Logică Matematică și Computațională
Cursul V

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Relații de echivalență

Fie A o mulțime. Amintim:

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie $R \subseteq A^2$ (i. e. R o relație binară pe A). R se numește:

- *relație reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *relație simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *relație tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemplu

Δ_A și A^2 sunt relații de echivalență pe A, anume cea mai mică și, respectiv, cea mai mare relație de echivalență pe A, în sensul incluziunii, adică raportat la relația de incluziune între mulțimi.

Partiție a unei mulțimi

Definiție

Fie A nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de submulțimi ale lui A. Familia $(A_i)_{i \in I}$ se numește *partiție* a lui A ddacă satisface următoarele condiții:

1. pentru orice $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
2. pentru orice $i, j \in I$, dacă $i \neq j$, atunci $A_i \cap A_j = \emptyset$ (i. e. mulțimile din familia $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte)
3. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Exemplu

Următoarele familii de mulțimi sunt partiții ale lui $\mathbb{N}$ (unde notăm $a\mathbb{N} + b = \{an + b \mid n \in \mathbb{N}\}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$):

- $\{\mathbb{N}\}$
- $\{2\mathbb{N}, 2\mathbb{N} + 1\}$
- $\{5\mathbb{N}, 5\mathbb{N} + 1, 5\mathbb{N} + 2, 5\mathbb{N} + 3, 5\mathbb{N} + 4\}$
- $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, altfel scrisă: $(\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$

Partiție a unei mulțimi

Propoziție

Fie A nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o partiție a lui A. Atunci, pentru orice $x \in A$, există un unic $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.

Demonstrație: Într-adevăr, considerând un element $x \in A = \bigcup_{i\in I} A_i$, rezultă că există $i_0 \in I$, a. î. $x \in A_{i_0}$.
Presupunând prin absurd că există un $i_1 \in I$, cu $i_0 \neq i_1$ și $x \in A_{i_1}$, rezultă că $x \in A_{i_0} \cap A_{i_1} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție. Deci $i_0 \in I$ este unic cu proprietatea că $x \in A_{i_0}$.

Observație

În cele ce urmează vom defini **clasele unei relații de echivalență**. Aici vom folosi cuvântul **clasă** cu un alt sens decât acela din Cursul I, unde am vorbit despre teoria axiomatică a mulțimilor. Aici, toate clasele de echivalență sunt mulțimi, în această accepțiune a relațiilor binare ca fiind definite între mulțimi. Dacă adoptăm definiția relațiilor binare din sistemul axiomatic prezentat în Cursul I, care permitea unei relații binare să fie definită între două clase, atunci putem spune că relația de **cardinal echivalență**, studiată în Cursul II, este o relație de echivalență pe **clasa mulțimilor**, iar clasele ei de echivalență sunt **clase proprii, cu excepția clasei lui $\emptyset$** (de data aceasta, **clase** în sensul din Cursul I).

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Pentru cele ce urmează, vom considera mulțimea A nevidă, și o relație de echivalență $\sim$ pe A, i. e.:

- $\sim$ este o relație binară pe A: $\sim \subseteq A^2$
- $\sim$ este **reflexivă**: pentru orice $x \in A$, $x \sim x$
- $\sim$ este **simetrică**: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci $y \sim x$
- $\sim$ este **tranzitivă**: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci $x \sim z$

Să observăm că, în definiția simetriei, putem interschimba x și y și continua seria de implicații, obținând implicație dublă, adică: $\sim$ este **simetrică** ddacă, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$.

Definiție

Pentru fiecare $x \in A$, definim *clasa de echivalență a lui* x *raportat la* $\sim$ ca fiind următoarea submulțime a lui A, notată cu $\hat{x}$: $\hat{x} := \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Remarcă

Observăm că simetria lui $\sim$ ne asigură de faptul că: pentru orice $x \in A$, $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\}$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

1. *Pentru orice* $x \in A$, $x \in \hat{x}$, *și, așadar,* $\hat{x} \neq \emptyset$.
2. *Pentru orice* $x, y \in A$, *avem:*
   - *dacă* $x \sim y$, *atunci* $\hat{x} = \hat{y}$;
   - *dacă* $(x, y) \notin \sim$, *atunci* $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Demonstrație: **(1)** Întrucât $\sim$ este reflexivă, pentru orice $x \in A$, avem: $x \sim x$, deci $x \in \hat{x}$, prin urmare $\hat{x}$ este nevidă.

(2) Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.

- Dacă $x \sim y$, atunci:
  - pentru orice $z \in \hat{y}$, are loc $y \sim z$, ceea ce implică $x \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \hat{x}$, deci $\hat{y} \subseteq \hat{x}$;
  - conform simetriei lui $\sim$, are loc și $y \sim x$, prin urmare: pentru orice $z \in \hat{x}$, are loc $x \sim z$, ceea ce implică $y \sim z$ datorită tranzitivității lui $\sim$, așadar $z \in \hat{y}$, deci $\hat{x} \subseteq \hat{y}$;
  - rezultă că $\hat{x} = \hat{y}$.
- Dacă $(x, y) \notin \sim$, atunci, presupunând prin absurd că există $z \in \hat{x} \cap \hat{y}$, i. e. $z \in \hat{x}$ și $z \in \hat{y}$, adică $z \in A$ și $x \sim z$ și $z \sim y$, tranzitivitatea lui $\sim$ implică $x \sim y$, ceea ce este o contradicție cu ipoteza acestui caz; așadar $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$ în acest caz.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Propoziție (proprietățile claselor de echivalență)

Pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ *ddacă* $y \sim x$ *ddacă* $x \in \hat{y}$ *ddacă* $y \in \hat{x}$ *ddacă* $\hat{x} = \hat{y}$*;*
- $(x, y) \notin \sim$ *ddacă* $(y, x) \notin \sim$ *ddacă* $x \notin \hat{y}$ *ddacă* $y \notin \hat{x}$ *ddacă* $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$*.*

Demonstrație: Fie $x, y \in A$, arbitrare, fixate.
Cum $\sim$ este simetrică, are loc echivalența: $x \sim y$ ddacă $y \sim x$, iar definiția claselor de echivalență ne asigură de faptul că fiecare dintre aceste condiții este echivalentă cu fiecare dintre condițiile $x \in \hat{y}$ și $y \in \hat{x}$.
Prin urmare (după cum se poate verifica aplicând metoda reducerii la absurd) au loc și echivalențele între negațiile proprietăților de mai sus: $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \hat{y}$ ddacă $y \notin \hat{x}$.
Adăugând aceste proprietăți la propoziția precedentă, obținem, pentru orice $x, y \in A$:

- $x \sim y$ ddacă $y \sim x$ ddacă $x \in \hat{y}$ ddacă $y \in \hat{x}$ implică $\hat{x} = \hat{y}$
- $(x, y) \notin \sim$ ddacă $(y, x) \notin \sim$ ddacă $x \notin \hat{y}$ ddacă $y \notin \hat{x}$ implică $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$

Deci mai avem de demonstrat că implicațiile care încheie fiecare dintre cele două rânduri anterioare sunt chiar echivalențe, adică au rămas de demonstrat implicațiile reciproce acelora de la capetele celor două rânduri anterioare.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

- Dacă $\hat{x} = \hat{y}$, atunci, cum $x \in \hat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \in \hat{y}$, ceea ce arată prima implicație reciprocă dintre cele două.
- Dacă $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, atunci, întrucât $x \in \hat{x}$ conform propoziției anterioare, rezultă că $x \notin \hat{y}$, ceea ce încheie demonstrația celei de–a doua implicații reciproce.

O altă metodă de a demonstra implicațiile reciproce ale acestor două implicații este reducerea la absurd, folosind, pentru demonstrarea fiecărei implicații reciproce, cealaltă implicație directă:

- dacă $\hat{x} = \hat{y}$, și presupunem prin absurd că $(x, y) \notin\sim$, atunci, conform celei de–a doua implicații, rezultă că $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, iar, acum, faptul că $\hat{x} = \hat{y}$ arată că $\hat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă;
- dacă $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$, și presupunem prin absurd că $x \sim y$, atunci, conform primei implicații, rezultă că $\hat{x} = \hat{y}$, și, acum, ca și mai sus, rezultă că $\hat{x} = \emptyset$, ceea ce este o contradicție cu propoziția precedentă.

Cu toate că, în acest caz, metoda a doua, a reducerii la absurd, este mai ineficientă decât prima metodă, această a doua metodă are meritul de a fi aplicabilă în cazul general al unor astfel de șiruri de echivalențe terminate prin implicații, între proprietăți complementare (spunem că două proprietăți sunt *complementare* ddacă, la un moment dat (i. e. pentru anumite elemente, anumite date), una și numai una dintre ele este satisfăcută; denumirea de proprietăți complementare este **ad–hoc, nu consacrată**).

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Observație

Proprietățile complementare sunt proprietățile de forma p și *non* p (o proprietate și negația ei).

Generalitatea metodei reducerii la absurd, menționată mai sus, se referă la faptul că, pentru orice proprietăți p și q, are loc **principiul reducerii la absurd:**

- $[p \Rightarrow q]$ ddacă $[non\ q \Rightarrow non\ p]$,

de unde, folosind faptul că $[p \Leftrightarrow q]$ ddacă $[p \Rightarrow q\ și\ q \Rightarrow p]$, obținem:

- $[p \Leftrightarrow q]$ ddacă $[non\ p \Leftrightarrow non\ q]$.

Definiție

Fiecare $x \in A$ se numește *reprezentant al clasei* $\hat{x}$.

Remarcă (proprietățile claselor de echivalență)

- Pentru fiecare $x \in A$, orice $y \in \hat{x}$ este reprezentant al clasei $\hat{x}$.

Într–adevăr, conform propoziției precedente, pentru orice $x, y \in A$, are loc echivalența: $y \in \hat{x}$ ddacă $\hat{x} = \hat{y}$, iar, conform definiției anterioare, orice y este reprezentant al clasei $\hat{y}$, care este egală cu $\hat{x}$ exact atunci când $y \in \hat{x}$, deci orice $y \in \hat{x}$ este reprezentant al clasei $\hat{x}$.

Mai mult, tocmai am demonstrat că:

- pentru fiecare $x, y \in A$, y este reprezentant al clasei $\hat{x}$ ddacă $y \in \hat{x}$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Definiție

Mulțimea claselor de echivalență ale lui $\sim$ se notează cu $A/_\sim$ și se numește *mulțimea factor a lui A prin* $\sim$ sau *mulțimea cât a lui A prin* $\sim$: $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$.

Observație

Denumirile de **mulțime factor** și **mulțime cât** se datorează faptului că mulțimea $A/_\sim$ din definiția anterioară se obține prin "împărțirea mulțimii A în clasele de echivalență ale lui $\sim$" (a se vedea următoarea propoziție).

Propoziție (clasele de echivalență formează o partiție)

Mulțimea factor $A/_\sim$ este o partiție a lui A.

Demonstrație: Verificăm proprietățile din definiția unei partiții, aplicând cele două propoziții anterioare cu **proprietățile claselor de echivalență**.
(1) Conform primeia dintre cele două propoziții precedente, pentru orice $x \in A$, $\hat{x} \neq \emptyset$.
(2) Conform celei de–a doua dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x, y \in A$, dacă $\hat{x} \neq \hat{y}$, atunci $\hat{x} \cap \hat{y} = \emptyset$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

(3) Conform primeia dintre cele două propoziții anterioare, pentru orice $x \in A$, $x \in \hat{x} \subseteq A$, prin urmare $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} \hat{x} \subseteq A$, așadar $A = \bigcup_{x \in A} \hat{x}$.

Deci $A/_{\sim} = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ este o partiție a lui A.

Notație

Pentru orice număr real x, vom nota cu $[x]$ partea întreagă a lui x (notație **consacrată**), și cu $frac\{x\}$ partea fracționară a lui x (notație **neconsacrată**). I. e.:

- $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\} \in \mathbb{Z}$
- $frac\{x\} := x - [x] \in [0, 1) \subset \mathbb{R}$

Exemplu

- $[5] = 5$ și $frac\{5\} = 0$
- $[-7] = -7$ și $frac\{-7\} = 0$
- $[4, 3] = 4$ și $frac\{4, 3\} = 0, 3$
- $[-3, 2] = -4$ și $frac\{-3, 2\} = 0, 8$

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Remarcă

Este imediat faptul că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, are loc: $x \in \mathbb{Z}$ ddacă $x = [x]$.

Exercițiu (temă)

Considerăm următoarea relație binară pe $\mathbb{R}$:

- $\rho := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x - y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$

Demonstrați că:

- $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, \mathit{frac}\{x\} = \mathit{frac}\{y\}\} \subset \mathbb{R}^2$ (**indicație:** folosiți expresia părții fracționare de pe slide–ul anterior, i. e. chiar definiția părții fracționare);
- ρ este o relație de echivalență pe $\mathbb{R}$;
- mulțimea factor $\mathbb{R}/_{\rho}$ este în bijecție cu intervalul real $[0, 1)$.

Clase de echivalență, mulțime factor (mulțime cât)

Remarcă

Cu notațiile anterioare exercițiului de mai sus, funcția $p : A \to A/_\sim$, definită prin: pentru orice $x \in A$, $p(x) := \hat{x}$, este surjectivă (sigur că este corect definită, pentru că $\hat{x}$ este unic determinat de x, oricare ar fi $x \in A$).

Definiție

Cu notațiile de mai sus, funcția p se numește *surjecția canonică de la A la $A/_\sim$*.

Propoziție

Mulțimea partițiilor unei mulțimi nevide este în bijecție cu mulțimea relațiilor de echivalență pe acea mulțime.

Demonstrație: Fie A o mulțime nevidă. Notăm cu $Part(A)$ mulțimea partițiilor lui A și cu $Eq(A)$ mulțimea relațiilor de echivalență pe mulțimea A.
Avem de demonstrat că:

$$Part(A) \cong Eq(A)$$

Definim $\varphi : Eq(A) \to Part(A)$, prin: pentru orice $\sim \in Eq(A)$, $\varphi(\sim) = A/_\sim$ (mulțimea factor a lui A prin $\sim$). Conform propoziției anterioare, pentru orice $\sim \in Eq(A)$, $A/_\sim \in Part(A)$, așadar φ este o funcție corect definită de la $Eq(A)$ la $Part(A)$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Definim $\psi : Part(A) \to Eq(A)$, prin: pentru orice $(A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, $\psi((A_i)_{i \in I}) \subseteq A^2$ (relație binară pe A), definită astfel:
$\psi((A_i)_{i \in I}) = \{(x,y) \mid x,y \in A, (\exists\, i \in I)\,(x,y \in A_i)\} = \bigcup_{i \in I} A_i^2$.

Pentru a demonstra că ψ este corect definită, să considerăm $(A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, să notăm $\sim = \psi((A_i)_{i \in I})$ și să demonstrăm că $\sim \in Eq(A)$.

Reflexivitatea lui $\sim$: pentru orice $x \in A$, cum $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ conform definiției unei partiții, urmează că $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, deci există (chiar un unic, a se vedea o propoziție de mai sus) un $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$ (deci $(x,x) \in A_{i_0}^2$), prin urmare $x \sim x$ conform definiției lui $\sim$.

Simetria lui $\sim$: pentru orice $x, y \in A$, dacă $x \sim y$, atunci există $i_0 \in I$ a. î. $x, y \in A_{i_0}$, deci $y, x \in A_{i_0}$, așadar $y \sim x$.

Tranzitivitatea lui $\sim$: pentru orice $x, y, z \in A$, dacă $x \sim y$ și $y \sim z$, atunci există $i_0, i_1 \in I$ a. î. $x, y \in A_{i_0}$ și $y, z \in A_{i_1}$, prin urmare $y \in A_{i_0} \cap A_{i_1}$, deci $A_{i_0} \cap A_{i_1} \neq \emptyset$, așadar $i_0 = i_1$ conform definiției unei partiții, prin urmare $x, z \in A_{i_0} = A_{i_1}$, deci $x \sim z$ (din nou puteam folosi acea propoziție de mai sus, pentru y).

Așadar $\sim \in Eq(A)$, prin urmare ψ este o funcție corect definită de la $Part(A)$ la $Eq(A)$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Pentru a arăta că $Part(A) \cong Eq(A)$, este suficient să demonstrăm că funcțiile φ și ψ sunt inverse una alteia, ceea ce va arăta că aceste funcții sunt inversabile, deci bijective.

Să demonstrăm că $\psi \circ \varphi = id_{Eq(A)}$.
Fie $\sim \in Eq(A)$, arbitrară, fixată.
$\varphi(\sim) = A/_{\sim} = \{\hat{a} \mid a \in A\}$.
Notăm $\sigma = \psi(\varphi(\sim))$.
Conform definițiilor lui φ și ψ și proprietăților claselor de echivalență, pentru orice $x, y \in A$, $x\sigma y$ ddacă există $a \in A$, cu $x, y \in \hat{a}$ ddacă există $a \in A$ cu $\hat{a} = \hat{x} = \hat{y}$ ddacă $\hat{x} = \hat{y}$ (pentru că luăm $a = x$ la implicația inversă) ddacă $x \sim y$. Așadar $\sigma = \sim$, i. e. $\psi(\varphi(\sim)) = \sim$.

Bijecția partiții $\cong$ relații de echivalență

Acum să demonstrăm că $\varphi \circ \psi = id_{Part(A)}$.
Fie $\alpha := (A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, arbitrară, fixată.
Calculăm $\varphi(\psi(\alpha))$.
Conform definiției lui ψ, relația de echivalență $\psi(\alpha) = \psi((A_i)_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} A_i^2$.

Fie $x \in A$, arbitrar, fixat. Conform aceleiași propoziții de mai sus asupra partițiilor unei mulțimi, există un unic $i_0 \in I$ a. î. $x \in A_{i_0}$. Din expresia anterioară a relației de echivalență $\psi(\alpha)$ și faptul că mulțimile din partiția $(A_i)_{i \in I}$ sunt două câte două disjuncte, un $y \in A$ are proprietatea că $x\psi(\alpha)y$ ddacă $y \in A_{i_0}$, așadar $\{y \in A \mid x\psi(\alpha)y\} = A_{i_0}$, deci clasa de echivalență $\hat{x}$ a lui x raportat la $\psi(\alpha)$ este A_{i_0}. Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) = A/_{\psi(\alpha)} = \{\hat{x} \mid x \in A\} \subseteq (A_i)_{i \in I} = \alpha$.
Pentru fiecare $i \in I$, A_i este nevid și, așadar, este, conform celor de mai sus, clasa de echivalență a oricărui element al său raportat la $\psi(\alpha)$. Acest fapt înseamnă că $\alpha = (A_i)_{i \in I} \subseteq \{\hat{x} \mid x \in A\} = A/_{\psi(\alpha)} = \varphi(\psi(\alpha))$.
Prin urmare, $\varphi(\psi(\alpha)) \subseteq \alpha$ și $\alpha \subseteq \varphi(\psi(\alpha))$, așadar $\varphi(\psi(\alpha)) = \alpha$.

Am demonstrat că $\psi \circ \varphi = id_{Eq(A)}$ și $\varphi \circ \psi = id_{Part(A)}$, i. e. $\varphi : Eq(A) \to Part(A)$ și $\psi : Part(A) \to Eq(A)$ sunt funcții inverse una alteia, deci sunt funcții inversabile, deci bijective, așadar $Part(A) \cong Eq(A)$.

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

- În cazul **morfismelor** între structuri algebrice (de același tip) (i. e. funcțiile care comută cu operațiile acelor structuri algebrice), **nucleul** se definește în funcție de un element distins din structura codomeniu, cum este elementul neutru la grupuri.
- În cazul **funcțiilor**, definite între două mulțimi pe care nu se dau structuri algebrice, pentru definirea unei noțiuni de **nucleu**, o funcție nu poate fi raportată decât la ea însăși, de unde și denumirea din definiția următoare.
- Pentru cele ce urmează, fie A și B două mulțimi nevide arbitrare și $f : A \to B$ o funcție arbitrară.
- Următoarea diagramă (reprezentare grafică) este doar pentru intuiție:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Definiție (nucleul de săgeată dublă)

Se numește *nucleul (de săgeată dublă al) lui f* următoarea relație binară pe A, notată $Ker(f)$:

$$Ker(f) := \{(x, y) \mid x, y \in A, f(x) = f(y)\} \subseteq A^2.$$

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

- În cazul morfismelor, au loc proprietăți de forma: morfismul este injectiv ddacă nucleul său este trivial.
- Și aici avem o proprietate de acest tip:

Remarcă

1. $Ker(f) \supseteq \Delta_A$;
2. $Ker(f) = \Delta_A$ ddacă f este injectivă.

Într–adevăr, proprietatea (1) este imediată și demonstrează că proprietatea (2) este echivalentă cu:

$$Ker(f) \subseteq \Delta_A \text{ ddacă } f \text{ este injectivă.}$$

Pentru a demonstra această din urmă proprietate, aplicăm faptul că Δ_A este relația de egalitate pe A: $Ker(f) \subseteq \Delta_A$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, $(x, y) \in Ker(f)$ implică $(x, y) \in \Delta_A$, ddacă, pentru orice $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implică $x = y$, ceea ce este echivalent cu faptul că f este injectivă.

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Remarcă

$Ker(f)$ este o relație de echivalență pe A.
Acest fapt rezultă imediat, chiar din definiția nucleului de săgeată dublă al lui f și din faptul că egalitatea pe B (Δ_B) este o relație de echivalență pe B: definiția lui $Ker(f)$ poate fi scrisă sub forma:

$$Ker(f) = \{(x, y) \mid x, y \in A, (f(x), f(y)) \in \Delta_B\}$$

- Nucleele de săgeată dublă ale morfismelor între structuri algebrice de același tip sunt **congruențe**, adică relații de echivalență care păstrează operațiile structurilor algebrice respective. (Vom vorbi despre **congruențe** pe algebre Boole în unele dintre cursurile următoare.) Am precizat: nucleele **de săgeată dublă** ale morfismelor, deci **nu** nucleele morfismelor în primul sens.
- Cu privire la proprietatea care urmează: intuitiv, o **diagramă** (cu mulțimi și funcții, ca aceea din propoziția următoare, de exemplu) se zice *comutativă* ddacă, indiferent pe ce drum "urmărim săgețile" și compunem funcțiile, între oricare două mulțimi din diagramă se obține aceeași funcție, i. e. toate compunerile de funcții între acele mulțimi sunt egale (mulțimile pot fi și 4 sau mai multe, nu neapărat 3, ca în cazul diagramei următoare).

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Pentru cele ce urmează, renunțăm la fixarea lui A, B și f.

Propoziție (proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

Fie A o mulțime nevidă, $\sim$ o relație de echivalență pe A și $p : A \to A/_{\sim}$ surjecția canonică: pentru orice $x \in A$, $p(x) = \hat{x} = \{y \in A \mid x \sim y\}$.
Atunci: pentru orice mulțime nevidă B și orice funcție $f : A \to B$ cu $\sim \subseteq Ker(f)$, există o unică funcție $\tilde{f} : A/_{\sim} \to B$ care face comutativă următoarea diagramă, i. e. cu proprietatea că:

$$\tilde{f} \circ p = f,$$

i. e., pentru orice $x \in A$:

$$\tilde{f}(\hat{x}) = f(x).$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A/_{\sim} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\tilde{f}$: Fie $g, h : A/_{\sim} \to B$, astfel încât $g \circ p = f = h \circ p$, i. e., pentru orice $x \in A$, $g(\hat{x}) = f(x) = h(\hat{x})$.

Proprietatea de universalitate a mulțimii factor

Cum $\{\hat{x} \mid x \in A\} = A/\sim$ (p e surjectivă), rezultă că g și h coincid pe fiecare element din domeniul lor, $A/\sim$, i. e. $g = h$.

Existența lui $\tilde{f}$: Fie $\tilde{f} : A/\sim \rightarrow B$, definită prin: $\tilde{f}(\hat{x}) := f(x) \in B$, pentru orice $x \in A$. $\{\hat{x} \mid x \in A\} = A/\sim$, așadar aplicația $\tilde{f}$ este definită pe întreaga mulțime $A/\sim$.

Însă $\tilde{f}$ este definită pe fiecare clasă ($\hat{x}$) prin intermediul unui reprezentant al acelei clase (x), așadar, pentru a arăta că $\tilde{f}$ este o **funcție** de la $A/\sim$ la B (i. e., pentru a arăta că $\tilde{f}$ asociază fiecărui element din $A/\sim$ un **unic** element din B), trebuie să demonstrăm că $\tilde{f}$ este **bine definită**, i. e. **independentă de reprezentanți**, i. e., indiferent ce reprezentant alegem pentru o clasă, valoarea lui $\tilde{f}$, definită prin intermediul acelui reprezentant, este aceeași, adică: pentru orice $x, y \in A$ cu $\hat{x} = \hat{y}$, are loc: $\tilde{f}(\hat{x}) = f(x) = f(y) = \tilde{f}(\hat{y})$.

Fie, așadar, $x, y \in A$ cu $\hat{x} = \hat{y}$, i. e. $x \sim y$ (a se revedea proprietățile claselor de echivalență), i. e. $(x, y) \in \sim$. Dar, prin ipoteză, $\sim \subseteq Ker(f)$, deci $(x, y) \in Ker(f)$, i. e. $f(x) = f(y)$. Prin urmare, $\tilde{f}$ este bine definită, i. e. este o funcție de la $A/\sim$ la B.

Din definiția lui $\tilde{f}$, avem: pentru orice $x \in A$, $\tilde{f}(p(x)) = \tilde{f}(\hat{x}) = f(x)$, așadar $\tilde{f} \circ p = f$.

Operatori de închidere și familii Moore

- Vom studia în cele ce urmează **operatorii de închidere** pe mulțimea părților unei mulțimi și **familiile Moore (sistemele de închidere)** de părți ale unei mulțimi.
- Aceste noțiuni pot fi definite și studiate pe **mulțimi ordonate arbitrare** (vom vedea ce sunt acestea), adică, în considerațiile de mai jos, se poate înlocui mulțimea părților unei mulțimi cu o mulțime arbitrară M, incluziunea de mulțimi cu o relație de ordine arbitrară $\leq$ pe M, iar intersecția cu **infimumul** în **mulțimea ordonată** $(M, \leq)$ (în timp ce reuniunea va avea drept generalizare o noțiune numită **supremum**) (vom vedea ce sunt toate acestea).

Intersecția familiei vide de mulțimi

- Vom vedea că, în mulțimi ordonate arbitrare:
  1. supremumul familiei vide este minimul (cele două există simultan);
  2. infimumul familiei vide este maximul (cele două există simultan).
- Pentru familii de mulțimi:
  1. am demonstrat că reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$ (cea mai mică mulțime în sensul incluziunii, adică raportat la incluziunea de mulțimi: $\emptyset \subseteq A$, pentru orice mulțime A);
  2. nu există o cea mai mare mulțime (dintre toate mulțimile) în sensul incluziunii, pentru că, dacă ar exista, atunci aceasta ar include pe $\mathcal{P}(A)$, pentru orice mulțime A, deci ar conține fiecare mulțime A, deci ar avea ca submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se revedea Cursul I); dar există o cea mai mare mulțime dintre părțile unei anumite mulțimi. Deci ce mulțime va fi intersecția familiei vide de mulțimi?

Exercițiu (temă)

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi. Atunci, pentru orice $\emptyset \neq S \subseteq I$, au loc incluziunile:

1. $\displaystyle\bigcup_{s \in S} A_s \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$
2. $\displaystyle\bigcap_{s \in S} A_s \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i$

Intersecția familiei vide de mulțimi

Remarcă

Conform celor de mai sus, incluziunea de la punctul (1) din exercițiul anterior este valabilă și pentru $S = \emptyset$.
Vom vedea că și incluziunea de la punctul (2) este valabilă și pentru $S = \emptyset$, atunci când are sens intersecția familiei vide.

Să transcriem definiția intersecției unei familii arbitrare de mulțimi pentru familia vidă:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\}.$$

Proprietatea $i \in \emptyset$ este falsă pentru orice element i, așadar implicația $i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i$ este adevărată pentru orice i și orice x, deci proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x. Sigur că nu există o mulțime care să conțină toate obiectele x. O astfel de mulțime ar conține, în particular, toate mulțimile, deci ar avea drept submulțime mulțimea tuturor mulțimilor, care nu există (a se revedea Cursul I).

Intersecția familiei vide de mulțimi

Remarcă

Intersecția familiei vide nu există decât raportat la o mulțime totală T: intersecția familiei vide de părți ale lui T (adică infimumul familiei vide în mulțimea ordonată $(\mathcal{P}(T), \subseteq)$ – vom vedea), se **definește** în următorul mod, și este egală cu mulțimea totală T:

$$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i := \{x \in T \mid (\forall\, i \in \emptyset)\,(x \in A_i)\} = \{x \in T \mid (\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)\} = T,$$

întrucât proprietatea $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow x \in A_i)$ este adevărată pentru orice x, după cum am arătat mai sus.

Intersecția familiei vide de mulțimi

Să transcriem enunțul exercițiului anterior pentru familii de părți ale unei mulțimi T, familii cărora le permitem să fie și vide. Vom folosi acest rezultat în cele ce urmează, și vom vedea o generalizare a sa când vom studia mulțimile ordonate arbitrare.

Exercițiu (temă)

Fie T o mulțime, iar $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (mulțimi de părți ale lui T care satisfac această incluziune). Atunci au loc incluziunile:

1. $\displaystyle\bigcup_{A \in X} A \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$
2. $\displaystyle\bigcap_{A \in X} A \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$

În particular, dacă $M \in Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ (i. e. $\emptyset \neq Y \subseteq \mathcal{P}(T)$ și $M \in Y$, adică pentru $X = \{M\}$ mai sus (un *singleton*, i. e. o mulțime cu un singur element)), atunci:

1. $\displaystyle M \subseteq \bigcup_{A \in Y} A$
2. $\displaystyle M \supseteq \bigcap_{A \in Y} A$

Operatori de închidere și familii Moore

Cele două noțiuni care fac obiectul acestei secțiuni a cursului sunt strâns legate una de cealaltă, așa că le vom descrie pe amândouă în cadrul unei singure definiții, cu toate că nu sunt legate între ele prin definiție (nu se definește una în funcție de cealaltă).

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară.

- Se numește *familie Moore de părți ale lui T* (sau *sistem de închidere pe mulțimea părților lui T*) o familie de părți ale lui T închisă la intersecții arbitrare, i. e. o familie de mulțimi $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$, cu I mulțime arbitrară, având proprietatea că, pentru orice $S \subseteq I$, $\bigcap\limits_{s \in S} M_s \in \mathcal{M}$ (i. e., pentru orice $S \subseteq I$, există $i_S \in I$, astfel încât $\bigcap\limits_{s \in S} M_s = M_{i_S}$). Familiile Moore se mai numesc *sisteme de închidere*.
- Se numește *operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$* o funcție $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, astfel încât, pentru orice $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, au loc proprietățile:
    1. $C(C(X)) = C(X)$ (C este *idempotent*);
    2. $X \subseteq C(X)$ (C este *extensiv*);
    3. dacă $X \subseteq Y$, atunci $C(X) \subseteq C(Y)$ (C este *crescător*).

Operatori de închidere și familii Moore

Peste tot în restul acestei secțiuni, T va fi o mulțime arbitrară.

Remarcă

Orice familie Moore de părți ale lui T conține intersecția familiei vide de părți ale lui T, adică pe T.

Exemplu

- $id_{\mathcal{P}(T)}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- Funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.
- $\mathcal{P}(T)$ este o familie Moore de părți ale lui T.
- $\{T\}$ este o familie Moore de părți ale lui T.
- $\emptyset$ nu este o familie Moore de părți ale lui T, pentru că nu îl conține pe T.

Așadar:

Remarcă

Orice familie Moore este nevidă.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție

Dacă $\mathcal{M}$ este o familie Moore de părți ale lui T, atunci, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, există o (unică) cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A (cea mai mică în sensul incluziunii), și aceasta este egală cu intersecția mulțimilor din $\mathcal{M}$ care includ pe A.

Demonstrație: Fie $A \in \mathcal{P}(T)$, I o mulțime și $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T. Conform remarcii anterioare, $\mathcal{M}$ este nevidă, i. e. I este nevidă. Considerăm $S \subseteq I$, dată de: $S := \{s \in I \mid A \subseteq M_s\}$, și fie $M := \bigcap_{s \in S} M_s$. A se observa că S este nevidă, pentru că $T \in \mathcal{M}$ și $A \subseteq T$.
Avem, datorită faptului că $M = \bigcap_{s \in S} M_s$:

1. întrucât $\mathcal{M}$ este o familie Moore, rezultă că $M \in \mathcal{M}$;
2. întrucât $A \subseteq M_s$, pentru orice $s \in S$, rezultă că $A \subseteq M$;
3. pentru orice $i \in I$ astfel încât $A \subseteq M_i$, rezultă că $i \in S$, prin urmare $M \subseteq M_i$.

Cele trei proprietăți anterioare spun exact că M este cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A. Unicitatea lui M rezultă din cele de mai sus și antisimetria lui $\subseteq$: dacă N este o (altă) cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A, atunci, conform lui (3), au loc $M \subseteq N$ și $N \subseteq M$, așadar $M = N$.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție

Fie I o mulțime nevidă și $\mathcal{M} = (M_i)_{i \in I}$ o familie Moore de părți ale lui T. Definim funcția $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ astfel: pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X)$ este, prin definiție, cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe X, adică $C_{\mathcal{M}}(X) := \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ X \subseteq M}} M$.

Atunci $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Demonstrație: Fie $X, Y \in \mathcal{P}(T)$, arbitrare.

Definiția lui $C_{\mathcal{M}}$ arată că $C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}$, și, aplicând din nou definiția lui $C_{\mathcal{M}}$, observăm că $C_{\mathcal{M}}(C_{\mathcal{M}}(X)) = C_{\mathcal{M}}(X)$ (pentru că, dacă $A \in \mathcal{M}$, atunci cea mai mică mulțime din $\mathcal{M}$ care include pe A este chiar A). Așadar, $C_{\mathcal{M}}$ este idempotent.

Definiția lui $C_{\mathcal{M}}$ arată că $C_{\mathcal{M}}(X) \supseteq X$, adică $C_{\mathcal{M}}$ este extensiv.

Dacă $X \subseteq Y$, atunci orice mulțime M cu $Y \subseteq M$ satisface și $X \subseteq M$ (prin tranzitivitatea lui $\subseteq$), prin urmare $\{M \in \mathcal{M} \mid Y \subseteq M\} \subseteq \{M \in \mathcal{M} \mid X \subseteq M\}$, așadar $\bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ X \subseteq M}} M \subseteq \bigcap_{\substack{M \in \mathcal{M}, \\ Y \subseteq M}} M$, adică $C_{\mathcal{M}}(X) \subseteq C_{\mathcal{M}}(Y)$, deci $C_{\mathcal{M}}$ este crescător.

Operatori de închidere și familii Moore

Prin urmare, $C_{\mathcal{M}}$ este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$.

Definiție (mulțimi închise)

Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Elementele din imaginea lui C, $C(\mathcal{P}(T))$, adică mulțimile de forma $C(X)$, cu $X \in \mathcal{P}(T)$, se numesc *mulțimi închise* raportat la operatorul de închidere C.

Propoziție (caracterizare echivalentă pentru mulțimile închise)

Fie $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Atunci mulțimile închise raportat la operatorul de închidere C sunt exact acele mulțimi $X \in \mathcal{P}(T)$ care satisfac $X = C(X)$, i. e.: $\{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.

Demonstrație: Fie $A := \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\}$ și $B := \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$. Avem de demonstrat că $A = B$.

Fie $Y \in A$, adică $Y = C(X)$ pentru un $X \in \mathcal{P}(T)$. Atunci, conform idempotenței lui C, $C(Y) = C(C(X)) = C(X) = Y$, deci $Y \in B$. Așadar, $A \subseteq B$.

Fie $X \in B$. Atunci $X = C(X) \in A$. Deci $B \subseteq A$.

Prin urmare, $A = B$.

Operatori de închidere și familii Moore

Propoziție

Fie $C : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(T)$ un operator de închidere pe $\mathcal{P}(T)$. Definim $\mathcal{M}_C = C(\mathcal{P}(T)) = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\} \subseteq \mathcal{P}(T)$ (familia mulțimilor închise din $\mathcal{P}(T)$ raportat la operatorul de închidere C). Atunci $\mathcal{M}_C$ este o familie Moore de părți ale lui T.

Demonstrație: $C(T) \subseteq T \subseteq C(T)$ (din extensivitatea lui T), așadar $T = C(T) \in \mathcal{M}_C$, iar T este intersecția familiei vide de părți ale lui T, deci $\mathcal{M}_C$ conține intersecția familiei vide de părți ale lui T.
Fie acum S o mulțime nevidă și $(M_s)_{s\in S} \subseteq \mathcal{M}_C$, deci $M_s = C(M_s)$, pentru orice $s \in S$. C este extensiv, deci $\bigcap\limits_{s\in S} M_s \subseteq C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s)$. Pe de altă parte, oricare ar fi $s_0 \in S$, $\bigcap\limits_{s\in S} M_s \subseteq M_{s_0}$, deci, cum C este crescător, $C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \subseteq C(M_{s_0})$ pentru orice $s_0 \in S$, așadar $C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \subseteq \bigcap\limits_{s\in S} C(M_s) = \bigcap\limits_{s\in S} M_s$. Am obținut că $\bigcap\limits_{s\in S} M_s = C(\bigcap\limits_{s\in S} M_s) \in \mathcal{M}_C$, deci $\mathcal{M}_C$ este închisă la intersecții nevide arbitrare.
Așadar, $\mathcal{M}_C$ este închisă la intersecții arbitrare, adică este familie Moore.

Propoziție

Aplicațiile din cele două propoziții precedente sunt inverse una alteia, adică:

1. *pentru orice operator de închidere* $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C} = C$;
2. *pentru orice familie Moore* $\mathcal{M}$ *de părți ale lui* T, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Așadar aceste aplicații sunt bijecții, deci mulțimea operatorilor de închidere pe $\mathcal{P}(T)$ *și mulțimea familiilor Moore de părți ale lui* T *sunt în bijecție.*

Demonstrație: (1) $\mathcal{M}_C = \{C(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} = \{X \in \mathcal{P}(T) \mid X = C(X)\}$.
Așadar, pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}_C}(X) = \bigcap\limits_{\substack{M \in \mathcal{M}_C, \\ M \supseteq X}} M = \bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T), \\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) \supseteq C(X)$,
pentru că fiecare termen al acestei intersecții $C(Y) = C(C(Y)) \supseteq C(X)$. Dar $C(X) \supseteq X$, deci $C(X)$ este unul dintre termenii acestei intersecții, așadar $\bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T), \\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) \subseteq C(X)$. Prin urmare, $C_{\mathcal{M}_C}(X) = \bigcap\limits_{\substack{Y \in \mathcal{P}(T), \\ C(Y) \supseteq X}} C(Y) = C(X)$, deci are loc egalitatea $C_{\mathcal{M}_C} = C$.

(2) Conform definiției sale, pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, $C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}$, așadar $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \{C_{\mathcal{M}}(X) \mid X \in \mathcal{P}(T)\} \subseteq \mathcal{M}$.
Acum fie $X \in \mathcal{M}$. Conform definiției lui $C_{\mathcal{M}}$, are loc $X = C_{\mathcal{M}}(X) \in \mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}}$. Deci are loc și incluziunea $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}}$.
Prin urmare, $\mathcal{M}_{C_{\mathcal{M}}} = \mathcal{M}$.

Exemplu

- Familia Moore asociată operatorului de închidere $id_{\mathcal{P}(T)}$ pe $\mathcal{P}(T)$ este $id_{\mathcal{P}(T)}(\mathcal{P}(T)) = \mathcal{P}(T)$.
- Familia Moore asociată operatorului de închidere dat de funcția constantă $C : \mathcal{P}(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, $(\forall X \in \mathcal{P}(T))\,(C(X) = T)$, este $C(\mathcal{P}(T)) = \{T\}$.

Mnemonic despre relații binare pe o mulțime

Definiție (tipuri de relații binare pe o mulțime)

Fie A o mulțime și $R \subseteq A^2 \stackrel{\text{not.}}{=} A \times A$ (i. e. R o relație binară pe A; pentru orice $a, b \in A$, faptul că $(a, b) \in R$ se notează și sub forma aRb). R se numește:

- *relație reflexivă* ddacă, pentru orice $a \in A$, aRa;
- *relație ireflexivă* ddacă nu există $a \in A$ a. î. aRa;
- *relație simetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb, atunci bRa;
- *relație antisimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă aRb și bRa, atunci $a = b$;
- *relație asimetrică* ddacă, pentru orice $a, b \in A$, dacă $(a, b) \in R$, atunci $(b, a) \notin R$;
- *relație tranzitivă* ddacă, pentru orice $a, b, c \in A$, dacă aRb și bRc, atunci aRc;
- *(relație de) preordine* ddacă e reflexivă și tranzitivă;
- *(relație de) echivalență* ddacă e o preordine simetrică, i. e. o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă;
- *(relație de) ordine* ddacă e o preordine antisimetrică, i. e. o relație reflexivă, tranzitivă și antisimetrică;
- *(relație de) ordine strictă* ddacă este asimetrică (deci și antisimetrică) și tranzitivă, sau, echivalent, ddacă este ireflexivă și tranzitivă.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

- Peste tot în această secțiune a cursului, A va fi o mulțime arbitrară.
- $\mathcal{P}(A^2)$ este mulțimea submulțimilor lui $A^2 = A \times A$, adică mulțimea relațiilor binare pe A.
- Amintesc că: $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\} = id_A$ =relația de egalitate pe A.

Propoziție

Fie $(R_i)_{i \in I}$ o familie nevidă (i. e. cu $I \neq \emptyset$) de relații binare pe A. Atunci:

1. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e reflexivă*
2. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică*
3. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e tranzitivă, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e tranzitivă*
4. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o preordine, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o preordine*
5. *dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e o relație de echivalență, atunci $\bigcap_{i \in I} R_i$ e o relație de echivalență*

Demonstrație: **(1)** Dacă, pentru fiecare $i \in I$, R_i e reflexivă, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $\Delta_A \subseteq R_i$, atunci $\Delta_A \subseteq \bigcap_{i \in I} R_i$, i. e. $\bigcap_{i \in I} R_i$ este reflexivă.

(2) Conform unor rezultate anterioare, pentru fiecare $i \in I$, R_i e simetrică ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $R_i = R_i^{-1}$, de unde rezultă că $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i$, prin urmare $\bigcap_{i \in I} R_i$ e simetrică.

(3) Notăm $S := \bigcap_{i \in I} R_i$. Fie $x, y, z \in A$, a. î. xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S$, i. e. $(x, y), (y, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, $(x, y), (y, z) \in R_i$, i. e., pentru fiecare $i \in I$, xR_iy și yR_iz, iar faptul că fiecare relație R_i este tranzitivă implică xR_iz pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in R_i$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. $(x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i = S$, i. e. xSz, deci S e tranzitivă.

(4) Rezultă din (1) și (3).

(5) Rezultă din (1), (2) și (3) (sau din (2) și (4)).

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Propoziția anterioară arată că familia relațiilor binare reflexive/simetrice/tranzitive/de preodine/de echivalență pe A este o familie Moore de părți ale lui A^2. Într–adevăr, A^2 satisface toate aceste proprietăți, fiind relație de echivalență pe A. Și, de exemplu, pentru reflexivitate: familia relațiilor reflexive pe A conține pe A^2, care este intersecția familiei vide din $\mathcal{P}(A^2)$, iar, conform propoziției anterioare, această familie este închisă la intersecții nevide arbitrare. Așadar, familia relațiilor reflexive pe A este închisă la intersecții arbitrare, i. e. este o familie Moore.

Remarcă

Remarca anterioară și o serie de propoziții despre familii Moore și operatori de închidere de mai sus arată că, pentru orice relație binară R pe A, există o cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R, anume intersecția tuturor relațiilor binare reflexive pe A care includ pe R, adică unica relație binară $\overline{R}$ pe A care satisface următoarele trei proprietăți:

- $\overline{R}$ este reflexivă
- $R \subseteq \overline{R}$
- pentru orice relație reflexivă S pe A cu $R \subseteq S$, rezultă că $\overline{R} \subseteq S$

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă (continuare)

În plus, $\mathcal{R} : \mathcal{P}(A^2) \to \mathcal{P}(A^2)$, pentru orice $R \in \mathcal{P}(A^2)$, $\mathcal{R}(R) := \overline{R}$, este un operator de închidere pe $\mathcal{P}(A^2)$.
Toate aceste considerații rămân valabile dacă înlocuim proprietatea de reflexivitate cu oricare dintre proprietățile:

- simetrie – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{S}$
- tranzitivitate – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{T}$
- proprietatea de a fi preordine – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu Pre
- proprietatea de a fi relație de echivalență – operatorul de închidere corespunzător va fi notat cu $\mathcal{E}$

Aceste notații **nu** sunt consacrate, ci sunt notații ad–hoc pe care le adoptăm în expunerea care urmează, și pe care le vom păstra în toate cursurile următoare.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Definiție

Fie R o relație binară pe A. Se numește:

- *închiderea reflexivă a lui* R cea mai mică relație binară reflexivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{R}(R)$;
- *închiderea simetrică a lui* R cea mai mică relație binară simetrică pe A care include pe R, adică $\mathcal{S}(R)$;
- *închiderea tranzitivă a lui* R cea mai mică relație binară tranzitivă pe A care include pe R, adică $\mathcal{T}(R)$;
- *preordinea generată de* R (sau *închiderea reflexiv–tranzitivă a lui* R) cea mai mică preordine pe A care include pe R, adică $Pre(R)$;
- *relația de echivalență generată de* R cea mai mică relație de echivalență pe A care include pe R, adică $\mathcal{E}(R)$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Remarcă

Idempotența operatorilor de închidere arată că, pentru orice relație binară R pe A: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(R)) = \mathcal{R}(R)$, $\mathcal{S}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(R)$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(R)$, $Pre(Pre(R)) = Pre(R)$ și $\mathcal{E}(\mathcal{E}(R)) = R$.

Remarcă

Fie R o relație binară pe A. Conform descrierii mulțimilor închise din secțiunea despre operatori de închidere și familii Moore, au loc:

- R este reflexivă ddacă $R = \mathcal{R}(R)$
- R este simetrică ddacă $R = \mathcal{S}(R)$
- R este tranzitivă ddacă $R = \mathcal{T}(R)$
- R este o preordine ddacă $R = Pre(R)$
- R este o relație de echivalență ddacă $R = \mathcal{E}(R)$

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție

Fie R o relație binară pe A. Atunci:

1. $\mathcal{R}(R) = R \cup \Delta_A$
2. $\mathcal{S}(R) = R \cup R^{-1}$
3. $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$
4. $Pre(R) = \mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$
5. $\mathcal{E}(R) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(\mathcal{S}(R))) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R \cup R^{-1} \cup \Delta_A)^n$

Demonstrație: Folosim o caracterizare a închiderilor dintr–o remarcă de mai sus, caracterizare care este pur și simplu definiția acestor închideri, scrisă sub forma a trei condiții.

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

(1) Avem de demonstrat că: $R \cup \Delta_A$ este reflexivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară reflexivă pe A care include pe R.
$\Delta_A \subseteq R \cup \Delta_A$, deci $R \cup \Delta_A$ este reflexivă.
Evident, $R \subseteq R \cup \Delta_A$.
Fie Q o relație binară reflexivă pe A cu $R \subseteq Q$. Q este reflexivă, deci $\Delta_A \subseteq Q$.
Cum avem și $R \subseteq Q$, rezultă că $R \cup \Delta_A \subseteq Q$.
Prin urmare, $R \cup \Delta_A = \mathcal{R}(R)$.
(2) Avem de demonstrat că: $R \cup R^{-1}$ este simetrică, include pe R și este inclusă în orice relație binară simetrică pe A care include pe R.
Conform unor rezultate anterioare,
$(R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R \cup R^{-1}$, deci $R \cup R^{-1}$ este simetrică.
Evident, $R \subseteq R \cup R^{-1}$.
Fie Q o relație binară simetrică pe A cu $R \subseteq Q$, prin urmare $R^{-1} \subseteq Q^{-1}$. Q este simetrică, deci $Q = Q^{-1}$, așadar am obținut $R \subseteq Q$ și $R^{-1} \subseteq Q$, prin urmare $R \cup R^{-1} \subseteq Q$.
Rezultă că $R \cup R^{-1} = \mathcal{S}(R)$.

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

(3) Notăm $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Pentru a arăta că $S = \mathcal{T}(R)$, avem de demonstrat că: S este tranzitivă, include pe R și este inclusă în orice relație binară tranzitivă pe A care include pe R.

Fie $x, y, z \in A$, cu xSy și ySz, i. e. $(x, y), (y, z) \in S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, i. e. există $n_0, n_1 \in \mathbb{N}^*$, cu $(x, y) \in R^{n_0}$ și $(y, z) \in R^{n_1}$, prin urmare, aplicând definiția compunerii de relații binare și a puterilor naturale ale unei relații binare, precum și asociativitatea compunerii de relații binare, obținem că $(x, z) \in R^{n_1} \circ R^{n_0} = R^{n_0+n_1} \subseteq S$, deci $(x, z) \in S$, i. e. xSz. Așadar S e tranzitivă.
$R = R^1 \subseteq S$.
Fie Q o relație binară tranzitivă pe A cu $R \subseteq Q$. Pentru a arăta că $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$, vom demonstra prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$ că $R^n \subseteq Q$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Pasul de verificare: $R^1 = R \subseteq Q$, conform alegerii lui Q.
Pasul de inducție: Presupunem că $R^n \subseteq Q$ pentru un $n \in \mathbb{N}^*$, arbitrar, fixat. Fie $(x, z) \in R^{n+1} = R^n \circ R$, arbitrar, fixat. Atunci există $y \in A$ a. î. $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R^n$. Dar $R \subseteq Q$ conform alegerii lui Q și $R^n \subseteq Q$ conform ipotezei de inducție. Așadar $(x, y), (y, z) \in Q$, i. e. xQy și yQz. Iar Q este tranzitivă, conform alegerii sale, prin urmare xQz, i. e. $(x, z) \in Q$. Rezultă că $R^{n+1} \subseteq Q$ și raționamentul prin inducție este încheiat.

Am demonstrat că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $R^n \subseteq Q$, așadar $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq Q$.

Rezultă că: $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = S = \mathcal{T}(R)$.

(4) Temă.
(5) Temă.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Exemplu (temă)

Fie R relația "sunt numere consecutive" pe $\mathbb{N}$, i. e.: $R = \{(k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^2$. Să se arate că:

1. $\mathcal{R}(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, y - x \in \{0, 1\}\}$
2. $\mathcal{S}(R) = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, |y - x| = 1\}$
3. $\mathcal{T}(R) = < = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$ (**indicație:** să se arate, prin inducție matematică după $n \in \mathbb{N}^*$, că $R^n = \{(k, k+n) \mid k \in \mathbb{N}\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$; de fapt, această egalitate este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}$)
4. $Pre(R) = \leq = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$
5. $\mathcal{E}(R) = \mathbb{N}^2$

Propoziție (temă)

Dacă A este o mulțime finită și nevidă având $|A| = k \in \mathbb{N}^*$, atunci:

1. $\mathcal{T}(R) = \bigcup_{n=1}^{k} R^n$;
2. *șirul $R^0, R^1, R^2, \ldots, R^n, \ldots$ este periodic începând de la un anumit exponent.*

Formulele închiderilor relațiilor binare pe o mulțime

Indicație pentru demonstrația propoziției anterioare:
(1) **Intuitiv**, acest lucru este ușor de observat, dacă ne gândim la reprezentarea relațiilor binare prin grafuri orientate: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ (chiar orice $n \in \mathbb{N}$), R^n este mulțimea arcelor având drept capete capetele drumurilor de lungime n formate din arce din R (unde lungimea unui drum este numărul arcelor care îl compun, cu fiecare apariție a fiecărui arc numărată, chiar dacă acel arc apare mai mult de o dată în acel drum), în timp ce $\mathcal{T}(R)$ este mulțimea arcelor având drept capete capetele drumurilor nevide (i. e. cu cel puțin un arc) formate din arce din R. Iar, dacă graful orientat are $|A| = k \in \mathbb{N}^*$ vârfuri, atunci orice drum din acest graf de lungime strict mai mare decât k conține cel puțin un circuit, care poate fi eliminat din acest drum, obținându–se un drum între aceleași vârfuri și de lungime strict mai mică; acest procedeu poate continua până la obținerea unui drum între aceleași vârfuri și de lungime mai mică sau egală cu k.
(2) Aici se folosește faptul că există doar un număr finit de relații binare pe A, anume $|\mathcal{P}(A^2)| = 2^{k^2}$.

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție (comutările închiderilor – temă, cu contraexemplu pentru comutarea de la ultimul punct)

Fie R o relație binară pe A. Atunci:

1. $\mathcal{R}(\mathcal{S}(R)) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(R))$;
2. $\mathcal{R}(\mathcal{T}(R)) = \mathcal{T}(\mathcal{R}(R))$;
3. $\mathcal{T}(\mathcal{S}(R))$ *și* $\mathcal{S}(\mathcal{T}(R))$ *nu sunt neapărat egale.*

Adică: închiderea reflexivă comută cu fiecare dintre închiderile simetrică și tranzitivă, dar (în general) închiderile simetrică și tranzitivă nu comută una cu cealaltă.

Corolar (temă)

- $\mathcal{R}$ *păstrează simetria și tranzitivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară simetrică (respectiv tranzitivă), atunci $\mathcal{R}(R)$ este simetrică (respectiv tranzitivă);*
- $\mathcal{S}$ *și* $\mathcal{T}$ *păstrează reflexivitatea, i. e.: dacă R este o relație binară reflexivă, atunci $\mathcal{S}(R)$ și $\mathcal{T}(R)$ sunt reflexive.*

Închiderile relațiilor binare pe o mulțime

Propoziție (temă)

- $\mathcal{T}$ *păstrează simetria;*
- $\mathcal{S}$ *nu păstrează tranzitivitatea.*

Remarcă

Fie R o relație binară pe A, arbitrară.
De ce nu calculăm o închidere antisimetrică a lui R, sau o relație de ordine generată de R?
Două motive sunt următoarele fapte, fiecare ușor de verificat:

- dacă R nu este antisimetrică, atunci nicio relație binară S pe A cu $R \subseteq S$ nu este antisimetrică (direct din definiția antisimetriei), și deci nu este nici relație de ordine;
- dacă $|A| \geq 2$, atunci A^2 nu este antisimetrică (pentru că, atunci, A conține cel puțin două elemente distincte a și b, așadar $(a, b), (b, a) \in A^2$, dar $a \neq b$), deci A^2 nu este o relație de ordine, prin urmare A^2 nu aparține familiei relațiilor antisimetrice pe A, deci nici familiei relațiilor de ordine pe A, așadar niciuna dintre aceste familii nu este o familie Moore de părți ale lui A^2, pentru că niciuna dintre ele nu conține intersecția familiei vide de părți ale lui A^2, anume pe A^2.