CURS #12

CONȚINUTUL CURSULUI #12:

IX. Integrarea numerică
IX.1. Formule de cuadratură.

Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție integrabilă și fie

$$I(f) := \int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

Definiția (IX.1.)

Se numește formulă de cuadratură a lui f o formulă de aproximare a integralei (1) de forma

$$\boxed{I_n(f) := \sum_{k=1}^{n+1} w_k\, f(x_k)} \tag{2}$$

unde x_k, $k = \overline{1, n+1}$ sunt astfel încât $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leq b$. $w_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n+1}$, se numesc coeficienții/ponderile cuadraturii (2), iar x_k, $k = \overline{1, n+1}$ se numesc nodurile cuadraturii (2).

Definiția (IX.2.)

Mărimea $E_n(f)$ definită conform formulei

$$E_n(f) := I(f) - I_n(f) \tag{3}$$

se numește eroarea cuadraturii (2) a lui f.

Considerăm funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f \in C^{n+1}[a, b]$. Fie $P_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ polinomul de interpolare Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\,, \quad x \in [a, b]$$

cu $L_{n,k}$ funcțiile de bază:

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\,, \quad x \in [a, b]\,, \quad k = \overline{1, n+1}$$

Conform Teoremei de estimare a erorii de interpolare Lagrange avem:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\, \pi_{n+1}(x)\,, \quad \forall\, x \in [a, b]\,; \quad \xi(x) \in (a, b)$$

$$\pi_{n+1}(x) := \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)\,, \quad x \in [a, b]$$

Formula de cuadratură a lui f devine în acest caz:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_a^b P_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, f(x_k)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\left(\int_a^b L_{n,k}(x)\, dx \right)}_{=: w_k} f(x_k) \end{aligned}$$

sau

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n+1} w_k f(x_k) \tag{4}$$

unde ponderile cuadraturii (4) sunt date de:

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad k = \overline{1, n+1} \tag{5}$$

Estimarea erorii cuadraturii (4) este:

$$\begin{aligned}|E_n(f)| = |I(f) - I_n(f)| &\leq \int_a^b \frac{|f^{(n+1)}(\xi(x))|}{(n+1)!}\,|\pi_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b |\pi_{n+1}(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

unde $M_{n+1} := \max\limits_{\zeta\in[a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)|$.

IX.2. Formulele de cuadratură Newton-Cotes

Dacă nodurile cuadraturii (2) sunt echidistante și $x_1 = a, x_{n+1} = b$ atunci formula (2) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes închisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz avem:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ h = \dfrac{b-a}{n} \\ x_i = a + (i-1)h, i = \overline{1, n+1} \end{cases} \tag{6}$$

Dacă nodurile cuadraturii (2) sunt echidistante și $x_1 > a, x_{n+1} < b$ atunci formula (2) se numește formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă cu $(n+1)$ noduri/puncte. În acest caz vom considera discretizarea de forma:

$$\begin{cases} x_0 = a, x_{n+2} = b \\ h = \dfrac{b-a}{n+2} \\ x_i = a + ih, i = \overline{0, n+2} \end{cases} \tag{7}$$

Menționăm că pentru ambele metode formula de cuadratură rămâne de forma (4) cu ponderile date de (5).
Fie următoarele schimbări de variabile corespunzătoare celor două formule (închisă și deschisă):

(a) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă:

$$x = a + h(t-1)\,, \quad t \in [1, n+1]\,; \quad \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

(b) S.V. pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă:

$$x = a + h\,t\,, \quad t \in [0, n+2]\,; \quad \mathrm{d}x = h\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

În cazul schimbării de variabilă pentru formula de cuadratura Newton - Cotes închisă avem:

$$\begin{aligned}L_{n,k}(x) &= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{(a + h(t-1)) - (a + h(i-1))}{(a + h(k-1)) - (a + h(i-1))} \\ &= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,, \quad x \in [a, b]\,, \quad k = \overline{1, n+1}\end{aligned}$$

Coeficienții/ponderile $w_k, k = \overline{1, n+1}$ cuadraturii Newton-Cotes se calculează după cum urmează:

(a) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes închisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = h\int_1^{n+1} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,\mathrm{d}t\,,$$

(b) Pentru formula de cuadratură Newton - Cotes deschisă avem

$$w_k = \int_a^b L_{n,k}(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^{n+2} \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n+1} \frac{t-i}{k-i}\,\mathrm{d}t$$

IX.2.1. Formula de cuadratură a trapezului.

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă (n=1).
Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad h = b - a$$

Formula de cuadratură este:

$$I_1(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) = w_1 f(a) + w_2 f(b)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$w_1 = h \int_1^2 \frac{t-2}{-1}\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}$$
$$w_2 = h \int_1^2 (t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{2}$$

Astfel, obținem formula de cuadratură a trapezului:

$$I_1(f) = h\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right] = \frac{b-a}{2}\Big[f(a) + f(b)\Big] \tag{10}$$

Estimarea erorii de cuadratură a trapezului:
Dacă $f \in C^2[a,b]$, din Teorema de estimare a erorii polinomului de interpolare Lagrange P_1 rezultă:

$$f(x) - P_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\,\pi_2(x) = \frac{f''(\xi)}{2}\,(x - x_1)(x - x_2), \quad \xi \in (a,b)$$

Obținem:

$$E_1(f) = I(f) - I_1(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}\,(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{f''(\xi)}{2} \int_1^2 h^2\,(t-1)(t-2)\,h\,\mathrm{d}t = -\frac{f''(\xi)}{12}\,h^3\,, \quad \text{cu} \quad \xi \in (a,b)$$

$$E_1(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}\,h^3 = O(h^3)\,, \quad \text{cu} \quad \xi \in (a,b)$$

IX.2.2 Formula de cuadratură Simpson ($n = 2$)

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes închisă ($n = 2$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_1 = a\,, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} = a + h\,, \quad x_3 = b = a + 2\,h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_2(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + w_3 f(x_3)$$

Ponderile cuadraturii sunt:

$$w_1 = h \int_1^3 \frac{1}{2}\,(t-2)(t-3)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{3}$$
$$w_2 = h \int_1^3 -(t-1)(t-3)\,\mathrm{d}t = \frac{4h}{3}$$
$$w_3 = h \int_1^3 \frac{1}{2}\,(t-1)(t-2)\,\mathrm{d}t = \frac{h}{3}$$

Astfel, obținem formula de cuadratură Simpson:

$$\begin{aligned} I_2(f) &= h\left[\frac{1}{3} f(a) + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{3} f(b)\right] \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

Estimarea erorii de cuadratură Simpson: Se poate arăta că dacă $f \in C^4[a,b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a,b)$ a.i.

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\,h^5 = O(h^5) \tag{12}$$

IX.2.3. Formula de cuadratură a dreptunghiului

Considerăm cazul cuadraturii Newton-Cotes deschisă ($n = 0$). Nodurile cuadraturii sunt:

$$x_0 := a\,, \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = a+h\,, \quad x_2 := b = a+2\,h, \quad h = \frac{b-a}{2}$$

Formula de cuadratură este:

$$I_0(f) = w_1 f(x_1) = w_1 f(\frac{a+b}{2}) \tag{13}$$

Ponderea de cuadratură w_1 este:

$$w_1 = \int_a^b L_{0,1}(x)dx = b-a = 2h$$

Obs.: Convenție: Funcția de bază pentru $n = 0$ o vom considera $L_{0,1}(x) = 1$.
Obținem astfel formula de cuadratură a dreptunghiului

$$I_0(f) = 2\,h\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{14}$$

Dacă $f \in C^2[a,b]$, atunci $\exists\, \xi \in (a,b)$ a.i. $E_0(f) = \dfrac{f''(\xi)}{3}\,h^3$

IX.3. Formule de cuadratură sumate

IX.3.1. Formula de cuadratură sumată a dreptunghiului ($n = 0$).

Fie partiție/diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a,b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a+(k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}; \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

Aplicăm formula de cuadratură a dreptunghiului pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1, m}$

$$I_{0,m} = \sum_{k=1}^{m} I_0^k(f) = \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})(x_{2k+1} - x_{2k-2}) = 2h \sum_{k=1}^{m} f(x_{2k}) \tag{16}$$

unde $I_0^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a dreptunghiului scrisă pe intervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$.
Obs.: Adunând erorile formulei de cuadratură de la fiecare subinterval , eroarea formulei de cuadratură sumată își micșorează ordinul cu o unitate. Fie $\varepsilon_k = O(h^3)$, eroarea formulei de cuadratură a dreptunghiului pe subintervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$, atunci eroarea formulei de cuadatură sumată a a dreptunghiului este:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k = O(h^3) \sum_{k=1}^{m} 1 = m \cdot O(h^3) = \frac{b-a}{2h} \cdot O(h^3) = O(h^2) \tag{17}$$

IX.3.2. Formula de cuadratură sumată a trapezului ($n = 1$)

Fie diviziunea echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a,b]$:

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} \left[x_k, x_{k+1}\right]\,; \quad x_k = a + (k-1)h\,, \quad k = \overline{1, m+1}\,; \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Are loc identitatea:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{18}$$

În fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1, m+1}$, considerăm nodurile de interpolare x_k și x_{k+1}.
Aplicăm formula de cuadratură a trapezului pe fiecare subinterval $\left[x_k, x_{k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1, m+1}$

$$
\begin{aligned}
I_{1,m}(f) &= \sum_{k=1}^{m} I_1^k(f) = \sum_{k=1}^{m} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\cdot(x_{k+1}-x_k) \\
&= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{m}(f(x_k)+f(x_{k+1})) = \frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2) \\
&+ f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_m)+f(x_{m+1})) \\
&= \frac{h}{2}(f(x_1)+2\sum_{k=2}^{m} f(x_k)+f(x_{m+1}))
\end{aligned} \tag{19}
$$

unde $I_1^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură a trapezului pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$.
Eroarea formulei de cuadratură sumată a trapezului este de ordinul $O(h^2)$.

IX.3.3. Formula de cuadratură sumată Simpson ($n = 2$)

Fie diviziune echidistantă $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m} < x_{2m+1} = b$, $m \geq 1$, a intervalului $[a, b]$:

$$
[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m}\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right]; \quad x_k = a + (k-1)h, \quad k = \overline{1, 2m+1}
$$

$$
h := \frac{b-a}{2m}
$$

Are loc identitatea:

$$
I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2k-1}}^{x_{2k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{20}
$$

În fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1, m}$, considerăm nodurile de interpolare x_{2k-1}, x_{2k} și x_{2k+1}
Aplicăm formula de cuadratură Simpson pe fiecare subinterval $\left[x_{2k-1}, x_{2k+1}\right] \subset [a,b]$, $k = \overline{1, m}$:

$$
\begin{aligned}
I_{2,m}(f) = \sum_{k=1}^{m} I_2^k(f) = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{3}f(x_{2k-1})+\frac{4}{3}f(x_{2k})+\frac{1}{3}f(x_{2k+1})\right)\times \\
\times\frac{x_{2k+1}-x_{2k-1}}{2} = \frac{h}{3}(\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k})+2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k+1})+f(x_{2m+1}))
\end{aligned} \tag{21}
$$

unde $I_2^k(f)$ reprezintă formula de cuadratură Simpson pe intervalul $[x_{2k-1}, x_{2k+1}]$.
Eroarea formulei de cuadratură sumată Simpson este de ordinul $O(h^4)$.

X. Rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale

X. 1. Teoria generală a problemelor cu date inițiale

Considerăm în continuare problema Cauchy asociată ecuației diferențiale de ordinul întâi:

$$
\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{22}
$$

unde $f(\cdot,\cdot) : D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Prin soluție a problemei Cauchy (f, t_0, x_0) înțelegem o funcție $\varphi(\cdot) : I \to \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

- Graph$(\varphi(\cdot)) = \{(t, \varphi(t)), t \in I\} \subset D$;
- $\varphi(\cdot)$ este derivabilă pe I și verifică identitatea $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$;
- $\varphi(\cdot)$ verifică condiția inițială, i.e. $\varphi(t_0) = x_0$.

Vom da din continuare câteva rezultate în teoria ecuțiilor diferențiale care asigură atât existența și unicitatea soluțiilor locale, cât și existența și unicitatea soluțiilor maximale.

Teorema (X.1. Peano)

Fie $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deschisă și $f(\cdot,\cdot) : D \to \mathbb{R}$ continuă în raport cu ambele argumente, câmp scalar, care definește ecuația diferențială

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{23}$$

Atunci, $f(\cdot,\cdot)$ admite proprietatea de existență locală (E.L.) a soluțiilor, i.e. $\forall (t_0,x_0) \in D,\ \exists I_0 \in \mathcal{V}_{t_0}$ și $\exists \varphi(\cdot) : I_0 \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f,t_0,x_0).

Definition

Aplicația $f(\cdot,\cdot) : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, unde D este deschisă, se numește local Lipschitz în raport cu al doilea argument în $(t_0,x_0) \in D$ dacă $\exists D_0 \in \mathcal{V}_{(t_0,x_0)}$ și $L \geq 0$, astfel încât:

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \forall (t,x),(t,y) \in D_0 \tag{24}$$

Teorema (X.2. Cauchy-Lipschitz)

Fie $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deschisă și $f(\cdot,\cdot) : D \to \mathbb{R}$ continuă în raport cu ambele argumente, câmp scalar, care definește ecuația diferențială (23). Mai mult, $f(\cdot,\cdot)$ este local Lipschitz în raport cu al doilea argument. Atunci, $f(\cdot,\cdot)$ admite proprietatea de existență și unicitate locală (E.U.L.) a soluțiilor, i.e. $\forall (t_0,x_0) \in D,\ \exists I_0 \in \mathcal{V}_{t_0}$ și $\exists! \varphi(\cdot) : I_0 \to \mathbb{R}$ soluție a problemei Cauchy (f,t_0,x_0).

Propoziția (X.1.)

Fie $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ deschisă și $f(\cdot,\cdot) : D \to \mathbb{R}$ continuă în raport cu ambele argumente și de clasă C^1 în raport cu al doilea argument, i.e. există $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ și aplicația $(t,x) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ este continuă. Atunci, $f(\cdot,\cdot)$ este local Lipschitz în raport cu al doilea argument.

Teorema (X.3. Existența și unicitatea soluțiilor maximale)

În ipotezele teoremei Cauchy-Lipschitz avem că pentru $\forall (t_0,x_0) \in D_0, \exists! \varphi_{t_0,x_0}(\cdot) : I(t_0,x_0) = (t^-(t_0,x_0), t^+(t_0,x_0)) \to \mathbb{R}$ soluție maximală a problemei Cauchy (f,t_0,x_0), $-\infty \leq t^-(t_0,x_0) < t_0 <$ $< t^+(t_0,x_0) \leq \infty$.

Obs.: $\varphi_{t_0,x_0}(\cdot)$ numai poate fi prelungită strict.

Exemplu 1. Fie ecuația $x' = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3t^2}$.

a) Să se demonstreze că ecuția admite proprietatea de E.U.L;

b) Să se verifice că $\varphi_K(t) = \dfrac{1}{t - K\sqrt[3]{t^2}} + \dfrac{1}{t}$ este soluție pentru ecuația dată;

c) Să se afle soluția problemei Cauchy $(f,1,0)$;

d) Să se afle intervalul maximal $I(1,0) = (t^-(1,0), t^+(1,0))$.

Rezolvare: a) Funcția $f(\cdot,\cdot)$ care definește ecuația este $f(t,x) = -\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{2}{3t^2}$. Funcția $f(\cdot,\cdot)$ este continuă pentru $t \neq 0$. Fie domeniul $D = (0,\infty) \times \mathbb{R}$. Se observă că D este o mulțime deschisă.

Mai mult, deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -x$, aplicația $(t,x) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -x$ este continuă, deci $f(\cdot,\cdot)$ este fe clasă C^1 în raport cu al doilea argument. Astfel, conform propoziției $X.1.$ rezultă că $f(\cdot,\cdot)$ este local Lipschitz în raport cu al doilea argument, iar conform teoremei Cauchy-Lipschitz $f(\cdot,\cdot)$ admite proprietatea de E.U.L.

b) Se verifică imediat că $\varphi_K'(t) = -\dfrac{\varphi_K^2(t)}{3} - \dfrac{2}{3t^2}$.

c) Impunând condiția ca $\varphi_K(1) = 0$ obținem $K = 2$, deci $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{t - 2\sqrt[3]{t^2}} + \dfrac{1}{t}$.

d) Aflăm domeniul de definiție a soluției $\varphi_0(\cdot)$, impunând ca numitorul să fie diferit de zero. Astfel,

$$t - 2\sqrt[3]{t^2} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 8t^2 \Leftrightarrow t^2(t-8) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 8.$$

Domeniul pentru variabila t se împarte în două subintervale, $(0,8)$ și $(8,\infty)$. Deoarece $1 \in (0,8)$ reținem intervalul $(0,8)$ drept interval maximal, i.e. $I(1,0) = (0,8), t^-(1,0) = 0, t^+(1,0) = 8$.

X. 2. Metoda Euler explicit

Fie $\{t_i\}_{i=\overline{1,N+1}}$ o discretizare a intervalului $I = [t_0, t_f]$, i.e.

$$\begin{cases} t_1 = t_0, \quad h = \dfrac{t_f - t_0}{N} \\ t_i = t_{i-1} + h, \quad i = \overline{2, N+1}. \end{cases} \tag{25}$$

Conform teoremei Taylor avem

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hx'(t_i) + \frac{h^2}{2}x''(\xi_i), \quad \xi_i \in (t_i, t_{i+1}) \tag{26}$$

Conform (22) rezultă

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + \dfrac{h^2}{2}\dfrac{df}{dt}(\xi_i, x(\xi_i)), i = \overline{1, N} \\ x(t_1) = x_0 \end{cases}$$

unde $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$. Dacă neglijăm termenul de ordinul $O(h^2)$ obținem următoarea schemă numerică:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i), i = \overline{1, N} \\ x_1 = x_0 \end{cases} \tag{27}$$

unde $x_i \approx x(t_i)$, iar x_0 reprezintă valoarea inițială a soluției.

Vom da în continuare algoritmul de implementare a schemei numerice (27): **ALGORITM (Metoda Euler)**

Date: f, t_0, t_f, x_0, N;

STEP 1: $t_1 = t_0$; $h = \dfrac{t_f - t_0}{N}$;

`for` $i = 2 : N + 1$ `do`

$t_i = t_{i-1} + h$;

`endfor`

$x_1 = x_0$;

STEP 2: `for` $i = 1 : N$ `do`

$x_{i+1} = x_i + hf(t, \mathbf{x}_i)$;

`endfor`