Avem

$$\frac{d_{G''}(x) - m}{2} \leq \frac{\sum\limits_{z \in V - \{x\}} d_{G''}(z) - m}{2},$$

deoarece acestă inegalitate este echivalentă cu următoarea

$$2d_{G''}(x) \leq \sum_{z \in V} d_{G''}(z),$$

iar din (b) ştim că

$$2 \max\{d_{G''}(z) \mid z \in V\} \leq \sum_{z \in V} d_{G''}(z). \quad \square$$

Teoremă 3.5. (Havel şi Hakimi) *Un multiset* $s_0 = \{d_1 \geq \cdots \geq d_n\} \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{\langle n \rangle}$, *unde* $n \geq 2$ *şi* $d_1 \leq n - 1$, *este multisetul gradelor unui graf simplu dacă şi numai dacă multisetul* $s_0' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, , d_{d_1+3}, \ldots, d_n)$ *este multisetul gradelor unui graf simplu.*

Demonstraţie. $\Rightarrow$ Să presupunem că există un graf simplu $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$, mai precis $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ şi $d_G(x_t) = d_t$ pentru $t \in [n]$. Vom construi un graf simplu $G' = (V', E')$ cu $s(G') = s_0'$.

Cazul 1. Dacă pentru orice $i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}$ avem $x_1 x_i \in E$, atunci definim $G' := G - x_1$ şi evident G' este graf simplu şi $s(G') = s_0'$.

Cazul 2. Dacă există $i \in \{2, \ldots, d_1 + 1\}$ cu $x_1 x_i \notin E$, atunci există j, $d_1 + 1 \leq j \leq n$, cu $x_1 x_j \in E$ şi, deoarece $d_G(x_i) \geq d_G(x_j)$, rezultă că există $k \in \{2, \ldots, n\}$, $k \neq i, j$, cu $x_i x_k \in E$ şi $x_j x_k \notin E$.

Definim

$$G_1 := G - x_1 x_j - x_i x_k + x_1 x_i + x_j x_k.$$

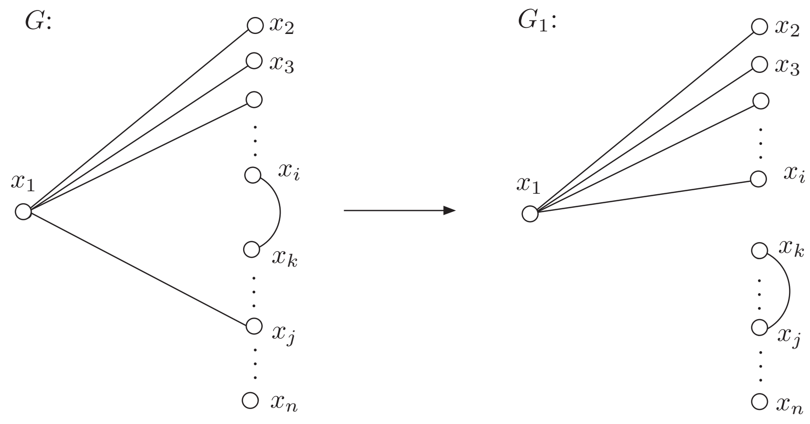

Figura 3.4.

G_1 este graf simplu, $V(G_1) = V(G)$ şi $d_{G_1}(x_t) = d_G(x_t) = d_t$ pentru $t \in [n]$.

Fie p numărul indicilor $i \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ pentru care $x_1 x_i \notin E$. Prin p transformări de tipul descris anterior (pentru fiecare din aceşti indici), obţinem o secvenţă de grafuri simple $G, G_1, G_2, \ldots, G_p$ peste mulţimea de vârfuri $v = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cu acelaşi grad în fiecare vârf $x_t \in V$. În plus, pentru orice $i \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ avem $x_1x_i \in E(G_p)$. Definim, ca şi în cazul 1, $G' = G_p - x_1$. Evident G' este graf simplu şi $s(G') = s_0'$.

$\Leftarrow$ Să presupunem că există un graf simplu $G' = (V', E')$ cu $s(G') = s_0'$. Notăm $V' = \{x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ astfel încât să avem

$$\begin{aligned} &d_{G'}(x_2) = d_2 - 1, \quad &\ldots, \quad &d_{G'}(x_{d_1+1}) = d_{d_1+1} - 1, \\ &d_{G'}(x_{d_1+2}) = d_{d_1+2}, \quad &\ldots, \quad &d_G(x_n) = d_n. \end{aligned}$$

Fie x_1 un vârf auxiliar. Definim

$$G := G' + [x_1, x_2] + [x_1, x_3] + \cdots + [x_1, x_{d_1+1}].$$

Evident G este graf simplu şi $s(G) = s_0$. □

Observaţie 3.6. În cazurile 1 şi 2 putem prezenta şirul transformărilor sintetic astfel:

Fie $i_1, \ldots, i_p \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ acei indici din mulţimea $\{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$ pentru care $x_1x_{i_1} \notin E, \ldots, x_1x_{i_p} \notin E$.

Dacă $p = 0$ atunci definim $G' := G - x_1$.

Dacă $p > 0$ atunci există p indici diferiţi $j_1, \ldots, j_p \in \{d_1+2, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_p\}$ pentru care $x_1x_{j_1} \in E, \ldots, x_1x_{j_p} \in E$.

Deoarece G este graf simplu şi pentru fiecare $t \in \{1, \ldots, p\}$ avem

$$x_1x_{i_t} \notin E, \quad x_1x_{j_t} \in E \quad \text{şi} \quad d(x_{i_t}) \geq d(x_{j_t}),$$

rezultă că există p indici, nu neapărat distincţi,

$$k_1 \neq i_1, j_1, \quad \ldots, \quad k_p \neq i_p, j_p, \quad k_1, \ldots, k_p \in \{2, 3, \ldots, n\}$$

cu proprietăţile $x_{i_t}x_{k_t} \in E$ şi $x_{j_t}x_{k_t} \notin E$ pentru orice $t \in \{1, \ldots, p\}$.

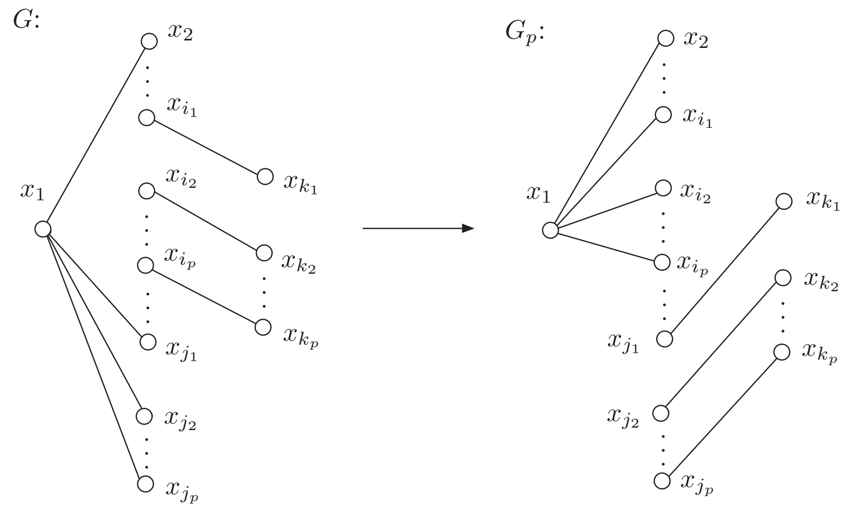

Figura 3.5.

Definim

$$G_p := G - \sum_{t=1}^{p} x_1 x_{j_t} - \sum_{t=1}^{p} x_{i_t} x_{k_t} + \sum_{t=1}^{p} x_1 x_{i_t} + \sum_{t=1}^{p} x_{j_t} x_{k_t}.$$

Graful G_p astfel construit este simplu, $V(G_p) = V(G)$ şi $d_{G_p}(x_t) = d_t$, $t \in [n]$.

Definim $G' := G_p - x_1$. Graful G' este simplu şi $s(G') = s'_0$. Vezi figura 3.5, unde vârfurile $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$ din graful G_p nu sunt neapărat diferite.

Problemă 3.7. *Fie $p, n \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq p \leq (n-1)/2$. Să se construiască un graf simplu $G = (V, E)$ cu $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $d_G(x_1) \geq \cdots \geq d_G(x_n)$, $d_G(x_1) = p$, pentru care sunt necesare p transformări (în termenii demonstraţiei teoremei* 3.5, *cazul* 2*) pentru a obţine un graf simplu $G' = (V, E')$ cu proprietăţile: $d_{G'}(x_i) = d_G(x_i)$ pentru $i \in [n]$ şi $x_1 x_i \in E'$ pentru $i \in \{2, 3, \ldots, d_1 + 1\}$.*

Exemple 3.8. 1. $G = K_p(x_2, \ldots, x_{p+1}) + \mathcal{S}t(x_1; x_{p+2}, \ldots, x_{2p+1}) + x_{2p+2} + \cdots + x_n$.

2. Pentru $np \equiv 0 \pmod 2$ se consideră G un graf p-regulat cu n vârfuri $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ etichetate astfel încât vecinii lui x_1 să nu fie $x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}$.

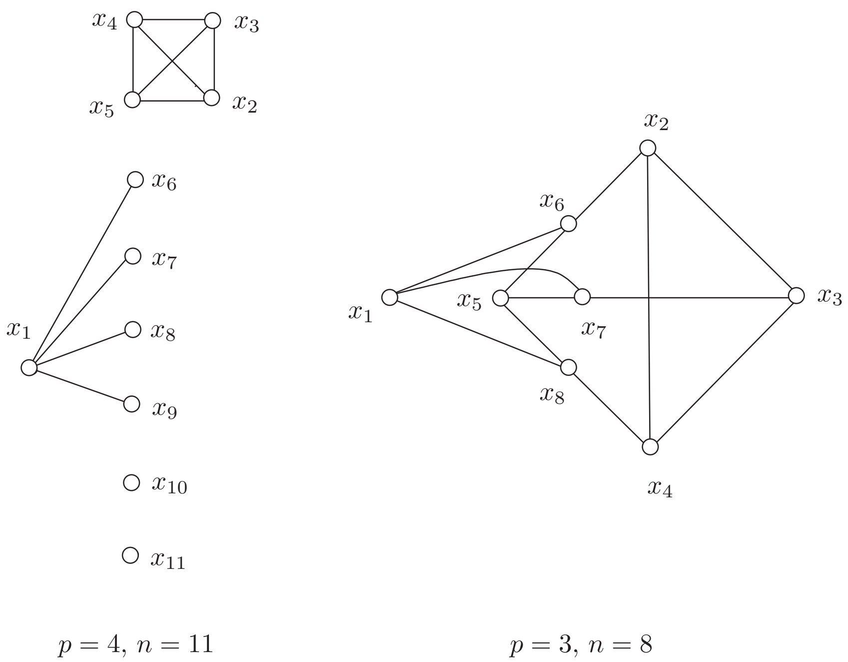

Figura 3.6.