Logică Matematică şi Computaţională
Cursul IX

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Am văzut că o latice este, prin definiție, simultan un poset și o algebră cu două operații binare

Într–o latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ (alte notații: $(L, \leq)$, $(L, \vee, \wedge)$), avem:

- o mulțime L,
- o relație de ordine (parțială) $\leq$ pe L,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe L, notate infixat,

iar aceste componente ale structurii algebrice de latice au proprietățile:

- oricare ar fi $x, y \in L$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(L, \leq)$;
- $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in L$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
- $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in L$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;

și sunt legate între ele prin relațiile: pentru orice $x, y \in L$:

- $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
- $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
- $x \wedge y = \inf\{x, y\}$.

Latici mărginite, latici distributive

$(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ (alte notații: $(L, \leq, 0, 1)$, $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$) se numește *latice mărginită* ddacă:

- $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este latice;
- $0 = \min(L, \leq)$ și $1 = \max(L, \leq)$.

O latice $(L, \vee, \wedge)$ se zice *distributivă* ddacă satisface următoarele condiții echivalente, numite *legile de distributivitate*:
(d_1) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
(d_2) pentru orice $x, y, z \in L$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Fie $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ o latice mărginită.

- Un element $x \in L$ se zice *complementat* ddacă există un element $y \in L$, numit *complement al lui* x, astfel încât: $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ și} \\ x \wedge y = 0. \end{cases}$
- Laticea mărginită L se zice *complementată* ddacă toate elementele sale sunt complementate.
- Dacă L este distributivă, atunci orice $x \in L$ are cel mult un complement în L.
- Așadar, dacă L este distributivă și complementată, atunci orice $x \in L$ are **exact** un complement în L (i. e. unul și numai unul).
- Întotdeauna, 0 și 1 sunt complemente unul altuia și niciunul dintre ele nu are alte complemente.

Latici complete

O latice $(L, \leq)$ se zice *completă* ddacă satisface următoarele condiții echivalente:

- pentru orice $A \subseteq L$, există $\inf(A)$ (notat și $\bigwedge\limits_{x \in A} x$) în posetul $(L, \leq)$;
- pentru orice $A \subseteq L$, există $\sup(A)$ (notat și $\bigvee\limits_{x \in A} x$) în posetul $(L, \leq)$.

Să ne amintim că:

- orice latice completă este mărginită;
- orice latice finită și nevidă este completă.

Așadar:

- orice latice finită și nevidă este mărginită.

Algebre produs direct

A se revedea, din cursul anterior, definiția **produsului direct al unei familii de poseturi**.
În această definiție se pot înlocui poseturile cu mulțimi înzestrate cu **relații binare** arbitrare, și se obține produsul direct al respectivelor mulțimi înzestrat cu relația produs direct al respectivelor relații binare.
Această construcție poate fi generalizată la mulțimi înzestrate cu **relații n–are**.
Dar **produsul direct** se poate defini și pentru structuri algebrice de același tip înzestrate cu anumite **operații**, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.
Produsul direct al unor latici este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și **o algebră produs direct cu două operații binare** (latice Dedekind).
Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații**.

Algebre produs direct

Exercițiu (temă)

Pe baza celor de mai jos, să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p–ară (de aritate p, cu p argumente)** și o **relație k–ară**, unde $p, k \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă: vom vedea).
Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1, n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,

  cu *operațiile produs direct*:

- $\odot \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \odot_i \overset{\text{notație}}{=} (\odot_1, \ldots, \odot_n)$,
- $f \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \overset{\text{notație}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,
- $c \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \overset{\text{notație}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  și *relația binară produs direct*:

- $\rho \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \rho_1 \times \ldots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

Algebre produs direct

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, $x \odot y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \odot_1 y_1, \ldots, x_n \odot_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \odot_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \odot_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\odot_i : A_i \times A_i \rightarrow A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \odot_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \rightarrow A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$, cu:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(h(i) \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \odot h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \odot h)(i) = g(i) \odot_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \odot, f, c, \rho)$:

- $A \overset{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\odot$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, $(a_i)_{i \in I} \odot (b_i)_{i \in I} := (a_i \odot_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A$, $f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} \rho (b_i)_{i \in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \odot_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \odot_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in B)\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \odot, f, c, \rho)$, unde:

- A este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element: $A = \{a\}$;
- operațiile $\odot$, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $a \odot a := a$, $f(a) := a$ și $c := a$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(a, a)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(a, a)\}$; dar ρ este produsul familiei vide de relații binare, care este tot un produs direct al familiei vide de mulțimi, deci este tot un singleton, așadar $\rho = \{(a, a)\}$.

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n, să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

Operații zeroare $\equiv$ constante

Definiție

Dacă $\mathcal{A}$ este o structură algebrică, având mulțimea suport A, iar $n \in \mathbb{N}$, atunci o *operație n–ară* (*operație de aritate n*, *operație cu n argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^n \to A$.

- Pentru orice mulțime A, $A^0 = A^\emptyset = \prod_{i \in \emptyset} A = \{a\}$ (produsul direct al familiei vide de mulțimi: un singleton).
- Așadar, cu notațiile din definiția de mai sus: o *operație* 0*–ară* (*operație de aritate* 0, *operație fără argumente*) a lui $\mathcal{A}$ este o funcție $f : A^0 \to A$, deci o funcție $f : \{a\} \to A$, care poate fi identificată cu $f(a) \in A$: **o constantă din** A.
- Constantele 0 și 1 dintr–o latice mărginită sunt operații zeroare. La fel sunt: elementul neutru al unui grup, 0 și 1 dintr–un inel unitar etc..

Algebre Boole – definiție, exemple, operații derivate

Definiție

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarcă

În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg\, x$).
Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{\ } : B \rightarrow B$ (sau $\neg : B \rightarrow B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notație și terminologie

O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{\ }$ este operația ei de complementare.
Adesea, $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este numită *latice Boole*, iar $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este numită *algebră Boole*.

Exemple de algebre Boole

- Orice structură algebrică poate fi desemnată de mulțimea elementelor sale, dar poate fi notată și altfel decât această mulțime.
- Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, vom nota cu L_n mulțimea elementelor lanțului cu n elemente, iar cu $\mathcal{L}_n$ întreaga structură algebrică a lanțului cu n elemente, fie ea de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită (desigur, distributivă) sau algebră Boole (în cazul lui $\mathcal{L}_1$ sau $\mathcal{L}_2$: vom vedea). Așa cum am menționat mai sus, nu este obligatoriu să se facă această distincție.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.
Într–adevăr, $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole.
Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \rightarrow L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $f, g \in L_2^I$:

- $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:

1. $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
2. $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$

(dacă $|I| \geq 2$, atunci $\mathcal{L}_2^I$ nu e lanț, deci $\vee \neq \max$ și $\wedge \neq \min$ în $\mathcal{L}_2^I$)

1. $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
2. $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$

- $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ ddacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard, $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L_2$:

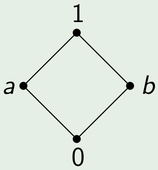
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, ..., $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

- $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
- $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0,0)$, $1 = (1,1)$, $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

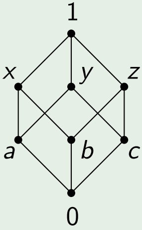
- $(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$,
- $(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$,
- $(0,1)$ și $(1,0)$ sunt incomparabile ($(0,1) \nleq (1,0)$ și $(1,0) \nleq (0,1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0,1) \vee (1,0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1,1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $L_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\ }, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Exercițiu (temă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Propoziție (temă)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Operații și operații derivate ale unei algebre Boole

Definiție

Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarcă (complementarea este autoduală (autoinversă, idempotentă))

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\overline{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\overline{\overline{x}}$ al lui $\overline{x}$: x satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ x \wedge \overline{x} = 0, \end{cases}$ iar $\overline{\overline{x}}$ este unicul element al lui B cu proprietățile: $\begin{cases} \overline{\overline{x}} \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$ Așadar $x = \overline{\overline{x}}$.

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

Înainte de a trece mai departe, amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\cdot}$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Să recapitulăm definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\ }$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{\ }, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole* $\mathcal{B}$.
Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{\ }$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{\ }$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operația $\bar{\ }$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

Legile lui de Morgan pentru algebre Boole arbitrare

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.
- Următoarea propoziție conține o proprietate aritmetică foarte importantă a algebrelor Boole, pe care o cunoaștem deja pentru cazul particular al algebrei Boole a părților unei mulțimi.

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$:

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: **(1)** Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$. Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că: $(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.
Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:
$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$
$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$
(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ *o latice și* $a, b, x, y \in L$.
Dacă $a \leq b$ *și* $x \leq y$, *atunci:* $a \vee x \leq b \vee y$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge y$.
În particular (aplicând proprietatea de mai sus și reflexivitatea unei relații de ordine): dacă $a \leq b$, *atunci* $a \vee x \leq b \vee x$ *și* $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Atunci, pentru orice* $x, y \in B$, *au loc următoarele echivalențe:*

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform autodualității complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.
(3) $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat lema anterioară, definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Acum aplicăm faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$): dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$.
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și autodualitatea complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.
(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă [$a = 1$ și $b = 1$]. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă [$x \leq y$ și $y \leq x$] ddacă [$x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1$] ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.

Propoziție (legea de reziduație)

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B, au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Definim operațiile* $\vee$, $\wedge$ *și* $\bar{\ }$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o vom nota cu* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$*.*

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ *o algebră Boole. Definim operațiile* $+$ *și* $\cdot$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *este un inel Boole, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *(unde am notat cu* $-$ *operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).*

- *Aplicațiile* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{I}$ *sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*, și, pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*.*

Subalgebre Boole

Definiție

O submulțime S a lui B se numește *subalgebră Boole a lui* $\mathcal{B}$ ddacă este **închisă la operațiile de algebră Boole ale lui** $\mathcal{B}$, i. e.:

1. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \vee y \in S$;
2. pentru orice $x, y \in S$, rezultă $x \wedge y \in S$;
3. pentru orice $x \in S$, rezultă $\overline{x} \in S$;
4. $0, 1 \in S$.

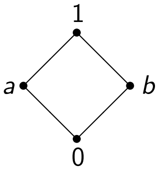
Propoziție

Au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți din definiția unei subalgebre Boole, aplicate unei submulțimi nevide S a lui B:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$
- $(3) \not\Leftarrow (1), (2), (4)$

Subalgebre Boole

Demonstrație: Fie $\emptyset \neq S \subseteq B$.
"$(1) \Leftarrow (2),(3):$" Presupunem că S satisface (2) și (3). Fie $x, y \in S$. Conform (3), (2), **legilor lui de Morgan** și autodualității complementării, rezultă că $\overline{x}, \overline{y} \in S$, deci $\overline{x} \wedge \overline{y} \in S$, deci $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} \in S$, dar $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = x \vee y$, așadar $x \vee y \in S$.
"$(2) \Leftarrow (1),(3):$" Prin dualitate, din implicația anterioară.
"$(4) \Leftarrow (1),(2),(3):$" Fie $x \in S$, arbitrar. Atunci, conform (3), (1) și (2), rezultă $\overline{x} \in S$, deci $1 = x \vee \overline{x} \in S$ și $0 = x \wedge \overline{x} \in S$.
"$(3) \not\Leftarrow (1),(2),(4):$" De exemplu, în $\mathcal{L}_2^2$ (rombul, cu diagrama Hasse figurată mai jos), considerând $S := \{0, a, 1\}$, se observă că S satisface (1), (2) și (4), dar nu satisface (3), întrucât $\overline{a} = b \notin S$.



Subalgebre Boole

Remarcă

Proprietatea **(4)** din definiția unei subalgebre Boole arată că orice subalgebră Boole S este nevidă, fapt implicat și de remarca de mai jos.

Remarcă

Este imediat că o subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este o algebră Boole cu operațiile induse pe S de operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$ și cu ordinea parțială indusă pe S de ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Notație

Operațiile induse (adică restricțiile la S ale operațiilor lui $\mathcal{B}$) se notează, de obicei, la fel ca operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, iar ordinea parțială indusă (adică ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$ restricționată la S) se notează, de obicei, la fel ca ordinea parțială a lui $\mathcal{B}$.

Remarcă

Este imediat că orice subalgebră Boole S a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este închisă la operațiile derivate $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$ ale lui $\mathcal{B}$ (adică $x \rightarrow y, x \leftrightarrow y \in S$ pentru orice $x, y \in S$), și că operațiile pe care acestea le induc pe S sunt exact implicația și, respectiv, echivalența algebrei Boole S (notate, în mod uzual, la fel ca implicația și, respectiv, echivalența lui $\mathcal{B}$).

Morfisme booleene

În cele ce urmează, renunțăm la fixarea algebrei Boole notate $\mathcal{B}$.

Definiție

Date două algebre Boole $(A, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \neg, \bot, \top)$, o funcție $f : A \rightarrow B$ se numește *morfism boolean* (sau *morfism de algebre Boole*) ddacă f **comută cu operațiile de algebre Boole ale lui A și B**, i. e. ddacă f este morfism de latici mărginite între $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ și $(B, \sqcup, \sqcap, \bot, \top)$ și, pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$.

Scris desfășurat, o funcție $f : A \rightarrow B$ este *morfism boolean* ddacă:

1. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(x) \sqcup f(y)$
2. pentru orice $x, y \in A$, $f(x \wedge y) = f(x) \sqcap f(y)$
3. pentru orice $x \in A$, $f(\overline{x}) = \neg(f(x))$
4. $f(0) = \bot$ și $f(1) = \top$

Un *endomorfism boolean* (sau *endomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean între o algebră Boole și ea însăși.

Un *izomorfism boolean* (sau *izomorfism de algebre Boole*) este un morfism boolean bijectiv, ceea ce este același lucru cu un morfism boolean inversabil, pentru că inversa unui morfism Boolean bijectiv este morfism boolean, ceea ce se observă imediat, dacă aplicăm rezultatul similar de la latici (**temă pentru acasă**).

Un *automorfism boolean* (sau *automorfism de algebre Boole*) este un izomorfism boolean între o algebră Boole și ea însăși, adică un endomorfism boolean bijectiv.

Morfisme booleene

Propoziție

Cu notațiile din definiția anterioară, au loc următoarele implicații între cele 4 proprietăți ale unui morfism boolean, aplicate unei funcții $f : A \to B$:

- $(1) \Leftarrow (2), (3)$
- $(2) \Leftarrow (1), (3)$
- $(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$
- $(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$

Demonstrație: Fie $f : A \to B$ o funcție.
"$(1) \Leftarrow (2), (3)$:" Dacă f satisface (2) și (3), atunci, pentru orice $x, y \in A$, $f(x \vee y) = f(\overline{\overline{x \vee y}}) = f(\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}) = \neg f(\overline{x} \wedge \overline{y}) = \neg(f(\overline{x}) \sqcap f(\overline{y})) = \neg(\neg f(x) \sqcap \neg f(y)) = \neg\neg f(x) \sqcup \neg\neg f(y) = f(x) \sqcup f(y)$. Am aplicat autodualitatea complementării și legile lui de Morgan.
"$(2) \Leftarrow (1), (3)$:" Rezultă, prin dualitate, din prima implicație.
"$(3) \Leftarrow (1), (2), (4)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (4), atunci, pentru orice $x \in A$, $\bot = f(0) = f(x \wedge \overline{x}) = f(x) \sqcap f(\overline{x})$ și $\top = f(1) = f(x \vee \overline{x}) = f(x) \sqcup f(\overline{x})$, ceea ce, conform definiției și unicității complementului, arată că $f(\overline{x})$ este complementul lui $f(x)$ în algebra Boole B, adică $f(\overline{x}) = \neg f(x)$.

Morfisme booleene

"$(4) \Leftarrow (1), (2), (3)$:" Dacă f satisface (1), (2) și (3), atunci, pentru orice $x \in A$, $\bot = f(x) \sqcap \neg f(x) = f(x) \sqcap f(\overline{x}) = f(x \wedge \overline{x}) = f(0)$ și, dual, $\top = f(1)$.

Remarcă (temă)

Orice morfism boolean comută cu implicația și echivalența booleană.
Compunerea a două morfisme booleene este un morfism boolean.
Imaginea unui morfism boolean este o subalgebră Boole a codomeniului acelui morfism boolean.

- Următoarea propoziție conține un exemplu foarte important de algebre Boole izomorfe.

Algebre Boole izomorfe

Propoziție

Pentru orice mulțime I, algebrele Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \bar{\ }, \emptyset, I)$ și $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism boolean între ele).

Demonstrație: Dacă $I = \emptyset$, atunci cele două algebre Boole din enunț coincid cu algebra Boole trivială, așadar sunt izomorfe, cu izomorfismul boolean dat de identitatea algebrei Boole triviale.
În cele ce urmează, vom considera I nevidă.
Putem considera $L_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{N}$, ceea ce ne permite să exprimăm operațiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ în funcție de operațiile aritmetice $+$, $-$ și $\cdot$ de pe $\mathbb{N}$, astfel: pentru orice $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$:

$$\begin{cases} x \vee y = \max\{x, y\} = x + y - x \cdot y, \\ x \wedge y = \min\{x, y\} = x \cdot y, \\ \overline{x} = 1 - x. \end{cases}$$

Aceste egalități pot fi verificate ușor, de exemplu prin considerarea tuturor cazurilor privind valorile posibile ale lui $x, y \in L_2 = \{0, 1\}$.

Algebre Boole izomorfe

Așadar, în algebra Boole $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$, unde $L_2^I = \{f | f : I \to L_2\} = \{f | f : I \to \{0, 1\}\}$, operațiile sunt definite punctual pe baza celor ale lui $\mathcal{L}_2$, astfel:

- $0 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $0(i) := 0$;
- $1 : I \to L_2$, pentru orice $i \in I$, $1(i) := 1$;
- pentru orice $f : I \to L_2$, $\overline{f} : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $\overline{f}(i) := \overline{f(i)} = 1 - f(i) = (1 - f)(i)$, unde 1 este funcția constantă de mai sus; așadar $\overline{f} = 1 - f$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \vee g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i) = f(i) + g(i) - f(i) \cdot g(i) = (f + g - f \cdot g)(i)$; așadar $f \vee g = f + g - f \cdot g$;
- pentru orice $f : I \to L_2$ și $g : I \to L_2$, $f \wedge g : I \to L_2$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i) = f(i) \cdot g(i) = (f \cdot g)(i)$; așadar $f \wedge g = f \cdot g$.

Algebre Boole izomorfe

Amintim că am demonstrat că următoarea funcție este o bijecție:
$\varphi : \mathcal{P}(I) \rightarrow \{0,1\}^I = L_2^I$, definită prin: oricare ar fi $A \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A) := \chi_A \in \{f | f : I \rightarrow \{0,1\}\} = \{0,1\}^I = L_2^I$ (funcția caracteristică a lui A raportat la I).
În cele ce urmează, vom aplica proprietățile funcțiilor caracteristice.
$\varphi(\emptyset) = \chi_\emptyset = 0$ și $\varphi(I) = \chi_I = 1$.
Pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, $\varphi(\overline{A}) = \chi_{\overline{A}} = \chi_{I \setminus A} = 1 - \chi_A = 1 - \varphi(A) = \overline{\varphi(A)}$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cup B) = \chi_{(A \cup B)} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.
Pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(I)$,
$\varphi(A \cap B) = \chi_{(A \cap B)} = \chi_A \cdot \chi_B = \varphi(A) \cdot \varphi(B) = \varphi(A) \wedge \varphi(B)$.
Așadar φ este un morfism boolean, iar faptul că este și bijectivă arată că φ este un izomorfism boolean.