Ecuaţii booleene

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Email: cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Acest referat conţine o serie de metode de rezolvare a unor tipuri de ecuaţii booleene şi se adresează studenţilor care urmează cursul de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă". De asemenea, peste tot vom nota operaţiile unei latici sau algebre Boole astfel: o algebră Boole de mulţime suport B va fi notată $(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ (şi la fel vom nota şi laticile, desigur, cu operaţiile corespunzătoare) şi va fi referită prin mulţimea sa suport (adică vom spune *algebra Boole* B), la fel cum vom face pentru fiecare structură algebrică pe care o vom folosi. Şi operaţiile unui inel vor avea notaţiile standard.

Relaţia de ordine parţială dintr-o latice (în particular dintr-o algebră Boole) va fi notată $\leq$. Amintim definiţia ei: pentru oricare două elemente x, y ale laticii, $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ (a se vedea demonstraţia echivalenţei celor două definiţii ale laticii).

Amintim definiţiile operaţiilor derivate ale unei algebre Boole B, anume implicaţia ($\rightarrow$) şi echivalenţa ($\leftrightarrow$): pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$ şi $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

1 Rezultate preliminare

Lema 1.1. *Fie L o latice şi $a, b, x \in L$ astfel încât $a \leq b$. Atunci: $a \vee x \leq b \vee x$ şi $a \wedge x \leq b \wedge x$.*

Demonstraţie: Din definiţia relaţiei de ordine într-o latice (a se vedea demonstraţia echivalenţei celor două definiţii ale laticii), avem echivalenţa:

$a \leq b$ ddacă $a \vee b = b$. Rezultă că $(a \vee x) \vee (b \vee x) = a \vee x \vee b \vee x = a \vee b \vee x \vee x = a \vee b \vee x = (a \vee b) \vee x = b \vee x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\vee$, precum şi egalitatea $a \vee b = b$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \vee x) \vee (b \vee x) = b \vee x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \vee x \leq b \vee x$.

Tot din definiţia relaţiei de ordine într-o latice, avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \wedge b = a$. Rezultă că $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x \wedge b \wedge x = a \wedge b \wedge x \wedge x = a \wedge b \wedge x = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\wedge$, precum şi egalitatea $a \wedge b = a$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Observaţia 1.2 (Legea de reziduaţie). Fie B o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \;\; \Leftrightarrow \alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Demonstraţie: Vom demonstra echivalenţa din enunţ prin dublă implicaţie. A se vedea mai jos o a doua demonstraţie.
"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform Lemei 1.1, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi $\overline{\beta}$, obţinem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole şi definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, şi obţinem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ şi aplicând tranzitivitatea unei relaţii de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.
"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform Lemei 1.1, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi β, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ şi tranzitivitatea unei relaţii de ordine, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Lema 1.3. *Fie B o algebră Boole şi $x, y, z \in B$. Atunci:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$*;*

(ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ *şi* $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ *(*legile lui de Morgan*);*

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$ *(de unde rezultă imediat că:* $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$*);*

(iv) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z = y \to (x \to z)$.

Demonstraţie: Punctul (i) este imediat, echivalenţa fiind demonstrată prin dublă implicaţie astfel: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$. Am folosit unicitatea complementului şi idempotenţa operaţiei de complementare, care rezultă tot din unicitatea complementului într-o algebră Boole (chiar în orice latice distributivă cu 0 şi 1, unde nu este asigurată existenţa complementului, însă).

Legile lui de Morgan (punctul (ii)) se demonstrează imediat aplicând definiţia complementului şi unicitatea lui pentru orice element al unei algebre Boole. Mai precis, prima relaţie se demonstrează arătând că elementul $\overline{x} \wedge \overline{y}$ satisface cele două relaţii care definesc complementul lui $x \vee y$ (anume disjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 1 şi conjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 0). Se procedează la fel pentru cealaltă relaţie.
(iii) Aplicând Lema 1.1, obţinem: dacă $x \leq y$, atunci $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$, prin urmare $x \wedge \overline{y} = 0$; reciproc, folosind distributivitatea unei algebre Boole, obţinem: dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, aşadar $y = y \vee x$, adică $x \leq y$, conform definiţiei lui $\leq$. Am obţinut: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$. Acum aplicăm punctele (i) şi (ii) (legile lui de Morgan) şi obţinem: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \to y = 1$, conform definiţiei implicaţiei.
(iv) Aplicăm definiţia implicaţiei şi punctul (ii) (legile lui de Morgan): $x \to (y \to z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = \overline{x \wedge y} \vee z = (x \wedge y) \to z$, iar ultima egalitate din enunţ rezultă din comutativitatea lui $\wedge$ şi prima egalitate din enunţ.

Demonstraţia a doua pentru legea de reziduaţie (Observaţia 1.2): Fie $\alpha, \beta, \gamma \in B$. Conform Lemei 1.3, punctele (iii) şi (iv), avem: $\alpha \leq \beta \to \gamma$ ddacă $\alpha \to (\beta \to \gamma) = 1$ ddacă $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma = 1$ ddacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Observaţia 1.4. Fie B o algebră Boole şi $x, y \in B$. Atunci: $x \leq y$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.

Demonstraţie: Aplicând definiţia relaţiei $\leq$, Lema 1.3, (i) şi legile lui de Morgan (Lema 1.3, (ii)), obţinem: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.

Amintim:

Definiţia 1.5. Se numeşte *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lema 1.6. *În orice inel Boole B, au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ şi $x+x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ şi orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).*

Teorema 1.7 (Echivalenţa inel Boole $\Leftrightarrow$ algebră Boole). *A da un inel Boole este echivalent cu a da o algebră Boole. Mai precis:*

- *Fie $(B, +, \cdot, 0, 1)$ un inel Boole. Definim operaţiile $\vee$, $\wedge$ şi $^-$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x \vee y = x + y + xy \\ x \wedge y = xy \\ \overline{x} = x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota cu $\mathcal{A}(B)$.

- *Fie $(B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole. Definim operaţiile $+$ şi $\cdot$ pe B prin: pentru orice $x, y \in B$:*

$$\begin{cases} x + y = (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy = x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, 0, 1)$ este un inel Boole, pe care îl vom nota cu $\mathcal{I}(B)$.

- *Pentru orice inel Boole B, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(B)) = B$, cu aceleaşi operaţii ca şi inelul Boole B iniţial. Pentru orice algebră Boole B, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(B)) = B$, cu aceleaşi operaţii ca şi algebra Boole B iniţială. Desigur, nu putem spune că am definit două funcţii $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{I}$ inverse una alteia, pentru că totalitatea inelelor Boole nu formează o mulţime, ci o clasă care nu este mulţime, şi la fel se întâmplă şi în cazul algebrelor Boole, iar funcţiile sunt definite între mulţimi, nu între clase oarecare.*

2 Rezolvarea ecuaţiilor booleene

Exerciţiul 2.1. Fie B o algebră Boole şi $a, b \in B$, arbitrare, fixate. Să se rezolve în necunoscuta $x \in B$ următoarele ecuaţii booleene:

(i) $a \wedge x = b$

(ii) $a \vee x = b$

(iii) $a \rightarrow x = b$

(iv) $x \rightarrow a = b$

(v) $a \leftrightarrow x = b$

(vi) $(a \vee b) \wedge (x \rightarrow a) = b \vee x$

(vii) $(a \wedge b) \vee (x \rightarrow a) = b \wedge x$

(viii) $(a \vee b) \wedge (a \rightarrow x) = b \vee x$

Rezolvare:
(i) Vom aplica legea de reziduaţie (Observaţia 1.2) în primul şir dintre următoarele echivalenţe:

$$a \wedge x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge x \leq b \\ b \leq a \wedge x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \wedge a \leq b \\ b \leq a \text{ şi } b \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \rightarrow b \\ b \leq a \\ b \leq x \end{cases}$$

Să observăm că, dacă, condiţia $b \leq a$ nu este satisfăcută, atunci ecuaţia (i) nu are soluţii. Într-adevăr, dacă $x \in B$ este soluţie a acestei ecuaţii, atunci avem: $b = a \wedge x \leq a$. Aşadar, condiţia $b \leq a$ este o *condiţie de compatibilitate a ecuaţiei (i)*, altfel spus o condiţie de existenţă a soluţiilor pentru această ecuaţie.

Cele două inegalităţi care trebuie satisfăcute de orice soluţie x pot fi scrise astfel: $b \leq x \leq a \rightarrow b$, şi intervalul de valori pentru x determinat de ele reprezintă chiar *soluţia ecuaţiei (i)*, după cum ne asigură faptul că obţinerea lor s-a făcut prin scrierea unor echivalenţe pornind de la ecuaţia (i) şi faptul că acel interval este nevid, deoarece $b \leq \overline{a} \vee b = a \rightarrow b$.

Aşadar, am obţinut: $\begin{cases} \text{condiţia de compatibilitate a ecuaţiei: } b \leq a \\ \text{soluţia ecuaţiei: } b \leq x \leq a \rightarrow b \end{cases}$

(ii) Folosind punctele (i) şi (ii) din Lema 1.3, scriem ecuaţia (ii) sub forma unei ecuaţii de tipul (i) în necunoscuta $\overline{x} \in B$: $a \vee x = b \Leftrightarrow \overline{a \vee x} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \wedge \overline{x} = \overline{b}$.

Rezolvăm această ecuaţie aplicând procedeul descris la (i), apoi aplicăm Observaţia 1.4 pentru a obţine soluţiile în necunoscuta x. Aşadar, avem condiţia de compatibilitate $\overline{b} \leq \overline{a}$, care este echivalentă cu $a \leq b$ conform

Observaţiei 1.4. Similar procedăm cu soluţia: $\overline{b} \leq \overline{x} \leq \overline{a} \rightarrow \overline{b} = \overline{\overline{a}} \vee \overline{b} = \overline{\overline{a} \wedge b}$, echivalent cu: $\overline{a} \wedge b \leq x \leq b$; am aplicat şi Lema 1.3, (ii).

Am obţinut: $\begin{cases} \text{condiţia de compatibilitate a ecuaţiei: } a \leq b \\ \text{soluţia ecuaţiei: } \overline{a} \wedge b \leq x \leq b \end{cases}$

(iii) Avem: $a \rightarrow x = b \Leftrightarrow \overline{a} \vee x = b$, deci ecuaţia (iii) este echivalentă cu o ecuaţie de forma (ii) în x, care se rezolvă la fel ca ecuaţia (ii).

(iv) Avem, conform punctelor (i) şi (ii) din Lema 1.3: $x \rightarrow a = b \Leftrightarrow \overline{x} \vee a = b \Leftrightarrow a \vee \overline{x} = b \Leftrightarrow \overline{a \vee \overline{x}} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \wedge \overline{\overline{x}} = \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \wedge x = \overline{b}$, deci ecuaţia (iv) este echivalentă cu o ecuaţie de forma (i) în x, care se rezolvă la fel ca ecuaţia (i).

(v) $a \leftrightarrow x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leftrightarrow x \leq b \\ b \leq a \leftrightarrow x \end{cases}$

La explicitarea primei dintre inecuaţiile de mai sus, ne va folosi o scriere a expresiei $a \leftrightarrow x$ sub forma unei disjuncţii de conjuncţii, în timp ce, pentru cea de-a doua inecuaţie, ne va servi o scriere a aceleiaşi expresii sub forma unei conjuncţii de disjuncţii. Le putem obţine pe amândouă aplicând definiţia lui $\leftrightarrow$ şi distributivitatea: $a \leftrightarrow x = (a \rightarrow x) \wedge (x \rightarrow a) = (\overline{a} \vee x) \wedge (\overline{x} \vee a) = (\overline{a} \wedge \overline{x}) \vee (\overline{a} \wedge a) \vee (x \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge a) = (\overline{a} \wedge \overline{x}) \vee 0 \vee 0 \vee (x \wedge a) = (\overline{a} \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge a)$. Cu aceste scrieri echivalente şi aplicând faptul imediat că un element al unei latici majorează un supremum a două elemente ddacă acelaşi element majorează pe fiecare dintre cele două elemente, şi, similar, un element al unei latici minorează un infimum a două elemente ddacă acelaşi element minorează pe fiecare dintre cele două elemente, obţinem echivalenţele:

$$a \leftrightarrow x = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leftrightarrow x \leq b \\ b \leq a \leftrightarrow x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{a} \wedge \overline{x}) \vee (x \wedge a) \leq b \\ b \leq (\overline{a} \vee x) \wedge (\overline{x} \vee a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a} \wedge \overline{x} \leq b \\ x \wedge a \leq b \\ b \leq \overline{a} \vee x \\ b \leq \overline{x} \vee a \end{cases}$$

Acum aplicăm Observaţia 1.4, legile lui de Morgan (Lema 1.3, (ii)) şi legea de reziduaţie (Observaţia 1.2) şi obţinem relaţiile echivalente cu ecuaţia (v):

$$\begin{cases} \overline{x} \wedge \overline{a} \leq b \\ x \wedge a \leq b \\ \overline{\overline{a} \vee x} \leq \overline{b} \\ \overline{\overline{x} \vee a} \leq \overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} \wedge \overline{a} \leq b \\ x \wedge a \leq b \\ \overline{x} \wedge a \leq \overline{b} \\ x \wedge \overline{a} \leq \overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x} \leq \overline{a} \rightarrow b \\ x \leq a \rightarrow b \\ \overline{x} \leq a \rightarrow \overline{b} \\ x \leq \overline{a} \rightarrow \overline{b} \end{cases}$$

În continuare, aplicăm încă o dată Observaţia 1.4, apoi procedeul de mai sus privind majoranţii unui supremum şi minoranţii unui infimum, şi obţinem relaţiile echivalente cu ecuaţia (v):

$$\begin{cases} \overline{\overline{a} \to b} \leq x \\ x \leq a \to b \\ \overline{a \to \overline{b}} \leq x \\ x \leq \overline{a} \to \overline{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{\overline{a} \to b}) \vee (\overline{a \to \overline{b}}) \leq x \\ x \leq (a \to b) \wedge (\overline{a} \to \overline{b}) \end{cases}$$

Să calculăm cele două expresii în a şi b de mai sus: $(\overline{\overline{a} \to b}) \vee (\overline{a \to \overline{b}}) = (\overline{a \vee b}) \vee (\overline{\overline{a} \vee \overline{b}}) = (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge b) = (\overline{a} \vee a) \wedge (\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{b} \vee a) \wedge (\overline{b} \vee b) = 1 \wedge (a \to b) \wedge (b \to a) \wedge 1 = a \leftrightarrow b$ şi $(a \to b) \wedge (\overline{a} \to \overline{b}) = (a \to b) \wedge (a \vee \overline{b}) = (a \to b) \wedge (b \to a) = a \leftrightarrow b$.

În concluzie, ecuaţia (v) este echivalentă cu: $\begin{cases} a \leftrightarrow b \leq x \\ x \leq a \leftrightarrow b \end{cases}$, ceea ce ne dă soluţia: $x = a \leftrightarrow b$.

Ca o observaţie suplimentară, am obţinut: $a \leftrightarrow x = b$ ddacă $a \leftrightarrow b = x$. De aici, aplicând şi comutativitatea operaţiei $\leftrightarrow$, rezultă că: pentru orice elemente ale unei algebre Boole $x_1, x_2, x_3 \in B$ şi pentru orice permutare π a mulţimii $\{1, 2, 3\}$ (adică orice funcţie bijectivă $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$), are loc echivalenţa: $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_3$ ddacă $x_{\pi(1)} \leftrightarrow x_{\pi(2)} = x_{\pi(3)}$.

(vi) Pentru a rezolva această ecuaţie vom folosi Teorema 1.7, şi va fi esenţial faptul că, respectând notaţiile din această teoremă, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(B)) = B$, cu aceleaşi operaţii ca şi algebra Boole B iniţială.

Să calculăm în inelul Boole $\mathcal{I}(B)$:

- $a \vee b = a + b + ab$
- $x \to a = \overline{x} \vee a = (x+1) \vee a = x+1+a+(x+1)a = x+1+a+a+xa = 1 + x + ax$ (am aplicat Lema 1.6)
- $(a \vee b) \wedge (x \to a) = (a+b+ab) \cdot (1+x+ax) = a+ax+a^2x+b+bx+abx+ab+abx+a^2bx = a+ax+ax+b+bx+abx+ab+abx+abx = a + b + ab + bx + abx$ (am aplicat Definiţia 1.5 şi Lema 1.6)
- $b \vee x = b + x + bx$

Obţinem ecuaţia echivalentă în inelul Boole $\mathcal{I}(B)$: $a+b+ab+bx+abx = b+x+bx$, ceea ce este echivalent cu $a+ab+abx = x$, adică $a+ab = x-abx$, adică $a + ab = x + abx$, adică $a(b + 1) = (ab + 1)x$ (am aplicat din nou Lema 1.6).

Acum să ne întoarcem la algebra Boole $\mathcal{A}(\mathcal{I}(B)) = B$, în care calculăm:

- $b + 1 = \overline{b}$
- $a(b + 1) = a \wedge \overline{b}$
- $ab + 1 = \overline{ab} = \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ (am aplicat legile lui de Morgan: Lema 1.3, (ii))
- $(ab + 1)x = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge x$

Aşadar, am obţinut ecuaţia echivalentă: $(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge x = a \wedge \overline{b}$, care este de forma (i), şi deci are:

- condiţia de compatibilitate: $a \wedge \overline{b} \leq \overline{a} \vee \overline{b}$, care este satisfăcută indiferent de valorile lui a şi b, datorită şirului de inegalităţi: $a \wedge \overline{b} \leq \overline{b} \leq \overline{a} \vee \overline{b}$
- soluţia: $a \wedge \overline{b} \leq x \leq (\overline{a} \vee \overline{b}) \rightarrow (a \wedge \overline{b}) = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}} \vee (a \wedge \overline{b}) = (a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a \wedge (b \vee \overline{b}) = a \wedge 1 = a$ (am aplicat din nou legile lui de Morgan: Lema 1.3, (ii), apoi distributivitatea)

Aşadar putem elimina condiţia de compatibilitate şi obţinem soluţia, care există indiferent de valorile lui a şi b: $a \wedge \overline{b} \leq x \leq a$.

(vii) Temă pentru acasă.

(viii) Temă pentru acasă.