphi(x) + b(x)\Big] \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right) - \varphi(x)a(x) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big) =$$

$$= b(x) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big).$$

Deducem

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(t) \exp\left(-\int_{x_0}^{t} a(s)ds\right) dt.$$

Pe de altă parte $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$, $\varphi(x) = \psi(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\right)$ deci

$$\varphi(x) = \varphi(x_0)\exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big) + \int_{x_0}^{x} b(t)\exp\Big(\int_{t}^{x} a(s)ds\Big)dt. \qquad (1.29)$$

Am obţinut, astfel, o formulă care individualizează complet soluţia φ cu ajutorul valorii ei într-un punct x_0.

Se verifică, cu uşurinţă, că funcţia φ definită prin formula (1.29) este soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.28).

Observaţii.

1) Metoda folosită pentru obţinerea soluţiei (1.29) se numeşte *metoda variaţiei constantelor* pentru că, scriind :

$$\varphi(x) = \psi(x)\exp(\int_{x_0}^{x} a(s)ds)$$

am considerat **soluţia generală** a ecuaţiei omogene (pentru $b = 0$), în care constanta C am înlocuit-o cu funcţia $\psi(x)$.

2) Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare este o funcţie de forma

$$y = \varphi(x) + C\psi(x), \qquad (1.30)$$

adică o familie de curbe care depind liniar de o constantă arbitrară. Reciproc, orice familie de curbe care depind liniar de o constantă arbitrară verifică o ecuaţie liniară de ordinul întîi. Intr-adevăr, $y' = \varphi'(x) + C\psi'(x)$ şi dacă eliminăm pe C între această relaţie şi relaţia (1.30) obţinem

$$\frac{y - \varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y' - \varphi'(x)}{\psi'(x)}$$

adică

$$y' = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}y + \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\psi(x)\psi'(x)}$$

care este o ecuaţie liniară de ordinul întîi.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$y' + 2xy = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Integrînd ecuaţia omogenă $y' + 2xy = 0$ obţinem soluţia $y = Ce^{-x^2}$, unde C este o constantă arbitrară. Pentru integrarea ecuaţiei neomogene folosim metoda variaţiei constantelor

$$y = C(x)e^{-x^2}, \quad y' = \left[C'(x) - 2xC(x)\right]e^{-x^2},$$

înlocuim în ecuaţia dată şi obţinem

$$C'(x) = 1, \quad \text{deci} \quad C(x) = x + A_1$$

iar soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = (x + A_1)e^{-x^2}, \quad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Ecuaţii de tip Bernoulli

La ecuaţii diferenţiale liniare se reduc ecuaţiile de forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha, \quad a, b : I \to \mathbf{R} \tag{1.31}$$

continue, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$, numite *ecuaţii Bernoulli.*

Pentru a deduce forma soluţiei, considerăm $\varphi : I \to \mathbf{R}$ derivabilă strict pozitivă soluţie a ecuaţiei (1.31), adică

$$\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(x)^\alpha$$

şi fie $u(x) = \varphi(x)^{1-\alpha}$. Rezultă u derivabilă şi

$$u'(x) = (1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha} \cdot \varphi'(x) = \frac{1-\alpha}{\varphi(x)^\alpha}\Big[a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi(x)^\alpha\Big] =$$

$$= (1-\alpha)[a(x)u(x) + b(x)],$$

deci u este o soluţie a unei ecuaţii liniare. Reciproc, dacă u este soluţie a ecuaţiei liniare

$$u'(x) = (1-\alpha)[a(x)u(x) + b(x)] \quad \text{şi} \quad u(x) > 0$$

în I, atunci $\varphi(x) = u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ este soluţie a ecuaţiei (1.31). Intr-adevăr φ este derivabilă şi

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-\alpha}u'(x) \cdot u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = [a(x)u(x) + b(x)]u(x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} =$$

$$= a(x)u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\left(u(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^\alpha = a(x)\varphi(x) + b(x)[\varphi(x)]^\alpha.$$

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$\sqrt{x^3}\,y' - \sqrt{x}\,y + y^2 = 0, \quad x > 0$$

şi să se determine o soluţie particulară care trece prin punctul $A(1,2)$.

Impărţind ecuaţia dată cu $\sqrt{x^3}$ se obţine

$$y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{\sqrt{x^3}}y^2$$

care este o ecuaţie Bernoulli. Făcînd substituţie $z = \frac{1}{y}$, $-\frac{y'}{y^2} = z'$ şi ecuaţia se transformă în ecuaţia liniară

$$z' = -\frac{1}{x}z + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

a cărei soluţie este $z = \frac{1}{x}\left(C + 2\sqrt{x}\right)$, deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = \frac{x}{C + 2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

Pentru a determina soluţia particulară cerută înlocuim coordonatele punctului $A(1,2)$ în integrala generală şi determinăm astfel pe $C = -3/2$, soluţia particulară este

$$y(x) = \frac{2x}{-3 + 4\sqrt{x}}, \quad x > \frac{9}{16}.$$

Ecuaţii diferenţiale de tip Riccati (1676 - 1754).

Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale cu acest nume este dată de

$$y' = a(x)y + b(x)y^2 + c(x), \quad x \in I \tag{1.32}$$

unde a, b, c sînt funcţii continue pe intervalul I. Ecuaţia (1.32) nu este, în general, integrabilă prin cuadraturi. Totuşi, în cazurile în care printr-un mijloc oarecare se găseşte o soluţie particulară, integrarea devine posibilă.

Fie φ_0 o soluţie a ecuaţiei (1.32), iar φ o soluţie arbitrară pentru aceiaşi ecuaţie. Pentru funcţia $\psi = \varphi - \varphi_0$ avem

$$\begin{gathered}
\psi'(x) = \varphi'(x) - \varphi_0'(x) = \\
= a(x)\varphi(x) + b(x)\varphi^2(x) + c(x) - [a(x)\varphi_0(x) + b(x)\varphi_0^2(x) + c(x)] = \\
= b(x)[\varphi(x) - \varphi_0(x)][\varphi(x) + \varphi_0(x)] + a(x)[\varphi(x) - \varphi_0(x)] = \\
= b(x)\psi(x)[\psi(x) + 2\varphi_0(x)] + a(x)\psi(x) = \\
= b(x)\psi^2(x) + [a(x) + 2b(x)\varphi_0(x)]\,\psi(x)
\end{gathered}$$

deci ψ este soluţia unei ecuaţii Bernoulli cu $\alpha = 2$, prin urmare se poate construi soluţia φ a ecuaţiei Riccati.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$xy' + y^2 - 4y + 3 = 0,$$

şi să se determine o soluţie care trece prin $A(1, 2)$.

Se observă că funcţia $x \to \varphi_0(x) = 1$ este soluţie a ecuaţiei date. Dacă φ este o soluţie oarecare a ecuaţiei date atunci funcţia $\psi = \varphi - \varphi_0$ verifică ecuaţia

$$\psi' = -\frac{1}{x}\psi^2 + \frac{2}{x}\psi.$$

Făcînd substituţia $z = \dfrac{1}{\psi}$ obţinem ecuaţia

$$z' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x}$$

cu soluţia generală $z = \dfrac{1}{x^2}\left(C + \dfrac{x^2}{2}\right)$. Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = 1 + \frac{2x^2}{2C + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ca soluţia să treacă prin punctul $A(1, 2)$; avem $2 = 1 + \dfrac{2}{2C+1}$, deci $C = \dfrac{1}{2}$ adică soluţia căutată este

$$y(x) = 1 + \frac{2x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ecuaţii diferenţiale de tip Lagrange

Numim astfel ecuaţiile

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{1.33}$$

unde φ şi ψ sînt funcţii continuu diferenţiabile pe un interval din $\mathbf{R}$ şi $\varphi(p) \neq p$ pentru toţi p.

Presupunînd că y este soluţie a ecuaţiei (1.33) pe intervalul $I \subseteq \mathbf{R}$, rezultă prin derivare

$$y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + \psi(y')y'' \tag{1.34}$$

unde $y'' = d^2y/dx^2$. Notînd cu p funcţia y', din (1.34) rezultă

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \tag{1.35}$$

care este o ecuaţie liniară în x. Rezolvînd această ecuaţie găsim pentru x o expresie de forma

$$x = A(p, C) \tag{1.36}$$

unde C este o constantă arbitrară. Din ecuaţia (1.33) se obţine atunci

$$y = A(p, C)\varphi(p) + \psi(p). \tag{1.37}$$

Interpretînd p drept un parametru, (1.36) şi (1.37) devin ecuaţiile parametrice ale necunoscutei y care verifică (1.33). Cu alte cuvinte, folosind metoda indicată mai sus, soluţia ecuaţiei (1.33) se obţine sub formă parametrică.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$y = x(y')^2 + (y')^3.$$

Notăm $y' = p$, deci $y = xp^2 + p^3$; derivînd în raport cu x,

$$p = 2xp\frac{dp}{dx} + p^2 + 3p^2\frac{dp}{dx}$$

şi obţinem ecuaţia liniară

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2p}{p^2 - p}x - \frac{3p^2}{p^2 - p}, \quad p^2 - p \neq 0$$

de unde

$$\begin{cases} x & = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left[C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right] \\ y & = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\left[C - \dfrac{2}{3}p^3 + p^2\right] + p^3 \end{cases}$$

care reprezintă soluţia generală.

Pentru $p^2 - p = 0$ avem două situaţii:

a) $p = 0$, $y = 0$; dreapta $y = 0$ este o integrală singulară;

b) pentru $p \to 1$ şi $C \neq -1/3$, $|x| \to \infty$, deci dreapta $y = x + 1$ este o direcţie asimptotică a curbelor integrale care au $C \neq -1/3$. Dacă $C = -1/3$ curba integrală se descompune în dreapta $y = x + 1$ şi o conică.

Ecuaţia de tip Clairaut (1713 - 1765).

Ecuaţia de tipul

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1.38}$$

este o ecuaţie de tip Clairaut. Acest tip de ecuaţie este un caz particular de ecuaţie Lagrange si anume cazul cînd $\varphi(p) = p$.

Prin derivarea ecuaţiei (1.38) obţinem

$$y' = xy'' + y' + \psi'(y')y''$$

de unde rezultă

$$y''(x + \psi'(y')) = 0. \tag{1.39}$$

Prin urmare, avem două tipuri de soluţii. Prima este definită de $y'' = 0$ care, prin integrare dă

$$y(x) = C_1x + C_2 \tag{1.40}$$

unde C_1 şi C_2 sînt constante arbitrare. De fapt, introducînd (1.40) în (1.38) se constată că C_1 şi C_2 nu sînt independente ci $C_2 = \psi(C_1)$. Prin urmare

$$y = C_1x + \psi(C_1) \tag{1.41}$$

unde C_1 este o constantă arbitrară.

O altă categorie de soluţii se obţine din (1.39)

$$x + \psi'(p') = 0. \tag{1.42}$$

Procedînd ca la ecuaţia lui Lagrange, notăm $y' = p$ şi obţinem din (1.42) ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -\psi'(p)p + \psi(p) \end{cases} \tag{1.43}$$

ale unei soluţii pentru ecuaţia Clairaut.

Soluţia sub forma (1.41) este **soluţie generală** a ecuaţiei lui Clairaut, iar soluţia sub forma (1.43) este o **soluţie singulară** a ecuaţiei lui Clairaut.

Observaţie. Soluţia generală a ecuaţiei Clairaut este o familie de drepte ce depind de un parametru C. Eliminînd pe C între ecuaţia

$$y = Cx + \psi(C)$$

şi derivata în raport cu C

$$x + \psi'(C) = 0$$

sau, ceea ce este acelaşi lucru, luînd pe C parametru, obţinem curba

$$x = -\psi'(C)$$
$$y = -C\psi'(C) + \psi(C)$$

care este integrala singulară. Prin urmare integrala singulară este înfăşurătoarea familiei de curbe reprezentată de integrala generală.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$yy' = x\,(y')^2 + 1.$$

Ecuaţia este de tip Clairaut, deoarece poate fi scrisă $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$.

Soluţia generală este dată de familia de drepte

$$y = Cx + \frac{1}{C}. \tag{1.44}$$

Integrala singulară are ecuaţiile parametrice $x = \dfrac{1}{p^2}, \quad y = \dfrac{2}{p}$; eliminînd p, obţinem parabola $y^2 = 4x$ care este înfăşurătoarea dreptelor reprezentată de soluţia generală. Rezolvind în raport cu C ecuaţia (1.44) obţinem $C^2x - Cy + 1 = 0$.

Soluţiile C_1, C_2 sînt reale dacă $y^2 - 4x > 0$, deci dreptele reprezentate de integrala generala, nu intersectează parabola, care este o curbă convexă.

Ecuaţii de tipul $y = f(x, y')$.

Notăm $y' = p$, deci

$$y = f(x, p) \tag{1.45}$$

şi derivînd în raport cu x, ţinînd seama că p este o funcţie de x; obţinem

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) \cdot \frac{dp}{dx} \tag{1.46}$$

care este o ecuaţie rezolvată în raport cu $\dfrac{dp}{dx}$. Dacă putem întegrarea pe (1.46) avem

$$p = \varphi(x, C)$$

care introdusă în (1.45), ne conduce la soluţia generală căutată

$$y(c) = f(x, \varphi(x, C)).$$

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}.$$

Luînd $y' = p$, avem $y = p^2 - px + x^2/2$, care derivata în raport cu x şi ţinînd seama că p este funcţie de x obţinem

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - x\frac{dp}{dx} - p + x$$

sau

$$(2p - x)\Big(1 - \frac{dp}{dx}\Big) = 0.$$

Avem două posibilităţi:
a) $\dfrac{dp}{dx} = 1$ sau $p+C = x$, pe care dacă o introducem în ecuaţia dată obţinem soluţia generală

$$y(x) = (x - C)^2 - x(x - C) + \frac{1}{2}x^2$$

sau

$$y(x) = -Cx + C^2 + \frac{1}{2}x^2, \quad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

b) $x = 2p$, care cu $y = p^2 - px + \dfrac{1}{2}x^2$ ne dă

$$x = 2p, \quad y = p^2, \qquad p \in \mathbf{R}$$

care este soluţia singulară.

Se observă ca o soluţia singulară este înfăşurătoarea familiei de parabole reprezentate de soluţia generală.

Ecuaţii de tipul $x = f(y, y')$.

Notăm $y' = p$, deci

$$x = f(y, p) \tag{1.47}$$

şi derivînd în raport cu y, considerînd pe x şi p funcţia de y; avem

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y}(y, p) + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy} \tag{1.48}$$

deoarece $\dfrac{dx}{dy} = 1/(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{1}{p}$.

Dacă putem integra pe (1.48), care este o ecuaţie diferenţială în p şi y, explicită în raport cu $\dfrac{dp}{dy}$, obţinem

$$p = \varphi(y, C). \tag{1.49}$$

Dacă introducem (1.49) în (1.47) rezultă soluţia generală căutată

$$x = f(y, \varphi(y, C)).$$

Exemplu: Să se integreze ecuaţia

$$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0. \tag{1.50}$$

Inlocuind pe y' cu p, obţinem $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$. Avem

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}. \tag{1.51}$$

Derivînd în raport cu y şi înlocuind $\dfrac{dx}{dy}$ cu $1/p$ obţinem

$$\frac{1}{p} = \frac{2p}{4y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\cdot\frac{dp}{dy}$$

sau

$$\left(p^3 - 4y^2\right)\left[2y\frac{dp}{dy} - p\right] = 0.$$

Avem două cazuri de considerat şi anume:
a) $2y\dfrac{dp}{dy} - p = 0$, care integrată dă $p = C\sqrt{y}$, şi apoi inlocuim pe p astfel obţinut în ecuaţia dată, rezultată integrala generală

$$C^3y^{3/2} - 4Cxy^{3/2} + 8y^2 = 0$$

sau $8\sqrt{y} = 4Cx - C^3$, sau $y^2 = C_1(x - C_1)^2, \quad 4C_1 = C^2$.
b) $4y^2 - p^3 = 0$; care înlocuită în (1.50), obţinem soluţia

$$y = \frac{4}{27}x^3$$

care reprezintă integrala singulară.

Intr-adevăr integrala generală este formată dintr-o familie de conice, în timp ce soluţia singulară este o parabolă cubică.

Prin eliminarea lui p între ecuaţiile (1.50) şi $4y^2 - p^3 = 0$ mai obţinem şi $y = -\dfrac{4}{27}x^3$ care nu este soluţie.

Ecuaţii de forma $F(x, y, y') = 0$.

Analizăm în cele ce urmează cazurile cînd o ecuaţie de ordinul întîi de forma

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1.52}$$

poate fi integrată prin cuadraturi.

Presupunem că $F : I \times I_1 \times I_2 \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ este de clasa C^1. O funcţie $\varphi : I' \subset I \to I_1$ derivabilă cu $\varphi' : I' \to I_2$ şi $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \ \forall\ x \in I'$ este soluţie a ecuaţiei (1.52). Dacă se dă un punct (x_0, y_0, z_0) astfel ca $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, din teorema funcţiilor implicite există o funcţie f de clasă C^1 definită într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) cu valori într-o vecinătate a lui z astfel încît

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad f(x_0, y_0)) = z_0.$$

Dacă φ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y' = f(x, y)$ definită de funcţia f, avem $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, deci $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ şi φ este soluţia problemei date.

Rezultă că putem reduce,cel puţin local problema găsirii soluţiilor ecuaţiei $F(x, y, y') = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \neq 0$, la problema găsirii soluţiei unei ecuaţii diferentiale scrise în forma normală. Deoarece această cale presupune rezolvarea prealabilă a unei probleme de funcţii implicite, ea nu este în general convenabilă în studiul unor ecuaţii particulare cînd poate exista speranţa unor procedee alternative mai simple pentru găsirea soluţiilor.

In cele ce urmează vom considera trei procedee alternative care se dovedesc uneori utile.

1. Primul procedeu reduce găsirea soluţiilor unei ecuaţii de forma considerată la (1.52) la găsirea soluţiilor unui sistem de trei ecuaţii diferenţiale.

Fie (x_0, y_0, z_0) astfel ca $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi presupunem că $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (F de clasă C^1). Formăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= z\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) - z\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \end{aligned} \quad . \tag{1.53}$$

Presupunem că reuşim să găsim (α, β, γ) o soluţie a acestui sistem, astfel încît

$$\alpha(0) = x_0, \quad \beta(0) = y_0, \quad \gamma(0) = z_0.$$

Atunci, deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ este o funcţie continuă, există un interval ce conţine originea astfel ca pentru t în acest interval să avem

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \neq 0$$

deci $\dfrac{d\alpha}{dt}(t) \neq 0$; de unde rezultă că funcţia α este inversabilă în acest interval, fie τ inversa sa. Avem $\alpha(\tau(x)) = x$ şi $\tau(\alpha(t)) = t$. Fie

$$\varphi(x) = \beta(\tau(x)), \qquad \psi(x) = \gamma(\tau(x)).$$

Funcţia φ este soluţie a problemei date cu $\varphi(x_0) = y_0$ şi $\varphi'(x_0) = z_0$. Pentru a demonstra acest lucru, observăm mai întîi că $F(\alpha(t)), \beta(t), \gamma(t)) \equiv 0$. Intr-adevăr, pentru $t = 0$, avem $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ şi apoi conform teoremei de derivare a funcţiilor compuse avem:

$$\frac{d}{dt}F\left(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\left(\alpha(t), \beta(t), \gamma(x)\right)\frac{d\alpha(t)}{dt} +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y}\left(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\right)\frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\right)\frac{d\gamma}{dt}(t) \equiv 0.$$

Rezultă că funcţia $t \to F(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ este o constantă C şi cum pentru $t = 0$ avem $C = F(\alpha(0), \beta(0), \gamma(0)) = F(x_0, y_0, z_0) = 0$ rezultă că funcţia $t \to F(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ este identic nulă. Luînd în relaţia obţinută $t = \tau(x)$, deducem

$$F(\alpha(\tau(x)), \beta(\tau(x)), \gamma(\tau(x)) = F(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0.$$

Rămîne să arătăm că $\psi(x) = \varphi'(x)$. Avem

$$\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x) = \frac{d\beta}{dt}(\tau(x))\tau'(x) = \gamma(\tau(x))\frac{\partial F}{\partial z}(\alpha(\tau(x)), \beta(\tau(x)), \gamma(x))\tau'(x) =$$

$$= \psi(x)\frac{d\alpha}{dt}(\tau(x))\tau'(x) = \psi(x).$$

In acest fel problema găsirii soluţiilor ecuaţiei $F(x, y, y') = 0$ a fost redusă la problema găsirii soluţiilor unui sistem de trei ecuaţii diferenţiale scris sub forma normală şi la o problemă de inversare a unei funcţii.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

In acest caz $F(x, y, z) = x\varphi(z) - y + \psi(z)$. Sistemul asociat este

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} & = x\varphi'(z) + \psi'(z) \\ \dfrac{dy}{dt} & = z(x\varphi'(z) + \psi'(z)) \\ \dfrac{dz}{dt} & = -\varphi(z) + z \end{cases}$$

Acest sistem se poate integra prin cuadraturi, deoarece ultima ecuaţie este cu variabile separabile. Apoi cu z astfel găsit, prima ecuaţie devine o ecuaţie liniară, iar dacă x şi z au fost determinate, aflarea lui y se reduce la aflarea unei primitive.

2) In ipoteza $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, putem reduce problema găsirii soluţiilor ecuaţiei (1.52) la problema găsirii unui sistem de doua ecuaţii diferenţiale scris sub forma normală. Să considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + z\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z).} \end{cases} \tag{1.54}$$

Să presupunem că am găsit $(\varphi(x), \psi(x))$ o soluţie a sistemului (1.54), astfel încît

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \psi(x_0) = z_0, \quad F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Atunci φ este soluţie a ecuaţiei (1.52). Intr-adevăr, avem $\varphi'(x) = \psi(x)$,

$$\frac{d}{dx}[F(x, \varphi(x), \psi(x)))] = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi'(x) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x))\psi(x) -$$

$$-\frac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x)) \cdot \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x), \psi(x)) + \psi(x)\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x), \psi(x)))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, \varphi(x), \psi(x))} \equiv 0$$

deci funcţia $x \to F(x, \varphi(x), \psi(x))$ este o constantă şi cum această constantă este nulă pentru $x = x_0$, rezultă $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$ adică

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0.$$

• In anumite cazuri este convenabil să considerăm alt sistem asociat şi anume, presupunînd

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + z\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \neq 0$$

considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + z\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)} \\ \dfrac{dy}{dz} = -\dfrac{z\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + z\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}. \end{cases} \tag{1.55}$$

Fie $\xi,\eta)$ o soluţie a acestui sistem cu

$$\xi(z_0) = x_0, \quad \eta(z_0) = y_0, \quad F(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

In plus dacă admitem $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, rezultă $\dfrac{d\xi}{dz} \neq 0$ deci funcţia ξ este inversabilă. Dacă ζ este inversa sa, avem $\xi(\zeta(x) \equiv x$ şi $\zeta(\xi(z)) = z$. Fie $\varphi(x) = \eta(\zeta(x))$. Avem

$$\varphi'(x) = \frac{d\eta}{dz}(\zeta(x))\zeta'(x) =$$

$$= -\frac{\zeta(x)\dfrac{\partial F}{\partial z}(\xi(\zeta(x)),\eta(x)),\zeta(x))\zeta'(x)}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(\xi(\zeta(x),\eta(\zeta(x)),\zeta(x)) + \zeta(x) + \zeta(x)\dfrac{\partial F}{\partial y}(\xi\zeta(x)),\eta\zeta(x),\zeta(x))}$$

$$= \zeta(x)\frac{d}{dz}(\zeta(x))\zeta'(x) = \zeta(x).$$

Observăm că $\zeta(\xi(z_0)) = z_0$, deci $\zeta(x_0) = z_0$, $\varphi(x_0) = \eta(\zeta(x_0)) = \eta(z_0) = y_0$ şi deci $F(x_0,\varphi(x_0),\zeta(x_0)) = 0$. Să aratăm că

$$\frac{d}{dx}F(x,\varphi(x),\zeta(x)) \equiv 0.$$

Avem, într-adevăr $\quad \dfrac{d}{dx}F(x,\varphi(x),\zeta(x)) =$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x),\zeta(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x),\zeta(x))\varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\varphi(x),\zeta(x))\zeta'(x) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x),\zeta(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x),\zeta(x))\zeta(x) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,\varphi(x),\zeta(x))\zeta'(x) =$$

$$-\frac{\partial F}{\partial z}(\xi(\zeta(x)),\eta(\zeta(x)),\zeta(x))\cdot\frac{1}{\dfrac{d\xi}{dz}(\zeta(x))} + \frac{\partial F}{\partial z}(\xi(\zeta(x)),\eta(\zeta(x)),\zeta(x))\cdot\zeta'(x)) = 0$$

deoarece $\dfrac{d\xi}{dz}(\zeta(x))\zeta'(x) \equiv 1$, deci $\xi'(x) = 1/\dfrac{d\xi}{dz}(\zeta(x))$. Deducem $F(x, \varphi(x), \zeta(x)) \equiv 0$, deci

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$$

şi φ este soluţie a ecuaţiei (1.52).

3) Să indicăm acum un procedeu care permite reducerea problemei (1.52) la găsirea soluţiei unei singure ecuaţii diferenţiale scrise în forma normală.

Să presupunem că am găsit funcţiile f, g, h definite pe un domeniu D din $\mathbf{R}^2$ cu valori reale de clasă C^1, astfel încît

$$F(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \equiv 0.$$

Presupunînd $hf'_v - g'_v \neq 0$, considerăm ecuaţia

$$\frac{dv}{du} = \frac{g'_u - hf'_u}{hf'_v - g'_v}. \tag{1.56}$$

Fie $(u_0, v_0) \in D$, α o soluţie a ecuaţiei (1.56) cu $\alpha(u_0) = v_0$ şi presupunem că

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} f'_u, & f'_v \\ g'_u, & g'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

în (u_0, v_0), deci într-o vecinatate a acestui punct. Funcţia β definită prin $\beta(u) = f(u, \alpha(u))$ este inversabilă, $\beta(u_0) = f(u_0, \alpha(u_0)) = f(u_0, v_0) = x_0$. Avem

$$\beta'(u) = f'_u(u, \alpha(u)) + f'_v(u, \alpha(u))\alpha'(u) =$$

$$= f'_u(u, \alpha(u)) + f'_v(u, \alpha(u)) \cdot \frac{g'_u(u, \alpha(u)) - f'_u(u, \alpha(u))h(u, \alpha(u)}{f'_v(u, \alpha(u)) \cdot h(u, \alpha(u)) - g'_v(u, \alpha(u)} =$$

$$= \frac{f'_u f'_v h - f'_u g'_v + f'_v g'_u - f'_v f'_u h}{f'_v h - g'_v} = \frac{-\dfrac{D(f,g)}{D(u,v)}}{f'_v h - g'_v} \neq 0.$$

Deci β este intr-adevăr inversabilă. Fie γ inversa funcţiei β şi fie $\varphi(x) = g(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))$. Avem

$$\varphi'(x) = \Big[g'_u(\gamma(x)), \alpha(\gamma(x))) + g'_v(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)))\alpha'(\gamma(x))\Big]\gamma'(x).$$

Din $\beta(\gamma(x)) = x$ rezultă $\beta'(\gamma(x))\gamma'(x) = 1$, deci

$$\Big[f'_u(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))) + f'_v(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))\alpha'(\gamma(x))\Big]\gamma'(x)] = 1,$$

$$\gamma'(x) = \frac{1}{f'_u(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))) + f'_v(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)))\alpha'(\gamma(x))},$$

$$\varphi'(x) = \frac{g'_u(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))) + g'_v(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)))\alpha'(\gamma(x))}{f'_u(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))) + f'_v(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)))\alpha'(\gamma(x))} =$$

$$= \frac{g'_u + g'_v \cdot \dfrac{g'_u - hf'_u}{hf'_v - g'_v}}{f'_u + f'_v \cdot \dfrac{g'_u - hf'_u}{hf'_v - g'_v}} = \frac{h \cdot (f'_v g'_u - f'_u g'_v)}{f'_v g'_u - f'_u g'_v} = h(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))).$$

Deducem

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = F(\beta(\gamma(x)), \varphi(x), \varphi'(x)) =$$
$$F(f(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)), g(\gamma(x), \alpha(\gamma(x))), h(\gamma(x), \alpha(\gamma(x)))) \equiv 0,$$

ţinînd seama de felul cum au fost alese funcţiile f, g şi h. Am aratat astfel că φ este soluţie a ecuaţiei date şi

$$\varphi(x_0) = g(\gamma(x_0), \alpha(\gamma(x_0)) = g(u_0, \alpha(u_0)) = g(u_0, v_0)$$

$$\varphi'(x_0) = h(\gamma(x), \alpha(\gamma(x_0)) = h(u_0, v_0).$$

In acest fel problema rezolvării ecuaţiei (1.52), s-a redus la rezolvarea ecuaţiei (1.56) scrisă sub forma normală şi la inversarea unei funcţii.

1.3 Modele matematice reprezentate prin ecuaţii diferenţiale

Un proces de modelare matematică constă din următoarele etape mai importante:

(i) *Formularea problemei de cercetat* Se formuleaza problema in termenii disciplinei în care ea apare. Această etapa se realizează în interiorul acestei discipline matematice.

(ii) *Construirea modelului matematic asociat problemei de cercetat.* Pornind de la problema dată se realizează o cercetare interdisciplinară urmărind găsirea unui model matematic cît mai fidel pentru această problemă. De obicei această etapa ajută şi la finalizarea primei etape.

(iii) *Studiul modelului matematic.* Reducînd problema de bază la o problemă de matematică se trece la studiul acestei probleme. De regulă această etapă se realizează în interiorul matematicii.

(iv) *Interpretarea soluţiei problemei matematice din punctul de vedere al problemei de bază.* Este vorba de o cercetare interdisciplinară a cărei complexitate ţine de natura problemei de bază cît şi de natura aparatului matematic ce se utilizează în această cercetare.

Vom da în continuare cîteva exemple de modele matematice reprezentate prin ecuaţii diferenţiale.

Dezintegrarea radioactiva.

S-a verificat fizic că radioactivitatea este direct proporţională cu numărul de atomi din substanţa radioactivă. Astfel, dacă $x(t)$ este cantitatea de materie nedezintegrată la momentul t, viteza de dezintegrare $x'(t)$ este proporţională cu $x(t)$ adică

$$-x'(t) = \alpha x(t) \tag{1.57}$$

unde α este o constantă pozitivă depinzînd de materialul radioactiv. Soluţia generală a ecuaţiei (1.57) este dată de

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \in \mathbf{R} \tag{1.58}$$

Drept măsură a vitezei de dezintegrare se ia aşa numita **perioadă de înjumătăţire,** adică timpul necesar pentru dezintegrarea unei jumătăţi din cantitatea de substanţă. Din formula (1.58) rezultă

$$T = \frac{1}{\alpha} \ln 2.$$

Un model matematic al cresţerii populaţiei

Dacă $p(t)$ este populaţia unei anumite specii la momentul t iar $d(t,p)$ este diferenţială dintre rata natalităţii şi cea a mortalităţii, atunci în ipoteza că populaţia este izolată (adică nu au loc emigrari sau imigrări), viteza de creştere a polulaţiei $p'(t)$ va fi egală cu $d(t,p)$. Un model simplificat de creştere a populaţiei presupune că $d(t,p)$ este proporţional cu p, cu alte cuvinte, p va verifica ecuaţia diferenţială

$$p' = \alpha p, \quad \alpha = constant. \tag{1.59}$$

Soluţia ecuaţiei (1.59) este deci

$$p(t) = p_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

ceea ce ne conduce la legea malthusiana a creşterii populaţiei.

Un model mai realist a fost propus de biologul olandez Verhulst în 1837. In acest model se ia $d(t,p)$ de forma $\alpha p - \beta p^2$ unde β este o constantă pozitivă foarte mică în raport cu α. Acest model neliniar de creştere ia în considerare interacţiunea dintre indivizii speciei şi anume efectul inhibator al aglomerărării. Ecuaţia diferenţială

$$p' = \alpha p - \beta p^2$$

are soluţia generală

$$p(t) = \alpha p_0 \Big(\beta p_0 + (\alpha - \beta p_0) \exp(-\alpha(t-t_0))\Big)^{-1}$$

unde (t_0, p_0) reprezintă condiţiile iniţiale.

Modelul Lotka - Volterra

Un sistem biologic în care două specii N_1 şi N_2 convieţuiesc într-o zonă limitată astfel încît indivizii speciei N_2 (răpitorii) se hrănesc numai cu indivizii din specia N_1 (prada) iar aceştia din urmă se hrănesc cu resursele zonei în care trăiesc.

Dacă notăm cu $N_1(t), N_2(t)$ numărul indivizilor din prima, respectiv a doua specie la momentul t, modelul matematic al sistemului biologic de mai sus este descris de sistemul diferenţial

$$\begin{cases} N_1' = aN_1 - bN_1N_2 \\ N_2' = -cN_2 + dN_1N_2 \end{cases} \tag{1.60}$$

unde a, b, c, d sînt constante pozitive.

Un model matematic al epidemiilor

Vom descrie un model matematic elaborat în 1927 de Karmac şi McKendric.

Să considerăm o populaţie formată din n indivizi şi o maladie în care infecţia se răspîndeşte prin contact direct. Se presupune că indivizii infectaţi vor fi fie izolaţi, fie devin imuni prin vindecare. Prin urmare, populaţia este compusă la un moment t din trei categorii $x(t), y(t), z(t)$ reprezentînd respectiv, indivizi neinfectaţi, indivizi infectaţi care circulă liberi şi indivizi izolaţi. Vom presupune că viteza de infectare x' este proportională cu numărul xy, reprezentînd numărul contactelor dintre indivizii neinfectaţi şi cei infectaţi.

De asemenea, indivizii infectaţi devin izolaţi cu o viteză proporţională cu numărul lor.

Prin urmare, ecuaţiile care guvernează procesul sînt următoarele (ca de obicei am notat $' = \dfrac{d}{dt}$).

$$\begin{cases} x' = -\beta xy \\ y' = \beta xy - \gamma y \\ x + y + z = n \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii se obţin

$$\frac{x'}{y'} = -\frac{\beta x}{\beta x - \gamma}$$

adică

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma - \beta x}{\beta x} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{1}{x} - 1.$$

Prin integrare se găseşte soluţia

$$y(x) = y_0 + x_0 - x + \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{x}{x_0}.$$

Oscilatorul armonic

Să considerăm mişcarea unui punct material de masă m care se deplasează pe dreapta orizontală $0x$ sub acţiunea forţei elastice F îndreptată către originea 0. Dacă notăm cu $x(t)$ distanţa, în momentul t, de la punctul de origine, din legea a doua a lui Newton rezultă că ecuaţia mişcării va fi

$$mx'' = F.$$

Pe de altă parte, F fiind o forţă elastică va fi de forma $F = -\omega^2 x$. Rezultă astfel ca mişcarea punctului este descrisă de ecuaţia diferenţială de ordinul doi

$$mx'' + \omega^2 x = 0. \tag{1.61}$$

Un model mai complex al mişcării este cel în care se admite existenţa unei forţe de frecare proporţională cu viteza, adică de forma $-bx'$, cît şi a unei forţe exterioare $f(t)$ aplicate masei P. Se obţine atunci ecuaţia diferenţială

$$mx'' + bx' + F(x) = f.$$

Pendulul matematic

Să considerăm problema oscilaţiilor unui pendul. Fie $s(t) = l\alpha(t)$, l fiind lungimea firului, $\alpha(t)$ unghiul firului faţă de verticală. $P = mg$, unde m este masa punctului material, g acceleraţia gravitaţională.

Forţa P se descompune în două componente dintre care una este anulată de rezistenţa firului. Mişcarea se desfăşoară sub acţiunea componentelor $-mg\sin\alpha$. Ecuaţia diferenţială a mişcării este $ml\alpha''(t) = -mg\sin\alpha(t)$ sau

$$\alpha''(t) + \frac{g}{l}\sin\alpha(t) = 0.$$

Considerînd numai oscilaţii mici, putem lua aproximativ $\sin\alpha(t) \approx \alpha(t)$ şi ecuaţia devine

$$\alpha''(t) + \frac{g}{l}\alpha(t) = 0.$$

Se verifică imediat că orice funcţie de forma

$$\alpha(t) = k\sin\Big(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \varphi\Big)$$

este soluţie a ecuaţiei.

Probleme şi exerciţii

1. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii diferenţiale ce nu conţin variabila independentă

$$y' = y^2; \quad y' = e^y, \quad y' = y^3 + y^3 + 1, \quad y' = \sqrt{4 - y^2}$$

2. Să se integeze ecuaţiile cu variabile separabile:

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \ \ 2yy' = \frac{e^x}{e^x+1}, \ \ y' = \frac{y}{x}\cdot\frac{x^3+1}{y^2-1}, \ \ y' = \frac{x}{y}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

3) Să se integreze următoarele ecuaţii diferenţiale omogene :

$$y' = \frac{y}{x} + \exp\Big(\frac{y}{x}\Big), \ \ y' = \frac{y^2+x^2}{xy}, \ \ y' = \frac{x+y}{x-y}, \ \ y' = -\frac{3x^2y+y^3}{2x^3}.$$

4) Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de forma:

$$2x + y = (4x-y)y', \ \ y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}, \ \ y' = \frac{3x+3y-1}{x+y+1}.$$

5) Să se determine soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul întîi.

$$y' = \frac{y}{x-2} = 0, \quad 3y'(x^2-1) - 2xy = 0, \quad y' + y = 2e^x.$$

3. Să se determine soluţia generală a următoarelor ecuaţii şi apoi să se afle curba integrală ce trece prin punctele indicate:

$$xy' - y + x = 0, \quad A(1,1)$$

$$y' + \frac{2y}{x^2-1} = 2x + 2, \quad A(0,-3).$$

7) Ecuaţia diferenţială $y' + P(x)y = Q(x)$ admite integrale particulare $y_1(x) = x$ şi $y_2(x) = x\sin x$

(i) Să se construiască integrala generală.

(ii) Să se afle $P(x)$ şi $Q(x)$

(iii) Să se determine integrala particulară $y(x)$ care ia valoarea 2π pentru $x_0 = \pi$.

8) Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

$$xy' + y = \frac{a^4}{xy^2}, \quad y' = 1 + e^{x+2y}.$$

9) Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Bernoulli :

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2y^2}, \quad y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}, \quad y \geq 0,\ x \neq 0,$$

$$y' + xy = y^2 \sin x, \quad y' - 3xy = xy^2.$$

10) Să se integreze ecuaţiile diferenţiale de tip Riccati căutînd soluţii particulare de forma unui polinom de gradul întîi:

$$y' = y^2 - x^2 + 1, \quad 2(x - x^2\sqrt{x}y' + 2\sqrt{x}y^2 - y - x = 0.$$

11) Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$y' - \frac{3x^2}{x^5-1} - \frac{x^4}{x^5-1}y + \frac{2x}{x^5-1}y^2 = 0$$

ştiind că admite soluţii particulare de forma ax^m.

12) Să se integreze ecuaţiile de tip Lagrange :

$$y = \frac{2a}{1 + y'^2}, \quad x + y = \left(\frac{y' + 1}{y' - 1} \right)^2, \quad y = 2xy' - (y')^2, \quad y = x(1 + y') + (y')^2.$$

13) Să se integreze ecuaţiile Clairaut :

$$xy^2 - yy' + a = 0, \quad y = xy' + \frac{1}{(y')^2}, \quad y = xy' - a(1 + (y')^2).$$

14) Să se determine viteza minimă cu care trebuie aruncat un corp vertical în sus ca el să nu se intoarcă pe Pamint.

15) O pîlnie are forma unui con cu unghiul α la vîrf. Fie s aria secţiunii prin care curge lichidul din ea, H înăltimea lichidului la momentul $t = 0$. Să se determine înălţimea $h(t)$ a lichidului din pîlnie la momentele $t > 0$. (**Indicaţie :** Se consideră că viteza de scurgere este egală cu $v(t) = \sqrt{2gh(t)}$).

16) Un rezervor conţine l litri de apă sărată cu concentraţia α. O conducţă descarcă în acest rezervor cu viteza de 10 litri pe minut apa sarată cu concentraţia α_0. Aceiaşi cantitate de lichid pe minut părăseşte printr-o alta, conductă rezervorul. Presupunînd că prin agitare se realizează în mod permanent omogenizarea conţinutului rezervorului, să se găsească evoluţia în timp a concentraţiei de sare a lichidului din rezervor.

17) O substanţă trece din starea solidă în starea gazoasă cu viteza direct proporţională cu aria expusă. Să se studieze evoluţia razei unei bile care la un moment dat avea raza r_0.

2 Problema Cauchy

Vom prezenta, în cele ce urmează, unele rezultate clasice privind existenţa, unicitatea şi dependenţa de date a soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

unde $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. *Problema lui Cauchy* relativă la sistemul (2.1) constă în aceea că se dă un punct $(x_0, y_0) \in \Omega$ şi se cer soluţiile ecuaţiei (2.1) ce satisfac condiţia

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.2}$$

Condiţia (2.2) poartă denumirea de *condiţie iniţială* sau *condiţia lui Cauchy.*

Din punct de vedere geometric, problema lui Cauchy revine la a determina curbele integrale ale ecuaţiei (2.1) ce trec prin punctul (x_0, y_0).

Se observă cu uşurinţă că problema Cauchy (2.1) + (2.2) este echivalentă cu ecuaţia integrală Volterra

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \tag{2.3}$$

Intr-adevăr, dacă funcţia continuă y verifică (2.3) pe un interval I, atunci ea este evident de clasă C^1 pe acest interval şi verifică condiţia iniţială (2.2). Prin derivare rezultă că y este o soluţie a ecuaţiei (2.1). *Reciproc,* orice soluţie a problemei Cauchy (2.1)+ (2.2) este soluţie a problemei (2.3).

2.1 Existenţa şi unicitatea locală

Vom incepe studiul problemei lui Cauchy pentru ecuaţii de ordinul întîi.

Problema lui Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi

TEOREMA **2.1** *Presupunem verificate următoarele condiţii:*

1) Funcţia f este continuă pe mulţimea

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\} \tag{2.4}$$

2) Funcţia f este lipschitziană ca funcţie de y pe mulţimea D, adică există o constantă pozitivă L astfel încît

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le L|y - z|,\ \ \forall\ (x, y),\ (x, z) \in D. \tag{2.5}$$

Atunci există o soluţie unică $y = y(x)$ a problemei Cauchy (2.1) - (2.2) definită pe intervalul $I = \{x \in \mathbf{R}; |x - x_0| \leq \delta\}$, unde $\delta = \inf(a, b/M)$, iar $M = \sup\{|f(x,y)|, (x,y) \in D\}$.

Demonstraţie. Aşa cum am văzut ceva mai sus, problema Cauchy (2.1) + (2.2) este echivalentă pe intervalul I cu ecuaţia integrală Volterra (2.3). Deci pentru a demonstra teorema este suficient să arătăm că ecuaţia (2.3) admite soluţie continuă pe intervalul $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Pentru aceasta vom utiliza metoda aproximaţiilor succesive, fundamentată pentru problema în cauză de Emile Picard (1856 - 1941). Considerăm şirul $\{y_n\}$ definit pe intervalul I după cum urmează

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.6}$$

unde $y_0(x) = y_0$. Este uşor de observat că funcţiile y_n sînt continue şi avem

$$|y_n(x) - y_0| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq b, \quad \forall \ x \in I, n = 1, 2, \cdots \tag{2.7}$$

Rezultă din cele de mai sus, că şirul $\{y_n\}$ este bine definit.

Vom demonstra că acest şir converge uniform pe I la o soluţie a ecuaţiei (2.3). Din (2.6) şi (2.7) rezultă inegalitatea:

$$|y_2(x) - y_1(x)| = |\int_{x_0}^{x}(f(s, y_1(s)) - f(s, y_0)))ds| \leq$$

$$\leq |\int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0(s)|ds| \leq \frac{LM}{2}|x - x_0|^2.$$

Prin inducţie relativ la n se obţine inegalitatea

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n \leq \frac{ML^{n-1}}{n!}\delta^n \tag{2.8}$$

pentru toţi $n \in \mathbf{N}$ şi $x \in I$. Vom arăta acum că şirul de funcţii $\{y_n\}$ converge uniform pe I către o funcţie continuă y, cînd $n \to \infty$. Convergenţa acestui şir este echivalentă cu convergenţa uniformă a seriei de funcţii

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1}) \tag{2.9}$$

deoarece, după cum se vede imediat, şirul sumelor parţiale ale seriei (2.9) este şirul $\{y_n\}$

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n+1}) = y_n.$$

Seria telescopică (2.9) este majorată de seria numerică convergentă

$$\frac{M}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(L\delta)^n}{n!}$$

deci seria (2.9) este uniform convergentă pe I. Fie $y = \lim_{n+\infty} y_n$. Cum $\{y_n\}$ converge uniform pe intervalul închis I rezultă că y este o funcţie continuă pe I. Din continuitatea funcţia $z \to f(x,z)$, rezultă evident

$$\lim_{n\to\infty} f(x, y_{n-1}(x)) = f(x, y(x))$$

uniformă în $x \in I$, Se poate trece la limită în (2.6) şi se obţine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(s, y(s))ds, \quad x \in I \tag{2.10}$$

cu alte cuvinte, y este o soluţie a ecuaţiei (2.3), deci y este soluţie a problemei Cauchy (2.1)+ (2.2).

Unicitatea se obţine utilizînd lema lui Gronwall (Lema 1.1). Intr-adevăr, prin reducere la absurd, vom presupune că pe lingă soluţia continuă y, obţinută ca limită a şirului $\{y_n\}$, mai există o altă soluţie $z \neq y$. Cu alte cuvinte avem

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds, \quad x \in I. \tag{2.11}$$

Scăzînd ecuaţia (2.10) şi (2.11) şi folosind condiţia Lipschitz se obţine

$$|y(x) - z(x)| \leq L|\int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)|ds|, \quad x \in I.$$

Din inegalitatea lui Gronwall rezultă $y(x) = z(x)$, $\forall\ x \in I$. $\square$

Observaţii.

1) Unicitatea soluţiei problemei Cauchy (2.1) - (2.2) poate fi demonstrată utilizînd procedeul folosit pentru demonstrarea existentei. Intr-adevăr, să presupunem că mai există o soluţie z a problemei (2.1) - (2.2), deci

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))ds.$$

Atunci

$$|y_n(x) - z(x)| = |\int_{x_0}^{x}(f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, z(s))ds|$$

sau, folosind condiţia lui Lipschitz

$$|y_n(x) - z(x)| \leq L|\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(s) - z(s)|ds|$$

de unde prin recurenţă

$$|y_n(x) - z(x)| \leq ML^{n-1}\frac{|x-x_0|^n}{n!} \leq M\frac{L^{n-1}\delta^{n-1}}{n!}$$

de unde deducem că $\lim_{n\to\infty} y_n(x) = z(x)$, deci $y(x) = z(x)$, $\forall\ x \in I$.

2) In construcţia aproximaţiilor am luat pentru aproximaţia de ordin zero valoarea iniţială y_0. Această valoare poate fi înlocuită cu orice funcţie u continuă pe intervalul $\{x \in I, |x - x_0| \leq \delta\}$ şi care îndeplineşte condiţia $|u(x) - y_0| \leq b$. Şirul aproximaţiilor se construieşte în mod asemănător,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, u(s))ds, \\ \dots & \quad \dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))ds \end{aligned}$$

şi limita şirului este tot funcţia y.

Exemplu : *Să se găsească soluţia problemei Cauchy*

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 1 \tag{2.12}$$

utilizînd metoda aproximaţiilor succesive.

Ecuaţia Volterra asociată ecuaţiei (2.12) se scrie

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(s)ds.$$

Construim şirul $y_0, y_1, \cdots, y_n, \cdots$ prin

$$\begin{aligned} y_0(x) = &\quad 1 \\ y_1(x) = &\quad 1 + \int_0^x y_0(s)ds = 1 + x \\ y_2(x) = &\quad 1 + \int_0^x y_1(s)ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \\ y_3(x) = &\quad 1 + \int_0^x y_2(s)ds = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \\ \dots &\quad \dots \\ y_n(x) = &\quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Limita acestui şir (care converge uniform pe întreaga axă reală) este $y(x) = e^x$.

Problema lui Cauchy pentru sisteme diferenţiale de ordinul întîi

Considerăm sistemul diferenţial:

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{2.13}$$

cu condiţiile iniţiale:

$$y_i(x_0) = y_i^0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.14}$$

unde funcţiile $f_1, \ldots, f_n$ sînt definite pe un paralelipiped de forma:

$$D = \{(x, y), |x - x_0| \le a, |y_i - y_i^0| \le b, \quad i = 1, \ldots, n\} \tag{2.15}$$

din spaţiul $n + 1$ dimensional $\mathbf{R}^{n+1}$.

TEOREMA **2.2** *Presupunem că următoarele condiţii sînt indeplinite :*

1) Funcţiile $f_i, \quad i = 1, \cdots, n$ sînt continue pe D.

2) Funcţiile $f_i, \quad i = 1, \ldots, n$ sînt lipschitziene în $y = (y_1, \ldots, y_n)$ pe D, adică există $L > 0$ astfel încît

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y_1, \ldots, y_n) - f_i(x, z_1, \ldots, z_n)| \le \\ &\le L \max\{|y_j - z_j|, 1 \le j \le n\}, i = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.16}$$

pentru toţi $(x, y_1, \ldots, y_n)$, $(x, z_1, \ldots, z_n)$ din D.

Atunci există o soluţie unică $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ a problemei Cauchy (2.13) - (2.14) *definită pe intervalul $I = \{x \in \mathbf{R}; |x - x_0| \le \delta\}$ unde*

$$\delta = \inf(a, b/M) \quad \text{şi} \quad M = \max\{|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \ : (x, y_1, \ldots, y_n) \in D\}.$$

Demonstraţie. Teorema de mai sus rezultă printr-un raţionament identic cu cel folosit pentru demonstrarea Teoremei 2.1, astfel că vom indica doar etapele principale ale demonstraţiei.

Problema Cauchy (2.13) - (2.14) este echivalentă cu sistemul de ecuaţii integrale:

$$y_i(x_0) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, y_1(s), \ldots, y_n(s))ds, \quad i = 1, \cdots, n \tag{2.17}$$

Pentru demonstrarea existenţei soluţiei sistemului de ecuaţii Volterra (2.17) construim şirul $\{y^{(k)}\}_{k \in \mathbf{N}}$ prin

$$y_i^k(x) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(s, y_1^{k-1}(s), \ldots, y_n^{k-1}(s))ds, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.18}$$

Se observă că funcţiile sînt bine definite şi sînt continue pe intervalul $I = \{x \in \mathbf{R}; |x - x^0| \le \delta\}$, iar prin inducţie se găseşte evaluarea

$$\max_{1 \le i \le n} |y_i^k(x) - y_i^{k-1}(x)| \le M L^{k-1} \delta^k / k!$$

şi apoi se demonstrează că şirul $\{y^k\}_{y=(y_1,\dots,y_n)}$ converge uniform pe intervalul I la $y = (y_1, \dots, y_n)$. Trecînd la limită, cînd $k \to \infty$, în sistemul (2.18) rezultă în final că $y = (y_1, \dots, y_n)$ este soluţie a sistemului (2.17), deci soluţie a problemei Cauchy (2.13) - (2.14) . Unicitatea soluţiei rezultă cu un raţionament analog cu cel folosit în Teorema 2.1. □

Atît formularea teoremei de existenţă şi unicitate pentru problema (2.13) - (2.14) cît şi demonstrarea sa, par să arate că **nu** există o diferenţă de fond între ecuaţiile diferenţiale şi sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Adoptînd notaţia vectorială vom vedea că, de fapt, nici formal ecuaţiile şi sistemele diferenţiale nu diferă.

In cele ce urmează vom considera spaţiul $\mathbf{R}^n$ al vectorilor n dimensionali $y = (y_1, \dots, y_n)$ înzestrat cu structura liniară (vectorială) uzuală şi cu norma

$$\|y\| = \max\{|y_i|, \quad 1, \cdots, n\}, \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Pe spaţiul $\mathbf{R}^n$ înzestrat cu această normă (de fapt cu oricare alta, deoarece normele pe spaţiile finit dimensionale sînt echivalente) se poate dezvolta un calcul diferenţial şi integral analog celui existent pentru funcţiile scalare. Pe un interval I din $\mathbf{R}$, vom numi funcţiile vectoriale pe I o aplicaţie $y : I \to \mathbf{R}^n$ de forma $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$, unde y_i sînt funcţii scalare definite pe I.

Funcţia $y : I \to \mathbf{R}^n$ se numeşte continuă (într-un punct sau un interval) dacă funcţiile coordonate $\{y_i, \quad i = 1, \dots, n\}$ sînt continue. Funcţia y se numeşte derivabilă în $x_0 \in I$ dacă $y_i, i = 1, \dots, n$ au această proprietate. Prin derivata funcţiei y în x, notată $y'(x)$, se înţelege vectorul $(y_1'(x), \dots, y_n'(x))$. O semnificaţie analogă o are noţiunea de diferenţiabilitate sau de integabilitate pentru funcţiile vectoriale cu valori în $\mathbf{R}^n$.

In particular, vom nota:

$$\int_a^x y(s)ds = \left(\int_a^x y_1(s)ds, \dots, \int_a^x y_n(s)ds\right)$$

unde $y(s) = y_1(s), \dots, y_n(s))$.

In acelaşi context, şirul $\{y^k\}$ de funcţii vectoriale pe I converge (uniform sau punctual) la $y : I \to \mathbf{R}^n$ dacă şirul coordonatelor sale are această proprietate. După cum uşor se poate observa, toate aceste noţiuni admit o formulare echivalentă în terminologia normei $\|\cdot\|$ spaţiului $\mathbf{R}^n$. De exemplu continuitatea funcţiei $y : I \to \mathbf{R}^n$ în punctul $x_0 \in I$ revine la condiţia $\lim_{x \to x_0} \|y(x) - y(x_0)\| = 0$.

In mod analog se poate defini derivata, integrala sau convergenţa.

Să revenim acum la problema Cauchy (2.13) - (2.14). Dacă notăm cu $y : I \to \mathbf{R}^n$ funcţia vectorială $(y_1, \dots, y_n)$ şi cu $f : D \to \mathbf{R}^n$ funcţia

$$f(x, y) = (f_1(x, y_1, \dots, y_n), f_n(x, y_1, \dots, y_n))$$

sistemul (2.13) devine

$$y' = f(x, y) \tag{2.19}$$

iar condiţia iniţială (2.14) se scrie

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.20}$$

unde $y_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$.

Condiţia 1) din Teorema 2.2 revine la continuitatea funcţiei $f : D \to \mathbf{R}^n$, iar condiţia Lipschitz (2.16) devine în noile notaţii

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \le L\|y - z\|, \;\; \forall \;\; (x, y), (x, z) \in D.$$

In notaţie vectorială, Teorema 2.2 se poate formula astfel.

TEOREMA **2.3** *Presupunem verificate următoarele condiţii:*

1) *Funcţia $f : D \to \mathbf{R}^n$ este continuă.*
2) *Funcţia f este lipschitziană în y pe D, adică există $L > 0$ astfel încît*

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \le L\|y - z\|, \quad \forall \;\; (x, y), (x, z) \in D.$$

Atunci există o soluţie unică y a problemei (2.19) - (2.20) definită pe intervalul $I = \{x = \mathbf{R}; |x - x_0| \le \delta\}$, unde

$$\delta = \inf(a, b/M), \qquad M = \sup\{\|f(x, y)\|; (x, y) \in D\}.$$

In această formulare, Teorema 2.3 se poate demonstra reluînd cuvînt cu cuvînt demonstrarea Teoremei 2.1. Singura modificare care intervine este aceea că în toate situaţiile norma $\|\cdot\|$ inlocuieşte valoarea absolută.

Problema Cauchy pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul superior

Să considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul n:

$$y^{(n)} = g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2.21}$$

cu condiţia Cauchy

$$y(x_0) = y_0^0, \quad y'(x_0) = y_1^0, \dots, y_{n-1}^0(x_0) = y_{n-1}^0 \tag{2.22}$$

unde $(x_0, y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0)$ este fixat în $\mathbf{R}^{n+1}$.

TEOREMA **2.4** *Presupunem verificate următoarele doua condiţii:*

1) Funcţia g este continuă pe mulţimea D definită prin

$$D = \{(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n,\ |x - x_0| \le a, |y_i - y_{i-1}^0| \le b,\ i = 1, \dots, n\} \tag{2.23}$$

2) Există $L > 0$ astfel încît

$$|g(x, y_1, \dots, y_n) - g(x, z_1, \dots, z_n)| \le L \max\{|y_i - z_i|,\ 1 \le i \le n\}$$

pentru toţi $(x, y_1, , y_n), (x, z_1, \dots, z_n) \in D$.

Atunci problema Cauchy (2.21) - (2.22) admite o unică soluţie y, definită pe intervalul $I = \{x \in \mathbf{R}; |x - x_0| \le \delta\}$ unde $\delta = \inf\{a, b/M\}$iar

$$M = \sup\{|g(x, y_1, \dots, y_n), |y_1|, \dots, |y_n|; (x, y_1, \dots, y_n) \in D\}$$

Demonstraţie. Prin substituţia

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \ \dots\ , \ \ y_n = y^{(n-1)} \tag{2.24}$$

ecuaţia (2.21) se reduce la sistemul diferenţial

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= g(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

iar condiţia Cauchy (2.22) devine

$$y(x_0) = (y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)) = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_{n-1}^0).$$

In baza condiţiilor 1) şi 2) se deduce Teorema 2.4 ca un caz particular al Teoremei 2.2. □

Teorema de existenţă a lui Peano

Vom demonstra acum un rezultat de existenţă pentru problema Cauchy (2.13) - (2.14) datorat lui Peano (1858 - 1932). In linii mari, se afirmă că numai în ipoteza de continuitate asupra lui f, problema Cauchy (2.13) - (2.14) admite cel puţin o soluţie într-o vecinătate a momentului iniţial.

TEOREMA **2.5** *Fie* $f : D \to \mathbf{R}^n$ *o funcţie continuă, unde* D *este*

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}; |x - x| \leq a, \ \|y - y_0\| \leq b\}.$$

Atunci problema Cauchy (2.13) - (2.14) *admite cel puţin o soluţie pe intervalul* $I = \{x \in \mathbf{R}, |x - x_0| \leq \delta\}$ *unde*

$$\delta = \inf\{a, b/M\}, \quad M = \sup\{\|f(x, y)\|, (x, y) \in D\}.$$

Demonstraţie. Pe baza teoremei lui Weierstrass există un şir $f_m : D \to \mathbf{R}^n$ de funcţii polinomiale astfel încît f_m converge uniform către f. Fie $M_m = \sup\{\|f_m(x, y)\|; (x, y) \in D\}$. Este uşor de văzut că putem alege f_m, cel puţin pentru m suficient de mare, astfel ca $M_m \leq M$. Considerăm problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f_m(x, y) \\ y(x_0) = y^0 \end{cases}$$

Pe baza Teoremei 2.2 această problemă are pe intervalul $[x_0 - \delta_m, x_0 + \delta_m]$ unde $\delta_m = \inf\{a, b/M_m\}$, soluţie unică. In plus

$$y_m(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f_m(s, y_m(s))ds, \quad \forall \ x \in I_m. \tag{2.25}$$

Din (2.25) rezultă că şirul de funcţii $\{y_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ este mărginit pe $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Pe baza teoremei lui Arzela şirul de funcţii $\{y_m\}$ conţine un subşir uniform convergent şi fie y limita sa. Cum familia şirului $\{f_m(\cdot, y_m(\cdot)\}_m$ converge uniform la $f(\cdot, y(\cdot))$, trecînd la limită în (2.25) obţinem

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds, \quad \forall \ x \in I,$$

adică y este soluţia problemei Cauchy. $\square$

Observaţie

Nu se poate deduce din teorema lui Peano unicitatea soluţiei problemei lui Cauchy. In general, numai din ipoteza de continuitate asupra funcţiei f soluţia problemei lui Cauchy (2.1) - (2.2) nu este unică. Pentru a vedea acest lucru sa considerăm exemplul următor.

Exemplu : *Problema lui Cauchy*

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \tag{2.26}$$

nu are soluţie unică.

Se observă că $y = 0$ este o soluţie a problemei (2.26). Pe de altă parte integrînd direct ecuaţia (2.26) şi ţinînd cont de condiţia iniţială $y(0) = 0$ se găseşte că funcţia y definită prin

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{3}\right)^{3/2} & \text{pentru} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x < 0 \end{cases}$$

este soluţie a problemei (2.26).

2.2 Existenţa şi unicitatea globală

Să considerăm sistemul diferenţial (în notaţie vectorială)

$$y' = f(x, y) \tag{2.27}$$

unde $f : \Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ este o funcţie continuă pe mulţimea deschisă Ω din $\mathbf{R}^{n+1}$.

Vom presupune că funcţia f este local lipschitziană în y pe Ω, cu alte cuvinte pentru orice submulţime compactă $K \subset \Omega$ există $L_K > 0$ astfel ca

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L_K \|y - z\|, \quad \forall \ (x, y), \ (x, y) \in K \tag{2.28}$$

unde $\| \cdot \|$ este norma uniformă pe $\mathbf{R}^n$ adică

$$\|y\| = \max\{|y_i|, 1 \leq i \leq n\}.$$

TEOREMA **2.6** *Presupunem că funcţia f este continuă pe Ω şi local lipschitziană în y. Atunci, oricare ar fi punctul (x_0, y_0) din Ω există într-o vecinătate a punctului x_0 o soluţie unică $y = \varphi(x)$ a sistemului (2.27) cu condiţia iniţială $\varphi(x_0) = y_0$.*

Teorema de ma sus poate fi formulată şi astfel:

Fie $f : I \times G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continuă în $I \times G$ şi local lipscitziană în $I \times G$ în raport cu $y \in G$. Atunci, pentru orice (x_0, y_0) din $I \times G$ există un interval J conţinînd x_0 şi o soluţie φ a sistemului (2.27) definită pe J cu proprietatea $\varphi(x_0) = y_0$. In plus această soluţie este unică

Demonstraţie. Fie $(x_0, y_0) \in \Omega$. Cum Ω este o mulţime deschisă, există D un paralelipiped de forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}; |x - x_0| \leq a, \quad \|y - y_0\| \leq b\}$$

închis în Ω. Aplicînd Teorema 2.2 sistemul (2.27) considerat pe D, rezultă existenţa unei soluţii unice φ ce satisface $\varphi(x_0) = y_0$, definită pe

$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, unde $\delta = \inf\{a, b/M\}$ iar $M = \max\{\|f(x,y)\|;\ (x,y) \in D\}$. □

Atît existenţa cît şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy au loc într-o vecinătate a punctului x_0. Cu toate acestea ne putem aştepta ca unicitatea să aibă un caracter global.

Teorema **2.7 (unicitate globală)** . *Fie φ şi ψ două soluţii ale sistemului (2.27) definite pe intervalele (deschise) I respectiv I'. Fie $x_0 \in I \cap I'$ astfel încît $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$. Atunci $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru orice $x \in I \cap I'$.*

Demonstraţie. Să notăm cu (x_1, x_2) intervalul comun $I \cap I'$. Vom demonstra că $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru orice $x \in [x_0, x_2)$. Egalitatea la stinga punctului x_0, rezultă în mod analog. Să notăm cu $[x_0, X]$ intervalul maxim pentru care $\varphi(x) = \psi(x)$ şi să presupunem, prin absurd, că $X < x_2$. Deoarece $\varphi(X) = \psi(X)$ şi funcţiile φ şi ψ sînt soluţii ale sistemului (2.27), din teorema anterioară (de unicitate locală), va rezulta că $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru orice $x \in [X, X + \varepsilon]$, unde ε este pozitiv şi suficient de mic. Am ajuns la concluzia că $[x_0, X]$ nu este intervalul maxim pe care cele două soluţii coincid, o contradicţie. Această contradicţie a provenit din faptul că am presupus că $X < x_2$ □

- O soluţie φ a sistemului (2.27), definită pe un interval $I = [a, b]$, se zice **prelungibilă** dacă există o altă soluţie ψ a sistemului (2.27) definită pe un interval $I' \supset I$, astfel încît $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru orice x din I.

- O soluţie φ definită pe $I = [a, b]$ se numeşte **prelungibilă la dreapta** dacă există $b' > b$ şi o soluţie ψ definită cel puţin pe intervalul $[a, b']$, astfel încît $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru $x \in [a, b]$.

- Analog, o soluţie φ definită pe $I = [a, b]$ se numeşte **prelungibilă la stînga** dacă există $a' < a$ şi o soluţie ψ definită cel puţin pe intervalul $[a', b]$ astfel încît $\varphi(x) = \psi(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$.

- O soluţie care nu este prelungibilă se numeşte **saturată**. Analog, o soluţie care nu este prelungibilă la dreapta (stînga) se numeşte **saturată la dreapta** (saturată la stînga).

Cu alte cuvinte, o soluţie a sistemului (2.27) definită pe un interval I este saturată dacă I este intervalul maxim de definiţie a soluţiei.

Din Teorema 2.7 rezultă, cu uşurinţă, că intervalul de definiţie, al unei soluţii saturate este deschis. Dacă soluţia este saturată la dreapta (stînga) atunci intervalul de definiţie la dreapta (stînga) atunci intervalul de definiţie este deschis la dreapta (stînga).

Intr-adevar, dacă $I = [a,b]$, aplicînd Teorema 2.2 ar rezulta că există ψ o soluţie a sistemului (2.27) care să treacă prin punctul $(a, \varphi(a))$ şi să fie definită pe o vecinătate $[a-\delta, a+\delta]$ a punctului a. Deoarece, $\psi = \varphi$ pe $[a, a+\delta]$ ar rezulta că funcţia $\tilde{\varphi}$ definită prin $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pentru $x \in [a,b]$ şi $\tilde{\varphi}(x) = \psi(x)$ pentru $x \in [a-\delta, a]$ este o prelungire proprie a soluţiei φ. Contradicţia la care am ajuns demonstrează afirmaţia.

Exemplu : *Să se determine intervalul maxim de definire al soluţiei saturate pentru problema Cauchy:*

$$y' = y^2 + 1, \quad y(x_0) - y_0. \tag{2.29}$$

Funcţia y definită prin $y(x) = tg\left(x - x_0 + arctg\, y_0\right)$ este o soluţie a problemei (2.29). Intervalul maxim de definire la dreapta a soluţie este $[x_0, \frac{\pi}{2} - arctg\, y_0 + x_0)$, iar intervalul maxim de definire la stînga este $(-\frac{\pi}{2} - arctg\, y_0 + x_0, x_0]$. Deci intervalul maxim de definire a soluţiei saturate este

$$(-\frac{\pi}{2} - arctg\, y_0 + x_0, \frac{\pi}{2} + x_0 - arctg\, y_0).$$

TEOREMA **2.8** *Fie $\Omega \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ o mulţime deschisă, $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă pe Ω, local lipschitziană în al doilea argument.*

1) *Există o soluţie saturată (neprelungibilă) pentru orice valoare iniţială în Ω.*

2) *Dacă o soluţie saturată φ a sistemului (2.27) coincide cu altă soluţie ψ a sistemului (2.27) într-un punct, atunci φ este o prelungire a lui ψ.*

3) *Dacă două soluţii saturate ale sistemului (2.27) coincid într-un punct, atunci ele coincid în întregime, adică ele au acelaşi interval de definire şi sînt egale pe acest interval.*

Demonstraţie. Fie (x_0, y_0) un punct arbitrar în Ω. Vom construi o soluţie $y = \tilde{\varphi}(x)$ a sistemului (2.27) cu proprietatea $\tilde{\varphi}(x_0) = y_0$, care prelungeşte orice soluţie φ a sistemului (2.27) cu proprietatea $\varphi(x_0) = y_0$. Pentru orice soluţie $y = \varphi(x)$ a sistemului (2.27) ce verifică $\varphi(x_0) = y_0$, corespunde un interval propriu de definire. Notăm prin X_1 mulţimea capetelor din stînga, iar prin X_2 notăm mulţimea capetelor din dreapta. Notăm, de asemenea, cu m_2 marginea superioară a mulţimii X_2 (în particular putem avea $m_2 = +\infty$), şi prin m_1 marginea inferioară a mulţimii X_1 (în particular putem avea $m_1 = -\infty$).

Construim soluţia $y = \tilde{\varphi}(x)$, pentru valorile iniţiale (x_0, y_0), definită pe intervalul (m_1, m_2). Fie x un punct arbitrar în acest interval. Presupunem, pentru a face o alegere, că $x_0 \leq x^*$. Cum m_2 este marginea superioară a mulţimii X_2, există o soluţie $y = \psi(x)$ a sistemului (2.27) pentru valorile iniţiale x_0, y_0, avînd intervalul de definire ce conţine x^*, şi luăm $\tilde{\varphi}(x^*) = \psi(x^*)$.

Valoarea obţinută pentru funcţia $\tilde{\varphi}$ în punctul x^* nu depinde de soluţia ψ aleasă. In fapt, dacă în locul soluţiilor $y = \psi(x)$ am fi luat soluţia $y = \chi(x)$ pentru valoarea iniţială x^0, y^0 şi un interval de definire ce conţine x^*, din teorema de unicitate globală (Teorema 2.7) avem $\chi(x^*) = \psi(x^*)$.

Funcţia $\tilde{\varphi}$ este univoc definită pe intervalul (m_1, m_2). Prin urmare, ea este soluţie a sistemului (2.27) pentru valorile iniţiale x_0, y_0, deoarece în orice punct x^* din interiorul (m_1, m_2) funcţia $\tilde{\varphi}$ coincide, prin construcţie, cu o soluţie a sistemului (2.27).

Fie acum $y = \varphi(x)$ o soluţie a sistemului (2.27), pentru valorile iniţiale x_0, y_0 definită pe un interval (r_1, r_2). Punctul r_1 este din X_1 iar punctul r_2 este din X_2 şi deoarece $m_1 \leq r_1$, $r_2 \leq m_2$ rezultă că intervalul (r_1, r_2) este inclus în (m_1, m_2). Cum soluţiile φ şi $\tilde{\varphi}$ au aceleaşi valori iniţiale, ele coincid în toate punctele lor comune de definire, adică în intervalul (r_1, r_2), ceea ce înseamnă că $\tilde{\varphi}$ este o extensie (prelungire) pentru φ.

Este evident că soluţia $y = \tilde{\varphi}(x)$ este saturată (neprelungibilă). Intr-adevăr, să presupunem că soluţia ψ este o prelungire a lui $\tilde{\varphi}$. Putem să luăm x_0, y_0 în calitate de valori iniţiale pentru ψ, şi avînd în vedere ceea ce am demonstrat anterior, soluţia $\tilde{\varphi}$ este o prelungire pentru ψ. Din aceste consideraţii obţinem că $\tilde{\varphi}$ este unica soluţie saturată pentru valorile iniţiale x_0, y_0.

Să presupunem că soluţia saturată $\tilde{\varphi}$ coincide cu o altă soluţie φ pentru cel puţin un punct x. Desemnăm această valoare a lui x prin x_0 şi punem $y_0 = \tilde{\varphi}(x_0)$. In acest fel x_0, y_0 sînt valori iniţiale pentru soluţia saturată $\tilde{\varphi}$ şi pentru soluţia φ. Tinînd seama de cele ce au fost demonstrate mai sus, soluţia $\tilde{\varphi}$ este o prelungire a lui φ. Dacă φ este saturată, datorită aceloraşi consideraţii, ea reprezintă o prelungire a soluţiei $\tilde{\varphi}$, astfel că φ şi $\tilde{\varphi}$ coincid .

Cu aceasta teorema este demonstrată. □

In continuare vom studia comportarea soluţiilor saturate în vecinătatea frontierei $Fr(\Omega)$ a mulţimii Ω de definire a sistemului (2.27). Pentru simplitate ne vom ocupa doar de soluţiile saturate la dreapta, cazul soluţiilor saturate la stînga tratîndu-se în mod identic (analog).

TEOREMA **2.9** *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ o mulţime deschisă, $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă pe Ω, local lipschitziană în al doilea argument. Dacă $y = \varphi(x)$ este* *o soluţie saturată la dreapta definită pe intervalul* $[x_0, X)$*, atunci orice punct limită pentru* $x \to X$ *al graficului* $G = \{(x, \varphi(x)), x_0 \le x < X\}$ *este fie punctul de la infinit, fie aparţine frontierei* $Fr(\Omega)$ *a multimii* Ω*.*

Demonstraţie. Teorema afirmă că orice punct din $\mathbf{R}^{n+1}$ de forma (X, Y) unde $Y = \lim_{x_n \to X} \varphi(x_n)$ se află în una din următoarele trei situaţii:
(a) $X = +\infty$, (b) $\lim_{x_n \to X} \|\varphi(x_n)\| = +\infty$ (c) $(X, Y) \in Fr(\Omega)$.

Să presupunem că primele două cazuri nu au loc (adică $X < +\infty$ şi $\|Y\| < +\infty$) şi să demonstrăm că are loc (c). Presupunem, prin reducere la absurd, că $(X, Y) \in \Omega$. Există deci $r > 0$, astfel încît bila închisă cu centrul în $(X\ ,\ Y)$ şi de rază r, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}; |x - X| \le r, \|y - Y\| \le r\}$ este conţinută în mulţimea Ω. Deoarece distanţa η de la mulţimea compactă B la frontieră lui Ω este pozitivă, rezultă că oricare ar fi punctul $(x_0, y_0) \in B$, paralelipipedul

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}; \quad |x - x_0| < \frac{\eta}{4}, \quad \|y - y_0\| \le \frac{\eta}{4}\} \tag{2.30}$$

este conţinut în submulţimea compactă

$$K = \Big\{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+1}; \quad |x - X| \le r + \frac{\eta}{2}, \ \|y - Y\| \le r + \frac{\eta}{2}\Big\} \subset \Omega.$$

Apelînd la teorema de existenţă şi unicitate (Teorema 2.6) unde D este definită de (2.30) rezultă că, oricare ar fi $(x_0, y_0) \in B$ există o soluţie a sistemului (2.27) care trece prin acest punct şi este definită pe un interval $[x_0, x_0 + \delta]$. Deoarece $\delta = \inf\{\frac{\eta}{4}, \frac{\eta}{4M}\}$ unde $M \le \sup\{\|f(x, y)\|; (x, y) \in K\}$ rezultă că δ este independent de punctul (x_0, y_0) din B.

Fie n suficient de mare astfel încît $(x_n, \varphi(x_n)) \in B$ şi $|x_n - X| \le \delta/2$.

Luînd $x_0 = x_n$ şi $y_0 = \varphi(x_n)$, rezultă că există o soluţie $\tilde{\varphi}$ definită pe $[x_0, X + \delta/2]$. verificînd condiţia $\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_n)$. Din teorema de unicitate rezultă atunci că funcţia $\tilde{\varphi}$ este o prelungire la dreapta a soluţiei φ, ceea ce este absurd. Contradicţia la care am ajuns demonstrează teorema. □

Teorema de mai sus poate fi utilizată pentru determinarea intervalului maxim de definire a unei soluţii.

Exemplu *Orice soluţie saturată a sistemului*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x) \tag{2.31}$$

unde elementele matricei $A(x)$ *şi elementele vectorului* $b(x)$ *sînt funcţii continue pe intervalul* (x_1, x_2)*, este definită pe întreg intervalul* (x_1, x_2)*.*

In acest caz $\Omega = (x_1, x_2) \times \mathbf{R}^n$ iar funcţia $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ definită prin $f(x,y) = A(x)y + b(x)$ este continuă pe Ω şi local lipschitziană. Pentru $(x_0, y_0) \in \Omega$, fie $(\alpha, \beta) \subset I = (x_1, x_2)$ intervalul de definire al soluţiei $y = \varphi(x)$ a sistemului (2.31) cu $\varphi(x_0) = y_0$. Conform Teoremei 2.9, aplicată sistemului (2.31), dacă $\beta < x_2$ sau $\alpha > x_1$atunci funcţia φ este nemărginită într-o vecinatate a punctului β, respectiv α.

Vom presupune, prin absurd că $\beta < x_2$. Din identitatea integrală

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A(s)\varphi(s)ds + \int_{x_0}^{x} b(s)ds, \quad x_0 \le x < \beta$$

obţinem inegalitatea integrală

$$\|\varphi(x)\| \le \|y_0\| + \int_{x_0}^{x} \|A(s)\| \cdot \|\varphi(s)\| ds + \int_{x_0}^{x} \|b(s)\| ds \quad x_0 \le x < \beta. \tag{2.32}$$

Deoarece funcţiile $\|A(x)\|$ şi $\|b(x)\|$ sînt continue pe $[x_0, x_2]$ ele sînt mărginite pe $[x_0, \beta]$, deci există $M > 0$ astfel

$$\|A(x)\| \le M, \quad \|b(x)\| \le M, \ \ \forall \ x \in [x_0, \beta] \tag{2.33}$$

Din (2.32) şi (2.33), în baza inegalităţii lui Gronwall, rezultă

$$\|\varphi(x)\| \le \Big(\|y_0\| + \int_{x_0}^{x} \|b(s)\| ds\Big) \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \|A(s)\| ds\Big) \le$$

$$\le \big(\|y_0\| + (\beta - x_0)M\big) \exp\big(M(\beta - x_0)\big), \quad \forall \ x \in [x_0, \beta).$$

Am ajuns astfel la o contradicţie, fapt care demonstrează că, în mod necesar, $\beta = x_2$. Analog se arată că $\alpha = x_1$. □

Utilizînd Teorema 2.9 se poate demonstra şi următorul rezultat.

TEOREMA **2.10** *Fie $\Omega = \mathbf{R}^{n+1}$ şi fie $y = \varphi(x)$ o soluţie saturată la dreapta, definită pe intervalul $[x_0, X)$. Atunci are loc una si numai una din următoarele două situaţii: (i) $X = +\infty$, (ii) $\lim_{x \to X} \|\varphi(x)\| = +\infty$*

Demonstraţie. Din Teorema 2.9 rezultă că orice punct limită pentru $x \to X$ al graficului $\{(x, \varphi(x)); \quad x \in [x_0, X)\}$ este punctul de la infinit (deoarece în acest caz $Fr(\Omega)$ este formată din mulţimea punctelor de la infinit). Dacă $X < +\infty$ urmează atunci în mod necesar $\lim_{x \to X} \|\varphi(x)\| = +\infty$. Cu aceasta teorema este demonstrată. □

Teorema 2.10 spune că o soluţie φ este fie definită pe întreaga semiaxă, fie "explodează"în timp finit (fenomen întîlnit în literatură sub denumirea de "blow-up").

Exemplu *Să se determine soluţia saturată la dreapta a problemei Cauchy*

$$y' = y^2 - 1, \quad y(0) = 2 \tag{2.34}$$

şi să se reprezinte grafic această soluţie.
Soluţia problemei Cauchy (2.34) este dată de

$$y(x) = \frac{3 + e^{2x}}{3 - e^{2x}}$$

deci intervalul maxim de definiţie la dreapta este $[0, \ln \sqrt{3})$.

2.3 Continuitatea soluţiei în raport cu parametrii şi cu condiţiile initiale

Am văzut că în anumite condiţii, fiind dat punctul iniţial (x_0, y_0) există o soluţie maximală unică a cărei valoare în x_0 este y_0. In cele ce urmează vom studia cum depinde această soluţie de (x_0, y_0). In general, dacă sistemul de ecuaţii diferenţiale depinde continuu de un număr de parametrii va rezulta că soluţiile sînt şi ele funcţii continue de parametrii. Aceste teoreme au o anumită semnificaţie fizică; pentru fenomenele descrise de sisteme de ecuaţii diferenţiale, mici abateri sau erori în condiţiile iniţiale sau în însăşi legea de evoluţie nu deformează prea puternic procesul. Cum asemenea perturbaţii sau erori sînt întotdeauna inevitabile, proprietatea de continuitate în raport cu condiţiile iniţiale şi cu parametrii asigura că descrierea evoluţiei proceselor prin ecuaţii diferenţiale şi date iniţiale este adecvată.

TEOREMA **2.11** *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$, $\Lambda \subset \mathbf{R}^l$ mulţimi deschise, $f : \Omega \times \Lambda \to \mathbf{R}^n$ o funcţie continuă pe $\Omega \times \Lambda$ local lipschitziană în (y, λ), adică pentru orice compact $\tilde{K}$ din $\Omega \times \Lambda$ există $L_{\tilde{K}} > 0$ astfel ca*

$$\|fx, y_1, \lambda_1) - f(x, y_2, \lambda_2)\|_{\mathbf{R}^n} \leq L_{\tilde{K}}(\|y_1 - y_2\|_{\mathbf{R}^n} + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{\mathbf{R}^l}$$

pentru orice (x, y_1, λ_1), (x, y_2, λ_2) din $\tilde{K}$.
Fie $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\lambda_0 \in \Lambda$; notăm cu $y(x; \lambda)$ soluţia maximală a sistemului

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$$

care pentru $x = x_0$ ia valoarea y_0. Fie J_0 intervalul de definiţie al soluţiei $y(x; \lambda_0)$, iar $\bar{J} \subset J$ compact. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ_ε cu proprietatea că $\|\lambda - \lambda_0\| < \delta_\varepsilon$ implică:

1) soluţia $y(x; \lambda)$ este definită pe $\bar{J}$;

2) $\|y(x; \lambda) - y(x; \lambda_0)\| < \varepsilon_0$ pentru orice $x \in \bar{J}$; mai precis există $\mu > 0$ astfel ca $\|y(x; \lambda) - y(x; \lambda_0)\| \leq \mu \|\lambda - \lambda_0\|$.

Demonstraţie. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $\Omega = I \times G$ unde I este un interval din $\mathbf{R}$ iar G o mulţime deschisă din $\mathbf{R}^n$. Funcţia $y(x;\lambda_0)$ este continuă; imaginea prin această funcţie a compactului $\bar{J}$ este o mulţime compactă din G. Putem găsi un compact K, cu interiorul nevid, înclus în G şi care conţine în *interior* toate punctele $y(x,\lambda_0), x \in \bar{J}$. Luăm de asemenea punctele $y(x,\lambda_0)$, $x \in \bar{J}$. Luăm de asemenea un compact $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. Pe mulţimea compactă $\tilde{J} \times K \times \tilde{\Lambda}$, funcţia $f(x,y,\lambda)$ este lipschitziană în (y,λ), fie $L > 0$ constantă de lipschitzianeitate. Fie $b > 0$ astfel ca $\{y; \|y - y_0\| \leq b\} \subset K$; $a > 0$ astfel ca $\{x; |x - x_0| \leq a\} \subset \bar{J}$şi $M = \sup\{\|f(x,y,\lambda)\|; x \in \bar{J}, y \in K, \lambda \in \bar{\Lambda}\}$. M este finit pentru că f este continuă pe $\Omega \times \Lambda$ şi $\bar{J} \times K \times \bar{\Lambda}$ este un compact din $\Omega \times \Lambda$. Conform teoremei de existenţă, soluţia $y(x;\lambda)$ este definiţă pe $|x - x_0| \leq \alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ oricare ar fi $\lambda \in \tilde{\Lambda}$. Pentru orice x cu $|x - x_0| \leq \alpha$ avem $\|y(x;\lambda) - y_0\| \leq b$, deci $y(x,\lambda) \in K$. Fie $\mathcal{M}_\lambda$ mulţimea punctelor x din $\bar{J}$ cu proprietatea că $y(\cdot;\lambda)$ este definită pe intervalul $[x_0, x]$ şi că pentru orice $t \in [x_0, x]$ avem $y(t;\lambda) \in K$. Consideraţiile de mai sus arată că $\mathcal{M}_\lambda$ nu este vidă, ea conţine pentru orice $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ puncte din $[x_0, x_0 + \alpha]$. Pentru orice $x \in \mathcal{M}_\lambda$ avem

$$y(x;\lambda_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t;\lambda_0), \lambda_0) dt$$

$$y(x;\lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t;\lambda), \lambda) dt$$

deci

$$y(x;\lambda) - y(x;\lambda_0) = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t;\lambda), \lambda) - f(t, y(t;\lambda_0), \lambda_0) dt$$

de unde

$$\|y(x; -y(x;\lambda_0)\| \leq \int_{x_0}^{x} L\|y(t;\lambda) - y(t;\lambda_0)\| dt + \int_{x_0}^{x} L\|\lambda - \lambda_0\| dt$$

deci, folosind lema lui Gronwall

$$\|y(x;\lambda) - y(x;\lambda_0)\| \leq L\|\lambda - \lambda_0\| \exp(L|x - x_0|). \tag{2.35}$$

Fie acum $\beta_\lambda = \sup \mathcal{M}_\lambda$; $\mathcal{M}_\lambda \subset \bar{J}$, deci $\beta_\lambda \in \bar{J}$. Dacă β_λ este extremitatea lui $\bar{J}$, afirmaţiile teoremei rezultă demonstrate. Dacă β_λ nu este extremitate pentru $\bar{J}$, atunci $y(\beta_\lambda;\lambda)$ aparţine frontierei lui K. Intr-adevăr, pentru $x < \beta_\lambda$ avem $y(x;\lambda) \in K$, deci $y(\beta_\lambda;\lambda) \in K$ şi dacă $y(\beta_\lambda;\lambda) \in int(K)$ ar exista puncte $x > \beta_\lambda$, $x \in \bar{J}$ cu $y(t;\lambda) \in K$ pentru $y \in [x_0, x]$, ceea ce ar contrazice definiţia lui β_λ ca margine superioară. Compactul K a fost ales astfel încît să conţină în interior punctele $y(x;\lambda_0)$ cu $x \in \bar{J}$. Fie d distanţa de la $y(\tilde{J};\lambda_0) = \{y(x;\lambda_0); x \in \bar{J}\}$ la frontiera lui K. Avem $d > 0$, deoarece

$$d = \inf\{\|y - z\|; y \in y(\bar{J};\lambda_0), z \in Fr(K)\}.$$

Funcţia $(y,z) \to \|y-z\|$ este continuă, iar $y(\bar{J};\lambda_0) \times Fr(K)$ este o mulţime compactă, deci mărginea inferioară este atinsă şi cum $y(\bar{J};\lambda_0) \cap Fr(K) = \emptyset$ nu putem avea $d = 0$.

Fie avem $\|\lambda - \lambda_0\|$ suficient de mic pentru ca $l\|\lambda-\lambda_0\|e^{Ll} < d/2$, unde l este lungimea intervalului $\tilde{J}$. Pentru asemenea valori vom avea

$$0 < d \leq \|y(\beta_\lambda;\lambda_0) - y(\beta_\lambda;\lambda)\| \leq le^{Ll}\|\lambda-\lambda_0\| < \frac{d}{2},$$

ceea ce este contradictoriu. In acest fel este demonstrat că β_λ este extremitatea lui $\bar{J}$ pentru $\|\lambda-\lambda_0\|$ suficient de mic, deci soluţiile $y(x;\lambda)$ sînt definite pe $\{x > x_0\} \cap \bar{J}$ şi veriffică

$$\|y(x;\lambda) - y(x;\lambda_0)\| \leq Le^{Ll}\|\lambda-\lambda_0\|.$$

Pentru $x \leq x_0$ raţionamentul se face în acelaşi mod. In acest fel ambele afirmaţii ale teoremei rezultă demonstrate. □

TEOREMA **2.12** *Fie $f : \Omega \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ continuă pe Ω, local lipschitziană. Fie $(x_0, y_0) \in \Omega$ şi $y(x; x_0, y_0)$ soluţia maximală a sistemului*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.36}$$

care în punctul x_0 în valoare y_0 . Fie $\tilde{J}$ intervalul de definiţie al soluţiei $y(x;\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$, $\bar{J} \subset \tilde{J}$, , $\bar{J}$ compact. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există δ_ε cu proprietatea că pentru $|x-\tilde{x}_0| + \|y-\tilde{y}_0\| < \delta_\varepsilon$ soluţia $y(x;x_0,y_0)$ este definită pe $\bar{J}$ şi $\|y(x;x_0,y_0) - y(x;\tilde{x}_0,\tilde{y}_0\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in \bar{J}$.

Demonstraţie. Vom obţine rezultatele prezentate mai sus ca un corolar al teoremei de continuitate în raport cu parametrii (Teorema 2.11).

Fie (τ, ξ) un punct arbitrar în Ω. Introducem în ecuaţia (2.36), în locul variabilei independente x, o nouă variabilă independentă s cu ajutorul formulei

$$x = \tau + s. \tag{2.37}$$

Inlocuim de asemenea în ecuaţia (2.36) funcţia vectorială necunoscută y prin o nouă funcţie necunoscută z legată de y prin formula

$$y = \xi + z. \tag{2.38}$$

Ecuaţia (2.36) se va scrie în noile variabile

$$\frac{dz}{ds} = f(\tau+s, \xi+z). \tag{2.39}$$

Cum funcţia $f(x, y)$ în variabile x şi y este definită în mulţimea Ω, funcţia

$$g(s, z; \tau, \xi) = f(\tau + s, \xi + z) \tag{2.40}$$

în variabilele s, z, τ, ξ este definită cu condiţia ca punctul $(\tau + s, \xi + z)$ să aparţină mulţimii Ω. Se vede, cu uşurinţă, că această condiţie defineşte în spaţiul $\mathbf{R}^{2n+2}$ a variabilelor s, z, τ, ξ mulţime deschisă $\tilde{\Omega}$ în care funcţia g definită prin (2.40) este continuă şi local lipschitziană in variabilele z, τ, ξ. Vom presupune că τ, ξ sînt parametrii în ecuaţia (2.39) şi fie

$$y = \psi(s, \tau, \xi) \tag{2.41}$$

o soluţie maximală a ecuaţiei (2.40) pentru valorile iniţiale $s = 0$, $z = 0$, altfel zis soluţia verificînd condiţiile iniţiale

$$\psi(0, \tau, \xi) = 0. \tag{2.42}$$

Revenind la coordonatele iniţiale cu ajutorul formulelor (2.37) şi (2.38) obţinem funcţia

$$y = \varphi(x; \tau, \xi) = \xi + \psi(x - \tau; \tau, \xi) \tag{2.43}$$

care este, cum arată o verificare directă, soluţia ecuaţiei (2.36) satisfăcînd condiţia iniţială

$$\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi.$$

Cum soluţia (2.41) este maximală, soluţia (2.43) este de asemenea maximală, deoarece dacă soluţia (2.43) ar putea fi prelungită, ar putea la fel ca să fie prelungibilă (2.41).

Din ipotezele asupra lui f rezultă ca g satisface ipotezele din Teorema 2.11, şi cu aceasta rezultatele cerute în enunţul teoremei sînt verificate. □

2.4 Diferenţiabilitatea soluţiei în raport cu parametrii şi cu condiţiile iniţiale

Vom considera în Teorema 2.13 diferenţiabilitatea în raport cu parametru α a soluţiei sistemului

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda)$$

apoi în Teoremele 2.14 si 2.15 diferenţiabilitatea respectiv derivabilitatea în raport cu y_0 respectiv x_0 a soluţiei $y = y(x; x_0, y_0)$ pentru problema Cauchy

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

TEOREMA **2.13** *Fie* $f : I \times G \times \Lambda \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^n$ *presupusă continuă în* $I \times G \times \Lambda$ *şi că admite derivate partiale în raport cu* (y, λ) *în* $G \times \Lambda$ *continue în* $I \times G \times \Lambda$.

Fie $(x_0, y_0, \lambda) \in I \times G \times \Lambda$ *şi* $y(x; \lambda)$ *soluţia maximală a problemei*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \lambda), \quad y(x_0, \lambda) = y_0. \tag{2.44}$$

Fie $\lambda_0 \in \Lambda$ *şi* $J_0 \subset I$ *intervalul de definiţie al soluţiei* $y(x; \lambda_0)$, $\bar{J} \subset J_0$ *compact.*

Atunci există o vecinătate V *a lui* λ_0 *cu proprietatea că pentru* $\lambda \in V$ *soluţiile* $y(x; \lambda)$ *sînt definite pentru* $x \in \bar{J}$, *sînt diferenţiabile în raport cu* λ *in* λ_0 *şi matricea derivatelor partiale* $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(x; \lambda)$ *este matricea de soluţii a sistemului*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; \lambda_0), \lambda_0)\, z + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, y(x; \lambda_0), \lambda_0) \tag{2.45}$$

determinată de condiţia $z(x_0) = 0$.

Demonstraţie. Există vecinătatea V astfel încît pentru $\lambda \in V$ soluţia $y(x; y)$ să fie definită pentru orice $x \in \bar{J}$ rezultă din teorema de continuitate în raport cu parametrii (Teorema 2.11) Pentru a demonstra diferenţiabilitatea pornim de la

$$y(x; \lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t; \lambda), \lambda) dt),$$

$$y(x; \lambda_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0) dt,$$

$$Z(x) = \int_{x_0}^{x} \Big[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t; \lambda_0), \lambda_0) Z(t) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0)\Big] dt$$

şi de aici deducem

$$y(x; \lambda) - y(x, \lambda_0) - Z(x)(\lambda - \lambda_0) = \int_{x_0}^{x} \Big\{ f(t, y(t, \lambda), \lambda) - f(t, y(z; \lambda_0), \lambda_0) -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t; \lambda_0), \lambda_0) Z(t)(\lambda - \lambda_0) - \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\Big\} dt.$$

Din ipotezele relative la funcţia f rezultă că ea este diferenţiabilă în punctul $(y(t, \lambda_0), \lambda_0)$, deci putem scrie

$$f(t, y(t, \lambda) - f(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t, \lambda_0), \lambda_0)[y(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)] +$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y(t;\lambda_0), \lambda_0)(\lambda - \lambda_0) + \varepsilon(t, y(t;\lambda), \lambda)(\|y(t;\lambda) - y(t,\lambda_0)\| + \|\lambda - \lambda_0\|)$$

unde $\varepsilon(t, y(t,\lambda), \lambda)$ tinde către zero cînd λ tinde către λ_0 şi $y(t;\lambda)$ tinde către $y(t;\lambda_0)$. Din teorema de continuitate în raport cu parametru deducem $y(t,\lambda)$ tinde la $y(t;\lambda_0)$ cînd λ tinde la λ_0, deci $\varepsilon(t, y(t,\lambda), \lambda)$ tinde la zero cînd λ tinde la λ_0; mai mult convergenţa are loc uniform în raport t pentru λ tinzînd la λ_0, deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ au fost propuse continue pe $I \times G \times \Lambda$. Notînd $\tilde{\varepsilon}(\lambda) = \sup_{t\in\bar{J}} |\varepsilon(t, y(t;\lambda), \lambda)|$ avem $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0} \tilde{\varepsilon}(\lambda) = 0$. Tot din teorema de continuitate în raport cu parametru avem

$$\|y(t,\lambda) - y(t;\lambda_0)\| \le \tilde{L}\|\lambda - \lambda_0\|.$$

Ţinînd seama de continuitate în raport cu parametru avem

$$\|y(t;\lambda) - y(t;\lambda_0)\| \le \tilde{L}|\lambda - \lambda_0|.$$

Ţinînd seama de acestea avem presupunînd $x \ge x_0$

$$\|y(x;\lambda) - y(x;\lambda_0) - Z(x)(\lambda - \lambda_0)\| \le$$

$$l\tilde{\varepsilon}(\tilde{L} + 1)\|\lambda - \lambda_0\| + M \int_{x_0}^{x} \|y(t;\lambda) - y(t;\lambda_0) - Z(t)(\lambda - \lambda_0)\| dt$$

unde am notat cu l lungimea intervalului $\tilde{J}$ cu M un majorat pe $\tilde{J}$ pentru $\|\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y(t;\lambda_0), \lambda_0)\|$. Pe baza lemei lui Gronwall, deducem

$$\|y(x;\lambda) - y(x;\lambda_0) - Z(x)(\lambda - \lambda_0)\| \le (\tilde{L} + 1)\tilde{\varepsilon}(\lambda)\|\lambda - \lambda_0\| e^{Ml}$$

deci

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\|y(x,\lambda) - y(x;\lambda_0) - Z(x)(\lambda - \lambda_0)\|}{\|\lambda - \lambda_0\|} = 0.$$

Aceasta arată tocmai că $y(x;\lambda)$ este diferenţiabilă în raport cu λ în punctul λ_0 şi că matricea $\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_0) = Z(x)$. □

TEOREMA **2.14** *Fie $f : I \times G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ continuă în $I \times G$ şi de clasă C^1 în raport cu y; fie $(x_0, \tilde{y_0}) \in I \times G$, $J_0 \subset J$ intervalul de definiţie al soluţiei $y(x; x_0, \tilde{y_0})$ iar $\tilde{J} \subset J$ compact. Atunci există o vecinătate V a lui $\tilde{y_0}$ astfel încît pentru $y_0 \in V$ soluţia $y(x; x_0, y_0)$ este definită pe $\bar{J}$, diferenţiabilă în raport cu y_0 în punctul $\bar{y}_0$ şi matricea derivatelor parţiale $\dfrac{\partial y}{\partial y_0}(x; x_0, \tilde{y_0})$ este matricea fundamentală de soluţii a sistemului.*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y(x; x_0, \tilde{y_0})\Big)\, z.$$

Demonstraţie. Faptul că pentru $y_0 \in V$ soluţia este definită pe $\bar{J}$ rezultă din teorema de continuitate în raport cu condiţiile iniţiale. Fie acum

$$g(x, u, \lambda) = f(x, u + \lambda), \quad u(x; y_0) = y(x; x_0, y_0) - y_0.$$

Constatăm că u este definită pe $\bar{J} \times V$, $u(x_0, y_0) = 0$,

$$\frac{d}{dx}u(x; y_0) = \frac{d}{dx}y(x; x_0, y_0) = f(x, y(x; x_0, y_0)) = f(x, u(x; y_0) + y_0) =$$
$$g(x, u(x; y_0), y_0).$$

Funcţia g verifică ipotezele din teorema precedentă relativ la diferenţiabilitatea în raport cu parametrii. Din Teoreama 2.13 rezultă imediat că $u(x; y_0)$ este diferenţiabilă în raport cu y_0 în $\bar{y}_0$ şi cum $y(x; x_0, y_0) = u(x; y_0) + y_0$ rezultă că $y(x; x_0, y_0)$ este diferenţiabilă în raport cu y_0. Rămîne să stabilim afirmaţia relativă la matricea derivatelor parţiale. Avem

$$\frac{\partial}{\partial y_0}y(x; x_0, \tilde{y}_0) = \frac{\partial}{\partial y_0}u(x; \tilde{y}_0) + E$$

deci

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial y_0}(x; x_0, \tilde{y}_0) = \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y_0}u(x; \tilde{y}_0) =$$
$$\frac{\partial g}{\partial u}(x, u(x, \tilde{y}_0), \tilde{y}_0)\frac{\partial u}{\partial y_0}(x; \tilde{y}_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y(x; x_0, \tilde{y}_0)).$$

Dar

$$\frac{\partial g}{\partial u}(x, u(x; \tilde{y}_0), \tilde{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x; \tilde{y}_0) + \tilde{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; x_0, \tilde{y}_0))$$

iar

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda}(x, u(x; \tilde{y}_0), \tilde{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, u(x; \tilde{y}_0) + \tilde{y}_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; x_0, \tilde{y}_0)).$$

Rezultă

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial y_0}(x; x_0, \tilde{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; x_0, \tilde{y}_0)) \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial y_0}(x, \tilde{y}) + E\right]$$
$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial y_0}(x; x_0, \tilde{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; x_0, \tilde{y}_0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, \tilde{y}_0)$$

şi $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, \tilde{y}_0)$ este matricea de soluţii pentru sistemul din enunţ. Faptul că aceasta matrice coincide pentru $x = x_0$ cu matricea unitate rezultă fie direct din relaţia $y(x_0; x_0, y_0) = y_0$, fie faptul că $\frac{\partial u}{\partial y_0}(x_0, \tilde{y}_0) = 0$.

TEOREMA **2.15** *Fie* $f : I \times G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, *de clasă* C^1 *în* $I \times G$, $(\tilde{x_0}, y_0) \in I \times G$, J_0 *intervalul de definiţie al soluţiei* $y(x; \tilde{x}_0, y_0)$, *iar* $\bar{J} \subset J_0$ *compact. Atunci există o vecinatate* U *a lui* $\tilde{x}_0$ *astfel încît pentru* $x_0 \in U$ *soluţia* $y(x; x_0, y_0)$ *este definită pe* $\bar{J}$, *este derivabilă în raport cu* x_0 *în punctul* $\tilde{x}_0$ *şi derivata sa* $\dfrac{\partial y}{\partial x_0}(x; \tilde{x}_0, y_0)$ *este soluţia sistemului.*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x; \tilde{x}_0, y_0)\, z \tag{2.46}$$

determinată de condiţia $z(\tilde{x}_0) = -f(\tilde{x}_0, y_0)$.

Demonstraţie. Existenţa vecinătăţii U astfel încît soluţia $y(x; x_0, y_0)$ este definită pe $\bar{J}$ pentru $x_0 \in U$ rezultă din teorema de continuitate în raport cu condiţiile iniţiale. Luăm prin definiţie

$$g(\xi, y, x) = f(\xi + x_0, y), \quad u(\xi; x_0) = y(\xi + x_0; x_0, y_0).$$

Funcţia g este definită pe $(\bar{J}' - \{\tilde{x}_0\}) \times G \times U$, unde $\bar{J}' \supset \bar{J}$, este continuă odată cu f şi este de clasă C^1 în raport cu (y_0, x_0), deoarece f este de clasă C^1 pe $I \times G$. Avem apoi $u(0; x_0) = y_0$ şi

$$\frac{d}{d\xi} u(\xi; x_0) = \frac{d}{dx} y(\xi + x_0, x_0, y_0) =$$

$$f(\xi + x_0, y(\xi + x_0, x_0, y_0)) = g(\xi, u(\xi, x_0), x_0).$$

Putem aplica teorema de diferenţiabilitate în raport cu parametru şi deducem că $u(\xi; x_0)$ este diferenţiabilă în raport cu x_0 în $\tilde{x_0}$; mai mult, $u(\xi; x_0)$ este de clasă C^1 în raport cu (ξ, x_0). Din $y(x; x_0, y_0) = u(x - x_0; x_0)$ deducem, din teorema de derivare a funcţiilor compuse, că $y(x; x_0, y_0)$ este derivabilă în raport cu x_0 şi că

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial x_0}(x; \tilde{x_0}, y_0) = -f(x; \tilde{x}_0, y_0)) + \frac{\partial u}{\partial x_0}(x - \tilde{x}_0; \tilde{x}_0) \\ &\frac{\partial y}{\partial x_0}(\tilde{x_0}; \tilde{x_0}, y_0) = -f(\tilde{x}_0, y_0) \end{aligned} \tag{2.47}$$

Intr-adevăr,

$$\frac{\partial y}{\partial x_0}(x; \tilde{x}_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial \xi}(x - \tilde{x}_0, \tilde{x}_0) + \frac{\partial u}{\partial x_0}(x - \tilde{x}_0; \tilde{x}_0) =$$

$$-g(x - \tilde{x}_0, u(x - \tilde{x}_0; \tilde{x}_0) + \tilde{x}_0) + \frac{\partial u}{\partial x_0}(x - \tilde{x}_0; \tilde{x}_0) =$$

$$-f(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))+\frac{\partial u}{\partial x_0}(x-\tilde{x}_0;\tilde{x}_0).$$

şi deoarece $u(0,x_0)=y_0$ rezultă $\frac{\partial u}{\partial x_0}(0,\tilde{x}_0)=0$ deci $\frac{\partial y}{\partial x_0}(\tilde{x_0};\tilde{x}_0,y_0)=-f(\tilde{x}_0,y_0)$. Rămîne astfel să arătăm că $\frac{\partial y}{\partial x_0}(x;\tilde{x_0},y_0)$ este soluţie a sistemului (2.46) din enunţ. Avem

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial u}{\partial x_0}(\xi;\tilde{x}_0)=\frac{\partial g}{\partial u}(\xi,u(\xi;x_0),\tilde{x}_0)\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi;\tilde{x}_0)+\frac{\partial g}{\partial x_0}(\xi,u(\xi,\tilde{x}_0),\tilde{x}_0).$$

Cum

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\xi,u(\xi;\tilde{x_0}),\tilde{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi+x_0,u(\xi,\tilde{x}_0))=\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\tilde{x}_0),y(\xi+\tilde{x}_0;\tilde{x}_0,y))$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_0}(\xi,u(\xi,\tilde{x_0}),\tilde{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi+\tilde{x}_0,u(\xi;\tilde{x}_0))=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi+\tilde{x}_0,y(\xi+\tilde{x}_0;\tilde{x}_0,y_0))$$

deducem

$$\frac{d}{d\xi}\frac{\partial u}{\partial x_0}(x-\tilde{x}_0;\tilde{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))\cdot\frac{\partial u}{\partial x_0}(x-\tilde{x}_0;\tilde{x}_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))$$

Din (2.47) rezultă

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y(x;\tilde{x}_0,y_0}{\partial x_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))\frac{d}{dx}y(x;\tilde{x}_0,y_0)+\frac{d}{d\xi}\frac{\partial u}{\partial x_0}(x-\tilde{x}_0;\tilde{x}_0)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))f(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x;\bar{x}_0,y_0))\Big[\frac{\partial y}{\partial x_0}(x;\tilde{x}_0,y_0)+f(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))\Big]+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x;\tilde{x}_0,,y_0))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x;\tilde{x}_0,y_0))\cdot\frac{\partial y}{\partial x_0}(x;\tilde{x}_0,y_0)$$

şi demonstaţia este terminată. □

Probleme şi exerciţii

1. Să se demonstreze că soluţia problemei lui Cauchy

$$y'' + ay + f(y') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0 \tag{2.48}$$

unde a este o funcţie local lipschiztiană verificînd condiţia:

$$pf(p) \geq 0, \ \forall \ p \in \mathbf{R}$$

are ca interval maxim de definitie semiaxa $[x_0, +\infty)$.

Indicatie. Inmulţindu-se ecuaţia (2.48) cu y' rezultă evaluarea

$$(|y'(x)|^2)' + a(|y(x)|^2)' \leq 0, \quad \forall \ x \in [x_0, X).$$

Se deduce astfel că $y(x)$ şi $y'(x)$ sînt mărginite pe intervalul maxim de definiţie, după care se aplică Teorema 2.10.

2. Să se găsească soluţia problemei

$$y' + ay = e^{-x}, \ \ 0 \leq x < +\infty, \quad y(0) = y_0$$

şi să se studieze continuitatea soluţiei în raport cu parametrul a.

3. Să se găsească soluţia problemei

$$\varepsilon y' + y = 1 + x, \quad y(0) = 0, \quad x \leq 0$$

şi să se studieze comportarea soluţiei cînd $\varepsilon \to 0$.

4. Să se arate că ecuaţia

$$y' + \alpha y = f(x), \quad \alpha > 0$$

unde $|f(x)| \leq M$, pentru $x \in \mathbf{R}$ are o soluţie unică mărginită pe axa reală.

Indicaţie. Singura soluţie mărginită a ecuaţiei omogene pe axa reală este cea nulă. De aici rezultă unicitatea soluţiei mărginite, pe axa reală, a ecuaţiei neomogene. Apoi se observă că funcţia

$$y_0(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha(x-t)} f(t) dt$$

este mărginită pe toată axa reală şi este soluţie a ecuaţiei.

3 Ecuaţii diferenţiale liniare

O ecuaţie diferenţială de ordinul n este de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \quad x \in I \tag{3.1}$$

unde $f, a_0, a_1, \ldots, a_n$ sint functii continue pe un interval I al axei reale (care poate fi de forma $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, sau (a, b)). Dacă $f = 0$ ecuaţia (3.1) se numeşte *omogenă*, in caz contrar se zice ca este *neomogenă.*

O soluţie pentru ecuaţia (3.1) este o funcţie $y \in C^n(I)$ cu proprietatea ca

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1}(x) + \cdots + a_n(x)y(x) = f(x), \quad \forall \; x \in I.$$

In cele ce urmează vom face un studiu pentru ecuaţia (3.1) presupunînd, pentru început, că $a_0(x) \neq 0$, pentru orice $x \in I$, deci după impartirea cu a_0 şi apoi rebotezînd funcţiile obţinem ecuaţia

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \quad x \in I$$

3.1 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene

Considerăm operatorul $L : C^n(I) \to C(I)$ definit prin

$$L(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y. \tag{3.2}$$

Evident, operatorul L este liniar. Determinarea soluţiilor ecuaţiei

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0 \tag{3.3}$$

revine la determinarea nucleului lui L. Evident, nucleul lui L este un subspaţiu vectorial din $C^n(I)$. Sîntem interesaţi de dimensiunea nucleului lui L.

PROPOZIŢIA **3.1** *Dacă* $y_1, \ldots, y_n \in C^{n-1}(I)$ *sînt liniar dependente atunci determinantul*

$$W(x; y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

este identic nul.

Determinantul $W(x, y_1, \ldots, y_n)$ este wronskianul funcţiilor $y_1, \ldots, y_n$ sau determinantul lui Wronsky (1778 – 1853).

Demonstraţie. Din ipoteză, rezultă că una din funcţiile $y_1, \ldots, y_n$ este o combinaţie liniară a celorlalte. De exemplu există $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ în $\mathbf{R}$ cu

$$y_n = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}$$

iar prin derivare succesivă obţinem

$$y_n' = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i y_i', \quad \ldots, \quad y_n^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i y_i^{(n-1}.$$

Inlocuind y_n şi derivatele sale în expresia lui W obţinem cu uşurinţă rezultatul cerut. □

PROPOZIŢIA **3.2** *Dacă $y_1, \ldots, y_n \in Ker(L)$ sînt liniar independente, atunci $W(x, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ pentru orice $x \in I$.*

Demonstraţie. Presupunem contrariu şi anume că există $x_0 \in I$ astfel încît $W(x_0, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Sistemul algebric

$$\begin{aligned} &C_1 y_1(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ &\ldots\ldots \\ &C_1 y_n^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{aligned}$$

are cel puţin o soluţie nebanală $C_1^0, \ldots, C_n^0$. Pentru $\tilde{y} = C_1^0 y_1 + \cdots C_n^0 y_n$, avem $\tilde{y}(x_0) = 0$, $\tilde{y}'(x_0) = 0$, $\ldots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$ şi din unicitatea soluţiei problemei Cauchy $L(y) = 0, \quad (y, y', \ldots, y^{(n-1)})(x_0) = 0$ rezultă $\tilde{y}(x) = 0$, pentru orice $x \in I$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^0 y_i = 0$$

cea ce contrazice liniar independenţa funcţiilor $y_1, \ldots. y_n$. □

Ca o consecinţă a celor de mai sus obţinem că dacă $y_1, \ldots, y_n \in Ker(L)$, atunci $W(x, y_1, \ldots, y_n)$ **sau** este identic cu zero şi în acest caz sistemul de funcţii este liniar dependent, **sau** este diferit de zero pentru orice $x \in I$ şi în acest caz sistemul de funcţii este liniar independent. Mai mult, avem următorul rezultat datorat lui Liouville (1809 – 1882).

PROPOZIŢIA **3.3** *Dacă $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Ker}\,(L)$ atunci*

$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = W(x_0, y_1, \ldots, y_n) \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_1(s) ds\Big). \tag{3.4}$$

Demonstraţie. Fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că sistemul $y_1, \dots, y_n$ este liniar independent (în caz contrar $W(x, y_1, \dots, ...y_n) \equiv 0$ conform Propoziţiei 3.1 şi formula (3.4) este evident adevărată). Ţinînd seama de formula de derivare a unui determinant, va rezulta

$$\frac{dW}{dx}(x, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}(x) =$$

$$= -a_1(x)W(x, y_1, \dots, y_n),$$

de unde

$$W(x, y_1, \dots, y_n) = W(x_0, y_1, \dots, y_n) \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a_1(s)ds\Big).$$

□

Formula (3.4) este cunoscută în litertură ca formula Abel–Liouville.

PROPOZIŢIA **3.4** *Există în* Ker (L), *n funcţii liniar independente.*

Demonstraţie. Fie $y_1, \dots, y_n$ soluţiile următoarelor probleme Cauchy:

$$L(y) = 0, \quad y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0, \dots, y_1^{(n-2)}(x_0) = 0, y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$L(y) = 0, \quad y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1, \dots, y_2^{(n-2)}(x_0) = 0, y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\dots$$
$$L(y) = 0, \quad y_n(x_0) = 0, y_n'(x_0) = 0, \dots, y_n^{(n-2)}(x_0) = 0, y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

sau scris compact

$$L(y_i) = 0, \quad y_i^{(k)}(x_0) = \delta_{i,k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Deoarece $W(x_0, y_1, \dots, y_n) = \det(E) \neq 0$, rezultă $W(x, y_1, \dots, y) \neq 0$ pentru orice $x \in I$, deci $y_1, \dots y_n$ sînt funcţii liniar independente. □

TEOREMA **3.1** *Nucleul operatorului L, definit de* (3.2), *are dimensiunea n, adică* $\dim Ker(L) = n$.

Demonstraţie. Fie $y_1, \dots, y_n \in \operatorname{Ker}(L)$ liniar independente şi y un element oarecare din $\operatorname{Ker}(L)$. Pentru $x_0 \in I$ există $C = (C_1, \dots, C_n)$ astfel ca

$$\begin{aligned}
&C_1 y_1(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = y(x_0)\\
&C_1 y_1'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = y'(x_0)\\
&\quad\vdots\\
&C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0),
\end{aligned}$$

deoarece determinantul sistemului este $W(x_0, y_1, \dots, y_n) \neq 0$. Funcţia

$$z = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$

este soluţia problemei Cauchy

$$L(z) = 0, \quad z'(x_0) = y'(x_0), \dots, z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0),$$

deci folosind unicitatea soluţiei problemei Cauchy rezultă $y(x) = z(x)$ pentru orice $x \in I$, adică $y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$. Cum $y_1, \dots, y_n$ este un sistem de generatori liniar independenţi din $Ker(K)$ rezultă că $y_1, \cdots, y_n$ este o bază pentru $\operatorname{Ker}(L)$, deci $\dim \operatorname{Ker}(L) = n$. □

Exerciţiu. *Să se dea o demonstraţie directă fără a folosi propoziţiile 3.1 – 3.4, că nucleul operatorului L, definit de (3.2), este n.*

O bază a lui $\operatorname{Ker}(L)$ se va numi **sistem fundamental de soluţii** pentru ecuaţia (3.3). Dacă $y_1, \dots, y_n$ este un sistem fundamental de soluţii, atunci soluţia generală a ecuaţiei (3.1) este

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n,$$

deci problema integrării ecuaţiei omogene revine la a construi un sistem fundamental de soluţii pentru această ecuaţie.

Se observă, fără dificultate, că n funcţii formează un sistem fundamental de soluţii pe intervalul I, dacă şi numai dacă sînt soluţii şi sînt liniar independente.

REMARCA **3.1** *Orice $n+1$ soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n definite pe un interval I sînt liniar dependente pe I.*

Demonstraţie. Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$, n soluţii din cele $n+1$ date. Următoarele două cazuri sînt posibile.

a) Funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar dependente pe I, în acest caz $y_1, \ldots, y_n$ şi y_{n+1}, sînt liniar dependente pe I, deoarece legătura liniară dintre n funcţii este un caz particular al relaţiei liniare între $n+1$ funcţii în care factorul constant care înmulţeşte pe y_{n+1} este nul.

b) Funcţiile $y_1, \ldots, y$ sînt liniar independente pe I; în această situaţie ele formează un sistem fundamental, deci orice soluţie y_{n+1} se scrie sub forma

$$y_{n+1} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

cu $C_1, \ldots, C_n$ convenabil alese. Relaţia de mai sus se scrie însă

$$C_1 y_1 \ldots + C_n y_n - y_{n+1} = 0, \text{ pe } I,$$

de unde rezultă că $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ sînt liniar dependente pe I. □

Exemple :

1) Pentru ecuaţia

$$y'' - y = 0$$

funcţiile $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbf{R}$, deoarece

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2, \ x \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a ecuaţie date este

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

2) Pentru ecuaţia

$$y'' + y = 0$$

funcţiile $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ formează un sistem fundamental de soluţii pe $\mathbf{R}$, deoarece

$$W(x; y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \ x \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Construcţia ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul n cu un sistem fundamental de soluţii dat.

In cele de mai sus s-a văzut că unei ecuaţii diferenţiale liniare îi putem pune în corespondenţă un sistem fundamental de soluţii formate cu n funcţii liniar independente.

Problema pe care o considerăm acum este cea a determinării unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n care are un sistem fundamental de soluţii format cu n funcţii liniar independente date pe un interval I.

TEOREMA **3.2** *Două ecuaţii diferenţiale de ordinul* n*, omogene*

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0,$$

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0$$

care au acelaşi sistem fundamental de soluţii pe un interval dat I*, sînt identice pe* I*, adică*

$$a_k(x) = b_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad x \in I.$$

Demonstraţie. Să presupunem $a_k(x) \neq b_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ pe I. Dacă scădem cele două ecuaţii obţinem

$$[a_1(x) - b_1(x)]y^{(n-1)} + [a_2(x) - b_2(x)]y^{(n-2)} + \cdots + [a_n(x) - b_n(x)]y = 0$$

anume o ecuaţie de ordinul $(n-1)$, care admite aceleaşi soluţii ca şi ecuaţiile din enunţ, adică admite n soluţii liniar independente, ceea ce este în contradicţie cu un rezultat demonstrat anterior. De aici rezultă că pe I trebuie să avem $a_k(x) = b_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, deci cele două ecuaţii sînt identice. □

Din Teorema 3.2 deducem că un sistem $y_1, \ldots, y_n$ fundamental de soluţii pe I determină o ecuaţie diferenţială de ordinul n şi numai una, pentru care $y_1, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluţii pe I. Această ecuaţie este

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & \ldots & y_n \\ y' & y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)} & y_1^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

după cum se verifică imediat. Intr-adevăr, înlocuind pe y cu y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ în (3.5) determinantul este nul, deoarece are două coloane egale, deci ecuaţia (3.5) are soluluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ecuaţia (3.5) este efectiv de ordinul n deoarece coeficientul lui $y^{(n)}$ este wronskianul funcţiilor $y_1, \ldots, y_n$ care, prin ipoteză, formează un sistem fundamental de soluţii. □

Exemple :

1) Funcţiile $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ au $W(x, y_1, y_2) = 1$, $\forall\ x \in \mathbf{R}$, deci formează pe $\mathbf{R}$ un sistem fundamental de soluţii pentru o ecuaţie de ordinul doi. Ecuaţia diferenţială de ordunul doi determinată de y_1 şi y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & \cos x & \sin x \\ y' & -\sin x & \cos x \\ y'' & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad y'' + y = 0.$$

2) Funcţiile $y_1 = x$, $y_2 = x+1$ are $W(x, y_1, y_2) = -1$ pe $\mathbf{R}$, deci formează un sistem fundamental de soluţii. Ecuaţia diferenţială de ordinul doi determinată de y_1 şi y_2 este

$$\begin{vmatrix} y & x & x+1 \\ y' & 1 & 1 \\ y'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad y'' = 0.$$

3.2 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene

Considerăm ecuaţia

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x), \quad x \in I \tag{3.6}$$

Fie y_0 o soluţie particulară a ecuaţiei (3.6), şi y o soluţie oarecare a ecuaţiei (3.6). Avem $L(y - y_0) = L(y) - L(y_0) = f - f = 0$, deci $y - y_0 \in \mathrm{Ker}\,(L)$. Prin urmare, dacă $y_1, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene $L(y) = 0$, atunci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = y_0 + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i,$$

adică problema integrării unei ecuaţii diferenţiale neomogene revine la determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene şi la determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă.

Dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă atunci urmatoarea metodă **a variaţiei constantelor**, datorată lui Lagrange (1736 – 1813), permite determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene.

Fie $y_1, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene (3.3). Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei (3.6) sub forma

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x), \quad x \in I. \tag{3.7}$$

Avînd n funcţii necunoscute, putem impune $n - 1$ condiţii de o asemenea manieră ca problema să aibă o formă simplă. Avem

$$y'(x) = \sum_{i=1} C_i'(x)y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'(x)$$

Impunem condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i(x) = 0. \tag{3.8}$$

Atunci

$$y''(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y'(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i''(x).$$

Impunem a doua condiţie de forma

$$\sum_{i=0}^{n} C_i'(x)y_i'(x) = 0 \tag{3.9}$$

şi aşa mai departe pînă la derivata de ordinul $n-1$:

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_n^{(n-1)}(x)$$

şi impunem condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x) = 0. \tag{3.10}$$

Din

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1^n} C_i(x)y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{n-1}(x)$$

inlocuind y, y', ..., $y^{(n)}$ în ecuaţia (3.6) rezultă

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{3.11}$$

Prin urmare, din (3.8) – (3.11) se obţine pentru $C_1', \ldots, C_n'$ sistemul de ecuaţii algebrice

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil şi are o soluţie unică, deci

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = \varphi_n(x).$$

Se determină $C_1(x), \ldots, C_n(x)$ şi se înlocuieşte în (3.7) obţinîndu-se soluţia particulară pentru ecuaţia (3.7).

Exemplu. *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$y'' + \omega^2 y = f, \qquad \omega \in \mathbf{R}. \tag{3.12}$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

Utilizînd metoda variaţiei constantelor, căutăm o soluţie a ecuaţiei neomogene de forma

$$y(x) = C_1(x) \cos \omega x + C_2(x) \sin \omega x \tag{3.13}$$

şi obţinem sistemul

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos \omega x + C_2'(x) \sin \omega x = &\quad 0 \\ -\omega C_1'(x) \sin \omega x + \omega C_2'(x) \cos \omega z x = &\quad f(x) \end{aligned}$$

de unde

$$C_1'(x) = -\frac{f(x) \sin \omega x}{\omega}, \quad C_2'(x) = \frac{f(x) \cos \omega x}{\omega}$$

şi deci

$$C_1(x) = -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} f(s) \sin \omega s ds, \quad C_2(x) = -\frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} f(s) \cos \omega s ds.$$

Inlocuind C_1 şi C_2 astfel determinaţi în (3.13) obţinem

$$y_0(x) = \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} f(s) \sin \omega (x - s) ds,$$

deci soluţia generală a ecuaţiei (3.12) este

$$y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x + \frac{1}{\omega} \int_{x_0}^{x} f(s) \sin \omega (x - s) ds.$$

□

Avînd în vedere cele de mai sus, se observă că, integrarea unei ecuaţii diferenţiale revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă.

Exemplu : *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei*

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x. \tag{3.14}$$

Două soluţii particulare ale ecuaţiei omogene $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ sînt $y_1 = 1/x$, $y_2 = 1/x^2$. Avem de asemenea

$$W(x, y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^4},$$

deci pentru orice interval $I \subset \mathbf{R}$ care nu conţine punctul $x = 0$ soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene folosim metoda variaţiei constantelor. Avem

$$\frac{1}{x}C_1'(x) + \frac{1}{x^2}C_2'(x) = 0, \quad -\frac{1}{x^2}C_1'(x) - \frac{2}{x^3}C_2'(x) = \frac{\cos x}{x^2}$$

deci $C_1'(x) = \cos x$, $C_2'(x) = -x\cos x$, de unde

$$C_1(x) = \sin x + A_1, \quad C_2(x) = -x\sin x - \cos x + A_2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3.14) este

$$y(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} - \frac{\cos x}{x^2}$$

iar $-\dfrac{cosx}{x^2}$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

3.3 Ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Am văzut, în paragrafele anteriore, că integrarea unei ecuaţii diferenţiale liniare revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii.

Pentru ecuaţiile diferenţiale cu coeficienţi constanţi de forma

$$L(y) := y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0 \tag{3.15}$$

unde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$, putem să determinăm un sistem fundamental de soluţii. Căutăm soluţii particulare de forma

$$y = e^{rx},\ r \in \mathbf{R}$$

Are loc relaţia

$$L(e^{rx}) = e^{rx} f(r) \tag{3.16}$$

unde

$$f(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

este **polinomul caracteristic**, iar $f(r) = 0$ este **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei (3.15).

Se arată cu uşurinţă că

$$L(e^{rx}\, z) = e^{rx}\left[f(r)z + \frac{f'(r)}{1!}z' + \cdots + \frac{f^{(n)}(r)}{n!}z^{(n)}\right] \tag{3.17}$$

Intr-adevăr, din regula lui Leibniz (1646 – 1716) obţinem

$$(e^{rx}z)^{(k)} = \sum_{j}^{k} C_k^j (e^{rx})^{(k-j)} z^{(j)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j r^{k-j} e^{rz} z^{(j)}$$

deci
$$L(e^{rx}z) = e^{rx}[b_n z + b_{n-1}z' + \ldots + b_0 z^{(n)}],$$
unde
$$b_n = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = f(r)$$
iar
$$b_{n-j} = C_n^j r^{n-j} + a_1 C_{n-1}^j r^{n-j-1} + \ldots + a_{n-j} C_j^j = \frac{f^{(j)}(r)}{j!},$$
pentru $j = 1, 2, \cdots, n$.

Observăm că, pentru integrarea ecuaţiei diferenţiale (3.15) trebuie să ţinem seama de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice $f(r) = 0$.

i) Ecuaţia caracteristică are n radăcini reale şi distincte

Fie $r_1, \ldots, r_n$ rădăcinile ecuaţiei caracteristice. In acest caz, un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale (3.15) este
$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}, \quad \cdots, \; y_n(x) = e^{r_n x},$$
deoarece
$$W(x, y_1, \ldots, y_n) = e^{(r_1 + \ldots r_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$
iar soluţia generală a ecuaţiei (3.15) este
$$y = C_1 e^{r_1 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}.$$

ii) Ecuaţia are rădăcini reale multiple

Fie $r = r_1$ o rădăcină cu ordinul de multiplicitate p a ecuaţiei caracteristice, adică
$$f(r_1) = 0, \; f'(r_1) = 0, \ldots, f^{(p)-1}(r_1) = 0, \; f^{(p)}(r_1) \neq 0.$$
Identitatea (3.17) devine în acest caz
$$L(e^{r_1 x}z) = e^{r_1 x}\Big[\frac{f^{(p)}(r_1)}{p!} z^{(p)} + \cdots + \frac{f^{(n)}(r_1)}{n!} z^{(n)}\Big].$$
Inlocuind pe z cu $1, x, \ldots, x^{p-1}$ obţinem
$$L(e^{r_1 x}) = 0, \quad L(xe^{r_1 x}) = 0, \quad \ldots, L(x^{p-1}e^{r_1 x}) = 0$$

adică

$$y_1 = e^{r_1 x}, \quad y_2 = xe^{r_1 x}, \quad \ldots, y_p = x^{p-1}e^{r_1 x}$$

sînt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (3.15). Deci soluţiei $r = r_1$, multiplă de ordinul p, a ecuaţiei caracteristice, îi corespunde soluţia

$$y = (C_0 x^{p-1} + C_1 x^{p-2} + \ldots + C_{p_1})e^{r_1 x} = e^{r_1 x} Q_{p-1}(x)$$

pentru ecuaţia diferenţială (3.15).

Să presupunem că ecuaţia caracteristică $f(r) = 0$ are rădăcinile $r_1, \ldots, r_k$ multiple cu ordinele de multiplicitate respectiv $p_1, \ldots, p_k$ astfel ca $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = n$. In acest caz ecuaţia (3.15) are soluţiile

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ \ldots\ ,\ x^{p_1-1}e^{r_1 x},\ \ \ldots\ e^{r_k x},\ xe^{r_k x},\ \ \ldots,\ \ x^{p_k-1}e^{r_k x} \tag{3.18}$$

Pentru a arăta că aceste funcţii formează un sistem fundamental de soluţii este suficient să folosim următorul rezultat de algebră.

Dacă $r_1, \ldots, r_k$ sînt numere distincte două cîte două, iar $R_1, \ldots, R_k$ sînt polinoame neidentic nule atunci este imposibilă o identitate de forma

$$R_1(x)e^{r_1 x} + \cdots + R_k(x)e^{r_k}x = 0 \ \ \forall \ \ x \in \mathbf{R} \tag{3.19}$$

Să notăm cu $n_1, \ldots, n_k$ gradele polinoamelor $R_1, \ldots, R_k$ şi înmulţind (3.19) cu $e^{-r_1 x}$ şi apoi derivînd expresia rezultată, obţinem

$$\begin{aligned} R_1'(x) + [R_2'(x) + (r_2 - r_1)R_2(x)]e^{(r_2-r_1)x} + \cdots \\ +[R_k'(x) + (r_k - r_1)R_k(x)]e^{(r_k-r_1)x} = 0 \end{aligned}$$

în care R_i' este un polinom avînd gradul $n_i - 1$ iar $R_i' + (r_i - r_1)R_i$ este un polinom avînd gradul n_i. Derivînd relaţia obţinută de n_1 ori rezultă

$$S_2(x)e^{(r_2-r_1)x} + \cdots + S_k(x)e^{(r_k-r_1)x} = 0$$

sau

$$S_2(x)e^{r_2 x} + \cdots + S_k(x)e^{r_k x} = 0, \quad \forall\ x \in \mathbf{R},$$

unde $S_2, \ldots, S_k$ sînt polinoame avînd respectiv gradele $n_2, \ldots, n_k$. Utilizînd acelaşi procedeu, obţinem în final

$$U_k(x)e^{r_k x} = 0, \quad \forall \ \ x \in \mathbf{R},$$

unde U_k este un polinom cu gradul n_k. Dar $U_k \equiv 0$ dacă şi numai dacă $R_k \equiv 0$. Pentru aceasta observăm că, în general, un polinom $R_i \equiv 0$ dacă şi numai dacă $r_i R_i + R_i' \equiv 0$. Soluţia generală a ecuaţiei (3.15) în cazul rădăcinilor multiple este dată de

$$y(x) = e^{r_1 x} Q_1(x) + \cdots + e^{r_k x} Q_k(x)$$

unde $Q_i(x)$ sînt polinoame în x de grad cel mult $p_i - 1$.

iii) Ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe.

Soluţiile particulare găsite la punctele precedente sînt în acest caz complexe. Ele formează un sistem fundamental, deoarece proprietăţile demonstrate pentru soluţii reale rămîn valabile, ele bazîndu-se pe proprietăţi algebrice valabile şi în corpul numerelor complexe. Dar se pot găsi şi în acest caz soluţii reale. Intr-adevăr, dacă

$$y(x) = u(x) + iv(x)$$

este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (3.15), avem

$$L(u + iv) = L(u) + iL(v) = 0$$

adică $L(u) = 0$, $L(v) = 0$. Dacă $r = \alpha + i\beta$ este o soluţie a ecuaţiei caracteristice, atunci şi $r = \alpha - i\beta$ este o soluţie deoarece coeficienţii ecuaţiei caracteristice sînt reali. Acestor două soluţii le corespund pentru ecuaţia diferenţială (3.15) soluţiile reale

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

care sînt şi ele liniar independente. In caz contrar şi între soluţiile complexe ar exista o dependenţă liniară, fiecare soluţie complexă fiind o combinaţie liniară de două soluţii reale.

Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe multiple, se procedează la fel ca la punctul ii). Adică, în ipoteza că $r = \alpha + i\beta$ este o rădăcină multiplă de ordin p a ecuaţiei caracteristice şi $r = \alpha - i\beta$ va fi o soluţie multiplă de ordin p a aceleaşi ecuaţii. Lor le corespund soluţiile liniar independente.

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad \cdots, \quad x^{p-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad \cdots, \quad x^{p-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Exemple :

1) *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei :*

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = -1,\ r_3 = 2$, prin urmare soluţia generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

2) *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei :*

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei date este $r^2 + \omega^2 = 0$ care are rădăcinile $r_{1,2} = \pm i\omega$. Funcţiile $y_1 = \cos\omega x$ şi $y_2 = \sin\omega x$ formează un sistem fundamental de soluţii , soluţia generală are forma

$$y = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x.$$

3) *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale :*

$$y^{(6)} - y^{(5)} + 3y^{(4)} - 2y^{(3)} + 3y^{(2)} - y^{(1)} + y^{(0)} = 0.$$

Ecuaţia caracteristică asociată este

$$r^6 - r^5 + 3r^4 - 2r^3 + 3r^2 - r + 1 = 0$$

şi are rădăcinile $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $r_{3,4} = i$, $r_{5,6} = -i$. Funcţiile

$$y_1 = e^{x/2}\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big),\ y_2 = e^{x/2}\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big),\ y_3 = \cos x,\ y_4 = x\cos x,$$

$y_5 = \sin x,\ y_6 = x\sin x$ formează un sistem fundamental de soluţii, deci soluţia generală are forma

$$y = e^{x/2}\big(C_1\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 x\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\ \big) + (C_3 + C_4 x)\cos x + (C_5 + C_6 x)\sin x.$$

Cazul neomogen

Determinarea unei soluţii particulare pentru ecuaţia neomogenă se poate face cu metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange. Totuşi, în anumite cazuri se poate determina mai uşor o soluţie particulară a ecuaţiei

$$y^{(n)} + a_1 y'^{n-1} + \cdots + a_n y = g(x) \tag{3.20}$$

i) Presupunem ca g este un polinom de gradul m, adică

$$g(x) = \lambda_0 x^m + \cdots + \lambda_m.$$

- Dacă $a_n \neq 0$, ecuaţia diferenţială (3.20) are o soluţie de forma

$$y(x) = \mu_0 x^m + \cdots + \mu_m$$

unde coeficienţii $\mu_0, \dots, \mu_m$ se obţin prin identificare. Intr-adevăr, prin înlocuirea lui y în (3.20) se obţine un polinom de gradul m, care identificat cu membrul doi al ecuaţiei (3.20) permite determinarea coeficienţilor $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$. Din identificare se obţine

$$a_0\mu_0 = \lambda_0$$
$$\sum_{j=0}^{k} \mu_j a_{k-j} A_{m-j}^{k-j} = \lambda_k$$

din care se determină pe rînd $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m$.

• Dacă $a_n = 0, \dots, a_{n-p+1} = 0$, iar $a_{n-p} \neq 0$, ecuaţia (3.20) are o soluţie de forma

$$y = x^p(\mu_0 x^m + \dots + \mu_m) \tag{3.21}$$

unde coeficienţii $\mu_0, \dots, \mu_m$ se determină prin identificare. Intr-adevăr notînd $y^{(p)} = z$, ecuaţia (3.20) devine:

$$z^{(n-p)} + a_1 z^{n-p-1} + a_{n-p} z = \lambda_0 x^m + \dots + \lambda_m \tag{3.22}$$

cu $a_{n-p} \neq 0$. Aplicînd rezultatul stabilit anterior, ecuaţia (3.22) are soluţia

$$z = \mu_0 x^m + \dots + \mu_m.$$

Integrînd de p ori şi neglijînd constanta de integrare de fiecare dată, obţinem (3.21).

ii) Presupunem că g are forma

$$g(x) = e^{\alpha x}[\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m].$$

• Dacă α nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, ecuaţia diferenţială (3.20) are o soluţie de forma

$$y(x) = e^{\alpha x}(\mu_0 x^m + \dots + \mu_m)$$

unde coeficienţii se determină prin identificare.

• Dacă α este o rădăcină multiplă de ordin p a ecuaţiei caracteristice, ecuaţia diferenţială (3.22) are o soluţie de forma

$$y(x) = e^{\alpha x} x^p(\mu_0 x^m + \mu_1 x^{m-1} + \dots + \mu_m),$$

unde $\mu_0, \dots, \mu_m$ se determină prin identificare. Intr-adevăr, înlocuind în ecuaţia (3.20) pe $y = e^{\alpha x} z$ şi ţinînd seama de identitatea (3.17) se obţine

$$z^{(n)} + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots + \frac{f'(\alpha)}{1!} z' + f(\alpha) z = \lambda_0 x^m + \dots + \lambda_0.$$

Aplicînd rezultatele de la punctul i) la cazul pe care-l studiem, obţinem rezultatele enunţate mai sus.

iii) Considerăm ecuaţiile diferenţiale cu coeficienţi constanţi

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x \tag{3.23}$$

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_n z = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x \tag{3.24}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, iar P un polinom avînd gradul m. Punînd $w = y + iz$, avem

$$w^{(n)} + a_1 w^{(n-1)} + \cdots + a_n w = e^{(\alpha + i\beta)x} P(x).$$

Aplicînd rezultatele de la puncul ii) obţinem:

• Dacă în ecuaţiile (3.23), (3.24) P este un polinom de gradul m şi dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţiile diferenţiale (3.23) şi (3.24) au soluţii de forma

$$e^{\alpha x} \left[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right]$$

unde Q_1 şi Q_2 sînt polinoame de gradul m ale căror coeficienţi se determină prin identificare.

• Dacă în ecuaţiile (3.23) şi (3.24), P este un polinom de gradul m şi dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţiile diferenţiale (3.23) şi (3.24) au soluţii de forma

$$e^{\alpha x} x^p \left[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right],$$

unde coeficienţii polinoamelor Q_1 şi Q_2, avînd gradul m, se determinînă prin identificare.

Exemple :

1) *Să se integreze ecuaţia :*

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Pentru determinarea unei soluţii a ecuaţiei neomogene folosim metoda variaţiei constantelor

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \quad -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

sau $C_1' = -1$, $C_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, de unde $C_1(x) = -x + A_1$, $C_2 = \ln |\sin x| + A_2$.

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este aşadar

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x + \sin x \cdot \ln|\sin x| - x \cos x$$

pe orice interval care nu conţine punctele $x = k\pi$, k întreg.

2) *Să se integreze ecuaţia diferenţială :*

$$y^{(6)} - y^{(4)} = 1 + x.$$

Integrăm mai întîi ecuaţia omogenă $y^{(6)} - y^{(4)} = 0$. Ecuaţia caracteristică $r^6 - r^4 = r^4(r^2 - 1) = 0$ are rădăcina cuadruplă $r_1 = 0$ şi rădăcinile simple $r_2 = 1$, $r_3 = -1$. Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 e^x + C_5 e^{-x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pentru ecuaţia neomogenă căutăm o soluţie particulară de forma

$$y_0 = Ax^4 + Bx^5.$$

Avem $y^{(4)} = 4!A + 5!Bx$, $y^{(5)} = 5!B$, $y^{(6)} = 0$ deci $-4!A - 5!Bx \equiv 1 + x$, de unde $A = -1/4!$, $B = -1/5!$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 e^x + C_5 e^{-x} - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5, \quad x \in \mathbf{R}$$

3) *Să se integreze ecuaţia :*

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 2x + 1.$$

Ecuaţia caracteristică $r^2 - 3r + 2 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, deci soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Pentru ecuaţia neomogenă căutăm o soluţie de forma

$$y_0 = Ae^{3x} + Bx + D$$

deoarece partea a doua este suma unui polinom de gradul întîi şi a unei exponenţiale. Avem

$$y_0' = 3Ae^{3x} + B, \quad y_0'' = 9Ae^{3x}$$

deci

$$9Ae^{3x} - 3(3Ae^{3x} + B) + 2(Ae^{3x} + Bx + D) = e^{3x} + 2x + 1$$

sau $2A = 1$, $2B = 2$, $-3B + 2D = 1$ $A = 1/2$, $B = 1$, $D = 2$, prin urmare

$$y_0 = \frac{1}{2}e^{3x} + x + 2$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este aşadar

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + x + 2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4) *Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei :*

$$y''' - y'' + y' - y = \cos x.$$

Ecuaţia omogenă are ecuaţia caracteristică $r^3 - r^2 + r - 1 = 0$, avînd radăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

O soluţie particulaă a ecuaţiei neomogene va fi de forma

$$y_0 = x(A \cos x + B \sin x).$$

Prin derivare şi identificare se obţine

$$y_0 = -\frac{x}{4} \sin x - \frac{x}{4} \cos x$$

deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x}{4} \cos x - \frac{x}{4} \sin x, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.4 Ecuaţii diferenţiale liniare reductibile la ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Pentru ecuaţia diferenţială liniară

$$L(y) := y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = 0 \tag{3.25}$$

se consideră în cele ce urmează două categorii de transformări, una de variabilă independentă iar alta a variabilei dependente.

PROPOZIŢIA **3.5** *Dacă ecuaţia* (3.25) *este reductibilă la o ecuaţie diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi prin schimbarea variabilei independente* $t = t(x)$, *atunci* t *este o primitivă a funcţiei* $x \longrightarrow C \sqrt[n]{|a_n(x)|}$, *unde* C *este o constantă.*

Demonstraţie. Definim funcţia z prin relaţia

$$z(t) = y(x(t)) \text{ sau } y(x) = z(t(x)).$$

Facem calculele în ipoteza că $n = 2$. Prin derivarea obţinem

$$y'(x) = z'(t(x)) \cdot t'(x), \quad y''(x) = z''(t(x))[t'(x)]^2 + z'(t(x)) \cdot t''(x)$$

Inlocuind expresiile y, y' şi y'' în ecuaţie, obţinem

$$[t'(x)]^2\Big(z''(t(x)) + \frac{t''(x) + a_1t'(x)}{[t'(x)]^2}z'(t(x)) + \frac{a_2(x)}{['(x)]^2}z(t(x))\Big) = 0.$$

Cum dorim ca ecuaţia în z să aibă coeficienţi constanţi trebuie ca $[t'(x)]^2 = Ca_2(x)$ de unde $t(x) = C\displaystyle\int\sqrt{|a_2(x)|}dx$.

La fel se arată că $t(x)$ trebuie să fie de forma $t(x) = C\displaystyle\int\sqrt[n]{|a_n(x)|}dx$, în cazul general. □

Ecuaţia diferenţială Euler

Ecuaţia diferenţială liniară

$$x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}xy' + a_ny = g(x) \tag{3.26}$$

unde $a_k \in \mathbf{R}, k = 1, \ldots, n$, $g \in C(I)$ şi care se consideră pentru $x \neq 0$ este numită *ecuaţia diferenţială a lui Euler.*

Prin schimbarea de variabilă $|x| = e^t$ sau $t = \ln|x|$, ecuaţia diferenţială (3.15) se transformă într-o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi.

Intr-adevăr, pentru, $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\ln x) \\ y'(x) &= z'(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \\ y''(x) &= [z''(\ln x) - z'(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2} \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

şi prin inlocuire dispare variabila independenţă din primul membru al ecuaţiei (3.26), devenind astfel o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi.

Acelaşi lucru se obţine şi pentru $x < 0$, deci ecuaţia (3.26) se tansformă într-o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.

Ecuaţia diferenţială

$$(ax + b)^ny^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = g(x) \tag{3.27}$$

cu $a_i \in \mathbf{R}$, $g \in C(I)$ prin schimbarea de variabilă

$$|ax + b| = e^t$$

se transformă într-o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

Pentru integrarea ecuaţilor diferenţiale neomogene (3.26) şi (3.27) se foloseşte în general metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia diferenţială :*

$$x^2y'' - 2y = x^2 + \frac{1}{x}, \quad x > 0. \tag{3.28}$$

Substituţia $x = e^t$ transformă ecuaţia dată într-o ecuaţie neomogenă cu coeficienţi constanţi.

Intr-adevăr, considerînd transformare $y(x) = z(lnx)$ obţinem

$$y'(x) = z'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}, \quad y''(x) = \left[z''(x)(\ln x) - z'(\ln x)\right] \cdot \frac{1}{x^2}$$

sau

$$z''(t) - z'(t) - 2z(t)) = e^{2t} + e^{-t}.$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene este $r^2 - r - 2 = 0$, care are rădăcinile $r_2 = 2$ şi $r_1 = -1$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$z(t) = C_1e^{-t} + C_2e^2t.$$

Pentru determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene căutăm o soluţie de forma

$$z(t) \equiv C_1(t)e^{-t} + C_2(t)e^{2t}.$$

Din sistemul

$$C_1'(t)e^{-t} + C_2'^te^{2t} = 0, \quad -C_1'(t)e^{-t} + 2C_2'^te^{2t} = e^{2t} + e^{-t}$$

obţinem $C_1'(t) = -\frac{1}{3}(e^{3t} + 1)$ şi $C_2'(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}$, de unde

$$C_1(t) = A_1 - \frac{1}{9}e^{3t} - \frac{1}{3}t, \quad C_2(t) = A_2 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}e^{-3t},$$

deci soluţia generală a ecuaţie neomogene este

$$z(t) = A_1e^{-t} + A_2e^{2t} + \Big(\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\Big)e^{2t} + \Big(-\frac{1}{3}t - \frac{1}{9}\Big)e^{-t}.$$

Făcînd substituţia $t = \ln x$ obţinem că soluţia generală a ecuaţiei (3.28) este

$$y(x) = \frac{A_1}{x} + A_2x^2 + x^2\Big(\frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{9}\Big) - \Big(\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{9}\Big)\frac{1}{x}.$$

• Putem proceda şi în alt mod pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei (3.28). Se caută soluţii de forma $y(x) = x^r$ şi se obţine $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-1}$, apoi căutăm pentru ecuaţia neomogenă soluţii de forma

$$y(x) = C_1(x)x^2 + C_2(x)x^{-1}$$

utilizînd metoda variaţiei constantelor

$$C_1'(x)x^2 + C_2'(x)x^{-1} = 0, \quad C_1'(x)(x) - C_2'(-\frac{1}{x}) = \frac{f(x)}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^3}$$

de unde $C_1'(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}), \quad C_2'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + \frac{1}{x})$ şi deci

$$C_1(x) = \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^{-3}, \quad C_2(x) = -\frac{1}{9}x^{-3} - \frac{1}{3}\ln x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 \ln x - \frac{1}{9}x^{-1} - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3x}\ln x + C_1x^2 + C_2x^{-1} =$$

$$= x^2(\frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{9}) - \frac{1}{x}(\frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{9}) + C_1x^2 + C_2x^{-1}.$$

• Unele ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi variabili pot fi transformate în ecuaţii cu coeficienţi constanţi printr-o schimbare de funcţie de forma

$$y = u(x) \cdot z$$

unde z este noua funcţie necunoscută.

Să considerăm pentru exemplificare ecuaţia omogenă de ordinul doi scrisă sub forma

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3.29}$$

Introducem o nouă funcţie necunoscută z, legată de cea veche prin relaţia

$$y = u(x) \cdot z.$$

Calculînd derivatele succesive, apoi introcîndu-le în ecuaţia (3.29) obţinem

$$y' = u'(x)z + u(x)z', \quad y'' = u''(x)z + 2u'(x)z + u(x)z''$$

$$u(x)z'' + (2u'(x) + a(x))z' + (u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x))z = 0.$$

Dacă alegem u astfel ca $2u'(x) + a(x)u(x) = 0$ atunci coeficientul lui z' se anulează. Din $2u' + au = 0$ rezultă

$$u(x) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big).$$

Se obţine astfel ecuaţia

$$z'' + I(x)z = 0$$

unde $I(x)$ are forma

$$I(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x)$$

se numeşte invariant al ecuaţiei (3.29). Egalitatea invarianţilor a două ecuaţii de ordinul al doilea este condiţia necesară şi suficientă ca una din ele să poată fi transferată în cealaltă ecuaţie, printr-o substituţie de forma $y = u(x)z$.

Exemplu : *Să se integreze ecuaţia diferenţială :*

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x. \tag{3.30}$$

Efectuînd schimbarea de funcţie $y = u(x)z$ în ecuaţia omogenă

$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = 0. \tag{3.31}$$

obţinem

$$u''(x)z + 2u'(x)z' + u(x)z'' - 4x\big(u'(x)z + u(x)z'\big) + (4x^2 - 1)u(x)z = 0$$

adică

$$u(x)z'' + z'\big(2u'(x) - 4xu(x)\big) + z\big(u''(x) - 4xu'(x) + 4x^2u(x) - u(x)\big) = 0.$$

Anulînd coeficientul lui z', avem $2u' - 4xu = 0$, deci $u = e^{x^2}$. Substituţia căutată este $y(x) = e^{x^2} \cdot z(x)$, deci ecuaţia în z devine

$$z'' + z = 0. \tag{3.32}$$

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei (3.32) este $r^2 + 1 = 0$, deci $r = \pm i$. Soluţia generală a ecuaţiei (3.32) este

$$z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Pentru ecuaţia (3.31), soluţia generală este

$$y(x) = e^{x^2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

O soluţie particulară a ecuaţiei (3.30) este

$$y_0(x) = e^{x^2}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

unde coeficienţii A şi B se determină prin identificare şi se obţin ca fiind $A = 0$, $B = 1$. Soluţia generală a ecuaţiei (3.32) este dată de

$$y(x) = e^{x^2}(C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin 2x).$$

La fel se poate obţine o soluţie a ecuaţiei neomogene prin metoda variaţiei constantelor.

3.5 Proprietăţi ale soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul doi

O ecuaţie diferenţială de ordinul doi poate să apară sub una din următoarele trei forme:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f_1(x), \quad a, b, f \in C(I) \tag{3.33}$$

$$(p(x)y')' + q(x)y = f_2(x), \ p, p', q, f_2 \in C(I), \ p(x) \neq 0 \tag{3.34}$$

$$y''(x) + c(x)y = f_3(x), c, f_3 \in C(I) \tag{3.35}$$

numite **forma normală, forma autoadjunctă** respectiv **forma redusă.**

In anumite condiţii impuse coeficienţilor acestor ecuaţii, cele trei forme sînt echivalente. Astfel din (3.34) rezultă (3.33) cu $a = \dfrac{p'}{p}$, $b = \dfrac{q}{p}$, $f_1 = \dfrac{f_2}{p}$, iar din (3.33) rezultă (3.34), inmulţind (3.33) cu $p(x) = \exp(\int_{x_0}^{x} a(s)ds)$ şi luînd $q(x) = b(x)\exp(\int_{x_0}^{x} a(s))ds$, $f_2(x) = f_1(x)\exp(\int_{x_0}^{x} a(s)ds)$, obţinem o ecuaţie de forma (3.34). Evident dacă $a, b, f_1 \in C(I)$ atunci $p(x) \neq 0$ pentru $x \in I$, $p' = ap$, deci $p, p'.q, f_2 \in C(I)$.

Forma redusă (3.35) se poate obţine din (3.34) dacă $p : I \to \mathbf{R}$ cu $p(x) > 0, x \in I$, prin schimbarea variabilei independente x în variabila t, luînd

$$t = \Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(s)} ds, \quad z(t) = y(\Phi(x)),$$

unde $x_0 \in I$. Cum

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{p} \cdot \frac{dz}{dt}$$

şi

$$(py')' = \frac{1}{p}\frac{d}{dt}\Big(p \cdot \frac{1}{p}\frac{dz}{dt}\Big) = \frac{1}{p} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$

luînd $pq = c$, $pf_2 = f_3$ cu $\varphi(t)$ în loc de x, unde φ este funcţia inversă a lui Φ. Această funcţie există deoarece $\Phi' = 1/p > 0$, deci Φ este strict monotonă.

La fel forma redusă (3.35) se poate obţine din (3.33) dacă $a \in C^1(I)$, prin schimbarea de funcţie necunoscută

$$y \to z, y(x) = z(x)\exp\Big(-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big)$$

unde $x_0 \in I$. In acest caz

$$c(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x), f_3(x) = f_1(x) \cdot \exp\Big(\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(s)ds\Big).$$

• Dacă y_1 şi y_2 sînt două soluţii particulare ale ecuaţiei (3.33) astfel încît

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci orice soluţie a ecuaţiei (3.33) se poate scrie sub forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{w_1(x,s)}{w(s)} f(s)ds, \ x_0 \in I$$

în care $w_1(x,s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}$

• Dacă pentru o ecuaţie de ordinul doi putem să determinăm o soluţie particulară y_1 pentru ecuaţia omogenă asociată, atunci atunci un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (3.33) este dat de y_1, y_2 unde y_2 este definită prin

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \int_{x_0}^{x} (y_1(t))^{-2} \exp\Big(- \int_{x_0}^{t} p(s)ds\Big)dt.$$

• O altă particularitate a ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordinul doi este faptul că sînt echivalente cu ecuaţiile de tip Riccati. Intr-adevăr, dacă în ecuaţia omogenă de forma (3.33) se pune $y' = uy$ se obţine ecuaţia Riccati

$$u' + u^2 + au + b = 0$$

şi reciprioc dacă în ultima ecuaţie se înlocuieşte u prin y'/y se obţine ecuaţia (3.33). Pentru ecuaţia diferenţială liniară (3.33) omogenă, adică

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{3.36}$$

avem următoarele proprietăţi

PROPOZIŢIA **3.6** *Fie a, b funcţii continue pe intervalul $I \subset R$.*

1) *Dacă y este o soluţie a ecuaţiei* (3.36) *şi într-un punct $x_0 \in I$ avem $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, atunci y este o funcţie identic nulă pe I.*
2) *Dacă y este o soluţie a ecuaţiei* (3.36) *care au un zero $x_0 \in I$, adică $y(x_0) = 0$, atunci y îsi schimbă semnul în vecinătatea punctului x_0.*
3) *Intr-un interval de lungime finită $[\alpha, \beta] \subset I$, orice soluţie a ecuaţiei* (3.36) *are cel mult un număr finit de zerouri.*
4) *Toate zerourile oricărei soluţii neidentic nule pentru ecuaţia diferenţială* (3.36) *sînt simple.*

5) *Dacă* y_1 *şi* y_2 *sînt soluţii ale ecuaţiei* (3.36) *şi* $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, *atunci* y_1 *şi* y_2 *diferă printr-un factor constant, adică există* $C \in \mathbf{R}$ *astfel ca* $y_2(x) = Cy_1(x)$, *pentru orice* $x \in I$.

Demonstraţie. 1) Din teorema de existenţă şi unicitate a problemei Cauchy

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \;\; y'(x_0) = 0$$

rezultă că $y = 0$ în I.

2) Deoarece $y \neq 0$ şi $y(x_0) = 0$ rezultă neapărat $y'(x_0) \neq 0$, şi astfel într-o vecinătate a lui x_0 funcţia y este sau crescătoare sau descrescătoare, după cum $y'(x_0)$ este pozitiv sau negativ; deci, în ambele cazuri îşi schimbă semnul.

3) Dacă pe intervalul $[\alpha, \beta]$ soluţia y a ecuaţiei (3.36) ar avea o infinitate de zerouri, ar exista un şir $(x_n) \subset [\alpha, \beta]$ cu proprietatea că $y(x_n) = 0$ şi $x_n \longrightarrow x_0$. Cum y este continuă, fiind soluţie a ecuaţiei (3.36) rezultă $y(x_0) = 0$. Dar

$$y'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{y(x_n) - y(x_0)}{x_n - x_0} = 0,$$

prin urmare $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ şi folosind 1) rezultă y identic nulă pe intervalul I, o contradicţie.

4) Dacă x_0 este un zero pentru soluţia y a ecuaţiei (3.36) care nu este simplu, atunci $y'(x_0) = 0$, ceea ce implică y identic nul.

5) Dacă $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ sau $y_1'(x) = y_2'(x_0) = 0$ atunci $W(x_0; y_1, y_2) = 0$ şi folosind formula Abel – Liouville (3.4), y_1 şi y_2 sînt liniar dependente pe intervalul I, adică există C astfel ca $y_2(x) = Cy_1(x)$ pentru orice $x \in I$. □

TEOREMA **3.3 (principiul de maxim)** *Dacă* $b(x) < 0$ *cînd* x *aparţine interiorului lui* I, *atunci orice soluţie nenulă a ecuaţiei* (3.36) *nu-şi atinge minimile negative şi maximele pozitive în interiorul intervalului* I.

Demonstraţie. Dacă y este o soluţie a ecuaţiei (3.36) atunci şi $-y$ este soluţie pentru ecuaţia (3.36) şi minimile negative ale lui y sînt maxime pozitive pentru $-y$, deci este suficient să realizăm demonstraţia în cazul maximelor pozitive. Presupunem că există x_0 în interiorul lui I astfel încît $y(x_0)$ este un maxim pozitiv al lui y. Avem

$$y(x_0) > 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) \leq 0.$$

Scriind ecuaţia (3.36) în punctul x_0, avem

$$0 = y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + b(x_0)y(x_0) = y''(x_0) + b(x_0)y(x_0) < 0.$$

Din această contradicţie rezultă concluzia teoremei. □

TEOREMA **3.4 (de separarea a lui Sturm)** *Dacă y_1, y_2 sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei diferenţiale* (3.36) *atunci zerourile lor se separă reciproc, adică intre două zerouri consecutive ale lui y_1 se găseşte un zerou şi numai unu pentru y_2.*

Demonstraţie. Dacă $x_0 \in I$ ar fi zero pentru y_1 şi y_2, adică $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, folosind Propoziţia 3.6 punctul 5) ar rezulta că y_1 şi y_2 sînt liniar dependente, prin urmare două soluţii liniar independente nu pot avea un zero comun. Fie $x_1, x_2 \in I$ două zerouri consecutive pentru y_1. Presupunem că $y_2(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [x_1, x_2]$. Considerăm funcţia $\varphi = y_1/y_2$. Avem că $\varphi \in C^1[x_1, x_2]$ şi $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$. Din teorema lui Rolle rezultă că există $\xi \in (x_1, x_2)$ astfel încît $\varphi(\xi) = 0$. Pe de altă parte

$$\varphi'(x) = \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)}{y_2^2(x)} = \frac{-W(x; y_1, y_2)}{y_1^2(x)} \neq 0$$

pentru orice $x \in [x_1, x_2]$, deci $\varphi'(\xi) \neq 0$. Am obţinut astfel o contradicţie.

TEOREMA **3.5 (de comparaţie a lui Sturm)** *Fiind date ecuaţiile*

$$y'' + c_1(x)y = 0 \tag{3.37}$$

$$z'' + c_2(x)y = 0 \tag{3.38}$$

unde $c_1, c_2 \in C(\bar{I})$ şi $c_1 \leq c_2$. Intre două zerouri consecutive ale unei soluţii a ecuaţiei (3.37)*, se află cel puţin un zerou al oricărei soluţii a ecuaţiei* (3.38)*.*

Demonstraţie. Fie y o soluţie a ecuaţiei (3.37) şi z o soluţie a ecuaţiei (3.38), iar x_1, x_2 două zerouri consecutive ale lui y. Inmulţind ecuaţia (3.37) cu z iar ecuaţia (3.38) cu y obţinem

$$\frac{d}{dx}\Big[z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx}\Big] = (c_2 - c_1)yz. \tag{3.39}$$

Fără a restrînge generalitatea problemei putem presupune că

$$y(x) > 0, \ \ \forall \ x \in (x_1, x_2) \text{ şi } z(x) > 0 \ \ \forall \ x \in [x_1, x_2].$$

Prin integrare din (3.39) obţinem

$$z(x_2)y'(x_2) - z(x_1)y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (c_2(s) - c_1(s))y(s)z(s)ds.$$

Deoarece $z(x_1) > 0$, $z(x_2) > 0$, $y'(x_1) > 0, y'(x_2) < 0$ rezultă că membrul întîi este negativ iar membrul doi nenegativ. Prin urmare z se anulează în (x_1, x_2) □

Din teorema de comparaţie a lui Sturm obţinem

TEOREMA **3.6** *Se consideră ecuaţia diferenţială*

$$y'' + c(x)y = 0 \tag{3.40}$$

unde $c \in C[a,b]$ *şi* $0 < m \leq c(x) \leq M$ *pentru orice* $x \in [a,b]$. *Dacă* y *este o soluţie a ecuaţiei* (3.40) *şi* x_1, x_2 *sînt două zerouri consecutive ale lui* y, *atunci*

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq |x_1 - x_2| \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Demonstraţie. Ataşăm ecuaţia (3.40) ecuaţiile

$$u'' + mu = 0, \qquad v'' + Mv = 0$$

şi aplicăm teorema de comparaţie a lui Sturm. □

Probleme şi exerciţii

1) Să se arate că dacă $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x) = 0$ atunci e^x este o soluţie a ecuaţiei $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = 0$.

2) Să se arate că dacă $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)r^{(n-i)} = 0$ atunci o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = 0$ este de forma $y = e^{rx}$.

3) Să se arate că dacă $a_{n-1}(x) + xa_n(x) = 0$ atunci $y_1 = x$ este o soluţie particulară a ecuaţiei $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(n-i)} = 0$.

4) Să se arate că $y_1 = \dfrac{(x-1)^2}{x}$ este o soluţie a ecuaţiei

$$x(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0$$

şi apoi să se găsească soluţia generală.

5) Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor

$$(x^2 - 1)y'' = 6y, \quad xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$$

căutînd soluţii particulare de forma polinomială.

6) Ecuaţia $xy'' - (x+3)y' + 2y = 0$ admite o soluţie particulară de forma $y_1 = ax^2 + bx + c$ cu a, b, c constante. Să se afle a, b, c şi apoi integrala generală.

7) Să se construiască ecuaţiile diferenţiale care admit soluţii particulare indicate:
a) $y_1 = \cos^2 x,\ \ y_2 = \sin^2 x;$ b) $y_1 = e^{-x/2},\ \ y_2 = e^x,\ \ y_3 = xe^x.$

8) Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor :

$$y'' + (1-x)y' + y = 1, \quad (x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^3 e^{2x}.$$

9) Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor omogene :

1) $y''' - 5y'' + 6y' = 0,$
2) $y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0,$
3) $y''' - 5y'' + 9y' - 13y = 0,$

4) $y^{iv} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0,$
5) $y^{iv} - 2y'' = 0,$
6) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

10) Să se determine soluţiile generale ale ecuaţiilor neomogene :

1) $y'' + y' + y = \exp\Big(-\dfrac{x}{2}\Big) \sin \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$
2) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$
3) $y'' + y = \sin x \cdot \sin 2x$
4) $y'' + y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

11) Să se determine soluţiile generale ale următoatelor ecuaţii :

1) $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x, x > 0$
2) $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4\cos(\ln(1+x))$

12) Să se arate că dacă p este un număr natural, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$(x^2-1)y'' - 2pxy' + p(p+1)y = 0$$

este un polinom în x de gradul p.

13) Să se determine distanţa dintre două zerouri consecutive ale unei soluţii, diferite de soluţia nulă, a ecuaţiei

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b \in \mathbf{R}.$$

Indicaţie. Se efectuează schimbarea de variabilă $y = z\exp\Big(-\dfrac{ax}{2}\Big)$ şi se observă că distanţa dintre zerourile consecutive ale lui y este aceiaşi cu distanţa dintre zerourrile consecutive ale lui z.

14) Fie $p_1, p_1', q_1, p_2, p_2', q_2 \in C(I)$ şi y, z soluţii ale ecuaţiilor diferentiale:

$$(p_1(x)y')' - q_1(x)y = 0 \tag{3.41}$$

$$(p_2(x)y')' - q_2(x)y = 0 \tag{3.42}$$

a) Să se demonstreze că dacă $z(x_0) \neq 0$, atunci funcţia h definită într-o vecinătate a lui x_0 prin

$$h(x) = \frac{y(x)}{z(x)}[p_1(x)y'(x)z(x) - p_2(x)z'(x)y(x)]$$

este derivabilă în x_0 şi derivata sa este dată de funcţia

$$(q_1 - q_2)y^2 + (p_1 - p_2)(y')^2 + p_2\left(\frac{yu' - uy'}{u}\right)^2.$$

b) Să se arate că dacă y este o soluţie a ecuaţiei (3.41) care se anulează în α şi β din I iar z nu se anulează în (α, β) atunci are loc **identitatea lui Picone**

$$\int_\alpha^\beta (q_1 - q_2)y^2 dx + \int_\alpha^\beta (p_1 - p_2)(y')^2 dx + \int_\alpha^\beta p_2\left(\frac{y'u - u'y}{u}\right)^2 dx = 0$$

c) Să se arate că dacă $p_1(x) \geq p_2(x) > 0$, $q_1(x) \geq q_2(x), \forall \ x \in I$ şi nu există $x_0 \in I$ aşa încît $q_1(x_0) = q_2(x_0) = 0$, iar ecuaţiile (3.41) şi (3.42) nu coincid pe nici un subinterval din I, adică $p_1 - p_2 \not\equiv 0$ şi $q_1 - q_2 \not\equiv 0$ pe orice $(\alpha, \beta) \subset I$, atunci între două zerouri consecutive ale unei soluţii pentru ecuaţia (3.41) se găseşte cel puţin un zerou pentru orice soluţie a ecuaţiei (3.42) .

15) Fie $p, p', q \in C^0(I)$, şi $p(x) > 0, \quad \forall x \in I$. Dacă y_1 şi y_2 sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei

$$(py')' + qy = 0 \tag{3.43}$$

atunci între două zerouri consecutive ale unei soluţii se găseşte un zero şi numai unul pentru cealaltă soluţie.

Indicaţie. Se presupune că α şi β din I sînt zerouri consecutive pentru $y_1(x)$ iar $y_2(x) \neq 0$. Se utilizează identitatea lui Picone şi se obţine o contradicţie.

4 Sisteme diferenţiale liniare

Un sistem diferenţial liniar de ordinul întîi este de forma

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j(x) + b_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in I \tag{4.1}$$

unde a_{ij} şi b_j sînt funcţii reale continue pe intervalul I al axei reale (care poate fi forma $[x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, $(x_1, x_2]$ sau (x_1, x_2).

Sistemul (4.1) se numeşte **neomogen.** Dacă $b_i \equiv 0$, $i = 1, \dots, n$, atunci sistemul capătă forma

$$y_i'(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j(x) \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in I \tag{4.2}$$

şi se numeşte **omogen.** Dacă folosim notaţia vectorială sistemele (4.1) şi (4.2) se scriu sub forma

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x), \quad x \in I \tag{4.3}$$

respectiv

$$y'(x) = A(x)y(x), \quad x \in I, \tag{4.4}$$

unde $A(x)$ este matricea pătrată cu n linii şi n coloane formată cu elementele $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots n$, $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))^T$, $b(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T$.

Evident, sistemului (4.1) (respectiv (4.3)) i se poate aplica teorema locală de existenţă şi unicitatea împreună cu toate rezultatele referitoare la existenţa şi unicitatea globală a soluţiilor.

In concluzie pentru orice $(x_0, y_0) \in I \times \mathbf{R}^n$ există o soluţie saturată unică a sistemului (4.1) verificînd condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0. \tag{4.5}$$

Este interesant de menţionat că, în acest caz, domeniul de existenţă al soluţiei saturate coincide cu intervalul I de continuitate al elementelor a_{ij} şi b_i.

4.1 Sisteme diferenţiale liniare omogene

Vom studia în acest paragraf sistemul (4.2) (respectiv (4.4)) în ipoteza că $a_{ij} \in C(I)$. Dăm pentru început o teoremă de structură a mulţimii soluţiilor.

TEOREMA **4.1** *Mulţimea soluţiilor sistemului omogen* (4.2) *formează un spaţiu vectorial de dimensiune* n.

Demonstraţie. Fie $L : C^1(I, \mathbf{R}^n) \to C(I, \mathbf{R}^n)$ aplicaţia liniară definită prin

$$L(y) := y' - Ay. \tag{4.6}$$

Nucleul $\mathrm{Ker}\,(L)$ al aplicaţiei liniare L formează un subspaţiu liniar al lui $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ şi coincide cu mulţimea soluţiilor sistemului (4.2). Pentru a demonstra că dimensiunea acestui spaţiu liniar este n vom arăta că există un izomorfism liniar între spaţiul $\mathrm{Ker}\,(L)$ şi $\mathbf{R}^n$. Pentru aceasta introducem aplicaţia $f : \mathrm{Ker}\,(L) \to \mathbf{R}^n$ definită $f(y) = y(x_0)$, unde x_0 este un punct fixat din intervalul I. Evident, f este o aplicaţie liniară. Din teorema de existenţă si unicitate pentru problema Cauchy, asociată sistemului (4.4), rezultă că f este surjectivă (adică codomeniul său este tot spaţiul $\mathbf{R}^n$) şi injectivă (adică $f(y) = 0$ implică $y = 0$). Prin urmare, f este un izomorfism al spaţiului $\mathrm{Ker}\,(L)$ pe $\mathbf{R}^n$, deci $\dim(\ker(L)) = n$. □

Din Teorema 4.1 rezultă că $\mathrm{Ker}\,(L)$ admite o bază formată cu n elemente. Fie $\{y_1, \ldots, y_n\}$ o asemenea bază. Cu alte cuvinte, $y_1, \ldots, y_n$ reprezintă n soluţii liniar independente ale sistemului (4.4), adică singurele constante $C_1, \ldots, C_n$ pentru care are loc identitatea

$$C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0, \quad \forall \ x \in I$$

sînt cele nule ($C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$)

Matricea $Y(x)$, ale cărei coloane sînt funcţiile $y_1, \ldots, y_n$ se numeşte **matrice fundamentală** de soluţii ale sistemului (4.4).

Este uşor de văzut că matricea $Y(x)$ este soluţie a ecuaţiei

$$Y'(x) = A(x) \cdot Y(x). \tag{4.7}$$

(Am notat cu Y' matricea formată din derivatele elementelor matricei $Y(x)$.)

Matricea fundamentală nu este unică. Intr-adevăr, orice matrice $Z(x) = Y(x) \cdot C$ unde C este o matrice constantă nesingulară este matrice fundamentală de soluţii ale sistemului (4.4). *Reciproc* , orice matrice fundamentală $Z(x)$ a sistemului (4.4) se poate reprezenta sub forma

$$Z(x) = Y(x) \cdot C, \quad \forall \ x \in I,$$

unde C este o matrice constantă nesingulară.

Ultima afirmaţie rezultă din următorul rezultat.

PROPOZIŢIA **4.1** *Fie $Y(x)$ o matrice fundamentală a sistemului* (4.4). *Orice soluţie a sistemului* (4.4) *se reprezintă sub forma*

$$y(x) = Y(x) \cdot c, \quad x \in I \tag{4.8}$$

unde c este un vector constant din $\mathbf{R}^n$ (constant în x, dar depinzînd de y).

Demonstraţie. Formula (4.8) rezultă din faptul că coloanele matricei Y formează o bază pentru Ker (L). In acest fel, (4.8) nu este altceva decît binecunoscuta formulă de reprezentare a elementelor unui spaţiu liniar, n-dimensional, ca combinaţii liniare de elementele bazei. □

Dacă $y_1, \dots, y_n$ sînt soluţii ale sistemului (4.4) vom nota prin $W(x)$ determinantul matricei $Y(x)$, unde $Y(x)$ este matricea avînd coloanele formate cu componentele soluţiilor $y_1(x), \dots, y_n(x)$, adică

$$W(x) = \det[Y(x)].$$

TEOREMA **4.2** *Sistemul de soluţii $\{y_1, \dots, y_n\}$ este fundamental dacă şi numai dacă wronskianul lor $W(y_1, \dots, y_n)$ este nenul într-un punct al intervalului I (echivalent pe întreg intervalul I)*

Rezultatul de mai sus a fost obţinut de matematicianul şi filozoful polonez Joseph WRONSKY (1778 - 1853).

Demonstraţie. Fie $\{y_1, \dots, y_n\}$ un sistem liniar independent de soluţii pentru sistemul (4.4). Vom presupune, prin absurd, că $W(x_0; y_1, \dots, y_n) = 0$, unde $x_o \in I$. Sistemul algebric $Y(x_0)c = 0$ are o soluţie c_0 nenulă, deoarece $\det[Y(x_0)] = 0$. Funcţia $y(x) = Y(x)c_0$ este o soluţie a sistemului (4.4). Cum $y(x_0) = 0$, din teoreme de existenţă şi unicitate (Teorema 2.2) rezultă $y(x) = 0$ pentru orice $x \in I$. De aici avem $Y(x)c_0 \equiv 0$ pentru un vector $c_0 \neq 0$, fapt care contrazice liniar independenţa sistemului $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Reciproc , dacă sistemul $\{y_1, \dots, y_n\}$ este liniar dependent, există $c \in \mathbf{R}^n$, $c \neq 0$ astfel ca

$$Y(x) \cdot c = 0, \quad \forall \ x \in I. \tag{4.9}$$

Cum sistemul omogen (4.9) are soluţie nenulă rezultă că
$\det Y(x) = W(x, y_1, \dots, y_n) = 0$, şi cu aceasta teorema este demonstrată. □

TEOREMA **4.3 (Liouville)** *Dacă $\{y_1, \dots, y_n\}$ este un sistem de n soluţii ale sistemului (4.4) atunci, pentru orice x, x_0 din I avem*

$$W(x; y_1, \dots, y_n) = W(x_0; y_1, \dots, y_n) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr}\,(A(s))ds\Big), \tag{4.10}$$

unde $\mathrm{tr}\,(A(s)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(s).$

Demonstraţie. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că sistemul $\{y_1, \ldots, y_n\}$ este liniar independent (în caz contrar $W(x; y_1, \ldots, y_n) = 0$ pentru orice $x \in I$ şi identitatea (4.10) este banal satisfăcută). Să notăm cu Y matricea avînd coloanele $y_1, \ldots, y_n$. Avem $W(x; y_1, \ldots, y_n) = detY(x)$, $Y'(x) = A(x)Y(x)$, $A(x) = Y'(x) \cdot Y^{-1}(x)$. Prin urmare, *formula lui Liouville* (4.10) este echivalentă cu

$$\frac{d}{dx}\det(Y(x)) = \mathrm{tr}\,(Y'(x) \cdot Y^{-1}(x)) \cdot \det Y(x).$$

Vom demonstra că această relaţie este valabilă pentru orice matrice nesingulară, derivabilă. Fie $x_0 \in I$, $Y'(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{Y(x_0+h) - Y(x_0)}{h}$, deci putem scrie

$$Y(x_0 + h) = Y(x_0) + hY'(x_0) + \theta(h) =$$

$$(E + hY'(x_0) \cdot Y^{-1}(x_0) + \theta(h))Y(x_0)$$

unde $\lim \dfrac{\theta(h)}{h} = 0$. Rezultă

$$\det Y(x_0 + h) = \det[E + hY'(x_0)Y^{-1}(x_0) + \theta(h)] \cdot \det Y(x_0).$$

Prin calcul direct se verifică relaţia

$$\det[E + h \cdot Y'(x)Y^{-1}(x_0) + \theta(h)] = 1 + h \cdot \mathrm{tr}\,(Y'(x_0)Y^{-1}(x_0)) + \theta(h)$$

deci

$$\det Y(x_0 + h) = [1 + h\mathrm{tr}\,(Y'(x_0)Y^{-1}(x_0)) + \theta(h)] \det Y(x_0),$$

de unde

$$\frac{\det Y(x_0 + h) - \det Y(x_0)}{h} = \mathrm{tr}\,(Y'(x_0)Y^{-1}(x_0) \det Y(x_0) + \frac{\theta(h)}{h} \det Y(x_0)$$

şi prin trecere la limită obţinem

$$\frac{d}{dx}(\det Y)(x_0) = \mathrm{tr}\,(Y'(x_0)Y^{-1}(x_0)) \cdot Y(x_0).$$

şi cu aceasta formula (4.10) este stabilă.

4.2 Sisteme diferenţiale liniare neomogene

Considerăm sistemul liniar neomogen (4.3)

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x)$$

unde elementele matricei A şi a vectorului b sînt funcţii continue pe un interval I din $\mathbf{R}$.

TEOREMA **4.4** *Fie $Y(x)$ o matrice fundamentală a sistemului omogen* (4.4) *şi $\tilde{y}(x)$ o soluţie particulară a sistemului neomogen* (4.3)*. Soluţia generală a sistemului* (4.3) *se reprezintă sub forma*

$$y(x) = Y(x)c + \tilde{y}(x), \quad x \in I \tag{4.11}$$

unde c este un vector arbitrar din $\mathbf{R}^n$.

Demonstraţie. Este evident faptul că orice funcţie y de forma (4.11) este soluţie a sistemului (4.3). *Reciproc*, fie $y = y(x)$ o soluţie oarecare a sistemului (4.3) determinată prin condiţia iniţială $y(x_0) = y_0$, unde $x_0 \in I$ şi $y_0 \in \mathbf{R}^n$ sînt arbitrari. Dacă $y_0 = \tilde{y}(x_0)$ atunci, din teorema de unicitate (Teorema 2.6), rezultă că $y \equiv \tilde{y}$ şi deci y este dat de formula (4.11) cu $c = 0$. Vom presupune acum, $y_0 \neq \tilde{y}(x_0)$ şi vom considera sistemul algebric neomogen

$$Y(x_0)c = y_0 - \tilde{y}(x_0)$$

care admite soluţie unică $c_0 \in \mathbf{R}^n$ (deoarece $\det(Y(x_0)) \neq 0$). Funcţia $Y(x)c_0 + \tilde{y}(x)$ este soluţie a sistemului (4.3) şi în punctul x_0 ia valoarea $y(x_0)$. Din teorema de unicitate (Teorema 2.6) rezultă atunci

$$y(x) = Y(x)c_0 + \tilde{y}(x), \quad \forall\ x \in I.$$

Deci y se poate reprezenta sub forma (4.11), unde $c = c_0$, şi astfel teorema este demonstată □

Rezultatul următor precizează conţinutul Teoremei 4.4, oferind o formulă de reprezentare pentru soluţia particulară $\tilde{y}$.

TEOREMA **4.5 (Formula variaţiei constantelor)** *Fie $Y(x)$ o matrice fundamentală a sistemului omogen* (4.4)*. Atunci, soluţia generală a sistemului neomogen* (4.3) *se reprezintă sub forma*

$$y(x) = Y(x)c + \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(s)b(s)ds, x \in I \tag{4.12}$$

unde $c \in \mathbf{R}^n$ şi $x_0 \in I$.

Demonstraţie. Vom căuta o soluţie particulară $\tilde{y}$ a sistemului (4.3) de formă:

$$\tilde{y}(x) = Y(x)\gamma(x), \quad x \in I$$

unde γ este o funcţie vectorială necunoscută. Derivînd pe $\tilde{y}$ şi înlocuind în sistemul (4.3) obţinem:

$$Y'(x)\gamma(x) + Y(x)\gamma'(x) = A(x)Y(x)\gamma(x) + b(x).$$

Cum $Y'(x) = A(x)Y(x), \quad x \in I$ se obţine pentru γ ecuaţia

$$\gamma'(x) = Y^{-1}(x)b(x), \quad x \in I$$

adică γ se poate lua de forma

$$\gamma(x) = \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(s)b(s)ds, \quad x \in I$$

unde x_0 este arbitrar dar fix în I. Din cele de mai sus obţinem (4.12). □

Observaţie:

Din (4.12) rezultă, cu uşurinţă, că soluţia sistemului (4.3) care verifică $y(x_0) = y_0$ este definită de formula:

$$y(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} Y(x)Y^{-1}(s)b(s)ds, \quad x \in I. \tag{4.13}$$

In teoria sistemelor matricea U definită prin

$$U(x,s) = Y(x)Y^{-1}(s), \quad x, s \in I$$

se numeşte adesea, **matricea de tranziţie** a sistemului (4.3). Dacă pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare cunoaştem matricea de tranziţie atunci

$$y(x) = U(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} U(x,s)b(s)ds, \quad x \in I$$

este soluţia sistemului (4.3) care verifică condiţia $y(x_0) = y_0$.

4.3 Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi.

Vom studia în cele ce urmează sistemul diferenţial (4.4)

$$y' = Ay$$

unde matricea $A = (a_{ij})$ este o matrice constantă. Vom nota cu $S_A(x)$ matricea fundamentală a sistemului (4.4) care verifică condiţia iniţială

$$S_A(0) = E$$

unde E este matricea identitate.

Propoziţia **4.2** *Familia* $\{S_A(x); x \in \mathbf{R}\}$ *are următoarele proprietăţi:*

(i) $S_A(x+z) = S_A(z) \cdot S_A(x), \quad \forall\ x, z \in \mathbf{R}.$

(ii) $S_A(0) = E.$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} S_A(x)u = S_A(x_0)u, \quad \forall\ u \in \mathbf{R}^n.$

Demonstraţie. Funcţiile $u(x) = S_A(x)S_A(z)$ şi $v(x) = S_A(x+z)$ sînt soluţii ale sistemului (4.7) şi $u(0) = v(0) = S_A(z)$ deci $u(x) = v(x)$ pentru orice x în $\mathbf{R}$, de unde rezultă (i). Proprietatea (ii) rezultă imediat din definiţia matricei fundamentale S_A. Proprietatea (iii) este consecinţa faptului că funcţia $y(x) = S_A(x)u$ este soluţie a ecuaţiei (4.4), deci continuă pe $\mathbf{R}$. □

Propoziţia 4.1 exprimă faptul că familia $\{S_A(x); x \in \mathbf{R}\}$ este un **grup continuu de transformări liniare** ale spaţiului $\mathbf{R}^n$ în el însuşi.

Structura matricei S_A

Pentru a construi o matrice fundamentală de soluţii vom face cîteva consideraţii preliminare. Fiind dat un şir de matrici $\{A_k\}$ de dimensiune $n \times n$ să considerăm seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = A \tag{4.14}$$

Se pune problema de a defini convergenţa seriei (4.14).

Definiţia **4.1** *Spunem că seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *converge la* A *(fapt scris sub forma (4.14)) dacă şirul sumelor parţiale* $B_j = \sum\limits_{k=0}^{j} A_k$ *converge în normă la matricea* A*, adică*

$$\|B_j - A\| \to 0, \quad \textit{pentru } j \to \infty. \tag{4.15}$$

Avînd în vedere că (4.15) revine la convergenţa pe componente, este uşor de văzut că criteriul lui Cauchy de convergenţă pentru serii numerice rămîne adevărat şi în cazul seriilor de matrici. In particular, se menţine adevărat şi următorul criteriu de convergenţă.

Propoziţia **4.3** *Dacă seria de matrici* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *este majorată de o serie numerică convergentă, adică* $\|A_k\| \le a_k$*, unde* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$*, atunci seria* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ *este convergentă.*

Folosind noţiunea de serie convergentă de matrici se pot defini diverse funcţii de matrici. Astfel, dacă f este o funcţie numerică analitică, avînd reprezentarea

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k, \quad |\lambda| < R$$

atunci, prin definiţie,

$$f(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \text{ pentru } \|A\| < R. \tag{4.16}$$

Este clar, conform Propoziţiei 4.2, că seria (4.16) este convergentă pentru $\|A\| < R$. In felul acesta se pot defini funcţiile de matrici exponenţiale, logaritmice, trigonometrice, etc. In particular, pentru $x \in \mathbf{R}$ există funcţia

$$e^{Ax} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j x^j}{j!} \tag{4.17}$$

A fiind o matrice pătrată oarecare. Cum seria numerică $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \lambda^j/j!$ este convergentă pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$ avem că seria (4.17) este convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ şi orice matrice A de tipul $n \times n$.

TEOREMA **4.6** *In cazul sistemelor de ecuaţii diferenţiale* (4.4) *cu coeficienţi constanţi, un sistem fundamental de soluţii este dat de matricea* e^{Ax}. *Mai mult* $e^{Ax} = S_A(x)$.

Demonstraţie. Din teoremele clasice de analiză, rezultă că seria (4.6) se poate deriva termen cu termen şi avem

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}, \quad \forall \ x \in \mathbf{R}$$

deci e^{Ax} este un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (4.4). Cum $e^{A0} = E = S_A(0)$ şi $S_A(x)$ este o matrice fundamentală de soluţii avem $e^{Ax} = S_A(x)$. □

Observaţie.

Este util să menţionăm că

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} \cdot y_0 = S_A(x - x_0) y_0$$

verifică ecuaţia (4.4) şi condiţia $y(x_0) = y_0$. Mai mult

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)} b(s) ds, \quad x \in \mathbf{R}$$

verifică ecuaţia $y' = Ay + b$ şi condiţia $y(x_0) = y_0$.

• Dacă în Teorema 4.6 am precizat forma unei matrici fundamentale de soluţii pentru un sistem diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi, vom da în cele ce urmează cîteva moduri de construire a matricei fundamentale e^{Ax}.

TEOREMA **4.7** *Are loc următoarea egalitate*

$$e^{Ax} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda x}(\lambda E - A)^{-1}dx, x \in \mathbf{R} \tag{4.18}$$

unde Γ *este un contur închis şi rectificabil din planul complex* $\mathbf{C}$ *conţinînd în interiorul domeniului pe care îl delimitează rădăcinile* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *ale ecuaţiei caracteristice* $\det(\lambda E - A) = 0$.

Demonstraţie. Să notăm cu $Y(x)$ matricea definită de

$$Y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda x}\Big(\lambda E - A\Big)^{-1}d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.19}$$

Pentru a demonstra (4.18) este suficient să verificăm relaţiile

$$Y(0) = E, \;\; Y'(x) = AY(x), \;\; x \in \mathbf{R}. \tag{4.20}$$

Din (4.19) rezultă

$$Y'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda x}\cdot \lambda(\lambda E - A)^{-1}d\lambda, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Ţinînd seama de egalitatea evidentă

$$\lambda(\lambda E - A)^{-1} = A(\lambda E - A)^{-1} + E, \;\; \forall \;\; \lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{sp}(A)$$

rezultă atunci

$$Y'(x) = AY(x) + \frac{1}{2\pi i}E\int_\Gamma e^{\lambda x}d\lambda, \;\; \forall \;\; x \in \mathbf{R}.$$

Dar conform teoremei lui Cauchy $\displaystyle\int_\Gamma e^{\lambda x}dx = 0$, deci $Y(x)$ este o matricea de soluţii pentru ecuaţia (4.4). Să calculăm $Y(0)$. Pentru aceasta să observăm că are loc relaţia

$$(\lambda E - A)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}A^k, \;\; \text{pentru } |\lambda| > \|A\|, \tag{4.21}$$

relaţia ce se verifică cu uşurinţă plecînd de la definiţia matricei inverse $(\lambda E - A)^{-1}$. Intr-adevăr, din criteriul de convergenţă amintit mai sus, rezultă cu uşurinţă că seria din dreapta relaţiei (4.21) este convergentă pentru $|\lambda| > \|A\|$. Pe de altă parte, un calcul elementar ne arată că

$$\lambda^{-1}(\lambda E - A)\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}A^k = E,$$

de unde rezultă (4.21). Ţinînd seama de formula (4.21) se obţine

$$Y(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda E - A)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}A^k\int_\Gamma\lambda^{-k-1}d\lambda. \tag{4.22}$$

Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că Γ este un contur care conţine în interior discul $\{\lambda \in \mathbf{C}; |\lambda| \le \|A\| + \varepsilon\}$ cu $\varepsilon > 0$. In caz contrar conturul Γ se poate deforma încît să conţină acest disc. Din teorema Cauchy rezultă că valoarea integralei rămîne neschimbată. Aceasta face posibilă integrarea termen cu termen a integralei (4.21). Să observăm că avem egalitatea

$$\int_\Gamma\lambda^{-1}d\lambda = \int_{|\lambda|=r}\lambda^{-1}d\lambda = i\int_0^{2\pi}d\theta = 2\pi i \tag{4.23}$$

şi în mod asemănător

$$\int_\Gamma\lambda^{-k-1}d\lambda = i\int_0^{2\pi}r^{-k}e^{-ik\theta}d\theta = 0. \tag{4.24}$$

Din (4.22), (4.23) şi (4.24) se obţine $Y(0) = E$. Cu aceasta teorema este demonstrată. $\square$

Formula (4.19) poate fi utilizată pentru a da o teoremă de structură pentru matricea e^{Ax}. Notînd cu $D(\lambda) = \det(\lambda E - A)$, formula (4.19) se scrie sub forma

$$e^{\lambda A} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda x}\frac{A(\lambda)}{D(\lambda)}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{\lambda x}A(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}d\lambda$$

unde am notat cu $A(\lambda)$ matricea complemenţilor algebrici ai matricei $\lambda E - A$, adică $A(\lambda)\cdot(\lambda E - A) = D(\lambda)\cdot E$.

- Din teorema reziduurilor rezultă atunci

$$e^{Ax} = \sum_{j=1}^{k}R(\lambda_j) \tag{4.25}$$

unde am notat cu $R(\lambda_j)$ reziduul funcţiei matriceale $e^{\lambda x}A(\lambda)/D(\lambda)$ în polul λ_j. Pe de altă parte o formulă bine cunoscută ne dă $R(\lambda_j)$ sub forma

$$R(\lambda_j) = \frac{1}{(m_j-1)!}\frac{d^{m_j-1}}{d\lambda^{m_j-1}}\left[\frac{e^{\lambda x}A(\lambda)(\lambda-\lambda_j)^{m_j}}{D(\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_j} = e^{\lambda_j x}P_j(x)$$

unde elementele matricei $P_j(x)$ sînt polinoame în x de grad cel mult $m_j - 1$ $\square$

Observaţie. Prin procedeul de mai sus, calculul matricei e^{Ax} se reduce la operaţii algebrice.

Exemplu. *Să se determine soluţia generală a sistemului :*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \tag{4.26}$$

Matricile A, $\lambda E - A$ pentru sistemul de mai sus sînt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2+\lambda & 3 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{pmatrix}.$$

Determinantul $D(\lambda)$ şi matricea complemenţilor algebrici $A(\lambda)$ pentru matricea $(\lambda E - A)$ sînt $D(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$ şi

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 3(\lambda - 1) & (\lambda-1)(\lambda-3) & 3(1-\lambda) \\ (1-\lambda) & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$R(0) = \left(\frac{e^{\lambda x}A(\lambda)\lambda}{\lambda(\lambda-1)^2}\right)\Big|_{\lambda=0} = \frac{A(0)}{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$R(1) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{\lambda x}A(\lambda)(\lambda-1)^2}{\lambda(\lambda-1)^2}\right)\Big|_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\cdot A(\lambda)\right)\Big|_{\lambda=1} =$$

$$= \frac{\lambda x - 1}{\lambda^2}e^{\lambda x}A(\lambda)|_{\lambda=1} +$$

$$+ \frac{e^{\lambda x}}{\lambda}\frac{d}{d\lambda}(A(\lambda))|_{\lambda=1} = e^x \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deci

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} e^x$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^x - 1 & 1 - e^x & 1 - e^x \\ 3e^x - 3 & 3 - 2e^x & 3 - 3e^x \\ 1 - e^x & e^x - 1 & 2e^x - 1 \end{pmatrix}.$$

O soluţie generală a sistemului considerat este de forma

$$y(x) = e^{Ax}c = \begin{pmatrix} 2e^x - 1 & 1 - e^x & 1 - e^x \\ 3e^x - 3 & 3 - 2e^x & 3 - 3e^x \\ 1 - e^x & e^x - 1 & 2e^x - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

• Un alt mod de a calcula matricea e^{Ax} foloseşte faptul că dacă C este o matrice nesingulară şi $B = C^{-1}AC$ atunci $e^{Ax} = Ce^{Bx}C^{-1}$, deci dacă ştim să calculăm e^{Bx} atunci putem să calculăm e^{Ax}. Dar, este binecunoscut faptul, că există C o matrice nesingulară astfel matricea $B = C^{-1}AC$ să aibă forma canonică Jordan

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}$$

unde $J_1, \ldots, J_0$ sînt celule Jordan.

Din definiţia exponenţialei, rezultă cu uşurinţă ca

$$e^{Bx} = \begin{pmatrix} e^{J_1 x} & & & \\ & e^{J_2 x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_s x} \end{pmatrix}.$$

Orice celulă Jordan J se reprezintă sub forma $J = \lambda E + I$, unde E şi I se scriu sub forma

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

adică $E_{ii} = 1$ şi $E_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$ iar $I_{i,i+1} = 1$ şi $I_{i,j} = 0$ pentru $j \neq i+1$. Se constată direct că dacă I are m linii şi m coloane atunci $I^m = 0$. Deducem

$$J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & C_k^2 \lambda^{k-2} & \ldots & C_k^{m-1} \lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & C_k^1 \lambda^{k-1} & \ldots & C_m^{m-2} \lambda^{k-m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^k \end{pmatrix}$$

apoi

$$e^{Jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k x^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{1!} & \dfrac{x^2}{2!} & \cdots & \dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{x}{1!} & \cdots & \dfrac{x^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda x}.$$

Cu aceasta se obţine că dacă $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sînt valori proprii distincte de multiplicitate $m_1, \ldots, m_k$ ale matricei A atunci

$$e^{Ax} = \sum_{j=1}^{k} P_j(x) e^{\lambda_j x}$$

unde elementele matricei $P_j(x)$ sînt polinoame de grad cel mult $m_j - 1$. Prin urmare, orice soluţie a sistemului (4.4) este de forma

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} p_j(x) e^{\lambda_j x}$$

unde elementele vectorilor $p_j(x)$ sînt polinoame în x de grad cel mult $m_j - 1$.

Intr-adevăr, dacă y este o soluţie a sistemului (4.4) există $c \in \mathbf{R}^n$ astfel ca

$$y(x) = e^{Ax} c = \sum_{j=1}^{k} (P_j(x) c) e^{\lambda_j x} = \sum_{j=1}^{k} p_j(x) e^{\lambda_j x}.$$

Exemplu : *Considerăm din nou sistemul (4.26) şi determinăm matricea* e^{Ax} *cu tehnica prezentată mai sus.*

Cum uşor se poate constata $(1, 3, -1)^T$ este un vector propriu pentru valoarea proprie $\lambda = 0$, iar $(1, 1, 0)^T$, $(1, 0, 1)^T$ sînt vectori proprii liniar independenţi pentru valoarea proprie $\lambda = 1$. Luînd

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

obţinem $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$. Avem $e^{Ax} =$ $Ce^{Bx}C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2e^x - 1 & 1 - e^x & 1 - e^x \\ 3e^x - 3 & 3 - 2e^x & 3 - 3e^x \\ 1 - e^x & e^x - 1 & 2e^x - 1 \end{pmatrix}.$$

Soluţia generală pentru sistemul (4.26) este dată de

$$y(x) = e^{Ax} c = \begin{pmatrix} 2e^x - 1 & 1 - e^x & 1 - e^x \\ 3e^x - 3 & 3 - 2e^x & 3 - 3e^x \\ 1 - e^x & e^x - 1 & 2e^x - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

• Un alt procedeu de obţinere a unei matrici fundamentale de soluţii se bazează pe teorema următoare.

TEOREMA **4.8** *Fie $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ şi sistemul asociat matricei A. Fie* $\mathrm{sp}(A)$ *spectrul matricei A (adică mulţimea valorilor proprii) şi pentru fiecare λ în* $\mathrm{sp}(\lambda)$ *fie m_λ multiplicitatea algebrică (ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ ca rădăcină a polinomului caracteristic* $\det(\lambda E - A)$).

1) *Oricare ar fi $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \mathrm{sp}(A)$ există $P_j^{\lambda,k} \in \mathbf{R}^n$ astfel ca aplicaţiile φ_λ^k definite prin*

$$\varphi_\lambda^k(x) = \left(\sum_{j=0}^{m_\lambda - 1} P_j^{\lambda,k} \cdot x^j \right) e^{\lambda x}, \quad x \in \mathbf{R}, \; k = 1, \dots, m_\lambda \tag{4.27}$$

sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei (4.4).

2) *Oricare ar fi $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{sp}(A)$ pentru care $\beta = m(\lambda) > 0$ există $P_j^{\lambda,k} \in \mathbf{C}$ astfel încît aplicaţiile φ_λ^k şi $\varphi_{\bar{\lambda}}^k$ $k = 1, \dots, m_\lambda$ definite prin*

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda^k(x) &:= Re\left[e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{m_k - 1} P_j^{\lambda,k} x^j \right], \quad x \in \mathbf{R} \\ \varphi_{\bar{\lambda}}^k(x) &:= Im\left[e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{m_k - 1} P_j^{\lambda,k} x^j \right], \quad x \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{4.28}$$

sînt soluţii liniare independente ale ecuaţiei (4.4).

3) *Soluţiile $\{\varphi_\lambda^k, \lambda \in \mathrm{sp}(A), k = 1, \dots, m_\lambda\}$ din* (4.27) *şi* (4.28) *constituie un sistem fundamental de soluţii ale sistemului* (4.4).

4) *Dacă $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ şi $m_\lambda = 1$ atunci P_0^λ este un vector propriu pentru λ.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme se poate consulta [44].

Utilizînd teorema de mai sus se obţine următorul algoritm pentru obţinerea unei matrici fundamentale de soluţii.

Pasul 1. Se determină spectrul $\mathrm{sp}(A)$, ca mulţimea rădăcinilor ecuaţiei caracteristice $\det(\lambda E - A) = 0$, pentru fiecare $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ se reţine $m_\lambda =$ ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ.

Pasul 2. Pentru fiecare $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \cap \mathbf{R}$ pentru care $m_\lambda = 1$ se rezolvă sistemul

$$(A - \lambda E)u = 0$$

şi se alege $u_\lambda \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ o soluţie nenulă a acestui sistem şi se consideră

$$\varphi_\lambda(x) = u_\lambda e^{\lambda x}$$

drept soluţie a ecuaţiei (4.4) corespunzătoare valorii proprii λ.

Pasul 3. Pentru fiecare $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{sp}(A)$, $\beta > 0$, pentru care $m_\lambda = 1$ se rezolvă în $\mathbf{C}^n$ sistemul algebric

$$(A - \lambda E)u = 0$$

şi se alege o soluţie $u_\lambda \in \mathbf{C}^n - \{0\}$ a acestui sistem şi reţinem

$$\varphi_\lambda(x) = Re(e^{\lambda x}u_\lambda), \quad \varphi_{\bar{\lambda}}(x) = Im(e^{\lambda x}u_\lambda)$$

drept soluţii ce corespund valorilor proprii λ şi $\bar{\lambda}$.

Pasul 4. Pentru fiecare $\lambda \in \mathbf{R} \cap \mathrm{sp}(A)$, pentru care $m_\lambda = m > 1$ se caută $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1} \in \mathbf{R}^n$ astfel ca

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}\left(\sum_{j=0}^{m-1} P_j x^j\right)$$

să fie soluţie a ecuaţiei (4.4); prin identificarea coeficienţilor din identitatea $\varphi'(x) = A\varphi(x)$ se obţin relaţiile

$$(\lambda E - A)P_{m-1} = 0,\ (\lambda E - A)P_j = (j+1)P_{j+1},\ j = m-2, \ldots, 0$$

care se scrie sub forma echivalentă

$$(\lambda E - A)^m P_0 = 0, \quad P_j = \frac{1}{j!}(\lambda E - A)^j P_0, \quad j = 0, \ldots, m-1,$$

se aleg m vectori liniari independenţi $P_0^{\lambda,k} \in \mathbf{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$ care sînt soluţiile ale ecuaţiei $(\lambda E - A)^m P_0 = 0$ şi se definesc

$$P_j^{\lambda,k} = \frac{1}{j!}(\lambda E - A)^j P_0^{\lambda,k}, \quad j = 0, \ldots, m-1, \ \ k = 1, \ldots, m$$

şi se obţin

$$\varphi_\lambda^k(x) = e^{\lambda x}\left(\sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda,k} x^j\right), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Pasul 5. Pentru $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathrm{sp}(A)$, $\beta > 0$ pentru care $m_\lambda = m > 1$, se caută $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1} \in \mathbf{C}^n$ astfel încît

$$\tilde{\varphi}(x) := e^{\lambda x}\left(\sum_{j=0}^{m-1} P_j x^j\right)$$

să verifice identitarea $\varphi'(x) = A\varphi(x)$. De aici prin identificarea coeficienţilor se obţin relaţiile

$$(\lambda E - A)P_{m-1} = 0, \;\; (\lambda E - A)P_j = (j+1)P_{j+1}, \; j = m-2, \ldots, 0,$$

care se scriu echivalemt

$$(\lambda E - A)^m P_0 = 0, \quad P_j = \frac{1}{j!}(\lambda E - A)^j P_0, \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Se alege o bază $\{P_0^{\lambda,k}, \; k = 1, \ldots, m\}$ pentru Ker $(\lambda E - A)^m$, se definesc $P_j^{\lambda,k}$ prin

$$P_j^{\lambda,k} = \frac{1}{j!}(\lambda E - A)^j P_0^{\lambda,k} \; j = 1, \ldots, m-1, \; k = 1, \ldots, m$$

şi se obţin

$$\varphi_\lambda^k(x) := Re\left(e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda,k} x^j\right)$$

$$\varphi_{\bar{\lambda}}^k(x) := Im\left(e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{m-1} P_j^{\lambda,k} x^j\right)$$

drept soluţii liniar independente corespunzătoare valorilor proprii λ şi $\bar{\lambda}$ (cu ordinul de multiplicare $m_\lambda = m_{\bar{\lambda}} = m > 1$).

Pasul 6. Se renumerotează cele n soluţii obţinute în paşii precedenţi

$$\{\varphi_\lambda^k, \lambda \in \mathrm{sp}(A), k = 1, \ldots, m_\lambda\} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$$

care constituie un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (4.4).

Soluţia generală se scrie sub forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x).$$

Exemplu : *Să se determine soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3 \end{cases} \tag{4.29}$$

Matricea sistemului este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ iar polinomul caracteristic $D(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda(\lambda - 1)^2$.

Rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt $\lambda_1 = 0(m_1 = 1)$, $\lambda_2 = 1(m_2 = 2)$. Se determină $u \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ soluţie a ecuaţiei $(\lambda E - A)u = 0$, adică

$$\begin{cases} 2u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ 3u_1 - 2u_2 - 3u_3 = 0 \\ -u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţiile $u_2 = 3u_1$, $u_3 = -u_1$, putem alege vectorul propriu $u_0 = (1, 3, -1)^T$ şi soluţia ce corespunde pentru $\lambda_1 = 0$ este dată de $\varphi_1(x) = u_0 e^{0x} = (1, 3, -1)^T$.

Pentru valoarea dublă $\lambda_2 = 1$ căutăm $P_0, P_1 \in \mathbf{R}^3$ astfel ca $\varphi(x) = e^x(P_0 + P_1 x)$ să fie soluţie pentru sistemul (4.29). Prin identificare se obţine $AP_1 = P_1$, $(E-A)P_0 = P_1$ deci $(E - A)^2\ P_0 = 0$. Calculăm

$$(E - A)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

şi determinăm două soluţii liniar independente ale sistemului algebric $(E - A)^2 u = 0$, adică

$$\begin{cases} -u_1 + & u_2 + & u_3 & = 0 \\ -3u_1 + & 3u_2 + & 3u_3 & = 0 \\ u_1 - & u_2 - & 2u_3 & = 0 \end{cases}$$

Două soluţii liniar independente sînt $P_0^1 = (1, 1, 0)^T$, $P_0^2 = (1, 0, 1)^T$. Din relaţia $P_1^1 = (E - A)P_0$ determinăm

$$P_1^1 = (E - A)P_0^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1^2 = (E - A)P_0^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şi reţinem soluţiile

$$\varphi_2^1(x) = e^x \left(P_0^1 + P_1^1 x\right) = (1, 1, 0)^T e^x$$

$$\varphi_2^2(x) = e^x \left(P_0^2 + P_1^2 x\right) = (1, 0, 1)^T e^x.$$

Am obţinut astfel sistemul fundamental de soluţii

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x, \quad \varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x,$$

cu ajutorul căreia soluţia generală se scrie

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$$

sau pe componente

$$\begin{array}{l} y_1(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^x = c_1 + (c_2 + c_3)e^x \\ y_2(x) = 3c_1 + c_2 e^x \\ y_3(x) = -c_1 + c_3 e^x \end{array}$$

cu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.

Dacă se determină matricea C astfel ca

$$(\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0))C = E$$

atunci $\big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\big)C$ este o nouă matrice fundamentală de soluţii ce este egală cu $S_A(x) = e^{Ax}$.

4.4 Proprietăţi ale zerourilor soluţiilor sistemelor liniare

Vom considera în acest paragraf un sistem de forma

$$y' + a_1 u + b_1 z = 0, \quad z' + a_2 y + b_2 z = 0 \tag{4.30}$$

unde $a_1, a_2, b_1, b_2 \in C(I)$. □

TEOREMA **4.9** *Fie* $(y, z)^t$ *o soluţie nenulă a sistemului* (4.30).

(i) Dacă $b_1(x) \neq 0, \ \forall \ x \in I$*, atunci zerourile lui y sînt simple şi mulţimea lor este finită.*

(ii) Dacă $p_2(x) \neq 0$*, atunci zerourile lui z sînt simple şi mulţimea lor este finită.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in I$ astfel ca $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. Din prima ecuaţie a sistemului (4.30) rezultă $z(x_0) = 0$. Din unicitatea soluţiei problemei Cauchy relativă la sistemul (4.30) rezultă că (y, z) este soluţia nulă, o contradicţie. Analog se demonstrează (ii).

TEOREMA **4.10 (M. Nicolescu)** *Fie* $a_i, b_i \in C[a, b]$ *şi* $b_1(x)a_2(x) < 0$*, pentru* $x \in [a, b]$*. Dacă* (y, z) *este o soluţie nenulă a sistemului* (4.30)*, atunci zerourile lui y şi z se separă reciproc pe* $[a, b]$.

Demonstraţie. Trebuie să demonstrăm că zerourile lui y şi z sînt simple, sînt izolate şi că între două zerouri consecutive ale unei componente a soluţiei (y, z) cealaltă componentă are un zerou şi numai unul.

Primele două afirmaţii rezultă din teorema anterioară. Deci rămîne să demonstrăm că între două zerouri consecutive ale lui y se află cel puţin un zerou al lui z şi între două zerouri consecutive ale lui z se află cel puţin un zerou pentru y. Fie (y, z) o soluţie a sistemului (4.30). Prin schimbarea de variabilă

$$u(x) = y(x) \exp\Big(\int_a^x a_1(s) ds\Big), \qquad v(x) = z(x) \exp\Big(\int_a^x b_2(s) ds\Big) \tag{4.31}$$

se obţine sistemul

$$u' + pv = 0, \quad v' + qu = 0 \tag{4.32}$$

unde $p(x) = b_1(x)\exp\Big(\int_a^x a_1(s)ds\Big)$, $q(x) = a_2(x)\exp\Big(\int_a^x b_2(s)ds\Big)$. Se observă că mulţimea zerourilor lui y şi u respectiv z, v coincid, iar $p(x) \neq 0$ dacă şi numai dacă $b_1(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$, $q(x) \neq 0$ dacă şi numai dacă $a_2(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a,b]$. Observăm că

$$W(x; u, v) = -q(x)u^2(x) + p(x)v^2(x) \neq 0 \;\; \forall \;\; x \in [a,b].$$

Dar dacă două funcţii de clasă C^1 au proprietatea că wronskianul lor nu se anulează în nici un punct din I atunci zerourile lor se separă reciproc. Pentru probarea acestui fapt se utilizează raţionamentul din demonstrarea teoremei de separare a lui Sturm (Teorema 3.4).

Probleme şi exerciţii

1) Să se formeze sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi echivalent cu ecuaţiile diferenţiale :

$$i)\; y^{(4)} + x^2 y = 0; \qquad ii)\; y'' - z = 0, \quad x^3 z' - 2y = 0.$$

2) Să se integreze sistemele de ecuaţii diferenţiale:

$$1)\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1+x^2}y, \\ z' = -\dfrac{z}{x} + y + x \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} y' = z, \\ z' = y \end{cases}$$

3) Să se construiască sistemele de ecuaţii diferenţiale care admit următoarele sisteme fundamentale de soluţii

$$1)\begin{pmatrix} e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix} \cos 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

4) Să se integreze următoarele sisteme de ecuaţii:

1) $y_1' = y_1 + 4y_2, \quad y_2' = y_1 + y_2,$
2) $y_1' + 3y_1 + y_2 = 0, \quad y_2' - y_1 + y_2 = 0,$
3) $y_1' = 2y_1 - y_2, \quad y_2' = y_1 + 2y_2$

5) Să se integreze următoarele sisteme de ecuaţii:

$$\begin{cases} y' + z' &= 2z \\ 3y' + z' &= y + 9z \end{cases}, \quad \begin{cases} y'' - 4y' + 4y - z &= 0 \\ z'' + 4z' + 4z - 25y &= 0 \end{cases}$$

6) Să se rezolve sistemul
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}Ay$$

7) Dacă A este o matrice constantă pentru care valorile proprii au părţile reale negative, iar $B : \mathbf{R}_+ \to M_n(\mathbf{R})$ este astfel încît
$$\int_0^\infty \|B(t)\|^2 dt < +\infty$$
atunci toate soluţiile sistemului
$$\frac{dy}{dx} = (A + B(x))y$$
verifică o inegalitate de forma
$$|y(x)| \le ke^{-ax}|y(0)|, \quad \alpha > 0.$$

8) Să se determine soluţiile problemei Cauchy
$$\begin{cases} y' & = xy + (1 - x^2)z \\ z' & = y - xz \end{cases}, \quad \begin{cases} y(0) & = 1 \\ z(0) & = 0 \end{cases}$$
folosind dezvoltarea în serie.

9) Fie $a_i, b_i \in C(I)$ şi (y_1, z_1), (y_2, z_2) soluţii liniar independente ale sistemului
$$y' + a_1(x)y + b_1(x)z = 0, \quad z' + a_2(x)y + b_2(x)z = 0 \tag{4.33}$$

(i) Să se arate că dacă $b_1(x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$ atunci zerourile lui y_1 şi y_2 se separă reciproc în orice interval finit $[\alpha, \beta] \subset I$.

(ii) Să se arate că dacă $a_2(x) \neq 0$, $\forall\ x \in I$, atunci zerourile lui z_1 şi z_2 se separă reciproc în orice interval $[\alpha, \beta] \subset I$.

Indicaţie. Din faptul că (y_1, z_1), (y_2, z_2) sînt soluţii ale sistemului (4.33) rezultă
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \text{ şi } \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = -a_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Bibliografie

[1] Arnold, V. I., Ecuaţii diferenţiale ordinare, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1978

[2] Avramescu, C., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Universitatea din Craiova, 1973

[3] Banţă, V., Ecuaţii cu derivate parţiale (culegere de probleme), Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1984

[4] Barbu, V., Ecuaţii diferenţiale, Editura Junimea, Iaşi, 1985

[5] Barbu, V., Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale, Editura Academiei Române, Bucureşti 1993

[6] Bers,L., F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York,London,Sydney,1964

[7] Brezis, H., Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983

[8] Corduneanu, A., Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în electrotehnică, Editura Facla, Timişoara, 1981

[9] Courant, R., Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York, 1962

[10] Courant, R., D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vols I and II, Interscience, 1953 and 1962

[11] Dautray, R., J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, Paris 1988

[12] Dieudonne, J., History of Functional Analysis, North Holland, Mathematic Studies, Amsterdam, New York, Oxford,1983

[13] Dincă, G., Metode variaţionale şi aplicaţii, Editura tehnică, Bucureşti 1980.

[14] Dragoş, L., Nicolau, A., Ecuaţii cu derivate parţiale (in Matematici clasice şi moderne, editor Caius Iacob), Editura tehnică, Bucureşti, 1981

[15] Filimon, I., Soare, M. V., Ecuaţii diferenţiale cu aplicaţii în mecanica construcţiilor, Editura tehnică, Bucureşti, 1983

[16] Folland, G.B., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1976

[17] Friedman, A., Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969

[18] Garabedian, P. R. Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 1964

[19] Gilbag, D., & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1963

[20] Godounov,S., Équation de la physique mathématique, Éditions Mir, Moscou 1973

[21] Guelfand, I. M., & G. E. Chilov, Les distributions, 1, 2,3, Dunod, Paris, 1962, 1964, 1965

[22] Gunther, N. M., Cuzmin, R. O., Culegere de problrme de matematici superioare, Editura tehnică, Bucureşti, 1950

[23] Haimovici, A., Ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965

[24] Halanay, A., Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, Editura Academiei Romane, Bucureşti, 1963

[25] Halanay, A., Differential equations, Academic Press, New York, 1966

[26] Halanay, A., Ecuaţii diferenţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972

[27] Halanay, A., Samuel, J., Differential Equations, Discrete Systems and Control, Economic Models, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1997

[28] Hormander, Lars, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1964

[29] Ionescu, D, V., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964

[30] Iftimie, V., Ecuaţii cu derivate parţiale, Tipografia Universităţii Bucureşti 1980

[31] John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1982

[32] Jude, L., Ecuaţii cu derivate parţiale, MATRIX ROM, Bucureşti, 1998

[33] Kalik Carol, Ecuaţii cu derivate parţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1980

[34] Khoam,Vo-Khac Distributions, Analyse de Fourier, Operateur aux derivées partielles, Librairie Vuibert, Paris, 1970

[35] Lalescu, T., Introducere în teoria ecuaţiilor integrale, Editura Academiei Romane, 1956

[36] Lions, J.L., Équations differentielles operationnelles et problèmes aux limites, Springer-Verlag, 1961

[37] Lebedev, N. N., Funcţii speciale şi aplicaţiile lor, Editura tehnică, Bucureşti, 1957

[38] Marin, M., Ecuaţii cu derivate parţiale, Soluţii clasice, soluţii generalizate, Editura tehnică, Bucureşti, 1998

[39] Marinescu, C., Marin, M., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura tehnică, Bucureşti, 1996

[40] Marinescu, Gh., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963

[41] Micula, Gh., Pavel, P., Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii, Editura Dacia, Cluj – Napoca, 1989

[42] Mihlin, S. G., Ecuaţii liniare cu derivate parţiale, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1983

[43] Mikhailov, V., Équations aux dérivèes partiellles, Éditions Mir, Moscou 1980

[44] Mirică, St., Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, Tipografia Universităţii Bucureşti, 1989

[45] Mizohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge, 1973

[46] Moroşanu, G., Ecuaţii diferenţiale, Aplicaţii, Editura Academiei Romane, Bucureşti, 1989

[47] Nečas, J., Les méthodes directes en théorie de équations élliptiques, Académie Tchéchoslovaque des Scinces, Prague, 1967

[48] Olariu, V., Stănăşilă, T., Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, Editura tehnică, Bucureşti, 1984

[49] Oleinik, C., Spaţii de funcţii şi ecuaţii cu derivate parţiale (note de curs în limba rusă)

[50] Pavel, N., Ecuaţii diferenţiale asociate unor operatori neliniari în spaţii Banach, Editura Academiei Romane, Bucureşti, 1977

[51] Pavel, P., Rus, I. A., Ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975

[52] Petrovski, I. G., Prelegeri asupra teoriei ecuaţiilor diferenţiale ordinare, Editura tehnică, Bucureşti, 1952

[53] Prasad Ph. & R. Ravindran, Partial Differential Equations, Wiley Eastern Limited

[54] Raviart, P.A., J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1983

[55] Rogai, E., Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale, Editura tehnică, Bucureşti, 1965

[56] Rogai, E., Ecuaţii diferenţiale. Exerciţii şi probleme, Universitatea din Bucureşti, 1984

[57] Roşca, I., Ecuaţii cu derivate parţiale, Editura Universităţii din Bucureşti, 1997

[58] Roşculeţ, M., Ecuaţii diferenţiale şi aplicaţii, Editura Academiei Romane, Bucureşti 1984

[59] Roşculeţ, M., Craiu, M., Ecuaţii diferenţiale aplicative, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971

[60] Rus, I. A., Ecuaţii diferenţiale, Ecuaţii integrale şi sisteme dinamice, TRANSILVANIA PRESS, Cluj 1996

[61] Rus, I. A., Micula, Gh., Pavel, P., Ionescu, B. I., Probleme de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureţi, 1982

[62] Rus, I. A., Pavel P., Ecuaţii diferenţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1982

[63] Schwartz, L., Théorie des distributions, I et II, Hermann, Paris, 1950 – 1951

[64] Schwartz, L., Analyse mathematique, I, II, Hermann, Paris, 1967

[65] Smirnov, M. M., Probleme asupra ecuaţiilor fizicii matematice, Editura tehnică, Bucureşti, 1954

[66] Stepanov, V. V., Curs de ecuaţii diferenţiale, Editura tehnică, Bucureşti, 1955

[67] Teodorescu, N., V. Olariu, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1970

[68] Teodorescu, N., Curs de ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, aplicaţii fizice şi geometrice, Bucureşti, Facultatea de ştiinţe, 1949 – 1950

[69] Teodorescu, N., V. Olariu, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1975

[70] Teodorescu, N., V. Olariu, Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, 3 volume, Editura tehnică, Bucureşti, 1978, 1979, 1980

[71] Tihonov, A.N. & A.A. Samarski, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura tehnică, Bucureşti 1956

[72] Tréves, F., Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975

[73] Vladimirov, V.S., Ecuaţiile fizicii matematice, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1980

[74] Vladimirov,V.S., & alţii, Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1981

[75] Wloka, J., Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1987