Logică Matematică şi Computaţională
Cursul XIII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Teorii deductive Moisil

Observație

- **Teoriile deductive, introduse de matematicianul român Grigore C. Moisil,** sunt o construcție matematică ce generalizează, cuprinde toate sistemele logice.
- Pentru studiul **teoriilor deductive**, recomand cursul tipărit de bazele informaticii al Profesorului Virgil–Emil Căzănescu, indicat în bibliografia din Cursul I.

Definiție

O *teorie deductivă* este o pereche $T = (F, R)$, unde:

- F este o mulțime nevidă, ale cărei elemente se numesc *fraze (ale lui T);*
- $F^+ := \{f_1 f_2 \dots f_n \mid n \in \mathbb{N}^*, f_1, f_2, \dots, f_n \in F\}$ este mulțimea succesiunilor finite și nevide de fraze; elementele lui F^+ se numesc *texte*; dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$, atunci n se numește *lungimea textului $f_1 f_2 \dots f_n$;*
- se consideră $F \subseteq F^+$: frazele coincid cu textele de lungime 1;
- $R \subseteq F^+$; elementele lui R se numesc *reguli (ale lui T).*

Vom păstra notațiile din definiția anterioară până la sfârșitul acestui curs.

Teorii deductive Moisil

Notație

- O regulă de lungime mai mare sau egală cu 2, $f_1 f_2 \dots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n, f \in F$, se mai notează sub forma $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \longrightarrow f$.
- O regulă de lungime 1, f, cu $f \in F$, se mai notează sub forma $\emptyset \longrightarrow f$.

Definiție

- Regulile de lungime mai mare sau egală cu 2 se numesc *reguli de deducție (ale lui T).*
- Regulile de lungime 1 se numesc *axiome (ale lui T).* Vom nota cu A mulțimea axiomelor lui T.

Remarcă

Conform definiției de mai sus, are loc: $A = F \cap R$.

Observație

Exemplificăm mai jos pentru calculul propozițional clasic.
În mod similar, calculul cu predicate clasic poate fi descris ca teorie deductivă.

Teorii deductive Moisil

Exemplu

Calculul propozițional clasic este o teorie deductivă $T = (F, R)$, unde $F = E$ este mulțimea enunțurilor calculului propozițional clasic, iar R este formată din:

- o mulțime infinită de axiome, anume mulțimea regulilor $\emptyset \longrightarrow \varphi$, cu $\varphi \in E$, φ enunț de una dintre formele (A_1), (A_2), (A_3) ($\longrightarrow$ este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive);
- o mulțime infinită de reguli de deducție (toate de lungime 3), corespunzătoare lui (MP), anume mulțimea $\{\{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\} \longrightarrow \psi \mid \varphi, \psi \in E = F\}$ ($\rightarrow$ din interiorul acoladelor interioare este conectorul logic numit *implicație* al calculului propozițional clasic, în timp ce $\longrightarrow$ din exteriorul acoladelor interioare este simbolul din notația pentru regulile unei teorii deductive).

Definiție

Se numește *demonstrație (în teoria deductivă T)* un text $f_1 f_2 \ldots f_n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$, cu proprietatea că: pentru orice $i \in \overline{1, n}$, există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, i-1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow f_i \in R$.

Teorii deductive Moisil

Ca și în calculul propozițional clasic și calculul cu predicate clasic:

Remarcă

Orice demonstrație începe cu o axiomă, i. e.: dacă $f_1 f_2 \dots f_n$ este o demonstrație, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$, atunci $f_1 \stackrel{\text{not.}}{=} \emptyset \longrightarrow f_1 \in R$ (desigur, axiomă). Acest fapt rezultă din transcrierea definiției anterioare pentru cazul $i = 1$.

Notație

Dacă $\alpha = f_1 f_2 \dots f_n, \beta = g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$, cu $n, p \in \mathbb{N}^*$ și $f_1, f_2, \dots, f_n, g_1, g_2, \dots, g_p \in F$, atunci notăm: $\alpha\beta := f_1 f_2 \dots f_n g_1 g_2 \dots g_p \in F^+$.

Remarcă

Fie $\alpha, \beta \in F^+$. Atunci:

- dacă α și β sunt demonstrații, atunci $\alpha\beta$ este o demonstrație (prin inducție matematică (obișnuită), acest rezultat poate fi generalizat de la concatenarea a două demonstrații la concatenarea unui număr finit și nevid de demonstrații);
- dacă $\alpha\beta$ este o demonstrație, atunci α este o demonstrație.

Acest fapt rezultă imediat din definiția unei demonstrații.

Teorii deductive Moisil

Definiție

Se numește *teoremă (a teoriei deductive T)* o frază $f \in F$ cu proprietatea că există o demonstrație care se termină în f, i. e. o demonstrație de forma $f_1 f_2 \dots f_n f$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \dots, f_n \in F$.
Mulțimea teoremelor lui T se notează cu $Teor(T)$.

Remarcă

$Teor(T)$ este nevidă ddacă A este nevidă.
Într–adevăr, am observat că orice demonstrație începe cu o axiomă, și, evident, o axiomă constituie o demonstrație (de lungime 1), așadar există demonstrații ddacă există axiome, prin urmare există teoreme ddacă există axiome, în conformitate cu definiția de mai sus a teoremelor. În plus, se observă că $A \subseteq Teor(T)$.

Definiție (sisteme deductive: mulțimi de fraze închise la reguli)

O submulțime $X \subseteq F$ se zice *R–închisă* (sau *închisă la regulile din R*) ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și orice $f_1, f_2, \dots, f_n, f \in F$, are loc:

$$\text{dacă } \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subseteq X \text{ și } \{f_1, f_2, \dots, f_n\} \longrightarrow f \in R, \text{ atunci } f \in X.$$

Remarcă

Orice mulțime R–închisă include mulțimea axiomelor.
Într–adevăr, dacă X este o mulțime de fraze R–închisă, atunci $\emptyset \subseteq X$, prin urmare $A \subseteq X$, în conformitate cu definiția axiomelor și definiția mulțimilor R–închise.

Propoziție

$Teor(T)$ este cea mai mică mulțime R–închisă a lui T (desigur, în raport cu incluziunea).

Demonstrație: Pentru început, să demonstrăm că $Teor(T)$ este R–închisă, folosind definiția mulțimilor R–închise, a teoremelor și a demonstrațiilor, precum și proprietatea care afirmă că o concatenare (finită și nevidă) de demonstrații este demonstrație.
Fie $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(T)$, iar $f \in F$, astfel încât $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \in R$.
Cum $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Teor(T)$, rezultă că, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, există o demonstrație $\alpha_i \in F^+$ pentru f_i.
Atunci $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n f$ este o demonstrație pentru f, ceea ce arată că $f \in Teor(T)$, așadar $Teor(T)$ este R–închisă.

Teorii deductive Moisil

Și acum să demonstrăm că $Teor(T)$ este cea mai mică dintre mulțimile R–închise, adică să considerăm o mulțime R–închisă X, și să arătăm că $Teor(T) \subseteq X$.
Fie $t \in Teor(T)$, arbitrară, fixată. Atunci există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_n t$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $f_1, f_2, \ldots, f_n \in F$ (demonstrație de lungime $n+1$, care se termină în t). Avem de demonstrat că $t \in X$. Aplicăm inducție matematică după n.
Pasul de verificare: n=0: Dacă $n = 0$, atunci $t \in A$, prin urmare $t \in X$, conform remarcii precedente.
Pasul de inducție: 0,1,...,n-1,n→n+1: Fie $n \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că orice demonstrație de lungime cel mult $n+1$ se termină într–o frază din X, și astfel încât există o demonstrație $f_1 f_2 \ldots f_{n+1} t$, cu $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1} \in F$.
Rezultă, conform definiției unei demonstrații, că există $k \in \mathbb{N}$ și $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \overline{1, n+1}$, astfel încât $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Dar, pentru fiecare $s \in \overline{1, k}$, $f_1 f_2 \ldots f_{j_s}$ este o demonstrație pentru f_{j_s}, de lungime cel mult $n+1$, așadar, conform ipotezei de inducție, rezultă că $f_{j_s} \in X$.
Prin urmare, $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \subseteq X$, iar $\{f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_k}\} \longrightarrow t \in R$. Cum X este R–închisă, rezultă că $t \in X$.
Rezultă că $Teor(T) \subseteq X$, ceea ce încheie a doua parte a demonstrației propoziției.
Așadar, $Teor(T)$ este cea mai mică mulțime R–închisă.

Teorii deductive Moisil

Definiție

Se numește *consecință (pe F)* un operator de închidere *finitar* pe $\mathcal{P}(F)$, adică un operator de închidere $C : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$ cu proprietatea că, oricare ar fi $X \subseteq F$,

$$C(X) = \bigcup_{\substack{Y \subseteq X, \\ |Y| < \infty}} C(Y).$$

Propoziție

Mulțimea consecințelor (pe F) este în bijecție cu $\mathcal{P}(F^+)$ (mulțimea mulțimilor de reguli).

Schița demonstrației: Bijecția căutată duce orice $R \subseteq F^+$ în consecința $C_R : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(F)$, definită prin: oricare ar fi $X \subseteq F$, $C_R(X) := Teor(F, X \cup R)$ (mulțimea teoremelor teoriei deductive cu mulțimea frazelor F și mulțimea regulilor dată de R, la care se adaugă elementele lui X ca axiome).

Teorii deductive Moisil

Inversa acestei bijecții duce orice consecință C în mulțimea $R_C :=$ $\{\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \longrightarrow f \mid n \in \mathbb{N}, f_1, f_2, \ldots, f_n, f \in F, f \in C(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\})\} \subseteq F^+$.
Se arată că prima dintre aceste funcții este corect definită, adică imaginea ei este o mulțime de consecințe. Este clar că a doua funcție este corect definită.
Apoi se arată ca aceste funcții sunt bijecții, demonstrând că sunt inverse una alteia, adică, pentru orice consecință C, $C_{R_C} = C$, și, pentru orice $R \subseteq F^+$, $R_{C_R} = R$.