## CONȚINUTUL CURSULUI #2:







### II.1.1. Sisteme liniare superior triunghiulare

**Definiția (II.1.)**

a) *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numește matrice superior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e.* $a_{ij} = 0, \forall i > j$;

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este superior triunghiulară se numește sistem superior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul superior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma



$$\left\{\begin{array}{rr} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k & (E_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{array}\right. \tag{1}$$

Din $(E_n)$ rezultă

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}. \tag{2}$$

Fie ecuația $(E_k)$: $a_{kk}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din ultimele $n-k$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{k+1,n}$, atunci din $(E_k)$ rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right) \tag{3}$$



**ALGORITM** (Metoda substituției descendente)

**Date de intrare:** $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $b \in \mathbb{R}^n$;
**Date de ieșire:** $x \in \mathbb{R}^n$;

*STEP1* : $x_n = \frac{1}{a_{nn}} b_n$; $k = n-1$;

*STEP2* : `while` $k > 0$ `do`

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}x_j\right);$$

$k = k - 1$;

`endwhile`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției descendente) procedura **SubsDesc** având sintaxa $x =$**SubsDesc**$(A, b)$, unde $x$ este soluția sistemului $Ax = b$.

## II.1.2. Metoda Gauss fără pivotare.

Fie sistemul liniar $Ax = b, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul $Ax = b$ se scrie sub forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k & (E_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases} \tag{4}$$

Se numește **pivot** al matricei $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ orice element de pe diagonala principală a matricei $A$, i.e. $a_{kk},\ k \in \overline{1,n}$.
Metoda Gauss fără pivotare transformă matricea extinsă $\overline{A}$ folosind transformările elementare într-o matrice superior triunghiulară, obținându-se astfel un sistem compatibil cu sistemul inițial.
La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al metodei lui Gauss fără pivotare se alege drept pivot corespunzător coloanei $k$ primul element nenul $a_{pk} \neq 0, p \geq k$ de pe coloana $k$ a matricei transformate. Apoi se elimină toate elementele de pe coloana $k$ situate sub pivot (folosind transformările elementare).



**ALGORITM** ( Metoda Gauss fără pivotare )

**Date:** $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^n$

STEP 1: $A = (A \mid b) = (a_{ij})_{i=\overline{1,n};j=\overline{1,n+1}}$ (matricea extinsă);

STEP 2: for $k = 1 : n-1$ do

Se caută primul $p$ cu $k \leq p \leq n$ a.î. $a_{pk} \neq 0$;

if (nu a fost gasit $p$ ) then

OUTPUT('Sist. incomp. sau sist. comp. nedet.')

STOP.

endif

if $p \neq k$ then

$L_p \leftrightarrow L_k$ (schimbă linia $p$ cu linia $k$)

endif

for $\ell = k+1 : n$ do



$m_{\ell k} = \dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;

$L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k$;

endfor

endfor

STEP 3: if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT('Sistem incomp. sau sist. comp. nedet.')

STOP.

endif

STEP 4: $x =$**SubsDesc**$\left((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}}\right)$.

**Exemplu 1:** Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss fără pivotare, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \tag{5}$$

Matricea extinsă $\overline{A}$ asociată sistemului este:



$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$k = 1 : a_{21} \neq 0 \Rightarrow p = 2$. Deoarece $p \neq k$ interschimbăm $L_p \leftrightarrow L_k$. Se obține o matrice echivalentă cu matricea $\overline{A}$.

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Eliminăm toate elementele de pe prima coloană situate sub elementul $a_{11} = 1$ al matricei echivalente. Aplicăm următoarea transformare elementară $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{3}{1}L_1$ :

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right]$$

$k = 2 : a_{22} = 1 \neq 0$. Eliminăm elementul situat sub pivotul curent $a_{22}$ aplicând transformarea $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right]$$

Matricea finală este o matrice superior triunghiulară și reprezintă matricea asociată unui sistem compatibil cu sistemul inițial. Soluția sistemului este: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.



**Exemplu 2:** Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss fără pivotare, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + x_2 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{6}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{O}(10^{-20}) \ll 1$.
Transformăm matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ într-o matrice superior triunghiulară

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right]$$

Cum $a_{11} \neq 0$, s-a efectuat transformarea $L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{a_{21}}{a_{11}} L_1$



Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + \qquad x_2 = 1 \\ \left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon}\right) x_2 = 2 - \dfrac{1}{\varepsilon} \end{cases} \tag{7}$$

Sistemul liniar (7) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2 - 1/\varepsilon}{1 - 1/\varepsilon} = \dfrac{2\,\varepsilon - 1}{\varepsilon - 1} \approx \dfrac{-1}{-1} = 1 \\ x_1 = \dfrac{1 - x_2}{\varepsilon} = \dfrac{1-1}{\varepsilon} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \tag{8}$$

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{9}$$

Relațiile (9) implică faptul că soluția (8) a sistemului liniar (11), obținută prin metoda lui Gauss fără pivotare, conține o eroare foarte mare.



## II.1.3. Metoda Gauss cu pivotare parțială.

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al Algoritmului metodei Gauss fără pivotare se alege ca pivot corespunzător coloanei $k$ elementul $a_{pk}$ cu valoarea absolută cea mai mare de pe coloana $k$, aflat sub sau pe diagonala principală a matricei curente $A$, i.e.

$$|a_{pk}| = \max_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|, \quad p \in \overline{k, n} \tag{10}$$

**ALGORITM** ( Metoda Gauss cu pivotare parțială)

**Date:** $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$

STEP 1: $A = (A \mid b) = (a_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1}}$ `(matricea extinsă)`

STEP 2: `for` $k = 1 : n-1$ `do`

`Determină primul indice` $p$, $(k \leq p \leq n)$

`a.î.` $|a_{pk}| = \max_{j=\overline{k,n}} |a_{jk}|$

`if` $a_{pk} = 0$ `then`

`OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')`

`STOP.`

`endif`

```
if p ≠ k then
    L_p ↔ L_k (schimbă linia p cu linia k)
endif
for ℓ = k+1 : n do
    m_ℓk = a_ℓk / a_kk;
    L_ℓ ← L_ℓ − m_ℓk L_k;
endfor
endfor
```

STEP 3: if $a_{nn} = 0$ then

OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')

STOP.

endif

STEP 4: $x =$ **SubsDesc**$((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}})$



**Exemplu 3:** Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases} \tag{11}$$

Matricea extinsă $\overline{A}$ asociată sistemului este:

$$\bar{A} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

$k = 1 : |a_{p1}| = \max_{j=\overline{1,3}} |a_{j1}| = |a_{31}| \Rightarrow p = 3$. Interschimbăm $L_3 \leftrightarrow L_1$. Se obține matricea echivalentă cu $\overline{A}$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$



În urma transformării elementare $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{1}{3}L_1$ se obține:

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$k = 2 : |a_{p2}| = \max_{j=\overline{2,3}} |a_{j2}| = |a_{22}| \Rightarrow p = 2$. Alpicăm transformarea elementară $L_3 \leftarrow L_3 - \dfrac{-2/3}{1} = L_3 + \dfrac{2}{3}L_2$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

Soluția sistemului este: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.



**Exemplu 4.** Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + x_2 = 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{12}$$

unde $\varepsilon = \mathrm{O}(10^{-20}) \ll 1$.
Scriem matricea extinsă asociată sistemului:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{13}$$

Determinăm pivotul corespunzător coloanei $k = 1$ a matricei curente $A$:

$$|a_{p1}| = \max_{j=\overline{1,2}} |a_{j1}| = \max\left\{|\varepsilon|, 1\right\} = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = 2 \tag{14}$$

Interschimbăm liniile $k = 1$ și $p = 2$, i.e. $\mathrm{L}_2 \longleftrightarrow \mathrm{L}_1$

Se obține matricea echivalenta

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{array}\right]$$

În urma transformării $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1$, i.e., $L_2 \leftarrow L_2 - \varepsilon L_1$ se obține:

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \end{array}\right]$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 = 2 \\ \quad (1-\varepsilon)\, x_2 = 1 - 2\varepsilon \end{cases} \tag{15}$$

Sistemul liniar (15) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} \approx \dfrac{1}{1} = 1 \\ x_1 = 2 - x_2 = 2 - 1 = 1 \end{cases} \implies \tag{16}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$



Verificare:

$$\begin{cases} \varepsilon\, x_1 + x_2 = \varepsilon + 1 \approx 1 & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{17}$$

Relațiile (17) implică faptul că soluția (16) a sistemului liniar (11), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare parțială, este acurată.

**Exemplu 5.**

Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare parțială, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{18}$$

unde $C = \mathrm{O}(10^{20}) \gg 1$.

Transformăm matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ într-o matrice superior triunghiulară, ținând seama de alegerea pivotului corespunzător coloanelor matricelor respective:



$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad (\mathrm{L}_2) \longleftarrow \left(\mathrm{L}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}_1\right) \quad \implies$$

$$\bar{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 0 & 1-C & 2-C \end{array}\right]$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = C \\ \quad (1-C)\, x_2 = 2 - C \end{cases} \tag{19}$$

Sistemul liniar (19) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{2-C}{1-C} \approx \dfrac{-C}{-C} = 1 \\ x_1 = C - C\, x_2 = C - C = 0 \end{cases} \implies$$

$$x_1 = 0 \quad \& \quad x_2 = 1$$



Verificare:

$$\begin{cases} x_1 + C\, x_2 = 0 + C = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{20}$$

Relațiile (20) implică faptul că soluția (20) a sistemului liniar (18), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare parțială, conține o eroare foarte mare.

Cauza erorii se datorează faptului că nu se ține seama de valoarea pivotului în raport cu valorile elementelor liniei sale. Se introduce astfel pivotărea totală.

## II.1.4. Metoda Gauss cu pivotare totală.

La fiecare pas $k = \overline{1, n-1}$ al Algoritmului metodei Gauss fără pivotare alegem ca pivot elementul curent $a_{pm}$ cu valoarea absolută cea mai mare din submatricea $(a_{ij})_{i,j=\overline{k,n}}$, i.e.

$$\boxed{|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|, \quad p, m \in \overline{k, n}} \tag{21}$$

Dacă $m \neq k$, atunci interschimbăm coloanele $k$ și $m$. Dacă $p \neq k$, atunci interschimbăm liniile $k$ și $\ell$.
Obs.: La interschimbarea a două coloane se schimbă ordinea necunoscutelor în vectorul $x$.



**ALGORITM** (Metoda Gauss cu pivotare totală)

**Date de intrare:** $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$;
**Date de ieșire:** $x \in \mathbb{R}^n$;

STEP 1: $A = (A \mid b) = (a_{i,j})_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,n+1}}$ (matricea extinsă);
  $index_i = i, i = \overline{1, n}$;
STEP 2: for $k = 1 : n-1$ do
  Determină primii indici $p, m$ $(k \leq p, m \leq n)$
  a.î. $|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{k,n}} |a_{ij}|$;
  if $a_{pm} = 0$ then
    OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')
    STOP
  endif
  if $p \neq k$ then
    $L_\ell \leftrightarrow L_k$ (schimbă linia $p$ cu linia $k$);
  endif



  if $m \neq k$ then
    $C_m \leftrightarrow C_k$ (schimbă coloana $m$ cu coloana $k$);
    $index_m \leftrightarrow index_k$ (schimbă indicii nec.);
  endif
  for $\ell = k+1 : n$ do
    $m_{\ell k} = \dfrac{a_{\ell k}}{a_{kk}}$;
    $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k$;
  endfor
endfor
STEP 3: if $a_{nn} = 0$ then
  OUTPUT('Sist. incomp. sau comp. nedet.')
  STOP.
endif
STEP 4: $y =$**SubsDesc**$((a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, (a_{i,n+1})_{i=\overline{1,n}})$;
  $x_{index_i} = y_i, i = \overline{1, n}$ (renumerotare nec.).



**Exemplu 6.** Să se rezolve, folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală, sistemul liniar:

$$\begin{cases} x_1 + C\,x_2 = C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{22}$$

unde $C = \mathrm{O}(10^{20}) \gg 1$.

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & C & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{23}$$

Determinăm pivotul corespunzător coloanei $k = 1$ a matricei curente $A$ căutând maximul elementelor matricei $A$:

$$|a_{pm}| = \max_{i,j=\overline{1,2}} |a_{ij}| = |C| = |a_{12}| \implies p = 1,\ m = 2 \tag{24}$$

Cum $p = k$ și $m \neq k$, iterschimbăm coloanele $k = 1$ și $m = 2$.

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} C & 1 & C \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \left(\mathrm{E}_2 - \frac{1}{C}\,\mathrm{E}_1\right) \longrightarrow (\mathrm{E}_2) \qquad \Longrightarrow \tag{25}$$

$$\overline{A} \sim \left[\begin{array}{cc|c} C & 1 & C \\ 0 & 1 - \dfrac{1}{C} & 1 \end{array}\right] \tag{26}$$

Obținem sistemul liniar superior triunghiular echivalent:

$$\begin{cases} C\,x_2 + \quad x_1 = 2\,C \\ \left(1 - \dfrac{1}{C}\right) x_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + \quad x_1 = C \\ \dfrac{C-1}{C}\, x_1 = 1 \end{cases} \tag{27}$$



Sistemul liniar (27) se rezolvă prin metoda substituției descendente

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{C}{C-1} \approx \dfrac{C}{C} = 1 \\ x_2 = \dfrac{C - x_1}{C} = \dfrac{C-1}{C} \approx \dfrac{C}{C} = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \tag{28}$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

Verificare:

$$\begin{cases} x_1 + Cx_2 = 1 + C \approx C & (\mathrm{E}_1) \\ x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2 & (\mathrm{E}_2) \end{cases} \tag{29}$$

Relația (29) implică faptul că soluția (28) a sistemului liniar (22), obținută prin metoda lui Gauss cu pivotare totală, este acurată.