

# Curs 9

# Cuprins

---

## 1 Sisteme de rescriere abstracte

# Sisteme de rescriere abstracte

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un **sistem de rescriere abstract** este o pereche  $(T, \rightarrow)$  unde:

- $T$  este o mulțime,
- $\rightarrow \subseteq T \times T$  ( $\rightarrow$  este o relație binară pe  $T$ ).

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un **sistem de rescriere abstract** este o pereche  $(T, \rightarrow)$  unde:

- $T$  este o mulțime,
- $\rightarrow \subseteq T \times T$  ( $\rightarrow$  este o relație binară pe  $T$ ).

## Definiții:

- $\leftarrow := \rightarrow^{-1}$  (relația inversă)
- $\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$  (închiderea simetrică)
- $\xrightarrow{*} := (\rightarrow)^*$  (închiderea reflexivă și tranzitivă)
- $\leftrightarrow^* := (\leftrightarrow)^*$  (echivalența generată)

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$



# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m, k) \mid \text{ex. } n \geq 0, \text{ ex. } k_1, \dots, k_n \in T \text{ a.î. } m \rightarrow k_1 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k\} \Rightarrow$

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftarrow = \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1, k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2 \text{ sau } k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m, k) \mid \text{ex. } n \geq 0, \text{ ex. } k_1, \dots, k_n \in T \text{ a.î. } m \rightarrow k_1 \rightarrow \dots \rightarrow k_n \rightarrow k\} \Rightarrow$
- $\xrightarrow{*} = \xrightarrow{+} \cup \{(k, k) \mid k \in T\}$

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

□  $t \in T$  este **reductibil** dacă există  $t' \in T$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

- $t \in T$  este **reductibil** dacă există  $t' \in T$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .
- O **reducere** este un șir  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

- $t \in T$  este **reductibil** dacă există  $t' \in T$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .
- O **reducere** este un șir  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$  este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

- $t \in T$  este **reductibil** dacă există  $t' \in T$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .
- O **reducere** este un șir  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$  este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- $t_0$  este o **formă normală a lui**  $t$  dacă
  - $t \xrightarrow{*} t_0$  și
  - $t_0$  este în formă normală.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

- $t \in T$  este **reductibil** dacă există  $t' \in T$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .
- O **reducere** este un șir  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$
- $t \in T$  este **în formă normală** (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- $t_0$  este o **formă normală a lui**  $t$  dacă
  - $t \xrightarrow{*} t_0$  și
  - $t_0$  este în formă normală.
- $t_1$  și  $t_2$  **se întâlnesc** dacă există  $t \in T$  a.î.  $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$ .
  - notație:  $t_1 \downarrow t_2$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$



# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $k$  este în formă normală dacă

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $k$  este în formă normală dacă este număr prim.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $k$  este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$  dacă

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- $k$  este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$  dacă nu sunt prime între ele.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $k$  este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$  dacă nu sunt prime între ele.
- $k$  este o formă normală a lui  $m$  dacă

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
- $k$  este în formă normală dacă este număr prim.
- $k_1 \downarrow k_2$  dacă nu sunt prime între ele.
- $k$  este o formă normală a lui  $m$  dacă  $k$  este un factor prim al lui  $m$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- $w$  este în formă normală dacă



## Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- $w$  este în formă normală dacă  $w = a^n b^k$ , cu  $n, k \geq 0$ .

## Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- $w$  este în formă normală dacă  $w = a^n b^k$ , cu  $n, k \geq 0$ .
- $w_1 \downarrow w_2$  dacă

## Exemplu

- $T := \{a, b\}^*$
- $\rightarrow := \{(ubav, uabv) \mid u, v \in T\}$
- $w$  este în formă normală dacă  $w = a^n b^k$ , cu  $n, k \geq 0$ .
- $w_1 \downarrow w_2$  dacă
  - $nr_a(w_1) = nr_a(w_2)$  și
  - $nr_b(w_1) = nr_b(w_2)$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite  
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ 
  - orice rescriere se termină.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite  
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ 
  - orice rescriere se termină.
- **confluent**:  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

□ **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite  
 $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$

□ orice rescriere se termină.

□ **confluent**:  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .

□ **local confluent**:  $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .

# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ 
  - orice rescriere se termină.
- **confluent**:  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **local confluent**:  $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **Church-Rosser**:  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .



# Sisteme de rescriere abstracte

## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

- **noetherian** (**se termină**): dacă nu există reduceri infinite  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ 
  - orice rescriere se termină.
- **confluent**:  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **local confluent**:  $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **Church-Rosser**:  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **Normalizat**: orice element are o formă normală.

# Sisteme de rescriere abstracte

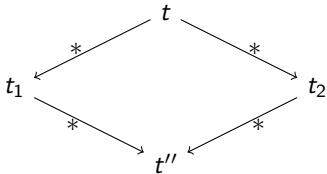
## Definiție

Un sistem de rescriere  $(T, \rightarrow)$  se numește

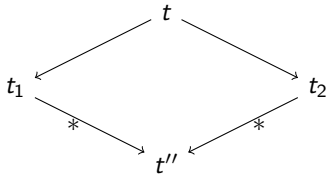
- **noetherian** (se termină): dacă nu există reduceri infinite  $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots$ 
  - orice rescriere se termină.
- **confluent**:  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **local confluent**:  $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **Church-Rosser**:  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$ .
- **Normalizat**: orice element are o formă normală.
- **Complet** (convergent, canonic): confluent și noetherian.

# Sisteme de rescriere abstracte

Confluent:



Local confluent:



# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$

# Sisteme de rescriere abstracte

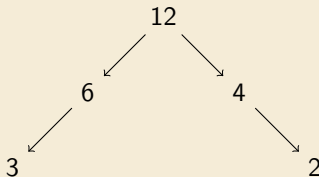
## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- $(T, \rightarrow)$  este noetherian:
  - orice  $m$  se rescrie într-un factor prim al său.

# Sisteme de rescriere abstracte

## Exemplu

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
- $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k \mid m\}$
- $(T, \rightarrow)$  este noetherian:
  - orice  $m$  se rescrie într-un factor prim al său.
- $(T, \rightarrow)$  nu este confluent:



# Proprietăți *(goto 25)*

## Propoziție (1)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere. Dacă  $t \downarrow t'$ , atunci  $t \xrightarrow{*} t'$ .

# Proprietăți *(goto 25)*

## Propoziție (1)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere. Dacă  $t \downarrow t'$ , atunci  $t \xleftrightarrow{*} t'$ .

## Demonstrație

Dacă  $t \downarrow t'$ , atunci există  $t_0$  a.î.  $t \xrightarrow{*} t_0 \xleftarrow{*} t'$ , i.e.  $t \xleftrightarrow{*} t'$ .





## Propoziție (2)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

noetherian  $\Rightarrow$  orice element are o formă normală

# Proprietăți

## Propoziție (2)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

noetherian  $\Rightarrow$  orice element are o formă normală  
 $\nLeftarrow$

# Proprietăți

## Propoziție (2)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

noetherian  $\Rightarrow$  orice element are o formă normală  
 $\nLeftarrow$

## Exemplu

- $T = \{a, b, c\}$
- $\rightarrow = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$
- Orice element are forma normală  $c$ , dar

# Proprietăți

## Propoziție (2)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

noetherian  $\Rightarrow$  orice element are o formă normală  
 $\nLeftarrow$

## Exemplu

- $T = \{a, b, c\}$
- $\rightarrow = \{(a, b), (b, a), (b, c)\}$
- Orice element are forma normală  $c$ , dar
- $\rightarrow$  nu este noetherian:  $a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow \dots$

# Proprietăți

## Propoziție (3)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

**complet**  $\Rightarrow$  orice element  $t$  are o unică formă normală  $fn(t)$

# Proprietăți

## Propoziție (3)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

**complet**  $\Rightarrow$  orice element  $t$  are o unică formă normală  $fn(t)$

## Demonstrație

- Deoarece  $(T, \rightarrow)$  este noetherian,  $t$  are o formă normală, i.e.

$t \xrightarrow{*} t'$  și  $t'$  este în formă normală.

- Presupunem că  $t$  mai are o altă formă normală  $t''$ .

- Cum  $t \xrightarrow{*} t''$  și  $t \xrightarrow{*} t'$ , din confluență avem

$t' \downarrow t''$ .

- Cum  $t'$  și  $t''$  sunt în formă normală, putem obține doar  $t' = t''$ .

□

# Proprietăți

## Propoziție (4)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Leftrightarrow$  Church-Rosser

# Proprietăți

## Propoziție (4)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Leftrightarrow$  Church-Rosser

## Demonstrație

$(\Leftarrow)$

- Presupunem  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ .
- Atunci avem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ .
- Cum  $(T, \rightarrow)$  este Church-Rosser, obținem că  $t_1 \downarrow t_2$ .
- Deci  $(T, \rightarrow)$  este confluent.



# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

□ Presupunem  $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

- Presupunem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după  $n$  că dacă  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$ , atunci  $t'_1 \downarrow t'_n$ :

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

- Presupunem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după  $n$  că dacă  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$ , atunci  $t'_1 \downarrow t'_n$ :

- $n = 1$ : Atunci evident  $t'_1 \downarrow t'_1$ .

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

- Presupunem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după  $n$  că dacă  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$ , atunci  $t'_1 \downarrow t'_n$ :

- $n = 1$ : Atunci evident  $t'_1 \downarrow t'_1$ .

- $n \rightarrow n + 1$ : Pres.  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$ .

Din ip. de inducție știm  $t'_1 \downarrow t'_n$ . Atunci ex.  $w$  a.î.  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$ .

Avem două cazuri:

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

- Presupunem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după  $n$  că dacă  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$ , atunci  $t'_1 \downarrow t'_n$ :

- $n = 1$ : Atunci evident  $t'_1 \downarrow t'_1$ .

- $n \rightarrow n + 1$ : Pres.  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$ .

Din ip. de inducție știm  $t'_1 \downarrow t'_n$ . Atunci ex.  $w$  a.î.  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$ .

Avem două cazuri:

- $t'_{n+1} \rightarrow t'_n$ : evident  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$ , deci  $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$ .

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

( $\Rightarrow$ )

- Presupunem  $t_1 \xleftrightarrow{*} t_2$ . Atunci există  $n$  și  $t'_1, \dots, t'_n$  a.î.:

$$t_1 = t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n = t_2.$$

- Demonstrăm prin inducție după  $n$  că dacă  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n$ , atunci  $t'_1 \downarrow t'_n$ :

- $n = 1$ : Atunci evident  $t'_1 \downarrow t'_1$ .

- $n \rightarrow n + 1$ : Pres.  $t'_1 \leftrightarrow t'_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow t'_n \leftrightarrow t'_{n+1}$ .

Din ip. de inducție știm  $t'_1 \downarrow t'_n$ . Atunci ex.  $w$  a.î.  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n$ .

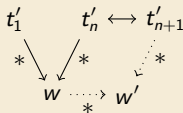
Avem două cazuri:

- $t'_{n+1} \rightarrow t'_n$ : evident  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'_n \leftarrow t'_{n+1}$ , deci  $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$ .

- $t'_n \rightarrow t'_{n+1}$ : Cum  $w \xleftarrow{*} t'_n \rightarrow t'_{n+1}$  și  $(T, \rightarrow)$  este confluent, obținem  $w \downarrow t'_{n+1}$ . Deci există  $w'$  a.î.  $w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$ .

Deci  $t'_1 \xrightarrow{*} w \xrightarrow{*} w' \xleftarrow{*} t'_{n+1}$ , adică  $t'_1 \downarrow t'_{n+1}$ .

- În concluzie,  $t_1 \downarrow t_2$ .



# Proprietăți

## Propoziție (5)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Rightarrow$  local confluent

# Proprietăți

## Propoziție (5)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Rightarrow$  local confluent  
 $\nLeftarrow$



# Proprietăți

## Propoziție (5)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Rightarrow$  local confluent  
 $\nLeftarrow$

## Exemplu

□  $T = \{a, b, c, d\}$

□  $\rightarrow$ :



# Proprietăți

## Propoziție (5)

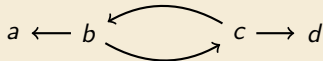
Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Rightarrow$  local confluent  
 $\nLeftarrow$

## Exemplu

□  $T = \{a, b, c, d\}$

□  $\rightarrow$ :



□  $T$  este local confluent:

□  $a \leftarrow b \rightarrow c$  și  $a \downarrow c$  (în  $a$ )

□  $b \leftarrow c \rightarrow d$  și  $b \downarrow d$  (în  $d$ )

# Proprietăți

## Propoziție (5)

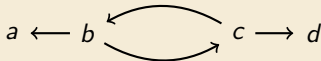
Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

confluent  $\Rightarrow$  local confluent  
 $\nLeftarrow$

## Exemplu

□  $T = \{a, b, c, d\}$

□  $\rightarrow$ :



□  $T$  este local confluent:

□  $a \leftarrow b \rightarrow c$  și  $a \downarrow c$  (în  $a$ )

□  $b \leftarrow c \rightarrow d$  și  $b \downarrow d$  (în  $d$ )

□  $T$  nu este confluent:

□  $a \xleftarrow{*} b \xrightarrow{*} d$ , dar  $a \not\downarrow d$

□  $a \xleftarrow{*} c \xrightarrow{*} d$ , dar  $a \not\downarrow d$

# Proprietăți

## Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

# Proprietăți

## Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

## Demonstrație

- Deoarece  $(T, \rightarrow)$  este noetherian, știm că orice element are o formă normală.

## Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

## Demonstrație

- Deoarece  $(T, \rightarrow)$  este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.

# Proprietăți

## Propoziție (6) - Lema lui Newman

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere.

$$\text{noetherian} + \text{local confluent} \Rightarrow \text{confluent}$$

## Demonstrație

- Deoarece  $(T, \rightarrow)$  este noetherian, știm că orice element are o formă normală.
- Arătăm că orice element are o formă normală unică.
- Fie  $M$  mulțimea elementelor care au cel puțin două forme normale diferite:

$$M = \{t \mid n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2, n_1, n_2 \text{ în formă normală} \}.$$

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(\*) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .



# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(\*) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

□ Fie  $t \in M$ .

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

□ Demonstrăm următoarea proprietate:

(\*) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

□ Fie  $t \in M$ .

□ Atunci ex.  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$ .

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

- Demonstrăm următoarea proprietate:

(\*) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

- Fie  $t \in M$ .
- Atunci ex.  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$ .
- Pres.  $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$ :
  - Din local confluență, obținem  $n_1 \downarrow n_2$ .
  - Cum  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală, obținem  $n_1 = n_2$  (contradicție).

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

- Demonstrăm următoarea proprietate:

(\*) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

- Fie  $t \in M$ .

- Atunci ex.  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$ .

- Pres.  $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$ :

- Din local confluență, obținem  $n_1 \downarrow n_2$ .

- Cum  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală, obținem  $n_1 = n_2$  (contradicție).

- Pres.  $n_1 \leftarrow t \xrightarrow{*} n_2$ :

- Atunci există  $t_2$  a.î.  $n_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$ .

- Din local confluență, obținem  $n_1 \downarrow t_2$ .

- Cum  $n_1$  în formă normală, obținem  $t_2 \xrightarrow{*} n_1$ .

- Deci  $t_2 \in M$  și  $t \rightarrow t_2$ .

# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

- Demonstrăm următoarea proprietate:

( $\star$ ) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

- Fie  $t \in M$ .

- Atunci ex.  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2, n_1 \neq n_2$ .

- Pres.  $n_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$ :

- Din local confluență, obținem  $n_1 \downarrow n_2$ .
- Cum  $n_1$  și  $n_2$  în formă normală, obținem  $n_1 = n_2$  (contradicție).

- Pres.  $n_1 \leftarrow t \xrightarrow{*} n_2$ :

- Atunci există  $t_2$  a.î.  $n_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$ .
- Din local confluență, obținem  $n_1 \downarrow t_2$ .
- Cum  $n_1$  în formă normală, obținem  $t_2 \xrightarrow{*} n_1$ .
- Deci  $t_2 \in M$  și  $t \rightarrow t_2$ .

- Pres.  $n_1 \xleftarrow{*} t \rightarrow n_2$ :

- Atunci există  $t_1$  a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow n_2$ .
- Din local confluență, obținem  $t_1 \downarrow n_2$  și, mai departe,  $t_1 \xrightarrow{*} n_2$ .
- Deci  $t_1 \in M$  și  $t \rightarrow t_1$ .

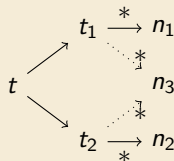
# Proprietăți

## Demonstrație (cont.)

□ (★) pt. or.  $t \in M$ , există  $t' \in M$  a.î.  $t \rightarrow t'$ .

Pres.  $n_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} n_2$ :

- Atunci există  $t_1, t_2$  a.î.  $n_1 \xleftarrow{*} t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \xrightarrow{*} n_2$ .
- Din local confluență, obținem  $t_1 \downarrow t_2$ .
- Deci ex.  $n_3$  în formă normală a.î.  $t_1 \xrightarrow{*} n_3$  și  $t_2 \xrightarrow{*} n_3$ .
- Deoarece  $n_1 \neq n_2$ , deducem că  $n_3 \neq n_1$  sau  $n_3 \neq n_2$ .
- Dacă  $n_3 \neq n_1$ , atunci  $t_1 \in M$  și  $t \rightarrow t_1$ .
- Dacă  $n_3 \neq n_2$ , atunci  $t_2 \in M$  și  $t \rightarrow t_2$ .



## Demonstrație (cont.)

- Arătăm unicitatea formei normale, i.e.  $M = \emptyset$ .
  - Pres. prin absurd că  $M \neq \emptyset$ . Atunci există  $t_1 \in M$ .
  - Din  $(\star)$ , ex.  $t_2 \in M$  a.î.  $t_1 \rightarrow t_2$ .
  - Prin inducție, obținem un șir  $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de elemente din  $M$  a.î.

$$t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow \dots$$

ceea ce contrazice faptul că  $(T, \rightarrow)$  este noetherian.

- Pres.  $t_1 \xleftarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$ . Cum  $t$  are o unică formă normală  $n$ , obținem  $t_1 \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t_2$ . Deci  $t_1 \downarrow t_2$ .
- În concluzie,  $(T, \rightarrow)$  este confluent.



# Proprietăți

## Propoziție (7)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere complet.

$$t \xrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$



# Proprietăți

## Propoziție (7)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere complet.

$$t \xrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

## Demonstrație

$(\Leftarrow)$

- Dacă  $fn(t) = fn(t')$ , atunci evident  $t \downarrow t'$ .
- Aplicăm Propoziția (1) și obținem  $t \xrightarrow{*} t'$ .

# Proprietăți

## Propoziție (7)

Fie  $(T, \rightarrow)$  sistem de rescriere complet.

$$t \xleftrightarrow{*} t' \iff fn(t) = fn(t')$$

## Demonstrație

$(\Leftarrow)$

- Dacă  $fn(t) = fn(t')$ , atunci evident  $t \downarrow t'$ .
- Aplicăm Propoziția (1) și obținem  $t \xleftrightarrow{*} t'$ .

$(\Rightarrow)$

- Cum  $(T, \rightarrow)$  este complet, este confluent și or. element are o unică formă normală. Din Propoziția (4), este Church-Rosser.
- Deoarece  $t \xleftrightarrow{*} t'$ , obținem că  $t \downarrow t'$ , i.e. există  $w$  a.î.  $t \xrightarrow{*} w \xleftarrow{*} t'$ .
- Fie  $n$  unica formă normală a lui  $w$ .
- În concluzie,  $t \xrightarrow{*} n \xleftarrow{*} t'$ , deci  $fn(t) = fn(t')$ .



- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
  - echivalentă cu oprirea mașinilor Turing
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide terminarea.
  - diverse metode
- Pentru sisteme de rescriere care se termină, **confluența este decidabilă**.
  - algoritmul Knuth-Bendix



Pe săptămâna viitoare!