PROBABILITĂȚI & STATISTICĂ

CURS 5

02.11.2017

$X \in \{0,1\}$ $\quad P(X=1)=p$

$P(X=0)=1-p$

$P \circ X^{-1} = p\delta_{\{1\}} + (1-p)\delta_{\{0\}}$

$\delta_{\{x\}}(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

3) Uniformă $\{a, a+1, \dots, b\}$, $a<b$, $a,b \in \mathbb{N}$

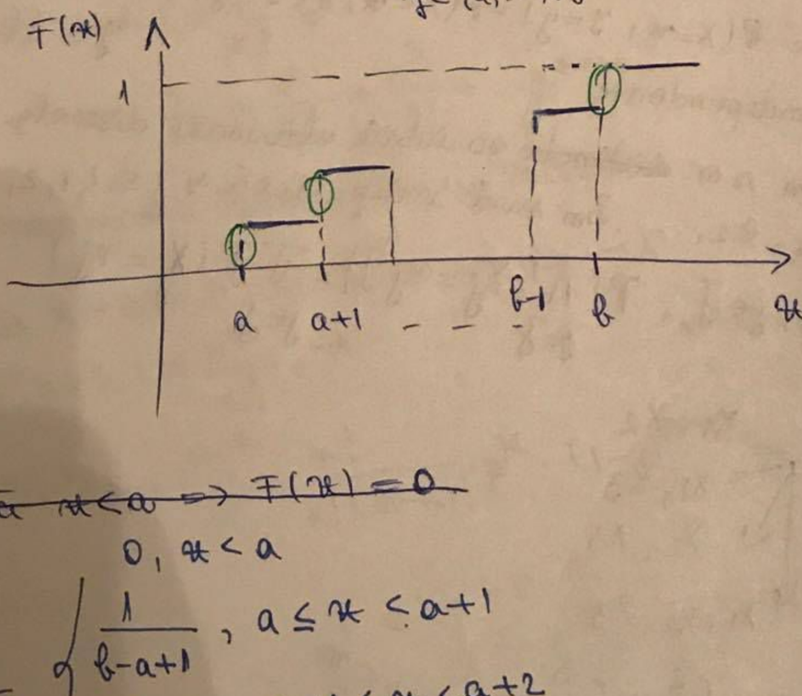
$X \sim \mathcal{U}(\{a, a+1, \dots, b\})$

$X \in \{a, a+1, \dots, b\}$ $\quad b-a+1$ elemente

$P(X=x) = \dfrac{1}{b-a+1}$, $x \in \{a, a+1, \dots, b\}$

$(P \circ X^{-1})(A) = \sum\limits_{x \in \{a,\dots,b\}} \dfrac{1}{b-a+1} \delta_{\{x\}}(A)$ $\quad$ aceeași pondere pt. fiecare valoare.

$F(x) = P(X \le x) = \sum\limits_{\substack{y \le x \\ y \in \{a,\dots,b\}}} P(X=y) = \dfrac{|\{y \le x \mid y \in \{a, a+1, \dots, b\}\}|}{b-a+1}$



~~Dacă $x<a$ => $F(x)=0$~~

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{1}{b-a+1}, & a \le x < a+1 \\ \dfrac{2}{b-a+1}, & a+1 \le x < a+2 \\ \vdots & \\ \dfrac{b-a}{b-a+1}, & b-1 \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

4) $X \sim B(n,p)$ (Binomiala de parametri n și p)

$P(\{H\}) = p \qquad P(\{T\}) = 1-p$.

X – nr. de apariții de H în cele n aruncări

$P(X=k) = ?$

$X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{H, T\}\} = \{H,T\}^n \equiv \{1, 0\}^n$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = \omega_1 + \ldots + \omega_n$

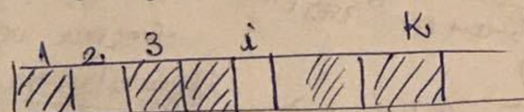
$P((\omega_1, \ldots, \omega_n) = (x_1, \ldots, x_n)) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$

$A_i = \{\omega_i = x_i\}$ $\qquad = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n) =$

$= p^k (1-p)^{n-k}$

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, unde k este nr. de 1 din $(x_1, \ldots, x_n)$

$\{X=k\} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_1 + \ldots + \omega_n = k\}$



Def 1) Fie X și Y două variabile aleatoare distincte. Spunem că $X \perp\!\!\!\perp Y$ dacă $P(X=x, Y=y) = P(X=x)\,P(Y=y)$, $\forall x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$

↳ sunt independente

2) $X_1, \ldots, X_n$ s.m. ~~distincte~~ variabile aleatoare discrete cu valori în $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sunt indep. dacă $\forall J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ și $\forall x_j \in B_j$, $j \in J$, $P\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j = x_j\}\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j)$

$X_1, X_2, X_3 \to X_1, X_2$

$\to X_1, X_3$

$\to X_2, X_3$

$\to X_1, X_2, X_3$

$2^n - n - 1 = C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n$.

Propoziție: Dacă $X_1, \dots X_n \sim B(p)$ independente atunci $X = X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p)$.

5) $X \sim Geom(p)$ (GEOMETRICĂ)

$X \in \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

$\{X = k\} = \underbrace{TTT \dots T}_{k-1} \underbrace{H}_{k}$

6) Negativ Binomială (r, p)

$X \in \{\cancel{0}, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}^*$

$P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$

1								k
T	--	H	T --	H	T --	H	T --	H
		↑ 1		↑ 2		↑ r-1		↑ r

7) Poisson $X \sim Pois(\lambda)$

$X \in \{0, 1, \dots\} \in \mathbb{N}$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots$

Aproximarea Binomialei cu Poisson

Fie $X \sim B(n, p)$ a.î. $p \to 0$ și $np \to \lambda$

$P(X=k) \cong \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$n = 50$, $p = 0.2 \to$ o bună aproximare binomială cu Poisson

$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \simeq$

$p \simeq \frac{\lambda}{n}$

$\simeq \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n!}{n^k (n-k)!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot$

$\cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(dem. pe cealaltă pg)

$$\frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{\overbrace{(n-k+1)\cdots(n-1)n}^{k \text{ termeni}}}{\underbrace{n^k}_{k \text{ termeni}}} = \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

AMARE

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^{-k} = 1.$$

$\frac{\lambda}{n} \to 0.$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

8) Hipergeometrică

N bile albe și negre, M negre

Extrag n bile

Care e probab. să am k bile negre?

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \qquad \left[\frac{nM}{k}\right]$$

$N=49 \quad M=6$

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_6^k \, C_{49-6}^{6-k}}{C_{49}^6} \qquad k=6 \quad \frac{1}{C_{49}^6}$$

$k \le 6.$

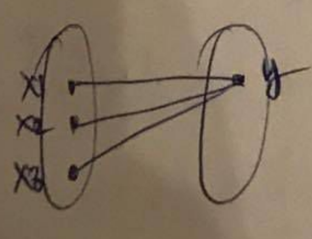
$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ discretă

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (continuă sau monotonă)

$Y = g(X)$ $\qquad X$, $3X+7, X^2, X^3, \ldots$

$$\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(g(X)=y) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(y))$$

$$g^{-1}(y) = \{x \mid g(x) = y\}$$



$$\mathbb{P}(x \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathbb{P}(X = x) =$$

$$= \sum_{\{x \mid g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x)$$

Exemplu a) $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

valorile lui x

probabilitățile ca x să ia valorile respective (suma lor = 1)

$g(x) = 2x^2 \to$ funcție injectivă

$2X^2 \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 & 18 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

pt că g e inj.

b) $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

Media variabilelor discrete

Repetăm un eveniment de N ori și numărăm o variabilă aleatoare X: $x_1, x_2, \dots, x_N$

4.
5. HHHTH 4
HTTHH 3
TTTTH 1
THHTH 3

$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$ media aritmetică

Funcția de masă X o notăm: $p_X(x)\ (f(x)) = \mathbb{P}(X = x)$

$$\frac{N_{x_i}}{N} = p_X(x_i)$$

$$m = \frac{x_1 N_{x_1} + x_2 N_{x_2} + \dots + x_N N_{x_N}}{N}$$

$$m \simeq \sum_i \frac{x_i \cancel{N} p_X(x_i)}{\cancel{N}} = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

<u>Def</u>: Fie $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ o variabilă discretă

Definim media lui X

$$E[X] = \sum_x x \cdot \mathbb{P}(X = x)$$

B1

\- PDOGRAMARE

Atunci când $\sum_{x} |x| P(X=x) < \infty$

În caz contrar nu avem medie. $\left(P(X=2^k) = \frac{1}{2^k} \right)$

Exemplu $X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$ $X^2 : E[X^2] = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.4$

$E[X] = -2 \times 0.4 + 0 \times 0.2 + 2 \times 0.4 = 0.$ $0 \times 0.2 + 4 \times 0.8 = 0.24.$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

Propoziție: Fie $X : (\Omega, F, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ o variabilă discretă și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă sau ~~~~ monotonă.

Atunci $Y = g(X)$ are media

$$E[Y] = \sum_{x} g(x) P(X=x)$$

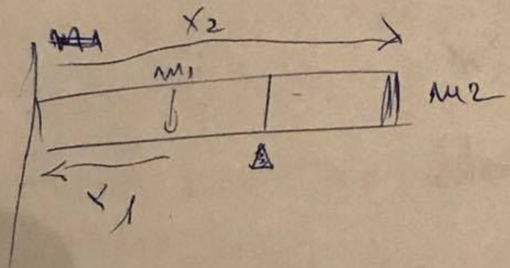
$P(X \in A | X \in B) = \frac{P(X \in A \cap X \in B)}{P(X \in B)}$ im.

probabilitate condiționată.

Def 1) S.n. moment de ordin k pt variabila aleatoare X $E[X^k]$.

2) S.n. varianța lui X

$Var[X] = E[(X - E[X]]$



$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$