Numele si prenumele:

Grupa:

Varianta 2.

Partea I. Încercuiţi răspunsurile corecte la întrebările de mai jos.
1. Se consideră $\mathbb{R}^3$ cu structura canonică de $\mathbb{R}-$spaţiu vectorial. Care dintre următoarele submulţimi sunt subspaţii vectoriale
a) $\{(x,y,z)|x+y=1\}$. b) $\{(x,2x,0)|x\in\mathbb{R}\}$. c) $\{(x,y,z)|2x-3y=0\}$ d) $\{(x,y,0)|2x-3y<0\}$. (**10 puncte**).
2. Fie K un corp, V,W două $K-$spaţii vectoriale, $f:V\to W$ o aplicaţie liniară. Dacă $dim_K(V)=3, dim_K(W)=3$ şi $dim_K(Im(f))=2$ atunci:
a) $dim_K(Ker(f))=1$. b) $dim_K(Ker(f))=0$. c) f este injectivă.d) f este surjectivă. (**10 puncte**).
3. Fie K un corp, V un $K-$spaţiu vectorial de dimensiune 4 şi $U,W\subset V$ subspaţii vectoriale a. î. $dim_K(U)=2, dim_K(W)=2, dim_K(U+W)=4$. Atunci
a) $dim_K(U\cap W)=1$. b) $dim_K(U\cap W)=0$. c) suma $U+W$ este directă. d) $U\subset W$. (**10 puncte**).

4. Determinaţi $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ astfel încât $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$ să reprezinte o rotaţie a planului euclidian.
a)$(\alpha,\beta)=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ b)$(\alpha,\beta)=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ c)$(\alpha,\beta)=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ d) nu există (α,β) a.î. A este rotaţie. (**10 puncte**)

5. Dacă punctele $A(1,2,0), B=(1,2,2), C=(2,4,t)$ din spaţiul afin $\mathbb{R}^3$ sunt coliniare, atunci:
a) $t=3$; b) $t=2$; c) $t\in\mathbb{R}$; d) $t\in\emptyset$. (**10 puncte**)

6. Dacă vectorii $u=(1,2,0), v=(-1,-2,t)$ sunt perpendiculari, atunci:
a) $t=5$; b) $t=0$; c) $t\in\mathbb{R}$; d) nu există $t\in\mathbb{R}$ a.î. $u\perp v$. (**10 puncte**)

Partea II. Pe foile de rezolvare treceţi soluţiile complete.
1. Determinaţi o formă canonică pentru forma pătratică (definită peste corpul $\mathbb{R}$)

$$x^2+4xy+2y^2+2z^2+4yz.$$

(**15 puncte**) .
2. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $f(X)=AX$ unde

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -3\\ -2 & 3 & -3\\ -3 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

a). Arătaţi că f este $\mathbb{R}-$liniară. (**10 puncte**).
b) Determinaţi $Ker(f)$ şi $Im(f)$ (ecuaţii, baze, dimensiuni).(**20 puncte**).
c). Determinaţi valorile proprii şi decideţi dacă f este diagonalizabilă. (**15 puncte**).

3. În spaţiul vectorial euclidian $(\mathbb{R}^3,<,>_{can})$ considerăm vectorii $u=(1,-2,2), v=(0,3,-4)$.
a) Să se determine $||u||,||v||$ şi măsura unghiului $\widehat{u,v}$. (**10 puncte**)
b) Să se determine un vector w a.î. $w\perp u, w\perp v$. (**10 puncte**)
c) pentru w obţinut la punctul b) să se ortonormalizeze sistemul (u,v,w) utilizând algoritmul Gramm-Schmidt. (**10 puncte**)

4. În $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu structura afină canonică se consideră punctele $A=(1,2,1), B=(0,1,3), C=(-1,5,0)$.
a) Determinaţi ecuaţiile dreptelor AB şi AC. (**10 puncte**).
b) Decideţi dacă A,B,C sunt necoliniare şi în caz afirmativ aflaţi ecuaţia planului (ABC). (**10 puncte**)
c) Determinaţi $\alpha\in\mathbb{R}$ a.î planul (ABC) conţine dreapta $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{\alpha}$. (**10 puncte**)