Exerc.: Fie L, M, S, W mulțimi nevide, ai $S \subseteq L$, $W \subseteq M$; $(L, \vee, \wedge)$ și $(M, \sqcup, \sqcap)$ sunt latici (respectiv $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(M, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ $\Rightarrow$ latici mărginite). $S \to$ sublat. (mărg) a lui L, $W \to$ sublat (mărg.) a lui M iar $f: L \to M$ morfism de latici (mărginite)

Dem că:

(1) $f(L) \to$ sublatice (mărg) a lui M,

(2) mai general: $f(S) \to$ sublat (mărg.) a lui M

(3) $f^{-1}(W) \to$ sublatice (mărg.) a lui L

caz $W = M$: trivial: $f^{-1}(M) = L$

Rez:

(1) $L \neq \emptyset \Rightarrow f(L) \neq \emptyset$. Fie $x, y \in f(L) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, a, b \in L)\ f(a) = x,\ f(b) = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \sqcup y = f(a) \sqcup f(b) = f(a \vee b) \in f(L) \\ x \sqcap y = f(a) \sqcap f(b) = f(a \wedge b) \in f(L) \end{cases} \Rightarrow f(L)$ - sublat a lui M (este închisă la capetele lui M)

Pt latici mărginite: $\bot = f(0) \in f(L)$, $\top = f(1) \in f(L) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(L) \to$ sublat mărg. a lui M

(2) $S \neq \emptyset \Rightarrow f(S) \neq \emptyset$ Fie $x, y \in f(S) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, a, b \in S),\ f(a) = x,\ f(b) = y$

$a \vee b, a \wedge b \in S$ (sublat.)

$\begin{cases} x \sqcup y = f(a) \sqcup f(b) = f(a \vee b) \in f(S) \\ x \sqcap y = f(a) \sqcap f(b) = f(a \wedge b) \in f(S) \end{cases} \Rightarrow f(S) \to$ sublat a lui M

Pt latici mărg.: $0, 1 \in S \Rightarrow \begin{cases} \bot = f(0) \in f(S) \\ \top = f(1) \in f(S) \end{cases} \Rightarrow f(S) \to$ sublat. mărg. a lui M