

Tema 3

Exercițiul 1

Știm că într-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecti. Tranzistorii sunt testați, unul cate unul, până cand cei doi tranzistori au fost identificați. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect și N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieți un tablou în care să descrieți legea cuplului (N_1, N_2) . Calculați $\mathbb{E}[N_1]$ și $\mathbb{E}[N_2]$.

Exercițiul 2

Fie (X, Y) un cuplu de variabile aleatoare (vector aleator) a cărui repartiție este:

$X \backslash Y$	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

- Calculați $\mathbb{E}[Y]$ și $Var(Y)$.
- Determinați repartiția v.a. $\mathbb{E}[Y|X]$ și $Var(Y|X)$.
- Verificați formula varianței condiționate:

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X]).$$

Exercițiul 3

Arătați că:

- Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori în \mathbb{N} atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

- Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x) dx.$$

Exercițiul 4

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

- Să se determine constanta α .
- Să se afle funcția de repartiție.
- Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

Exercițiul 5

- a) Fie X o variabilă repartizată exponențial (de parametru α). Arătați că are loc următoarea relație (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad (1)$$

- b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relația (1). Arătați că X este repartizată exponențial.

Exercițiul 6

Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}$$

unde $-\infty < x < \infty$ și $\beta > 0$. Să se calculeze media și varianța variabilei X .

Exercițiul 7

Numărul de clienți care intră în magazinul Unirea pe durata unei zile este o v.a. de medie 50. Suma cheltuită de fiecare dintre clienții magazinului poate fi modelată ca o v.a. de medie 30 RON. Presupunem că sumele cheltuite de clienți, ca v.a., sunt independente între ele și independente de numărul total de clienți care intră în magazin într-o zi dată. Care este media cifrei de afaceri a magazinului în ziua considerată ?