curs 1

BIBLIOGRAFIE

Analiza matematică de Radu Niculescu

Analiza matematică de Nicu Boboc - Vol 1 și 2

Corpul numerelor reale

Corp ordonat - relație de ordine

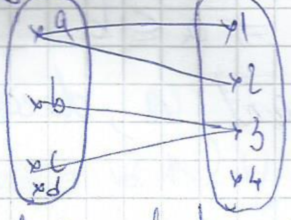
Unica structură de corp ordonat - oricare 2 corpuri ordonate sunt izomorfe între ele

Elemente de teorie a mulțimii

Def: O submulțime $R \subset X \times Y$ (produs cartezian) se numește relație. Dacă $(x, y) \in R$ notăm xRy

ex: funcțiile

$R \subset X \times X$



Def: O relație $R \subset X \times X$ se numește 1) reflexivă dacă xRx $\forall x \in X$; 2) simetrică dacă $xRy \Rightarrow yRx$, $\forall x, y \in X$; 2') antisimetrică dacă xRy și $yRx \Rightarrow x = y$; 3) tranzitivă dacă xRy și $yRz \Rightarrow xRz$. (ex: $3 < 5$, $5 < 9 \Rightarrow 3 < 9$)

Dacă relația R verifică 1 și 3 se numește relație de preordine. Dacă verifică 1, 2 și 3 se numește relație de echivalență. Dacă verifică 1, 2', 3 se numește relație de ordine (ordonează elementele unei mulțimi).

ex: rel de ordine $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(P(X), \subset)$
totală → ; nu e totală divizibilitate ; nu

rel. de echivalență $\equiv$, paralelism, identitate, $\mathbb{Z}$ $a \equiv b$ (modulo n)
separare ... $(x = x)$ ... $(\Leftrightarrow)$ $n \mid a - b$

rel de preordine $(\mathbb{Z}, |)$

$2 | -2$

$-2 | 2$

$\mathbb{R}^n = \overset{n}{\underset{i=1}{X}} \mathbb{R} \to x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

(produs cartezian de la $i = \overline{1,n}$)

R1) Relația de ordine pe componente — nu

$x \le y \iff x_i \le y_i, \ \forall i = \overline{1,n}$

R2) Relația de ordine lexicografică — totală

$x < y$ dacă $x_1 < y_1$ sau $x_1 = y_1$ și $x_2 < y_2$ sau

$x_1 = y_1, x_2 = y_2$ și $x_3 < y_3$ sau

$x_1 = y_1, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$ și $x_n < y_n$

Def: O relație de ordine R se numește totală dacă $\forall x, y \in X \Rightarrow x < y$ sau $y < x$.

(X, R) o mulțime cu rel de ordine se numește ordonată

Pt o mulțime cu elementul $A \subseteq X$, b este un majorant al mulțimii A dacă $\forall a \in A \Rightarrow a \le b$

Pt o mulțime $A \subset X$, i majorant A, dacă 1) $\forall b, c \Rightarrow b \le c$

2) $\forall c$ a.î. $c \ge a \ \forall a \in A \Rightarrow a \le c$

$a, b \in \mathbb{N}$

$2, 3$

$\sup \{2, 3\} = 6$
(suprem)

$(A_i)_{i \in I} \in X$

$A_i \subset B, \forall i \in I$

$B = \bigcup_{i \in I} A_i$

Def: O mulțime A se numește finită dacă $\exists n \in \mathbb{N}$ și $f: A \to \{0, 1, \ldots, n\}$ bijectivă sau $A = \emptyset \iff \forall f: A \to A$ bij $\Rightarrow f$ este surjectivă.

$\iff \forall f: A \to A$ surjectivă $\Rightarrow f$ este injectivă

Def: A o.n. infinită dacă $\exists f: A \to A$ injectivă și ne surjectivă.

($\Leftrightarrow$ $f: \mathbb{N} \to A$ injectivă) orice mulțime inf. cuprinde o copie a mulțimii nr. naturale

$A \sim B$ (sau au același cardinal) $\Leftrightarrow \exists\, f: A \to B$ bijectivă

$A < B \Leftrightarrow \exists\, f: A \to B$ injectivă

O ~~funcție~~ mulțime se numește numerabilă dacă e bijecție cu $\mathbb{N}$ și dacă e bijecție cu $\mathbb{R}$.

Obs! $X < P(X)$, $f: X \to P(X)$, $f(a) = \{a\}$

$X \not\sim P(X)$

Presupunem că $\exists\, f: X \to P(X)$ bijectivă și $A = \{a \in X \mid a \notin f(a)\}$

$\exists\, b \in X$ a.î. $A = f(b)$, Dacă $b \in A = f(b) \Rightarrow b \notin f(b)$

dacă $b \notin A = f(b) \Rightarrow b \in f(b)$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, $f(n) = n+1$

$\mathbb{N} \overset{\text{bijecția}}{\sim} 2\mathbb{N}$ $\quad f(n) = 2n$

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}^*)$ $\quad f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} - 1)$ $\quad f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ -2n-1, & n < 0 \end{cases}$

Reuniunea a 2 mulțimi numerabile e o mulțime numerabilă.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup\limits_{n \geq 0} (\mathbb{N} \times \{n\})$

reuniune de la $n \geq 0$ între $\mathbb{N}$ produs cartezian cu elementul $\{n\} \in \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n, m) = 2^n(2^m - 1) - 1$

$\mathbb{N}^3 \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{N}^3 = \underset{\underset{\mathbb{N}}{\wr}}{\mathbb{N}^2} \times \underset{\underset{\mathbb{N}}{\wr}}{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}$

$\mathbb{Q}_+ \sim \mathbb{N}$ $\quad f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ surjectivă $f(m, n) = \frac{m}{n}$

$(0,1) \sim (a,b)$, $a<b$

$f(x) = (b-a)x + a$

$f(0) = a$

$f(1) = b$

$(0,1) \sim (0,\infty)$

$f(x) = \frac{1}{x} - 1$

$(0,+\infty) \sim \mathbb{R}$

$\leftarrow$ $f(x) = e^x$

$(0,1) \overset{\subset}{\sim} (0,1]$

$\quad\quad\quad\quad \overset{\cap}{(0,2)}$

<u>Teorema Cantor-Bernstein</u>: Dacă $\exists$ o funcție $f: A \to$ injectivă și $\exists$ $g: B \to A$ bijectivă $\Rightarrow \exists h: A \to B$ bijectivă

$f: (0,1] \to (0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \\ x & x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$(0,1] = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup (0,1] \setminus B$

1) $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$ $\quad\quad$ $\mathbb{R} \sim P(\mathbb{R})$

2) $\mathbb{R} \not\sim \mathbb{N}$

2) Pp. că $\exists$ $f: \mathbb{N}^* \to (0,1)$ bijectivă

$f(1) = 0, a_1^1 a_1^2 \ldots a_n^1 \ldots$

$f(2) = 0, a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \ldots$

$f(n) = 0, a_1^n a_2^n \ldots a_n^n \ldots$

$\exists b_1 \in \{1, \ldots, 8\}$ a.î. $b_1 \neq a_1$

$\exists b_n \in \{1, \ldots, 8\}$ a.î. $b_n \neq a_n^n$

$x = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \notin f(n)$

3) $(0,1)^2 \sim (0,1)$

$x \in (0,1)$ $\quad x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$

$y \in (0,1)$ $\quad y = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$

$\quad\quad z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \ldots$

$x < z < y$

Șiruri de numere reale

Def: Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ o mulțime numărabilă. Se numește șir de nr reale, o funcție $f: A \to \mathbb{R}$.

Notație: $\forall n \in A$, $f(n) = x_n$

Vom scrie $(x_n)_{n \in A}$ (sau $(x_n)_n$, dacă A se subânțelege)

Obs! În general $A = \mathbb{N}$ sau $A = \mathbb{N}^*$.

Vom scrie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sau $(x_n)_{n \geq 0}$ sau $(x_n)_n$) în cazul $A = \mathbb{N}$ și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ (sau $(x_n)_{n \geq 1}$ sau $(x_n)_n$) în cazul $A = \mathbb{N}^*$.

Def: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și fie $l \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul x_n are limita l dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - l| < \varepsilon$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$).

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n > \varepsilon$ ($\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$).

Spunem că șirul $(x_n)_n$ are limita $-\infty$ dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $x_n < -\varepsilon$ (notăm $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$).

Șiruri
- cu limită
  - cu limita finită (convergente)
  - cu limita $\pm\infty$ (divergente)
- fără limită (divergente)

① Arătați că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ (cu definiția).

Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, avem $|x_n - 0| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon > 0$. Căutăm $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $|x_n - 0| < \varepsilon$

$|x_n - 0| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ și obținem concluzia

$\square$

(sfârșitul dem)

Criteriul raportului pentru șiruri cu termeni (strict) pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+^* = (0,\infty)$ cu proprietatea că $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0,\infty)$

1) Dacă $l<1$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2) Dacă $l>1$ atunci $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

3) Dacă $l=1$ atunci criteriul nu decide.

② Fie $a>0$ și $x_n = n a^n$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Determinați $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Sol: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{n a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} a$

caz I $a>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

caz II $a<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

caz III $a=1 \Rightarrow$ șirul devine $x_n = n$, deci $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ $\square$

Criteriul radicalului pentru șiruri cu termeni (strict) pozitivi

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}_+^*$ a.î. $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in [0,\infty]$. Atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ și în plus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

③ Arătați că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. $\boxed{\sqrt[1]{x} = x}$

Sol: Fie $x_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \xrightarrow{\text{C. radicalului}} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$ $\square$

Temă ③ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

Lema Stolz - Cesaro

Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de numere reale cu proprietățile: a) $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

b) $(b_n)_n$ este strict crescător și nemărginit

c) $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$

Atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ și, în plus, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$.

④ Determinați:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

a) Fie $a_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$

$b_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ $\square$

b) (Indicație)

$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} \underset{\text{limită}}{\to} e^{-1} = \frac{1}{e}$, $\ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \ln \sqrt[n]{n!} - \ln n = \ln(n!)^{\frac{1}{n}} - \ln n$

$= \frac{1}{n}\ln n! - \ln n = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n}{n} - \ln n$

$= \frac{\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n - n\ln n}{n}$ (S.-C.)

$= -1$ $\square$

Criteriul lui Weierstrass

Orice șir de numere reale monoton și mărginit e convergent.

Obs! Reciproca este falsă.

exemplu: Fie $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că:

a) $(x_n)_n$ nu este monoton

b) $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ ($(x_n)_n$ este convergent)

Sol:

a) $x_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$

$x_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

$x_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$

Avem $\begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_2 > x_3 \end{cases}$ Deci $(x_n)_n$ nu este monoton.

b)

$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{\to 0} \le \underbrace{x_n}_{\to 0} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow[\text{clestelui}]{\text{criteriul}} \lim_{n \to \infty} x_n = 0$$

sau

$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\square$

Propoziție: Orice șir de numere reale convergent este mărginit.

⑤ Fie $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Arătați că $(x_n)_n$ este convergent.

b) Deduceți că $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \infty$.

c) Deduceți că $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

Sol: a) $x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \ln n\right)$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$

Fie $f : [n, n+1] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x \quad (n \ge 1)$

f derivabilă pe $[n, n+1] \xrightarrow{\text{T. Lagrange}} \exists c \in (n, n+1)$ a.î.

$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{f(n+1) - f(n)}{n+1-n} = \ln(n+1) - \ln n.$

$c \in (n, n+1) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{n}$

$\frac{1}{c} = \ln(n+1) - \ln n$

Deci $\frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0$

Asadar $(x_n)_n$ e strict descrescător $(*)$

Prin urmare $(x_n)_n$ este mărginit superior.

$(x_n \le \underbrace{x_1}_{1}, \forall n \in \mathbb{N}^*)$

Pentru fiecare $k \in \{1, \dots, n\}$ definim $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

Ca mai sus (T. Lagrange) există $c \in (k, k+1)$ a.î. $f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{f(k+1) - f(k)}{\cancel{k}+1-\cancel{k}} = \ln(k+1) - \ln k$

$c \in (k, k+1) \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$

$\forall k = \overline{1, n}$

Avem $\frac{1}{2} < \ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{1}$

$\frac{1}{3} < \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$

$\dots\dots\dots$

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$

"+"

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \dots + \ln(n+1) - \cancel{\ln n} <$

$< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \underbrace{\ln 1}_{0} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) - \ln n$

Avem $\ln(n+1) - \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$

Deci $\underbrace{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{>0,\ \frac{n+1}{n} > 1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Asadar $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. $(x_n)_n$ e mărginit inferior, adică mărginit.

Asadar $(x_n)_n$ este convergent. $\square$

Obs! Limita șirului de mai sus se notează cu c (sau γ) și se numește constanta lui Euler.

$$c = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} - \ln n\right)$$

$$c \simeq 0,57$$

12.10.2016
curs 2

Corpul numerelor reale

Def: $(S,+,\cdot,\leq)$ s.n. corp ordonat dacă

1) $(S,+,\cdot)$ e un corp comutativ
2) $(S,\leq)$ spațiu total ordonat
   $(\forall x,y\in S \Rightarrow x\leq y$ sau $y\leq x)$
3) Dacă $x\leq y$ și $z\in S \Rightarrow x+z\leq y+z$
   Dacă $x\leq y$ și $z\geq 0 \Rightarrow xz\leq yz$

Def: Fie $(S,+,\cdot,\leq)$ și $(R,\oplus,\odot,\leq)$ două corpuri ordonate. O funcție $\varphi: S\to R$ se numește morfism de corpuri ordonate dacă

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)\oplus\varphi(y)$ $\forall x,y\in S$
2) $\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\odot\varphi(y)$
3) φ injectivă $\Leftrightarrow \varphi(1_S)\neq 0_R$ (el. neutru S; el. neutru R)
4) Dacă $x,y\in S$ și $x\leq y \Rightarrow \varphi(x)\leq\varphi(y)$

Dacă φ e bijectivă spunem că este un izomorfism de corpuri ordonate

$\varphi^{-1}: R\to S$ e un morfism de corpuri ordonate.

ex: $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$ $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}],+,\cdot,\leq)$, $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a-b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$

Propoziție: Fie $(S,+,\cdot,\leq)$ un corp ordonat. Atunci pt $\forall x,y,z \in S$

1) dacă $x \geq 0$ sau $x \leq 0$

2) dacă $x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

3) $x \geq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow x+y \geq 0$

3) $x \leq 0$ și $y \leq 0 \Rightarrow x+y \leq 0$

4) $x \geq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

$x \leq 0$ și $y \geq 0 \Rightarrow xy \leq 0$

$x \leq 0$ și $y \leq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

5) $x^2 \geq 0$

6) $1 > 0$, $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

7) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ... $x_n \geq 0$ și $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow$ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

$(S,+,\cdot,\leq)$ corp ordonat $n \in \mathbb{N}$

$0 \cdot x = 0$

$1 \cdot x = x$

$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{de } n \text{ ori}}$

Dacă $(S,+,\cdot,\leq)$ e un corp ordonat

$0 \leq 1$

$1 \leq 2 \cdot 1$ $\Rightarrow n \cdot 1 < (n+1) \cdot 1$

Def: Un corp $(S,+,\cdot)$ are caracteristica 0 dacă $nx \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ și $\forall x \in S$.

Un corp are caracteristica n, dacă n e cel mai mic nr natural $(n \neq 0)$ a.î. $nx = 0$, $\forall x \in S$

Def: Dacă $(S,+,\cdot,\leq)$ corp ordonat atunci $\exists$ morfism de corpuri ordonate. $\varphi: \mathbb{Q} \to S$, $\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = (p \cdot 1)(q \cdot 1)^{-1}$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \\ \varphi(1) = 1 \\ \varphi(n \cdot 1) = n \cdot 1_S \\ \varphi(-n) = -\varphi(n) = (-n) \cdot 1_S \end{cases}$$

$(S, +, \cdot, \leq)$ corp ordonat

$A, B \subset S$ $\quad x \in S$ $\quad$ ex: $2\mathbb{N}$ = nr nat. pare

$x + A = \{x + a \mid a \in A\}$ $\quad$ $1 + \mathbb{N} = \mathbb{N}^*$

$x \cdot A = \{x \cdot a \mid a \in A\}$ $\quad$ $1 + (0, 1) = (1, 2)$

$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

$A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$

Dacă mulțimea A este majorată $\Leftrightarrow$ e mărginită superior și $\exists$ supremul mulțimii A, $\sup(x + A) = x + \sup A$.

Dacă $x > 0$ $\quad \sup(x \cdot A) = x \cdot \sup A$

$\inf(x \cdot A) = x \cdot \inf A$

$x < 0$ $\quad \sup(x \cdot A) = x \cdot \inf A$

3) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

$\inf(A+B) = \inf A + \inf B$

ex: $(A = (2, 3)$ $\quad x = 1$ $\quad$ $A + 1 = (3, 4)$

$\sup A = 3$ $\quad$ $\sup(1 + A = 4$

$y = 2$ $\quad 2A = (4, 6)$

$\sup(2A) = 6$

$A = (1, 2)$ $\quad B(2, 3)$

$A + B = (3, 5)$

Def: Un corp $(S, +, \cdot, \leq)$ ordonat se numește arhimedian dacă pt $\forall x \in S \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ a. î. $x \leq n$

Fie $(S,+,\cdot,\leq)$ atunci următoarele afirmații sunt echivalente.

1) S este arhimedian.

2) pt $\forall x\in S$ $u>0 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ a.î. $n\cdot u>x$

3) pt $\forall x>0 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ a.î. $0<\frac{1}{n}<x$

5) pt $\forall x,y\in S$ $x<y \Rightarrow \exists r\in\mathbb{Q}$
$x<r<y$

Dem $1\Rightarrow 2$
$\forall y\in S, \exists n\in\mathbb{N}$ a.î. $n\geq y$
$\forall x\in S$ $\forall$ $u>0 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ a.î. $n\cdot u\geq x$

luăm $y=x\cdot u^{-1}$

$1\Rightarrow 3$

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow \exists$ n a.î. $n>\frac{1}{x} \Rightarrow x\geq\frac{1}{n}$

$2\Rightarrow 1$ $u=1$

$3\Rightarrow 1$ $x=\frac{1}{y}$

$4\Rightarrow 1$

$y=x+1=r=\frac{n}{m}$

$x<\frac{n}{m}<x+1 \Leftrightarrow x<\frac{n}{m}=n$

$1\Rightarrow 4$
$1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3\Rightarrow 4$

pp că $x\geq 0$ $x<y$

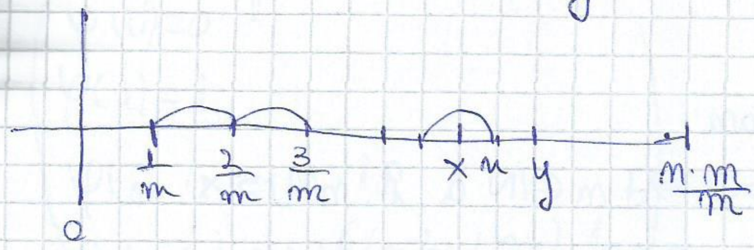
Dacă am dem 4 pt $x\geq 0$

$x_1<y_1, \exists m>-x_1$ $x_1+m>0$
$0\leq x_1+m<y_1+m$
$\Rightarrow \exists r\in\mathbb{Q}$ a.î. $x_1+m\leq r\leq y_1+m$
$\Rightarrow x_1\leq r-m\leq y_1$

$0<x<y$

~~$\exists m\in\mathbb{N}, m\neq 0$ a.î. $0<\frac{1}{m}<y-x$~~

$\exists\, m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $0 < \frac{1}{m} < y - x$



Fie $n = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{m} \leq x\}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n}{m} \leq x < y \\ \frac{n+1}{m} \geq x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{n}{m} \leq x < \frac{n+1}{m} \\ y = y - x + x > \frac{1}{m} + x \geq \frac{1}{n} + \frac{n}{m} \end{array}$$

Def: Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ se numește complet ordonat dacă pentru $\forall\, A \subset S$ mărginită superior $\exists \sup A$

Teoremă: Orice corp complet ordonat este arhimedian

Dem: presupunem prin reducere la absurd că S nu este arhimedian.

$\exists\, x \in S$ a.î. $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq x$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \mathbb{N} \text{ este mărginită superior} \\ S \text{ complet ordonat} \end{array}\right| \Rightarrow \exists \sup \mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq \sup \mathbb{N} \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \leq \sup \mathbb{N} \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq (\sup \mathbb{N}) - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \sup \mathbb{N} \leq (\sup \mathbb{N}) - 1$$

Contradicție

Teoremă: Fie $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp arhimedian și $(R, +, \cdot, \leq)$ un corp complet ordonat. Atunci $\exists!$ morfism de corpuri ordonate $\varphi : S \to R$

Dacă S e complet ordonat atunci $\Rightarrow \varphi$ e un izomorfism

$\mathbb{Q} \subset S$, $\mathbb{Q} \subset R$

$x \in S$ $\quad x - \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$

$x > \sup A \Rightarrow \exists\, r_1 \in \mathbb{Q}$

$x > r_1 > \sup A$

$\varphi(x) = \sup_{\mathbb{R}} \{ r \in \mathbb{Q} / r < x \}$

Teoremă: Fie $I_n = [x_n, y_n]$ un şir descrescator de interv din $\mathbb{R}$. Atunci $\bigcap_{n \geq 1} [x_n, y_n] \neq \emptyset$

Dem $I_n \supset I_{n+1}$, $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$

$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq \dots y_{n+1} \leq y_n \leq \dots \leq y_1$

Notăm cu $a = \sup \{ x_n / n \geq 1 \}$

$x_n \leq a \leq y_m$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$a \in \bigcap_{n \geq 1} I_n$ (aparţine intersecţiei intervalelor I_n)

$\bigcap_{n \geq 1} I_n = [\sup_{n \geq 1} x_n, \inf_{n \geq 1} y_n]$

ex: $I_n = [2 - \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n^2}]$ $\quad \bigcap I_n = [2, 3]$

Prop: $\nexists f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bijectivă

Pp că $\exists f: \mathbb{N}^* \to [a, b]$ bij, $a < b$

$\underbrace{[a, a_1]}_{J_1'} \; \underbrace{[a_1, a_2]}_{J_2'} \; \underbrace{[a_2, b]}_{J_3'}$ $\quad a < a_1 < a_2 < b$

$f(1) \in J = J_1' \cup J_2' \cup J_3'$

$\exists J_1^* = J_i'$ a.î. $f(1) \notin J_1 \subset J$

$\exists J_n \subset J_{n+1}$ a.î. $f(n) \notin J_n$

$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \dots \supset J_n$

$\exists x \in \bigcap_{n \geq 1} J_n \quad x \neq f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Obs $x > 0$ $\sqrt{x} = \sup \{ y / y^2 < x \}$

$\sqrt[n]{x} = \sup \{ y / y^n < x \}$

$x^{\frac{m}{n}} = (\underbrace{x^{\frac{1}{n}}}_{y})^m$, $x > 0$

x^y, $y \in \mathbb{R}$, $y = \sup \{ r \in \mathbb{Q} / r \leq y \}$

$x^y = \sup \{ x^r / r \leq y \}$

Fie $(x_n)_n, (y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$

1) Dacă $x_n \to a \Rightarrow$ șirul $(x_n)_n$ mărginit

2) Dacă $\left.\begin{matrix} x_n \to a \\ y_n \to b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_n + y_n \to a+b \\ x_n y_n \to a b \end{matrix}$

3) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

4) $x_n \to a$, $a \neq 0$, $\forall n, x_n \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Dem: 1) $x_n \to a$, $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$|x_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - a| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |a| + 1$

$\{x_n \mid n \geq n_1\}$ este mărginită

$\{x_1, \dots x_{n_1}\}$ finită $\Rightarrow$ este mărginită

$\Rightarrow (x_n)_n$ e mărginit

2) $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n'_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
(x_n converge la a)

$y_n \to b$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n''_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n \geq n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$

$\Rightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - a \cdot b| \leq |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|$

(x_n) e mărginit $\Rightarrow \exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$ $\forall n \geq 1$

$|x_n y_n - ab| \leq M|y_n - b| + |b||x_n - a|$

$n \geq n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow |x_n y_n - ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}(M + |b|)$

3) $x_n \to a$ $|x_n| \to |a|$

$||x| - |y|| \leq |x - y|$

$x_n \to a$, $\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow$

$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \max(x_n, y_n) = \max(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{\max(a,b)}$

$(x_n \to a, y_n \to b)$

4) $x_n \to a$ $x_n \neq 0$ $a \neq 0$

$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - x_n}{a x_n}\right| = \frac{1}{|a|} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x_n|}}_{\text{ct}} \overbrace{|a - x_n|}^{<\varepsilon}$

arătam că $\frac{1}{|x_n|}$ mărginit

$x_n \to a \quad \exists\, n_0$ a.î. $\forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow$

$\left(\varepsilon = \frac{|a|}{2}\right)$

$-\frac{|a|}{2} \leq |x_n| - |a| \leq \frac{|a|}{2} \iff \frac{|a|}{2} \leq |x_n| \leq \frac{3|a|}{2} \iff \frac{2}{3|a|} \leq \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|a|}$

$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|a|}$

$x_n \to a \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} |x_n - a| \leq \frac{2\varepsilon}{|a|^2}$

Teorema: Orice șir monoton și mărginit este convergent

Dem: Fie $(x_n)_n$ un șir crescător și mărginit

$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq M$

$a = \sup_{n \geq 1} x_n \in \mathbb{R}$ ($(x_n)_n$ este mărginit)

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $a \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$

$\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq a \leq a + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_n - a| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$

Spații metrice

$d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$

$A(x_a, y_a) \quad B(x_b, y_b)$

$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$

1) $d(A,B) = 0 \iff A = B$

2) $d(A,B) = d(B,A)$

3) $d(A,B) + d(B,C) \geq d(A,C)$

Def: Fie X o mulțime. O funcție $d: X \times X \to [0, \infty)$

s.n. distanță dacă

1) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2) $d(x,y)=d(y,x),\ \forall x,y\in X$

3) $d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)\ \forall\ x,y,z\in X$

(X,d) spațiu metric

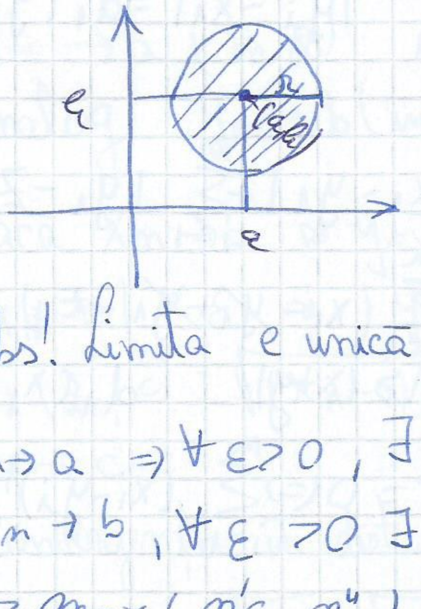
Def: Fie (X,d) spațiu metric, $(x_n)_n\subset X_n$, $a\in X$ spunem că $(x_n)_n \xrightarrow{\text{converge}} a$ și notăm $x_n\to a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ dacă $\forall\varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n\geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon \Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,a)=0$

$B(a,r)=\{x \mid d(x,a)<r\}$ „Bila de centru a și rază r"

$a\in X$, $r>0$

$A\subset X$ se numește mărginită dacă $\exists B(a,b)$ a.î. $A\subset B(a,r)$

$(\mathbb{R}^2,d)$ $B((a,b),r)=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$



Obs! Limita e unică $\begin{matrix}x_n\to a\\ x_n\to b\end{matrix} \Rightarrow a=b$

$x_n\to a \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n'_\varepsilon$ a.î. $\forall n\geq n'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$

$x_n\to b,\ \forall\varepsilon>0\ \exists n''_\varepsilon$ a.î. $\forall n\geq n''_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,b)<\varepsilon$

$n\geq \max(n'_\varepsilon,n''_\varepsilon) \Rightarrow d(a,b)\leq d(a,x_n)+d(x_n,b)<\varepsilon+$
$+\varepsilon=2\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$

$d(a,b)=0 \Rightarrow a=b$

$\mathbb{R}^n=\overset{n}{\underset{i=1}{\times}}\mathbb{R}$ $\quad x\in\mathbb{R}^n \quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\dots,x_n+y_n)$

$+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$\cdot:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

$$\begin{cases} 1) & a(x+y) = ax+ay \\ 2) & (a+b)x = ax+bx \\ 3) & a(bx) = (ab)x \\ 4) & 1x = x \\ 5) & (\mathbb{R}^n, +) \text{ grup comutativ} \end{cases}$$

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

("distanta infinit")

Dem: 1) $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i = \overline{1,n}$
$\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x = y$

2) $d_1(\quad = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x)$

$|x| = |-x|$

3) $d_1(x,y) + d_1(y,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_1 - y_1| + \sum_{i=1}^{n} |y_1 - z_1| =$

$= \sum_{i=1}^{n} (|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|) \geq \sum_{i=1}^{n} |x_1 - \cancel{y_1} + \cancel{y_1} - z_1|$

$|x| + |y| \geq |x+y|$ $\qquad$ $= d_1(x,z)$

Dem: 1) $d_2(x,y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x_i = y_i, \forall i = \overline{1,n} \Leftrightarrow x = y$

2) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d_2(y,x)$

3) $d_2(x,y) + d_2(y,z) \geq d_2(x,z)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2}$$

$a_i = x_i - y_i$
$b_i = y_i - z_i$ $\quad$ atunci $a_i + b_i = x_i - z_i$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^2} \quad \Big| \ ()^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(a_i+b_i)^2}_{= a_i^2+b_i^2+2a_ib_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \cancel{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}$$

$$()^2 \Leftrightarrow \cancel{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \cancel{4}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \quad \text{Inegalitatea Cauchy-B.}$$

ex1) $n=2$ $\quad z_n = (x_n, y_n) \quad z_n \overset{?}{\to} c = (a, b)$

$z_n \xrightarrow{d_1} c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_2(z_n, c) < \varepsilon$

$$d_2(z_n, c) = \sqrt{(x_n-a)^2 + (y_n-b)^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{(x_n-a)^2 + (y_n-b)^2} \geq |x_n - a|$$

$\Rightarrow x_n \to a$ (în $\mathbb{R}$)

Analog $\quad y_n \to b$ (în $\mathbb{R}$)

Dacă $x_n \to a$ și $y_n \to b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ rang n_ε a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ și $|y_n - b| < \varepsilon$.

$$d_2(z_n, c) = \sqrt{(x_n-a)^2 + (y_n-b)^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2} = \sqrt{2\varepsilon^2} = \varepsilon\sqrt{2}$$

$z_n \to c$

Convergența în distanța 2 $\Leftrightarrow$ cu convergența pe componente

$$\left(\frac{n}{2n+1}, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \frac{n^2}{n^2+1}\right) \xrightarrow{d_2} \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

$$\underbrace{\max_{i=1}^{n} |x_i - a_i|}_{= d_\infty(x,a)} \leq \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-a_i)^2}}_{= d_2(x,a)} \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|}_{= d_1(x,a)} < \underbrace{n \cdot \max_{i=1}^{n} |x_i - a_i|}_{= n \cdot d_\infty(x,a)}$$

Am arătat că $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 < n d_\infty$

Datorită acestei relații $x_n \xrightarrow{d_\infty} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_1} a \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_2} a$

(ex2) Fie X o mulțime (card $|X| \geq$) $d: X \times X \to [0, \infty)$

$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ distanța discretă.

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(\cancel{x}, y) = d(y, x)$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

cazul 1 $x = z$ $d(x,z) = 0$

cazul 2 $x \neq z \Rightarrow y = x$ sau $y \neq x$

$y \neq x$

$\underbrace{d(x,y)}_{1} + \underbrace{d(y,z)}_{\geq 0} \geq \underbrace{d(x,z)}_{1}$

$x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\forall n \geq n_{\frac{1}{2}}$ $d(x_n, a) < \frac{1}{2} \Rightarrow d(x_n, a) = 0$, $x_n = a$

25.10.2016
seminar 2

Spații metrice

Def: 1) Fie $X \neq \emptyset$. O funcție $d: X \times X \to \mathbb{R}$ s.n. distanță (sau metrică) pe X dacă are proprietățile.

a) $d(x,y) \geq 0$ $\forall x, y \in X$

b) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in X$

d) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\forall x, y, z \in X$

inegalitatea triunghiului.

2) Dacă $X \neq \emptyset$ și d este o metrică pe X numim perechea (X, d) spațiu metric.

ex: Fie $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1) $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_2(\underset{(x_1,x_2)}{x}, \underset{(y_1,y_2)}{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

distanța euclidiană

2) $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_1(\underset{(x_1,x_2)}{x}, \underset{(y_1,y_2)}{y}) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$

3) $d_\infty : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$

(d_2, d_1, d_∞) distanțe pe $\mathbb{R}^2$

I. Arătați că:

a) d_∞ e distanță pe $\mathbb{R}^2$

b) $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* = (0,\infty)$ a.î. $\alpha d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \beta d_2(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

c) $\exists\ \alpha, \beta \in (0,\infty)$ a.î. $\alpha d_1(x,y) \le d_\infty(x,y) \le \beta d_1(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

Soluție:

a) 1) $d_\infty(x,y) \ge 0$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$ $\quad x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$

$$\left.\begin{array}{l} |x_1-y_1| \ge 0 \\ |x_2-y_2| \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \ge 0$$

2) $d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$d_\infty(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = 0 \Leftrightarrow$

$|x_1-y_1| \ge 0$

$|x_2-y_2| \ge 0$

$\Leftrightarrow |x_1-y_1| = 0$ și $|x_2-y_2| = 0 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ și $x_2 = y_2 \Leftrightarrow x = y$

3) $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} = \max\{|y_1-x_1|, |y_2-x_2|\}$

$= d_\infty(y, x)$

4) $\underbrace{d_\infty(x,z) \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)}_{//}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$

$d_\infty(x,z) = \max\{|x_1 - z_1|, |x_2 - z_2|\} = \max\{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|, |x_2 - y_2 + y_2 - z_2|\}$ (1)

$|x_1 - z_1| = |x_1 - y_1 + y_1 - z_1| \le |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|$

$|x_2 - z_2| = |x_2 - y_2 + y_2 - z_2| \le |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|$

(1) $\le \max\{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|, |x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|\}$

$\le \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} + \max\{|y_1 - z_1|, |y_2 - z_2|\}$

$\le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$

b) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x-y_2|^2}$

$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

notăm $|x_1 - y_1| = a$ și $|x_2 - y_2| = b$

$d_2(x,y) = \sqrt{a^2+b^2}$ $a, b \ge 0$

$d_1(x,y) = a + b$

Avem de arătat că $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ a.î.

$\alpha\sqrt{a^2+b^2} \le a+b \le \beta\sqrt{a^2+b^2}$

$a^2+b^2 \le (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} \le a+b$

alegem $\alpha = 1$

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \ge 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a+b \le \sqrt{a^2+b^2}$

alegem $\beta = \sqrt{2}$ $\square$

c) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

notăm $|x_1 - y_1| = a$ și $|x_2 - y_2| = b$, $a, b \ge 0$

$\Leftrightarrow d_1(x,y) = a + b$

$d_\infty(x,y) = \max\{a, b\}$

$\max\{a,b\} \leq a+b$

alegem $\beta = 1$

$a+b \leq 2\max\{a,b\} \quad | :2 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(a+b) \leq \max\{a,b\}$

alegem $\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) \leq \max\{a,b\} \leq a+b$ □

Limitele extreme ale unui șir de nr reale

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $x \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

Def: Spunem că x este punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă există un subșir $(x_{n_k})_k \subseteq (x_n)_n$ cu proprietatea că $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Notație: $\mathcal{L}((x_n)_n) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x$ punct limită a lui $(x_n)_n\}$

Obs: Dacă $(x_n)_n$ e mărginit atunci $\mathcal{L}((x_n)_n) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir mărginit.

Def: 1) Se numește limita superioară a șirului $(x_n)_n$, marginea superioară a mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$.

Notăm $\limsup\limits_{n\to\infty} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup \mathcal{L}((x_n)_n)$

2) Se numește limita inferioară a șirului $(x_n)_n$, marginea inferioară a mulțimii $\mathcal{L}((x_n)_n)$

Notăm $\liminf\limits_{n\to\infty} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf \mathcal{L}((x_n)_n)$

Propoziție: 1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

Șirul $(x_n)_n$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, caz în care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

II. Determinați $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ și $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ precizând dacă $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, unde:

a) $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Soluție: a) $x_{2n} = \dfrac{1+(-1)^{2n}}{2} + (-1)^{2n} \dfrac{2n}{4n+1}$

$x_{2n} = 1 + \dfrac{2n}{4n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$x_{2n+1} = \dfrac{1+(-1)^{2n+1}}{2} + (-1)^{2n+1} \dfrac{2n+1}{2(2n+1)+1}$

$= \dfrac{1+(-1)^{2n}(-1)}{2} + (-1)^{2n}(-1) \dfrac{2n+1}{4n+3}$

$= \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}}{2} - \dfrac{2n+1}{4n+3} = -\dfrac{2n+1}{4n+3}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = -\dfrac{1}{2}$

$L((x_n)_n) = \left\{-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right\}$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \dfrac{3}{2} \neq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

b) • $x_{3n} = \sin \dfrac{\cancel{3}n\pi}{\cancel{3}} = \sin n\pi = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = 0$

• $x_{3n+1} = \sin \dfrac{(3n+1)\pi}{3} = \sin\left(\dfrac{\cancel{3}n\pi}{\cancel{3}} + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(n\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$= \underbrace{\sin n\pi \cos\dfrac{\pi}{3}}_{=0} + \sin\dfrac{\pi}{3} \cos n\pi = \boxed{0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}(-1)^n}$

$\rightarrow x_{3(2n)+1} = x_{6n+1} = (-1)^{2n} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow x_{3(2n+1)+1} = x_{6n+4} = (-1)^{2n+1} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_{6n+4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

• $X_{3n+2} = \sin\frac{(3n+2)\pi}{3} = \sin\left(n\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$

$X_{3n+2} = \underbrace{\sin n\pi}_{0} \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\cos n\pi = (-1)^n \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= (-1)^n \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}$

$X_{3(2n)+2} = X_{6n+2} = (-1)^{2n}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_{6n+2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$X_{3(2n+1)+2} = \dots = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathcal{L}((X_n)_n) = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} X_n$

Temă: c) $X_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

d) $X_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos\frac{n\pi}{2}$

e) $X_n = \frac{2 + (-1)^n}{1 + n^{(-1)^n}} + \sin\frac{n\pi}{2}$

f) $X_n = \cos\frac{n\pi}{3}$

g) $X_n = \frac{n \cdot \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

26.10.2016
curs 4

Spații metrice

$d: X \times X \to [0, \infty)$ distanță

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$

3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $\forall x, y, z \in X$

$(x_n)_n \subset X$

$x_n \to a \in X$ dacă pt $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$\Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow d(x_n, a) \to 0$

$(x_n)_n$ s.n. şir Cauchy dacă pt $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. pt $\forall n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Dem: 1) Orice şir convergent este şir Cauchy.

$x_n \to a$

$n, m \geq n_\varepsilon \quad d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

2) Orice şir Cauchy este mărginit.

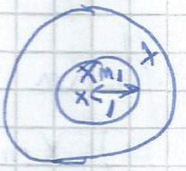
$B(a, \varepsilon) = \{x \mid d(a, x) < \varepsilon\}$

A mărginită dacă $\exists a \in X, r > 0$ a.î. $A \subset B(a, r)$

$(x_n)_n$ şir Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Luăm $\varepsilon = 1$, $\forall m, n \geq n_1 \Rightarrow d(x_{n_1}, x_m) < 1 \Leftrightarrow x_m \in B(x_{n_1}, 1)$

Luăm $r = 1 + \max\limits_{k=1}^{n_1} d(x_k, x_{n_1}) \Rightarrow \forall n \; x_n \in B(x_{n_1}, r)$



3) Orice şir convergent e mărginit.

($\Rightarrow$ din 1) şi 2))

4) Orice şir Cauchy care are un subşir convergent este convergent.

Fie $(x_n)_n \subset X$ şir Cauchy şi fie $(x_{n_k})_k$ convergent, $x_{n_k} \to a$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists k_\varepsilon$ a.î. $k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$

$n_k < n_{k-1} \quad n_k \to \infty \quad \exists k_0$ a.î. $\forall k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_\varepsilon$

Luăm $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_{k_0}})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_{n_{k_0}}, a)}_{<\varepsilon} \leq 2\varepsilon$

$k \geq k_0$

Def: Un spaţiu metric în care orice şir Cauchy e convergent s.n. complet.

$(\mathbb{R}, d) \quad d(x,y) = |x-y|$

$((0,2), d) \quad \left(x_n = \frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$

$x_n \to 0$ în $\mathbb{R} \Rightarrow$ este Cauchy

$(x_n)_n$ nu e convergent în $(0,2)$

Considerăm un șir de nr reale $x_n = \frac{1}{n^2} + \sin n\frac{\pi}{2}$

$n = 2k \quad x_{2k} = \frac{1}{4k^2} + \sin k\pi \to 0$

$n = 4k+1 \quad x_{4k+1} = \frac{1}{(4k+1)^2} + \sin\frac{(4k+1)\pi}{2} \to 1$

$n = 4k+3 \quad x_{4k+3} \to -1$

$0, -1, 1$ puncte limită ale șirului $(x_n)_n$ (la care converge șirul)

$1 = \limsup_{n\to\infty} x_n$

$-1 = \liminf_{n\to\infty} x_n$

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, notăm $U_n = \sup_{k \geq n} x_k$ și $v_n = \inf_{k \geq n} x_k$

$U_n \geq U_{n+1} \geq \underline{v_{n+1}} \geq v_n$

$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} U_n = \inf_{n\geq 1} U_n \Rightarrow$ limita superioa[ră]

$\liminf_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \sup_{n\geq 1} v_n \Rightarrow$ limita inferioa[ră]

Prop: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ mărginit și $a = \overline{\lim}\, x_n$, $a \in \mathbb{R}$

și $\exists\, x_{n_k} \to a$.

Dem: $k=1 \quad a = \inf_{n\geq 1} U_n \Rightarrow \exists\, m_1$ a.î. $a \leq U_{m_1} < a+1$ (1)

$U_{m_1} = \sup_{k \geq m_1} x_k \Rightarrow \exists\, n_1 \geq m_1$ a.î. $U_{m_1} - 1 < x_{n_1} \leq U_{m_1}$ (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow a - 1 < U_{m_1} - 1 < x_{n_1} \leq U_{m_1} < a+1 \Rightarrow$

$|x_n - a| < 1$

Presupunem că am găsit un subșir x_{n_ℓ} a.î. $|x_{n_\ell} - a| < \frac{1}{\ell}$ și $n_{\ell+1} > n_\ell$, $\ell = \overline{1,k}$.

Dem. $a = \inf_{n \geq 1} U_n$ și U_n descresc. $\Rightarrow \exists\, m_{k+1} > n_{k+1}$ $a \leq U_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1}$ (3)

$U_{m_{k+1}} = \sup_{l \geq m_{k+1}} x_l \Rightarrow n_{k+1} \geq m_k$ a.î. $U_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < x_{n_k} \leq U_{m_{k+1}}$ (4)

Din (3), (4) $\Rightarrow a - \frac{1}{k+1} \leq U_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq U_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow |x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$ $\quad n_{k+1} \geq m_{k+1} > n_k$

<u>Teoremă</u>: Orice șir mărginit are un subșir convergent.

<u>Dem</u>: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir mărginit și $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$. Atunci $a \in \mathbb{R}$. Din prop. anterioară $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to a$.

<u>Teoremă</u>: Spațiul metric $(\mathbb{R}, d)$ (unde $d(x,y) = |x-y|$) este complet.

<u>Dem</u>: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir Cauchy. Atunci șirul $(x_n)_n$ e mărginit. Din Teorema 1 $\Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to a$ (există subșir convergent la a) $\Rightarrow (x_n)_n$ e convergent.

Fie $(x_n)_n$, $x_n = \frac{n^3}{2n^3+1} + \left\{\frac{n}{3}\right\}$

Dacă $n = 3k \Rightarrow \left\{\frac{n}{3}\right\} = 0 \Rightarrow x_{3k} \to \frac{1}{2}$

$n = 3k+1 \Rightarrow x_{3k+1} = \frac{(3k+1)^3}{2(3k+1)^3+1} + \underbrace{\left\{\underbrace{k}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{1}{3}\right\}}_{=\frac{1}{3}} \to \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$x_{3k+2} \to \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$ $\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \frac{1}{2}$

$\overline{\lim}\, x_n = \lim_{n\to\infty} U_n$ $\quad U_n = \sup_{k \geq n} x_k$

$U_n \geq U_{n+1}$

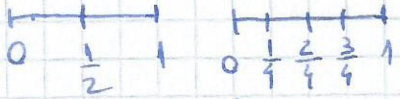
$U_n = \sup_{k \geq 3n} \frac{k^3}{2k^3+1} + \left\{\frac{k}{3}\right\} = \max\left(\sup_{3n+3k} x_{3n+3k}, \sup_{3n+3k+1} x_{3n+3k+1}, \sup_{3n+3k+2} x_{3n+3k+2}\right)$

Fie $y_n = \frac{n^3}{2n^3+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n^3+1-1}{2n^3+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n^3+1}\right) \nearrow \frac{1}{2}$

Exemplu de șir din $(0,1)$ a.î. punctele limită să formeze $(0,1)$.

$$\begin{cases} u_{3n} = \max\left\{0+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{2}+\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n^3+1}\right) \text{ șir crescător} \end{cases}$$

$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \dots, \frac{7}{8}, \dots \; 0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \dots \frac{2^n-1}{2^n}, \dots$



$\exists\, x_{n_\ell} \to \frac{k}{2^m}, \; \forall \frac{k}{m}$

Prop: Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ șir mărginit și $a \in \mathbb{R}$. Atunci

$a = \overline{\lim_{n\geq 1}}\, x_n \iff$ 1) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n < a+\varepsilon$

2) $\exists\, (x_{n_k})_k$ a.î. $x_{n_k} \to a$

Dem: $a = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \,.\, \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$

$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$

$n = n_\varepsilon \qquad u_{n_\varepsilon} = \sup_{k \geq n_\varepsilon} x_k < a+\varepsilon \Rightarrow x_k < a+\varepsilon, \; \forall k \geq n_\varepsilon$

Din 1) $\Rightarrow n \geq n_\varepsilon \Rightarrow u_n = \sup_{k \geq n \geq n_\varepsilon} x_k \leq a+\varepsilon$

$\exists\, x_{n_k} \to a \Rightarrow u_n \geq a \Rightarrow \exists\, u_n \geq \underset{n_k \geq n}{x_{n_k}}, \; \forall k \Rightarrow u_n \geq a$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow a \leq u_n \leq a+\varepsilon, \; \forall n \geq n_\varepsilon \iff u_n \to a$ (limita superioară e)