

Tehnici de Optimizare

Curs 1

Andrei Pătrașcu

andrei.patrascu@fmi.unibuc.ro

Departament Informatică
Universitatea din București

Orar

- ▶ 2 ore curs săptămânal
- ▶ 2 ore seminar / laborator (necesare cunoștințe MATLAB)



Bibliografie si resurse

- ⇒ Moodle pentru comunicare și resurse
- ⇒ Documentație Matlab pentru laborator (pe moodle)
- ▶ Bertsekas, Nonlinear Programming, Athena Scientific
- ▶ Y. Nesterov, Introductory Lectures on Convex Optimization: A Basic Course, Kluwer
- ▶ D. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming, Kluwer
- ▶ I. Necoara, Metode de Optimizare Numerica, Politehnica Press.



Regulament Evaluare

1. Examen scris în sesiune: 60 %
2. Proiect: 40 %
 - 2.1 grup de 2-3 studenți
 - 2.2 temă la alegere (sugestii de teme în cursurile viitoare)
3. Punctaj seminar: max. 10 %

Condiții promovare:

- ▶ **nota 5 examen**
- ▶ **nota 5 proiect**

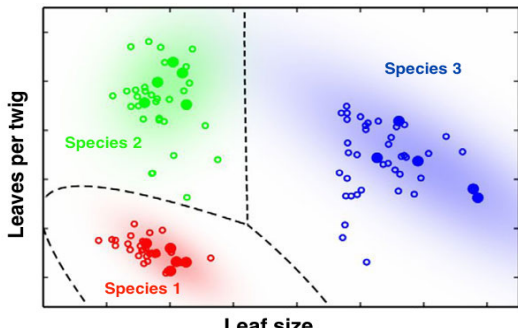


Optimizare în probleme reale: învățare supervizata

Exemplu: **Problema de Clasificare**

Algoritmii de clasificare se ocupă cu identificarea clasei din care un obiect studiat face parte.

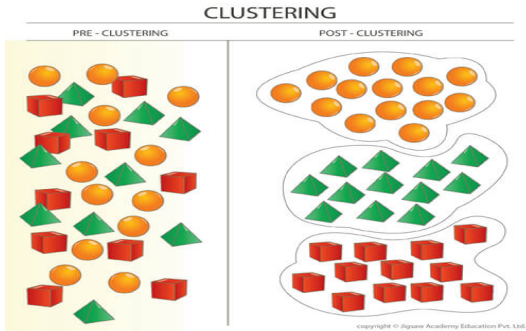
1. *etapa de antrenare*: având la dispoziție o mulțime de exemple etichetate, se antrenează un model matematic cu rolul de a clasifica noi obiecte cu apartenență necunoscută;
2. *etapa de testare*: se analizeaza performanța modelului antrenat pe o multime de exemple de test;



Optimizare în probleme reale: învățare nesupervizată

Exemplu: **Problema de Clustering**

1. Nu se cunosc a priori clase de obiecte
2. Se urmareste detectia de pattern-uri in structura datelor
3. Probleme semnificativ mai grele decat cele supervizate



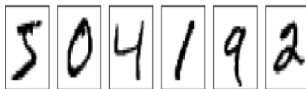
<https://analyticstraining.com/cluster-analysis-for-business/>



Clasificare de imagini

Problema recunoașterii unui text numeric scris de mână:

504192



<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html>

<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html>

Set de antrenare:



<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html>



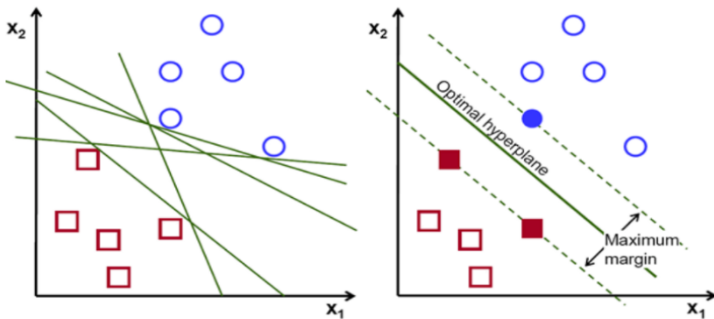
Clasificare binară cu Support Vector Machine (SVM)

Formulări echivalente:

(i) Determinare estimator neliniar pe 10 clase, tipic pentru rețelele neurale

(ii) Determinare 10 estimatori binari pentru fiecare clasă

Support Vector Machine:



Clasificare binară cu Support Vector Machine (SVM)

Etapă de antrenare se reduce la problema de optimizare:

$$\begin{aligned} \min_{a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}} \|a\|^2 \\ \text{s.l. : } c_i(a^T y_i - b_i) \geq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

unde a și b reprezintă parametrii hiperplanului, iar c_i indică clasa (culoarea) obiectului y_i .

Principiu clasificare: Hiperplanul cu parametrii (a, b) , obținut în etapa de antrenare, se utilizează pentru identificarea unui nou obiect z ;

$c(z) = \text{sgn}(a^T z - b) \Rightarrow$ dacă $a^T z \leq b$ atunci obiectul aparține clasei 1, altfel dacă $a^T z \geq b$ aparține clasei 2.



SVM pentru detectia cifrei 7

- Reprezentarea numerica a imaginilor: fiecare pixel este definit de o valoare (e.g. intre 0 și 256) ce contine culoarea acestuia.
- Consideram imagini mono-culoare de dim. 7×7 ale cifrei 7 unde pixelii sunt reprezentati de nivele de gri cu valori intre 0 si 5.
- **Problema:** Determinati daca intr-o imagine data se afla cifra 7.
- **Etapa de antrenare:** acumulam un set de imagini de antrenare ale cifrei 7 in diferite pozitii (clasa I) si imagini aleatorii complet diferite de cifra 7 (clasa II).
- Imaginii i se asociaza un vector $y_i \in \mathbb{N}^{49}$ (cu valori intre 0 și 5) si indexul c_i al clasei (dacă $c_i = 1$ atunci contine cifra 7, daca $c_i = -1$ atunci imaginea este aleatorie).



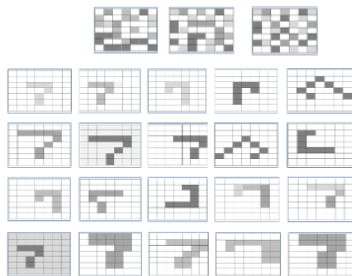
SVM pentru detectia cifrei 7

- Determinam hiperplanul optim cu parametrii (a, b)

Etapa de clasificare:

- Pentru *imaginile de test* (de mai jos) calculam valoarea hiperplanului:

$$a^T y - b \begin{cases} < 0, & \text{atunci imaginea dat\u0103 de } y \text{ nu con\u0219ine cifra 7;} \\ \geq 0, & \text{atunci imaginea dat\u0103 de } y \text{ con\u0219ine cifra 7.} \end{cases}$$



SVM pentru detectia cifrei 7

- ▶ clasificarea unui set de imagini aleatorii cu densitate mare de pixeli gri si respectiv, imagini cu cifra 7 transformata in diverse moduri (translatie la stanga/dreapta, inclinare, etc.) atinge o rata de succes (recunoastere corecta) de **aproximativ 80%**;
- ▶ clasificarea unui set de imagini aleatorii cu densitate mica si respectiv, imagini cu cifra 7 transformata in diverse moduri (translatie la stanga/dreapta, inclinare), atunci rezulta o rata de succes de **aproximativ 52%**.

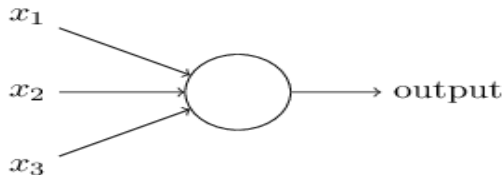
⇒ Obtinem o rata mai mica de succes in cel de-al doilea caz din doua motive:

- (i) similaritatea ridicata intre imaginile cu densitate mica si cele ce contin cifra 7;
- (ii) numarul relativ mic de imagini de antrenare.



Modele complexe - Rețele neurale

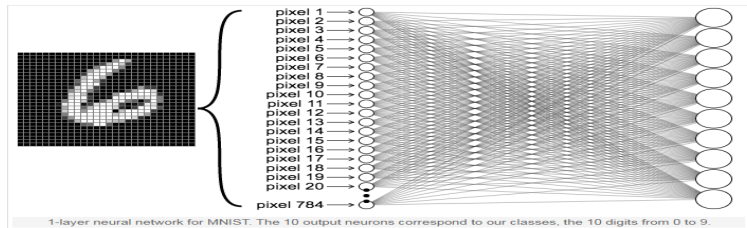
În aplicații complexe, performanțele SVM pot fi depășite de modele puternic neliniare: e.g. rețele neurale.



<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html>



Modele complexe - Rețele neurale



https://ml4a.github.io/ml4a/looking_inside_neural_nets/

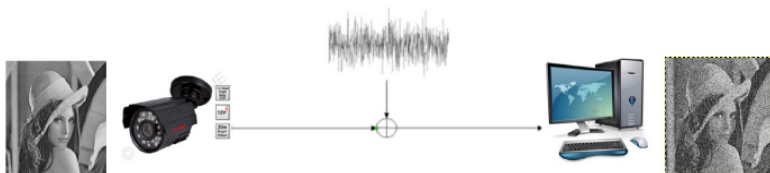
Pentru clasificare se minimizeaza un cost puternic neliniar:

$$C(w, b) \equiv \frac{1}{2n} \sum_x \|y(x) - a\|^2.$$

<http://neuralnetworksanddeeplearning.com/chap1.html>



Prelucrare imagini



În general, procesele ingineresti implica achizitia/ prelucrarea/ comunicatia unui numar de semnale/date.

Problema majora:

modificari nedorite ale semnalelor (*zgomot*) rezultate din:

- ▶ Achizitia semnalelor (e.g. imagine, video, audio)
- ▶ Comunicatii imperfecte

Exemplu: semnale cu detalii excesive au *variatie totala* mare (i.e. integrala gradientului absolut al semnalului este mare) \implies reducerea *zgomotului* echivalenta cu reducerea *variatiei totale*



Prelucrare imagini

Semnale cu detalii excesive au *variatie totala* mare (i.e. integrala gradientului absolut al semnalului este mare) \implies reducerea zgomotului echivalenta cu reducerea variatiei totale:

$$\min_{Y \in \mathbb{R}^{m \times n}} \frac{1}{2} \|Y - X\|^2 + TV(Y)$$

- ▶ TV = “total variation” functie cuantificare variatiei totale
- ▶ $TV(y) = \sum_{i,j} |y_{i+1,j} - y_{i,j}| + |y_{i,j+1} - y_{i,j}|$

Rezultate (noisy image/denoised image):

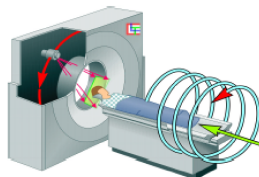


Reconstrucție imagini tomografice

Tomografie computerizata = tehnica **noninvaziva** ce foloseste raze X (sau alte tipuri de radiatii) pentru a produce imagini 2D/3D ale interiorului obiectului scanat.

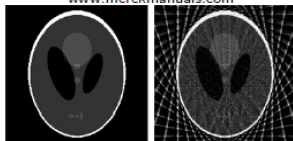
Procedura de functionare consta in:

1. Se achizitioneaza o serie de **proiectii**, din diferite unghiuri, ale obiectului scanat;



www.merckmanuals.com

2. Prin intermediul proiectiilor obtinute, se reconstruieste interiorul obiectului cu ajutorul unui algoritm iterativ;



www.mathworks.com

In majoritatea cazurilor, radiatiile folosite sunt daunatoare; de aceea se urmareste achizitionarea unui numar minim de proiectii.



Reconstrucție imagini tomografice

Formularea problemei:

- Fie $x \in \mathbb{R}^n$ imaginea interiorului de reconstruit.
- Pentru reconstrucție, dispunem de diferite măsurători liniare (proiecții) ale imaginii x : $b_i = A_i x$, $i = 1, \dots, m$.
- Notăm vectorul proiecțiilor $b \in \mathbb{R}^m$ și $A = [A_1^T \dots A_m^T]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matricea de achiziție.
- Imaginea interiorului reprezintă soluția sistemului liniar (subdeterminat deoarece sunt mai puține măsurători m decât dimensiunea imaginii n): $Ax = b$.
- Reformulare în termeni de problema CMMP:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n: Ax=b} \|x\|_\alpha$$

unde de obicei se alege $\alpha = 2$ sau $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$. Alegem $\alpha = 0 \vee 1$ pentru a induce o reprezentare rară a imaginii (vectorul soluție). Se dorește o reprezentare rară a imaginii deoarece aceasta permite: compresie ușoară; algoritmi rapizi pt. procesare; memorie de stocare mică; eliminarea ușoară a zgomotului;...

