LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul II

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Conectorii logici: folosiți pentru a lega enunțuri, formând astfel *enunțuri compuse:*

- *disjuncția:* sau
- *conjuncția:* și
- *negația:* non
- *implicația:* $\Rightarrow$
- *echivalența:* $\Leftrightarrow$

Amintim următoarele proprietăți logice, pe care le–am folosit sau le vom folosi la seminar, pentru demonstrarea unor egalități corespunzătoare între mulțimi, în care conectorii logici sunt înlocuiți cu operații cu mulțimi: dacă p, q și r sunt enunțuri (propoziții, afirmații, proprietăți), atunci au loc echivalențele următoare, în care parantezele sunt folosite pentru a delimita enunțurile compuse:

- $[p$ sau $(q$ și $r)] \Leftrightarrow [(p$ sau $q)$ și $(p$ sau $r)]$
- $[p$ și $(q$ sau $r)] \Leftrightarrow [(p$ și $q)$ sau $(p$ și $r)]$
- non $(p$ sau $q) \Leftrightarrow [($non $p)$ și $($non $q)]$
- non $(p$ și $q) \Leftrightarrow [($non $p)$ sau $($non $q)]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [($non $p)$ sau $q]$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [($non $q) \Rightarrow ($non $p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [($non $p) \Leftrightarrow ($non $q)]$ (consecință imediată a principiului reducerii la absurd și a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \stackrel{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q)$ și $(q \Rightarrow p)]$)

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Am justificat sau vom justifica la seminar, prin duble implicații, aceste echivalențe între enunțuri. De exemplu, pentru a demonstra că:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$,

ceea ce arată că:

- implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată ddacă p e falsă sau q e adevărată ([**fals** implică **orice**] este **adevărat**, și [**adevărat** implică **adevărat**] este **adevărat**),
- implicația $[p \Rightarrow q]$ este falsă ddacă p e adevărată și q e falsă ([**adevărat** implică **fals**] este **fals**),

putem demonstra:

- implicația directă ($[p \Rightarrow q]$ implică $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$) observând că, dacă are loc $[p \Rightarrow q]$, atunci, când $[\text{non } p]$ e falsă, adică p e adevărată, rezultă că e adevărată și q, așadar, ori de câte ori $[p \Rightarrow q]$ este adevărată, rezultă că și $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ este adevărată;
- implicația inversă ($[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ implică $[p \Rightarrow q]$) prin faptul că, dacă $[(\text{non } p) \text{ sau } q]$ este adevărată, atunci, când p este adevărată și deci $[\text{non } p]$ este falsă, rezultă că este adevărată q, prin urmare implicația $[p \Rightarrow q]$ este adevărată.

Am văzut această proprietate logică și în secțiunea anterioară a cursului. Amintim că lucrăm numai cu enunțuri (afirmații) care sunt **fie false, fie adevărate**.

Cuantificatorii și simbolul $\exists\,!$

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existențial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- non $[(\forall\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- non $[(\exists\, x)\,(p(x))] \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Notație

Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică "există un unic", "există și este unic".

Observație

$\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notație prescurtată pentru enunțuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunțul scris, desfășurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ și } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y și z sunt variabile.

Negarea enunțurilor cuantificate

Cum se neagă un enunț cu mai mulți cuantificatori? Aplicând proprietățile de mai sus, și iterând acest procedeu:

Exemplu

Fie x, y, z, t, u variabile, iar $p(x, y, z, t, u)$ o proprietate depinzând de x, y, z, t, u. Atunci:

$$\begin{array}{l}
\text{non } [(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x,y,z,t,u))] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,[\text{non } [(\forall\, y)\,(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x,y,z,t,u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,[\text{non } [(\exists\, z)\,(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x,y,z,t,u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,[\text{non } [(\forall\, t)\,(\exists\, u)\,(p(x,y,z,t,u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,(\exists\, t)\,[\text{non } [(\exists\, u)\,(p(x,y,z,t,u))]] \ \Leftrightarrow \\
(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(\forall\, z)\,(\exists\, t)\,(\forall\, u)\,(\text{non } p(x,y,z,t,u))
\end{array}$$

Nu vom mai aplica acest procedeu pas cu pas. Reținem că procedeul constă în transformarea fiecărui cuantificator universal într–unul existențial și invers, și negarea proprietății de sub acești cuantificatori.

Cuantificatori aplicați fixând un domeniu al valorilor

Fie M o mulțime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ și } p(x))$

Toate proprietățile logice pentru enunțuri cuantificate din acest curs se scriu la fel și sunt valabile și pentru cuantificatori urmați de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de același fel comută, cei diferiți nu

Fie x și y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x și y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x,y)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x,y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x,y)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x,y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x,y)) \;\overset{\nRightarrow}{\Leftarrow}\; (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x,y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunțul din stânga depinde de valoarea lui x)

Exemplu

Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(x + y = 0)$ este adevărat.
Enunțul $(\exists\, y \in \mathbb{Z})\,(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(x + y = 0)$ este fals.

Cuantificatori, disjuncții și conjuncții logice

Să observăm și următoarele proprietăți logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ și $q(x)$ sunt enunțuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ și } q(x)) \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ și } (\exists\, x)\,(q(x))$

Exemplu

Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)$ este adevărat.
Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x)$ este fals. Enunțul $(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)$ este tot fals. Prin urmare, enunțul $[(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)]$ este fals.

Exemplu

Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10)$ este fals.
Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0)$ este adevărat. Enunțul $(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)$ este tot adevărat. Prin urmare, enunțul $[(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)]$ este adevărat.

Echivalențe logice între diferite tipuri de enunțuri

Scrieri echivalente ale enunțurilor din exemplele anterioare, fără domeniu al valorilor după cuantificatori:

$$
\begin{aligned}
&(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x) \;\Leftrightarrow\\
&(\forall\, x)\,[x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow\\
&(\forall\, x)\,[x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (2 \mid x \text{ sau } 2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow\\
&(\forall\, x)\,[(x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \mid x) \text{ sau } (x \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; 2 \nmid x)];\\
&[(\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x \in \mathbb{N})\,(2 \nmid x)] \;\Leftrightarrow\\
&[(\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \mid x) \text{ sau } (\forall\, x)\,(x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \nmid x)];\\
&(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow\\
&(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0 \text{ și } x \geq 10) \;\Leftrightarrow\\
&(\exists\, x)\,[(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)];\\
&[(\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x < 0) \text{ și } (\exists\, x \in \mathbb{R})\,(x \geq 10)] \;\Leftrightarrow\\
&[(\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x < 0) \text{ și } (\exists\, x)\,(x \in \mathbb{R} \text{ și } x \geq 10)].
\end{aligned}
$$

Acum fie p, q și r enunțuri. Atunci, din proprietățile:
$[p \text{ sau } (q \text{ și } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ sau } q) \text{ și } (p \text{ sau } r)]$,
$[p \text{ și } (q \text{ sau } r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \text{ și } q) \text{ sau } (p \text{ și } r)]$,
non $(p \text{ sau } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ și } (\text{non } q)]$, non $(p \text{ și } q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$ și $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [(\text{non } p) \text{ sau } q]$, se pot deduce următoarele proprietăți:

Temă obligatorie - de adus scrisă, câte un exemplar / grupă

1. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \ \Leftrightarrow \ [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
2. $[p \Rightarrow (q \text{ și } r)] \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
3. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \ \Leftrightarrow \ [(p \Rightarrow q) \text{ sau } (p \Rightarrow r)]$
4. $[p \Rightarrow (q \text{ sau } r)] \ \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \ [(p \Rightarrow q) \text{ și } (p \Rightarrow r)]$
5. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \ \Leftrightarrow \ [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$
6. $[(q \text{ sau } r) \Rightarrow p] \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \ [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
7. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \ \Leftrightarrow \ [(q \Rightarrow p) \text{ sau } (r \Rightarrow p)]$
8. $[(q \text{ și } r) \Rightarrow p] \ \underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow} \ [(q \Rightarrow p) \text{ și } (r \Rightarrow p)]$

Exercițiu (temă obligatorie)

Dați contraexemple pentru implicațiile directe din proprietățile (2), (4), (6) și (8) de mai sus, i. e., așa cum am procedat în exemplele anterioare, înlocuiți p, q și r cu enunțuri concrete (sau enunțuri arbitrare având valorile de adevăr necesare), astfel încât acele implicații să nu fie satisfăcute pentru respectivele valori (semnificații, instanțieri), sau respectivele valori de adevăr ale lui p, q, r.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

Notație

- Păstrăm notația consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenență**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulțime, clasă).
- Păstrăm notația clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulțimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

- Amintim din primul curs și din seminar faptul că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulțimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notație

Păstrăm notațiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ și Δ pentru **reuniunea**, **intersecția**, **diferența** și, respectiv, **diferența simetrică** între mulțimi.
Amintim că, pentru orice mulțimi A și B, se definesc:

- $A \cup B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$;
- $A \cap B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$;
- $A \setminus B \stackrel{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$;
- $A \Delta B \stackrel{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Operații cu mulțimi și relații între mulțimi

- A se revedea proprietățile operațiilor cu mulțimi demonstrate la seminar, precum și cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!
- Vom face mereu apel și la cunoștințe din gimnaziu și liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunțându–le.

Notație

Păstrăm notațiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ și $\supsetneq$ pentru **incluziunile** și **incluziunile stricte** dintre mulțimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte și cu $\subset$ și respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă și nu poate avea loc egalitatea de mulțimi nu ne folosește în cele prezentate.
Amintim că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiție, două mulțimi sunt egale ddacă au aceleași elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ și $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Mulțimea părților unei mulțimi, apoi conectorul xor

Notație

Vom nota cu $\emptyset$ **mulțimea vidă**, adică mulțimea fără elemente.

Definiție

Dacă A și B sunt mulțimi, atunci A se numește:

- *submulțime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulțime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notație

Pentru orice mulțime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulțimea părților lui** T, i. e. **mulțimea submulțimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunțuri p și q, enunțul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunțurile p și q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat și q e fals) sau (q e adevărat și p e fals)]. Formal:

- (p xor q) $\Leftrightarrow$ [(p și non q) sau (q și non p)]

Proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi

Remarcă

Definiția diferenței simetrice arată că, pentru orice mulțimi A și B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

Remarcă

Fie A și B mulțimi arbitrare, fixate. Atunci au loc echivalențele:
$A = B$ ddacă $(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ ddacă
$(\forall x)\,[(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă
$[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\forall x)\,(x \in B \Rightarrow x \in A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$.
Faptul că **egalitatea de mulțimi este echivalentă cu dubla incluziune** s–a demonstrat folosind faptul că echivalența logică este echivalentă cu dubla implicație și faptul că un cuantificator universal se distribuie la termenii unei conjuncții logice.

Similar remarcii anterioare, în cele ce urmează, vom enumera o serie de proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi, alături de proprietățile logice (cu enunțuri) în care acestea se transcriu; nu vom mai transcrie în proprietăți logice afirmațiile care se obțin în mod trivial din cele anterioare, de exemplu prin înlocuirea unui enunț arbitrar cu negația lui. Demonstrarea acestor proprietăți cu mulțimi constituie **temă pentru seminar.**

Proprietăți ale operațiilor și relațiilor între mulțimi

Considerăm mulțimile arbitrare A, B, C, D și enunțurile arbitrare p, q, r, s. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:

- **idempotența reuniunii:** $A \cup A = A$ ((p sau p) $\Leftrightarrow$ p)
- **idempotența intersecției:** $A \cap A = A$ ((p și p) $\Leftrightarrow$ p)
- $A \setminus A = \emptyset$ ((p și non p) este **fals**)
- $A \Delta A = \emptyset$ ((p xor p) este **fals**)
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$ ((p sau q) $\Leftrightarrow$ (q sau p))
- **comutativitatea intersecției:** $A \cap B = B \cap A$ ((p și q) $\Leftrightarrow$ (q și p))
- **comutativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$ ((p xor q) $\Leftrightarrow$ (q xor p))
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ([p sau (q sau r)] $\Leftrightarrow$ [(p sau q) sau r])
- **asociativitatea intersecției:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ ([p și (q și r)] $\Leftrightarrow$ [(p și q) și r])
- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ (se demonstrează foarte ușor cu **funcții caracteristice** – vom vedea) ([p xor (q xor r)] $\Leftrightarrow$ [(p xor q) xor r])

Pentru operații comutative, precum reuniunea și intersecția de mulțimi, distributivitatea la stânga față de alte operații este echivalentă cu distributivitatea la dreapta

- **distributivitatea la stânga a reuniunii față de intersecție:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ([p sau (q și r)] $\Leftrightarrow$ [(p sau q) și (p sau r)])
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii față de intersecție:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ ([(q și r) sau p] $\Leftrightarrow$ [(q sau p) și (r sau p)])
- **distributivitatea la stânga a intersecției față de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ([p și (q sau r)] $\Leftrightarrow$ [(p și q) sau (p și r)])
- **distributivitatea la dreapta a intersecției față de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ ([(q și r) sau p] $\Leftrightarrow$ [(q sau p) și (r sau p)])

Proprietăți ale relațiilor între mulțimi

- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ și $(\exists x)(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \setminus A \neq \emptyset]$ ($[(p \Rightarrow q)$ și $(p \not\Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q)$ și $(q \not\Rightarrow p)]$)
- $A \subseteq B$ ddacă ($A \subsetneq B$ sau $A = B$) ($(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [[(p \Rightarrow q)$ și $(q \not\Rightarrow p)]$ sau $(p \Leftrightarrow q)]$)
- $A \subseteq A$ ($p \Rightarrow p$)
- non($A \subsetneq A$) (non$[(p \Rightarrow p)$ și $(p \not\Rightarrow p)]$)
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: ($A \subseteq B$ și $B \subseteq C$) $\Rightarrow A \subseteq C$ ($(p \Rightarrow q)$ și $q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$)
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: ($A \subsetneq B$ și $B \subsetneq C$) $\Rightarrow A \subsetneq C$ ($[[(p \Rightarrow q)$ și $(q \not\Rightarrow p)]$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \not\Rightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \not\Rightarrow p)]$)
- ($A \subsetneq B$ și $B \subseteq C$) $\Rightarrow A \subsetneq C$ ($[[(p \Rightarrow q)$ și $(q \not\Rightarrow p)]$ și $(q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \not\Rightarrow p)]$)
- ($A \subseteq B$ și $B \subsetneq C$) $\Rightarrow A \subsetneq C$ ($[(p \Rightarrow q)$ și $[(q \Rightarrow r)$ și $(r \not\Rightarrow q)]] \Rightarrow [(p \Rightarrow r)$ și $(r \not\Rightarrow p)]$)

Proprietăți cu operații și relații între mulțimi

- $A \subseteq A \cup B$ ($p \Rightarrow$(p sau q)); $B \subseteq A \cup B$ ($q \Rightarrow$(p sau q))
- $A \cap B \subseteq A$ ((p și q)$\Rightarrow p$); $A \cap B \subseteq B$ ((p și q)$\Rightarrow q$)
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ([(p sau q)$\Leftrightarrow q$] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$[(p și q)$\Leftrightarrow p$])
- $\emptyset \subseteq A$ ((**fals** $\Rightarrow p$) este **adevărat**)
- $A \cup \emptyset = A$ ((p sau **fals**)$\Leftrightarrow p$)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$ ((p și **fals**) este **fals**)
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$ ([non (p și non q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Rightarrow q$))
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$ ((**fals** și non p) este fals)
- $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$ (adică $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$) ((($p \Rightarrow$**fals**) este **adevărat**) ddacă (p este **fals**); altfel scris: ($p \Rightarrow$ **fals**)$\Leftrightarrow$ (non p))
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$ (((p xor q) este **fals**) ddacă ($p \Leftrightarrow q$); altfel scris: [non (p xor q)] $\Leftrightarrow$ ($p \Leftrightarrow q$))

- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \text{ sau } r) \Rightarrow (q \text{ sau } r)))$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \text{ și } r) \Rightarrow (q \text{ și } r)))$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ sau } q) \Rightarrow (r \text{ sau } s)))$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ și } q) \Rightarrow (r \text{ și } s)))$
- $(A \subseteq C \text{ și } B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$ $((p \Rightarrow r \text{ și } q \Rightarrow r)$ ddacă $(p \text{ sau } q) \Rightarrow r)$
- $(A \subseteq B \text{ și } A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$ $((p \Rightarrow q \text{ și } p \Rightarrow r)$ ddacă $(p \Rightarrow (q \text{ și } r))$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \text{ și non } r) \Rightarrow (q \text{ și non } r)])$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$ $((p \Rightarrow q) \Rightarrow [(r \text{ și non } q) \Rightarrow (r \text{ și non } p)])$
- $(A \subseteq B \text{ și } C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$ $((p \Rightarrow q \text{ și } r \Rightarrow s) \Rightarrow ((p \text{ și non } s) \Rightarrow (q \text{ și non } r)))$

Proprietăți cu trecerea la complementară

Considerăm o mulțime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X față de T*). Fie p, q și r enunțuri. Să se demonstreze că au loc următoarele proprietăți:

- $A \setminus B \subseteq A$ ((p și non q)$\Rightarrow$ p)
- $\overline{A} \subseteq T$ (((non p)$\Rightarrow$**adevărat**) este **adevărat**)
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ ((p și q și non p) este **falsă**)
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ ((p și non p) este **falsă**)
- $A \cup \overline{A} = T$ ((p sau non p) este **adevărată**)
- **operația de trecere la complementară este idempotentă:** $\overline{\overline{A}} = A$ ((non non p) $\Leftrightarrow$ p)
- **legile lui de Morgan:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (non (p sau q) $\Leftrightarrow$ (non p și non q)) și $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ([non (p și q)] $\Leftrightarrow$ [(non p) sau (non q)])
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ (($p \Rightarrow q$) $\Leftrightarrow$ [(non q) $\Rightarrow$ (non p)]) (faptul că trecerea la complementară inversează sensul incluziunii se traduce în principiul reducerii la absurd)
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ (($p \Leftrightarrow q$) $\Leftrightarrow$ [(non p) $\Leftrightarrow$ (non q)])
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$ ([($p \Rightarrow q$) și ($p \not\Leftarrow q$)] $\Leftrightarrow$ [((non q) $\Rightarrow$ (non p)) și ((non q) $\not\Leftarrow$ (non p))])

Proprietăți cu trecerea la complementară

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ (trivial: (p și non q) $\Leftrightarrow$ (p și non q); dar, de fapt, proprietatea aceasta spune că: a alege dintre obiectele care satisfac p pe cele care nu satisfac q este totuna cu a alege dintre obiectele care nu satisfac q pe cele care satisfac p; aceasta s–ar putea scrie astfel: [p și (non q)] $\Leftrightarrow$ [(non q) și p])
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ ((p și non q) $\Leftrightarrow$ [p și non(p și q)])
- $A \setminus B = A$ ddacă $A \cap B = \emptyset$ ddacă $B \setminus A = B$ ([(p și (non q))$\Leftrightarrow$ p] ddacă [(p și q) este **falsă**] ddacă [(q și (non p))$\Leftrightarrow$ q]
- $A \setminus \emptyset = A$ ((p și (non **fals**))$\Leftrightarrow$ p)
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$ ([(p și q) este **falsă**] ddacă [$p \Rightarrow$(non q)] ddacă [$q \Rightarrow$(non p)])
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$ ([(p sau q) este **adevărată**] ddacă [(non q)$\Rightarrow$ p] ddacă [(non p)$\Rightarrow$ q])
- ($A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset$) ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ([[(p sau q) este **adevărată**] și [(p și q) este **falsă**]] ddacă ($p \Leftrightarrow$ non q) ddacă ($q \Leftrightarrow$ non p))

Produsul direct a două mulțimi

Notație

Pentru orice elemente a și b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a și b.

Definiție (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente)

Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{și} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, se definește *produsul cartezian* dintre A și B (numit și *produsul direct* dintre A și B) ca fiind mulțimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Produsul direct a două mulțimi

Remarcă (temă obligatorie)

Din faptul că $\emptyset$ este mulțimea fără elemente rezultă că, pentru orice mulțime A, $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

De asemenea, se demonstrează ușor că produsul cartezian este distributiv față de reuniunea, intersecția, diferența și diferența simetrică între mulțimi (și la stânga, și la dreapta), adică, pentru orice mulțimi A, B și C, au loc egalitățile:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ și $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ și $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
3. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ și $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
4. $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$ și $(B \Delta C) \times A = (B \times A) \Delta (C \times A)$

Aveți ca **temă obligatorie** demonstrarea tuturor acestor egalități. **Indicație:** se folosesc, în mod direct, definițiile acestor operații cu mulțimi. La (1) se folosește și "distributivitatea conjuncției față de disjuncție" (a doua echivalență logică amintită la începutul acestui curs), iar (4) poate fi demonstrată prin calcul direct, pe baza lui (1) și (3).

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

La operațiile cu mulțimi cunoscute până acum ($\cup, \cap, \setminus, \Delta, \times$) adăugăm **reuniunea disjunctă:**

Definiție

Fie A și B două mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a mulțimilor A și B ca fiind mulțimea notată $A \coprod B$ și definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Atunci:

$$A \coprod B = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Reuniunea disjunctă a două mulțimi

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a unui indice corespunzător mulțimii respective (un element diferit de cel atașat elementelor celeilalte mulțimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuție despre **familii arbitrare de mulțimi**, în cursul următor).
Într–adevăr, pentru orice mulțimi A și B, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$, pentru că, dacă, prin absurd, ar exista un element $\alpha \in (A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\})$, atunci, conform definiției produsului direct:

$$\alpha \in A \times \{1\}, \text{ adică există } a \in A \text{ a. î. } \alpha = (a, 1)$$
$$\text{și}$$
$$\alpha \in B \times \{2\}, \text{ adică există } b \in B \text{ a. î. } \alpha = (b, 2),$$
$$\text{prin urmare } (a, 1) = \alpha = (b, 2),$$
$$\text{deci } (a, 1) = (b, 2), \text{ adică}$$

$$\begin{cases} a = b \\ \text{și} \\ 1 = 2, & \text{iar această ultimă egalitate nu este satisfăcută,} \\ & \text{ceea ce înseamnă că am obținut o contradicție.} \end{cases}$$

Definiția unei funcții

Definiție

Fie A și B mulțimi oarecare. Se numește *funcție* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$. Scris desfășurat:

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in G) \text{ și }$$
$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in B \text{ și } d \in B \text{ și } (a, c) \in G \text{ și } (a, d) \in G) \Rightarrow c = d]]].$$

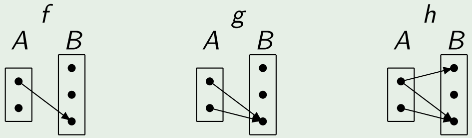
Faptul că f este o funcție de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulțimea A se numește *domeniul* funcției f, B se numește *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numește *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ și se numește *valoarea funcției f în punctul a*.

Exemplu

Care dintre următoarele corespondențe este o funcție de la A la B?



Egalitatea a două funcții

Remarcă

Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcție ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulțimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiție

Fie $f = (A, F, B)$ și $g = (C, G, D)$ două funcții ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

  $A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
  $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) și
  $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcții, ceea ce, conform scrierii acestor grafice din remarca anterioară, se transcrie în egalitate punctuală, adică egalitate în fiecare punct: pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulțime a. î. $X \subseteq A$ și $X \subseteq C$, atunci spunem că *f și g coincid pe X* ddacă f și g au aceleași valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Există o unică funcție de la $\emptyset$ la o mulțime arbitrară

Notație

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarcă (pentru orice B, $B^\emptyset$ are exact un element)

Fie B o mulțime oarecare (**poate fi vidă și poate fi nevidă**). Atunci există o unică funcție $f : \emptyset \to B$.

Într–adevăr, o funcție $f : \emptyset \to B$ trebuie să fie un triplet $f = (\emptyset, G, B)$, cu $G \subseteq \emptyset \times B = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, există cel mult o funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$ este unica posibilitate. Să arătăm că acest triplet satisface definiția funcției:

$$(\forall\, a \in \emptyset)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in \emptyset \Rightarrow (\exists\,!\, b)\,(b \in B \text{ și } (a, b) \in \emptyset)].$$

Pentru orice element a, proprietatea $a \in \emptyset$ este falsă, așadar, pentru orice element a, implicația $[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată. Iar acest lucru înseamnă exact faptul că întreaga proprietate $(\forall a)[a \in \emptyset \Rightarrow \ldots]$ este adevărată, deci f este funcție. Prin urmare, există o unică funcție $f : \emptyset \to B$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, B)$.

Nu există nicio funcție de la o mulțime nevidă la $\emptyset$

Remarcă (pentru orice $A \neq \emptyset$, $\emptyset^A = \emptyset$)

Fie A o mulțime **nevidă** (i. e. $A \neq \emptyset$). Atunci nu există nicio funcție $f : A \to \emptyset$. Într–adevăr, o funcție $f : A \to \emptyset$ trebuie să fie un triplet $f = (A, G, \emptyset)$, cu $G \subseteq A \times \emptyset = \emptyset$, deci $G = \emptyset$. Așadar, dacă ar exista o funcție $f : A \to \emptyset$, atunci am avea neapărat $f = (A, \emptyset, \emptyset)$. Să vedem dacă acest triplet verifică definiția funcției:

$$(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in \emptyset)\,((a, b) \in \emptyset), \quad \text{i. e.:}$$

$$(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow [(\exists\, b)\,(b \in \emptyset \text{ și } (a, b) \in \emptyset) \text{ și}$$
$$(\forall\, c)\,(\forall\, d)\,[(c \in \emptyset \text{ și } d \in \emptyset \text{ și } (a, c) \in \emptyset \text{ și } (a, d) \in \emptyset) \Rightarrow c = d]]].$$

Oricare ar fi elementul b, proprietatea $b \in \emptyset$ este falsă, deci, oricare ar fi elementele a și b, conjuncția $(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, deci, oricare ar fi elementul a, proprietatea $(\exists\, b)\,(b \in \emptyset$ și $(a, b) \in \emptyset)$ este falsă, așadar, oricare ar fi elementul a, conjuncția care succede mai sus implicației având ca antecedent pe $a \in A$ este falsă. În schimb, întrucât A este nevidă, rezultă că proprietatea $a \in A$ este adevărată pentru măcar un element a. Prin urmare, implicația $[a \in A \Rightarrow \ldots]$ de mai sus este falsă pentru cel puțin un element a, ceea ce înseamnă că întreaga proprietate $(\forall\, a)\,[a \in A \Rightarrow \ldots]$ este falsă, și deci f nu este funcție.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, orice funcție $f : A \to B$ și orice submulțimi $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulțimea lui B:
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$
- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ și se numește *imaginea lui f*:
$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$
- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărți, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulțimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcție), este submulțimea lui A:
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Funcții injective, surjective, bijective

Definiție

Fie A și B mulțimi și $f : A \to B$ o funcție. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puțin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$)
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiții echivalente:
  - f este simultan injectivă și surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall b \in B)(\exists !\, a \in A)(f(a) = b)$)

Funcțiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecții*, *surjecții*, respectiv *bijecții*.

Imaginea și preimaginea printr–o funcție

Remarcă

Pentru orice funcție $f : A \to B$, $f^{-1}(B) = A$.

Remarcă (temă – a se vedea și un exercițiu care urmează)

Pentru orice mulțimi nevide A și B și orice funcție $f : A \to B$, au loc incluziunile:

- pentru orice $K \subseteq M \subseteq A$, $f(K) \subseteq f(M)$;
- pentru orice $L \subseteq N \subseteq B$, $f^{-1}(L) \subseteq f^{-1}(N)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiție

- Pentru orice mulțime A, notăm cu id_A *funcția identică a lui* A (numită și *funcția identitate a lui* A sau *identitatea lui* A): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.
- Dacă A, B, C sunt mulțimi, iar $f : A \to B$ și $g : B \to C$ sunt funcții, atunci *compunerea funcției* g *cu funcția* f este funcția notată cu $g \circ f$ și definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Inversa unei funcții bijective

Definiție

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Următoarele proprietăți sunt cunoscute din liceu. A se vedea și exercițiul următor.

Remarcă (dacă există, inversa unei funcții este unică)

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$ o funcție inversabilă. Atunci există o unică funcție $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$.

Definiție

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$ o funcție inversabilă. Atunci unica funcție $g : B \to A$ cu proprietățile $g \circ f = id_A$ și $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) și se numește *inversa lui* f.

Remarcă

Fie A și B mulțimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exercițiu (caracterizarea surjectivității prin existența unei inverse la dreapta, și a injectivității prin existența unei inverse la stânga – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

1. f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform (3) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;
2. f este bijectivă ddacă $(\exists!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta și inversă la stânga pentru f;
3. f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform (1) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;
4. f este bijectivă ddacă $(\exists!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga și inversă la dreapta pentru f;
5. după cum știm, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ și $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} și se numește *inversa lui f*; dar, conform (1) și (3), avem și următoarea caracterizare a bijectivității: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ și $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (2) și (4), în caz afirmativ, g și h sunt unice și $g = h = f^{-1}$.

Proprietăți ale funcțiilor

Exercițiu (funcțiile imagine directă și imagine inversă – temă)

Fie A și B mulțimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcțiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalențe:

1. f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;
2. f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;
3. din (1) și (2), obținem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* și f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

Numere cardinale

Definiție

Două mulțimi A și B se zic *cardinal echivalente* ddacă există o funcție bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiție

Pentru orice mulțime A, se numește *cardinalul lui A* sau *numărul cardinal al lui A* clasa tuturor mulțimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Este simplu de demonstrat, folosind operații cu bijecții pe care le considerăm cunoscute din gimnaziu și liceu, că:

- pentru orice mulțime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecție), deci $A \in |A|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ și $|A| = |B|$, i. e. orice mulțime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; așadar avem chiar echivalențele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$
- pentru orice mulțimi A și B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulțime C cu proprietățile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) și $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); așadar avem chiar echivalențele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Operații cu numere cardinale

Definiție (suma, produsul și puterea de numere cardinale)

Pentru orice mulțimi A și B, avem, prin definiție:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Observăm că operațiile cu numere cardinale au fost definite în funcție de reprezentanți ai claselor date de cardinalele $|A|, |B|$, anume de mulțimile $A \in |A|$ și $B \in |B|$. Pentru ca definiția anterioară să fie corectă (și, în caz afirmativ, spunem că operațiile cu cardinali sunt *bine definite* ca mai sus), trebuie ca, dacă luăm, în definițiile de mai sus ale acestor operații, alți reprezentanți pentru clasele $|A|, |B|$, adică alte mulțimi $A' \in |A|$ și $B' \in |B|$, atunci, prin înlocuirea lui A cu A' și a lui B cu B' în egalitățile de mai sus, să obținem aceleași rezultate, i. e. aceleași cardinale. Această problemă se pune ori de câte ori definim ceva pentru clase prin intermediul unor *reprezentanți ai claselor* respective, adică al unor obiecte din clasele respective, în cazul acesta al unor mulțimi din respectivele clase de cardinal echivalență. Corectitudinea unei astfel de definiții înseamnă *independența* acelei definiții *de reprezentanții claselor*, adică faptul că, indiferent ce reprezentanți alegem pentru acele clase, obiectul definit nu se schimbă.

Operațiile cu numere cardinale sunt bine definite

Propoziție (independența de reprezentanți a operațiilor cu numere cardinale)

Operațiile cu numere cardinale, definite ca mai sus, **nu depind de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, *adică: pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Aveți ca **temă obligatorie** demonstrarea propoziției anterioare. Ca **indicație:** dacă $\varphi : A \to A'$ și $\psi : B \to B'$ sunt bijecții, atunci funcțiile $f : A \coprod B \to A' \coprod B'$, $g : A \times B \to A' \times B'$ și $h : B^A \to (B')^{(A')}$, definite prin: pentru orice $a \in A$, orice $b \in B$ și orice $p : A \to B$, $f(a, 1) := (\varphi(a), 1)$, $f(b, 2) := (\psi(b), 2)$, $g(a, b) := (\varphi(a), \psi(b))$ și $h(p) := \psi \circ p \circ \varphi^{-1}$, sunt, de asemenea, bijecții.

Observație

În indicația de mai sus, am folosit **licența de scriere (convenția)** ca în scrierea funcțiilor aplicate unor perechi de elemente să eliminăm o pereche de paranteze: de exemplu, scriem $g(a, b)$ în loc de $g((a, b))$.

Inegalități între numere cardinale

Definiție

Pentru orice mulțimi A și B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecție $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ și $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecție $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecție $f : A \to B$

Remarcă

Rezultă imediat, din faptul că o compunere de bijecții este bijecție și compunerea unei bijecții cu o injecție este injecție, că definiția anterioară este **independentă de reprezentanții claselor de cardinal echivalență**, i. e., pentru orice mulțimi A, A', B și B' astfel încât $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ și $B \cong B'$):

- există o injecție de la A la B ddacă există o injecție de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, așadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarcă

Este clar că, dacă A și B sunt mulțimi și $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcția incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Inegalități între numere cardinale

Remarcă (definiții echivalente pentru inegalități între numere cardinale)

Se demonstrează că, pentru orice mulțimi A și B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecție $t : B \to A$ ddacă [există o mulțime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecție $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecție $g : B \to A$] ddacă [există o mulțime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Într–adevăr, cu notațiile din definiția anterioară și cele de mai sus, se tratează cazul extrem $A = \emptyset$ separat, iar, în cazul $A \neq \emptyset$:

- pentru implicațiile directe, t și C pot fi definite prin:
  - $t(j(a)) = a$ pentru orice $a \in A$, și $t(b) \in A$, arbitrar, pentru $b \in B \setminus f(A)$; injectivitatea lui j arată că t este corect definită;
  - $C = B \setminus f(A)$,
- iar, pentru implicațiile reciproce, j poate fi definită prin:
  - pentru orice $a \in A$, $j(a) \in \{b \in B \mid t(b) = a\}$, arbitrar; faptul că t e funcție arată că j e injectivă;
  - respectiv $j(a) = (a, 1)$ pentru orice $a \in A$.

Observație

Pentru a demonstra caracterizările anterioare pentru inegalitățile între numerele cardinale, se poate folosi și exercițiul de mai sus privind caracterizarea surjectivității și a injectivității prin existența unei inverse la dreapta, respectiv la stânga.

Remarcă

Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulțimi A și B, $|A| = |B|$ ddacă $[|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|]$.

Notație

Desigur, folosim și notațiile $\geq$ și $>$, cu semnificația: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulțimi A și B.

Teoremă (Cantor)

Pentru orice mulțime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Demonstrație: Dacă $X = \emptyset$, atunci unica funcție $f : X = \emptyset \to \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, anume $f = (\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, este injecție, dar nu este surjecție, deci nu este bijecție.

Inegalități între numere cardinale. Teorema lui Cantor privind cardinalul mulțimii părților unei mulțimi

Într–adevăr, enunțul:

$$(\forall\, a_1, a_2 \in \emptyset)(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

este echivalent cu:

$$(\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)],$$

$$(\text{altfel scris: } (\forall\, a_1)\,(\forall\, a_2)\,[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset \text{ și } f(a_1) = f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2])$$

care este adevărat, pentru că, oricare ar fi a_1, a_2, enunțul $a_1 \in \emptyset$ și $a_2 \in \emptyset$ este fals, deci implicația $[(a_1 \in \emptyset \text{ și } a_2 \in \emptyset) \Rightarrow (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)]$ este adevărată. Așadar f este injectivă, deci $|\emptyset| \leq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Însă, pentru $b := \emptyset \in \{\emptyset\}$, nu există $a \in \emptyset$ cu $f(a) = b$, deoarece nu există $a \in \emptyset$ ($\emptyset$ nu are elemente). Așadar f nu este surjectivă, deci nu e bijectivă. Prin urmare, nu există nicio funcție bijectivă de la $\emptyset$ la $\{\emptyset\}$, deci $|\emptyset| \neq |\mathcal{P}(\emptyset)|$.
Rezultă că $|\emptyset| < |\mathcal{P}(\emptyset)|$.

Inegalități între numere cardinale. Teorema lui Cantor privind cardinalul mulțimii părților unei mulțimi

Pentru cele ce urmează, să presupunem că $X \neq \emptyset$.
Definim $j : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, pentru orice $x \in X$, $j(x) = \{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Funcția j este bine definită și injectivă, pentru că, oricare ar fi $x, y \in X$ cu $j(x) = j(y)$, i. e. $\{x\} = \{y\}$, rezultă $x = y$ (deoarece două mulțimi coincid ddacă au aceleași elemente). Așadar $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.
Să presupunem prin absurd că există o surjecție $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Deci, pentru orice $x \in X$, $g(x) \in \mathcal{P}(X)$, i. e. $g(x) \subseteq X$. Să notăm $A := \{x \in X \mid x \notin g(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. g este surjectivă, prin urmare există un element $x_0 \in X$ a. î. $g(x_0) = A$.
Paradox: $x_0 \in g(x_0) = A$ sau $x_0 \notin g(x_0) = A$?
Dacă $x_0 \in g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \notin g(x_0) = A$.
Dacă $x_0 \notin g(x_0) = A = \{x \in X \mid x \notin g(x)\}$, rezultă că $x_0 \in g(x_0) = A$.
Am obținut o contradicție (în fiecare situație posibilă), prin urmare presupunerea făcută este falsă, adică nu există nicio surjecție $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, deci nu există nicio bijecție $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$, așadar $X \ncong \mathcal{P}(X)$, deci $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$.
Așadar $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

O construcție pentru mulțimea numerelor naturale

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcție echivalentă cu cea menționată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulțimea având drept elemente toate mulțimile de la pașii anteriori: $n+1$ (adică succesorul unui n) $= |\{0, 1, 2, \ldots, n\}|$. Iar mulțimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$. Ca o paranteză, aici trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiția de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparține unei mulțimi sau clase. Având mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ etc. în modul cunoscut din liceu. Mulțimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulțime infinită, mai precis o mulțime numărabilă.

- Ce este o *mulțime finită?*
- Ce este o *mulțime infinită?*
- Ce este o *mulțime numărabilă?*

Mulțimi numărabile

Notație

Cardinalul mulțimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunțat "alef 0":
$\aleph_0 := |\mathbb{N}|$.

Definiție

O mulțime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarcă

Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$. Într–adevăr, $\mathbb{N}^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})\}$, și se arată, la fel ca în demonstrația teoremei lui Cantor de mai sus pentru $(\emptyset, \emptyset, \{\emptyset\})$, că $(\emptyset, \emptyset, \mathbb{N})$ este funcție injectivă, dar nesurjectivă, prin urmare $0 = |\emptyset| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Iar, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \subseteq \mathbb{N}$, așadar $|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| \leq |\mathbb{N}|$, și, pentru orice funcție $f : \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \to \mathbb{N}$, dacă M este cel mai mare dintre numerele naturale $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n-1)$, atunci $M + 1 \in \mathbb{N}$, dar $M + 1 \notin Im(f)$, așadar f este nesurjectivă, deci nu e bijectivă, prin urmare $|\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| \neq |\mathbb{N}|$. Așadar, $n = |\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}| < |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Mulțimi infinite

Definiție

O mulțime X se zice *infinită*:

1. *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$
2. *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă
3. *în sens obișnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \ldots, n\}$

Teoremă

Cele trei definiții de mai sus ale mulțimilor infinite sunt echivalente.

Notă

Pentru demonstrația teoremei anterioare, a se vedea finalul primului capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002. Această demonstrație nu face parte din materia pentru examen.

Mulțimi finite

Desigur, o *mulțime finită* este, prin definiție, o mulțime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiția de mai sus a mulțimilor infinite *în sens obișnuit*:

Definiție

O *mulțime finită* este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Pentru a face mai clară legătura dintre mulțimile finite și construcția numerelor naturale prezentată mai sus, putem formula echivalent definiția anterioară, astfel: o mulțime finită este o mulțime X cu proprietatea că $X \cong \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (unde $n - 1$ este predecesorul lui n în $\mathbb{N}$, în construcția anterioară).
Desigur, am folosit **licența de scriere (convenția)**: $\{1, 2, \ldots, n\} = \emptyset$ pentru $n = 0$ (respectiv $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\} = \emptyset$ pentru $n = 1$).
Definiția anterioară spune că, în cazul mulțimilor finite, **cardinalul** semnifică **numărul de elemente**.

Remarcă

Conform definiției anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulțimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Mulțimi numărabile sau cel mult numărabile

Remarcă

Definiția mulțimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulțimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulțimi infinite. În particular, $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, și orice mulțime numărabilă este o mulțime infinită. Folosind și remarca anterioară, obținem că: orice cardinal finit (i. e. cardinal al unei mulțimi finite, adică număr natural) este strict mai mic decât orice cardinal transfinit.

Definiție

O *mulțime cel mult numărabilă* este o mulțime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

$\mathbb{N}$ este o mulțime infinită, deci, conform definiției mulțimilor infinite în sens Dedekind, poate fi pusă în bijecție cu o submulțime proprie (i. e. strictă, i. e. diferită de întreaga mulțime $\mathbb{N}$, i. e. strict inclusă în $\mathbb{N}$) a sa.

Notație

Amintim următoarea notație consacrată pentru un segment al mulțimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$\overline{a, b} := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \ldots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$$

Mulțimi numărabile

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum poate fi cazat un nou turist în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1, pe cel al camerei 1 în camera 2, pe cel al camerei 2 în camera 3 ș. a. m. d.. Iar noul turist este cazat în camera 0.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$? Definim $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $f(n) := n + 1$. f este o bijecție.

Exemplu

Un hotel are o infinitate de camere, numerotate cu numerele naturale, și toate camerele sale sunt ocupate. Cum pot fi cazați un milion de noi turiști în acel hotel?
Soluție: mutăm ocupantul camerei 0 în camera 1.000.000, pe cel al camerei 1 în camera 1.000.001, pe cel al camerei 2 în camera 1.000.002 ș. a. m. d.. Iar noii turiști sunt cazați în camerele $0, 1, 2, \ldots, 999.999$.
"Morala:" cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu $\mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1.000.000\}$? Definim $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \overline{0, 999.999}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = n + 1.000.000$. g este o bijecție.

$\mathbb{Z}$ este numărabilă

Exemplu

Pot fi date multe exemple de bijecții între $\mathbb{N}$ și submulțimi proprii ale sale, exemple care, desigur, ilustrează faptul că $\mathbb{N}$ este o mulțime infinită (a se revedea definiția mulțimilor infinite în sens Dedekind), dar și implică faptul că acele submulțimi proprii ale lui $\mathbb{N}$ sunt numărabile. De exemplu, cum punem pe $\mathbb{N}$ în bijecție cu mulțimea $2\mathbb{N}$ a numerelor naturale pare, cu mulțimea $2\mathbb{N}+1$ a numerelor naturale impare, sau cu mulțimea $7\mathbb{N}+3$ a numerelor naturale de forma $7k+3$, cu $k \in \mathbb{N}$? Răspuns: următoarele funcții sunt bijecții:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ f(n) := 2n; \\ g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ g(n) := 2n+1; \\ h : \mathbb{N} \to 7\mathbb{N}+3, & \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},\ h(n) := 7n+3. \end{array}$$

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă. Într–adevăr, funcția $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definită prin: pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, $h(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -2x-1, & \text{dacă } x < 0, \end{cases}$ este o bijecție.

$\mathbb{Q}$ este numărabilă

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale este numărabilă, fapt care poate fi demonstrat printr–o mare varietate de procedee, cum ar fi: punând mai întâi pe $\mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ în bijecție cu cu $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ prin $x \rightsquigarrow \frac{x}{x+1}$, apoi pe $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în bijecție cu $\mathbb{N}$ prin așezarea elementelor lui $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ în șirul $\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{0}{n+1}, \ldots$ și eliminarea duplicatelor din acest șir, iar pașii de până acum conduc, prin compunere de bijecții, la existența unei bijecții $\pi : \mathbb{Q} \cap [0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ cu $\pi(0) = 0$ (deci $\pi \mid_{\mathbb{Q} \cap (0,\infty)} : \mathbb{Q} \cap (0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este, la rândul ei, o bijecție), ceea ce permite obținerea unei bijecții $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, definite prin: pentru orice $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = \begin{cases} 2\pi(x), & \text{dacă } x \geq 0, \\ 2\pi(-x) - 1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$ A se vedea alte metode de a construi o bijecție între $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{N}$ în primul capitol al cărții: D. Bușneag, D. Piciu, *Lecții de algebră*, Editura Universitaria Craiova, 2002.

Notă

Demonstrarea faptului că $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ nu face parte din materia pentru examen.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție

O *mulțime nenumărabilă* este, prin definiție, o mulțime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulțime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarcă

Mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă (sigur că este infinită, în baza definiției lui Cantor pentru mulțimile infinite, deoarece include pe $\mathbb{N}$). Acest fapt poate fi arătat, de exemplu, prin **procedeul diagonal al lui Cantor**: să considerăm o funcție arbitrară $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ și, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, să scriem pe $f(n)$ ca fracție zecimală: $f(n) = [f(n)] + 0, a_{n,0}a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3} \dots a_{n,n}a_{n,n+1} \dots a_{n,k} \dots$, unde $[f(n)]$ este partea întreagă a lui $f(n)$ și $a_{n,0}, a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \dots$ sunt cifrele zecimale de după virgulă ale lui $f(n)$. Să considerăm un număr real b, cu scrierea ca fracție zecimală: $b = 0, b_0 b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$, cu cifrele zecimale $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ și cu proprietatea că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b_n \notin \{0, a_{n,n}, 9\}$ (eliminăm pe 0 și 9 pentru a evita cazul dat de egalitățile $1 = 1,(0) = 1,0000 \dots = 0,(9) = 0,9999 \dots$, ușor verificabile prin exprimarea cu fracții a acestor numere (raționale)). Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $b \neq f(n)$, pentru că b și $f(n)$ au a $(n+1)$–a zecimală diferită, ceea ce arată că f nu este surjectivă. Deci nu există nicio surjecție de la $\mathbb{N}$ la $\mathbb{R}$, așadar nu există nicio bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{R}$. În concluzie, $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

Definiție

Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ și se numește *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Remarcă

Nenumărabilitatea lui $\mathbb{R}$ poate fi demonstrată și prin remarca următoare și teorema lui Cantor privind inegalitatea strictă dintre cardinalul unei mulțimi arbitrare X și cardinalul mulțimii părților lui X.

Remarcă

Se poate arăta că $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$, în numeroase moduri, de exemplu ca mai jos.

Dacă notăm cu $Bin := \{x \in [0,1) \mid x$ are numai cifre de 0 și 1$\}$, atunci următoarea funcție este o bijecție: $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to Bin$, pentru orice $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\varphi(X) := 0, s_0 s_1 \ldots s_n \ldots \in Bin$, unde, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \notin X; \\ 1, & \text{dacă } n \in X. \end{cases}$

$\mathbb{R}$ este nenumărabilă

De la $[0,1)$ la *Bin* există o injecție, de exemplu o funcție care înlocuiește cifrele zecimale cu o reprezentare a lor în binar, fie pe același număr de cifre binare pentru fiecare cifră zecimală, fie doar având proprietatea prefixului. Deci $|[0,1)| \leq |Bin|$. Dar $Bin \subset [0,1)$, deci incluziunea este o injecție de la *Bin* la $[0,1)$, așadar $|Bin| \leq |[0,1)|$. Prin urmare $|[0,1)| = |Bin|$, adică există o bijecție $\psi : [0,1) \to Bin$. Funcțiile $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$, $(\forall\, x \in \mathbb{R})\, f(x) := e^x$, $g : (0,\infty) \to (0,1)$, $(\forall\, x \in (0,\infty))\, g(x) := x/(x+1)$ și $j : [0,1) \to (0,1)$, $(\forall\, x \in [0,1))\, j(x) := \begin{cases} 10^{-1}, & \text{dacă } x = 0, \\ 10^{-n-1}, & \text{dacă } x = 10^{-n}, \text{ pentru un } n \in \mathbb{N}^*, \\ x, & \text{altfel,} \end{cases}$ sunt bijecții.
Așadar, $f^{-1} \circ g^{-1} \circ j \circ \psi^{-1} \circ \varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ este o bijecție.

Notă

Demonstrația nenumărabilității lui $\mathbb{R}$, precum și cea a cardinal echivalenței lui $\mathbb{R}$ cu mulțimea părților lui $\mathbb{N}$, nu fac parte din materia pentru examen.

Ipoteza continuumului

- Este $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ primul cardinal infinit nenumărabil?
- **Ipoteza continuumului** (propusă de Georg Cantor, 1878; **prima problemă a lui Hilbert**): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $\aleph_0 = |\mathbb{N}| < \kappa < |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (Adică $\mathcal{C} = |\mathbb{R}|$ este primul cardinal infinit nenumărabil.)
- S-a demonstrat (Paul Cohen, 1963) că: **ipoteza continuumului** este o proprietate independentă de sistemele consacrate de axiome pentru teoria mulțimilor (Zermelo–Fraenkel, von Neumann–Bernays–Gödel etc.), i. e. nu poate fi nici demonstrată, nici infirmată pornind de la axiomele din aceste sisteme.
- **Ipoteza generalizată a continuumului** (generalizare a **ipotezei continuumului**, așa cum anunță și denumirea ei): Nu există niciun cardinal κ cu proprietatea că $|\mathbb{N}| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ sau $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$ sau $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \kappa < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))|$ ș. a. m. d..
- **Ipoteza generalizată a continuumului** implică **axioma alegerii**.

- Faptul că $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ arată că **nu există un cel mai mare cardinal** (după cum a demonstrat G. Cantor), întrucât, presupunând prin absurd că $\mu = |A|$ este cel mai mare cardinal, cu A mulțime, rezultă că $\mu = |A| < |\mathcal{P}(A)|$, deci $|\mathcal{P}(A)|$ este un cardinal strict mai mare decât μ, și avem o contradicție.
- În cursul următor, când vom vorbi despre funcții caracteristice, vom arăta că, oricare ar fi o mulțime X, $\mathcal{P}(X) \cong \{0,1\}^X = \{f \mid f : X \to \{0,1\}\}$, deci $|\mathcal{P}(X)| = |\{0,1\}^X| = |\{0,1\}|^{|X|} = 2^{|X|}$. Așadar, $\mathcal{C} = |\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{2^{\aleph_0}}$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| = 2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ ș. a. m. d..
- S–a demonstrat că numerele cardinale sunt total ordonate, i. e. oricare două cardinale κ și μ satisfac $\kappa \leq \mu$ sau $\mu \leq \kappa$.
- Mai mult, s–a demonstrat (Zermelo, 1904) că numerele cardinale sunt **bine ordonate**, ceea ce înseamnă, în esență, că numerele cardinale pot fi puse într–un șir $0 < 1 < 2 < \ldots < n < \ldots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \ldots$, unde $\aleph_1$ este primul cardinal (infinit) nenumărabil, $\aleph_2$ este primul cardinal (infinit) strict mai mare decât $\aleph_1$ ș. a. m. d..
- Așadar, **ipoteza continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, iar **ipoteza generalizată a continuumului** afirmă că $\mathcal{C} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, $2^{\aleph_2} = \aleph_3$ ș. a. m. d..
- A nu se înțelege că șirul de mai sus al cardinalelor ar fi numărabil!

Nu există numărul cardinal al tuturor numerelor cardinale

- Într–adevăr, nu numai că există o infinitate nenumărabilă de cardinale transfinite ("infinităţi distincte"), ci chiar totalitatea cardinalelor transfinite nu poate fi cuprinsă într–un număr cardinal transfinit ("numărul infinităţilor distincte este mai mare decât orice infinitate"), pentru că **nu există nicio mulţime de mulţimi care să conţină mulţimi de orice cardinal, adică reprezentanţi pentru toate clasele de cardinal echivalenţă**; altfel spus: o clasă care conţine mulţimi de orice cardinal nu este mulţime, ci este o **clasă proprie**. Într–adevăr, pentru orice mulţime de mulţimi S, rezultă că $T = \bigcup_{A \in S} A$ (reuniunea tuturor mulţimilor care sunt elemente ale lui S) este tot o mulţime, iar T are proprietatea că orice $A \in S$ satisface $A \subseteq T$, prin urmare $|A| \leq |T|$ (cu definiţia cu funcţii injective: funcţia incluziune $i : A \rightarrow T$, $i(a) = a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă; cu definiţia cu sumă de cardinale: $|T| = |A| + |T \setminus A|$), iar, cum $|T| < |\mathcal{P}(T)|$, rezultă că orice $A \in S$ are $|A| < |\mathcal{P}(T)|$, deci nu există în S mulţimi de cardinal mai mare sau egal cu $|\mathcal{P}(T)|$. Aşadar, mai mult: cardinalele elementelor oricărei mulţimi de mulţimi sunt mărginite superior (bineînţeles că şi inferior, întrucât $0 = |\emptyset|$ este primul număr cardinal).

Inegalități între numere cardinale finite și transfinite

- Sigur că nu există o mulțime a tuturor cardinalelor, pentru că numerele cardinale nenule sunt clase proprii (i. e. clase care nu sunt mulțimi), și, prin convenție, nu se permite unei clase proprii să aparțină unui alt obiect (a se revedea primul curs). Dar, chiar dacă nu am avea această restricție, cele de mai sus arată că nu am putea cuprinde toate numerele cardinale într–o mulțime.

Remarcă

Oricare ar fi mulțimile A și B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită și $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$; acest fapt rezultă din cel anterior și definiția lui Dedekind a mulțimilor infinite, care arată că, dacă $A \subsetneq B$, atunci nu există o bijecție între A și B ($A \ncong B$).

În plus, după cum arată definiția lui Cantor a mulțimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ și A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ și B este finită, atunci A este finită.

Proprietăți ale numerelor cardinale

- Faptul că există o unică mulțime vidă $\emptyset$ arată că numărul cardinal $0 = |\emptyset| = \{\emptyset\}$ este mulțimea cu unicul element $\emptyset$. Celelalte numere cardinale sunt clase proprii, după cum am menționat și mai sus.
- Dintre proprietățile operațiilor cu cardinale, menționăm: adunarea este asociativă, comutativă și cu elementul neutru 0, iar înmulțirea este asociativă, comutativă, cu elementul neutru 1 și distributivă față de adunare; adunarea, înmulțirea și ridicarea la putere sunt monoton crescătoare în ambele argumente.
- În cele ce urmează, κ, μ și ν vor fi numere cardinale arbitrare, și vom specifica faptul că un număr cardinal λ este finit prin $\lambda < \aleph_0$, iar faptul că un cardinal λ este transfinit prin $\lambda \geq \aleph_0$.

Observație

Conform celor de mai sus, faptul că o mulțime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, în cursurile și seminariile următoare, vom folosi și notația $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulțime A este finită.

Reguli de calcul cu numere cardinale finite și transfinite

- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa + \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa \cdot \mu = 0$ ddacă $[\kappa = 0$ sau $\mu = 0]$.
- Dacă $\kappa \neq 0$, $\mu \neq 0$ și $[\kappa \geq \aleph_0$ sau $\mu \geq \aleph_0]$, atunci $\kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.
- $\kappa^0 = 1$. În particular, $0^0 = 1$. Dacă $\kappa \neq 0$, atunci $0^\kappa = 0$.
- $1^\kappa = 1$. $\kappa^1 = \kappa$.
- $\kappa^{\mu+\nu} = \kappa^\mu \cdot \kappa^\nu$. $\kappa^{\mu \cdot \nu} = (\kappa^\mu)^\nu$. $(\kappa \cdot \mu)^\nu = \kappa^\nu \cdot \mu^\nu$.
- Dacă $1 < \kappa < \aleph_0$, $1 < \mu < \aleph_0$ și $\nu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\nu = \mu^\nu$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$ și $0 < \mu < \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = \kappa$.
- Dacă $\kappa \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.
- Dacă $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$, atunci $\kappa^\mu = 2^\kappa$.
- Dacă $2 \leq \kappa < \mu$ și $\mu \geq \aleph_0$, atunci $\kappa^\mu = 2^\mu$.

Notă

Demonstrațiile afirmațiilor anterioare care nu sunt justificate în acest curs sau în cursurile următoare nu fac parte din materia pentru examen.

Examenul aferent acestui curs

- **Subiectele de examen** vor consta numai din **exerciții** bazate pe teoria predată la curs și aplicațiile rezolvate la seminar. Toată teoria necesară pentru a înțelege lecțiile de curs și seminar (inclusiv baza de cunoștințe din învățământul preuniversitar la care se face apel) este considerată cunoscută în momentul predării acestor lecții.
- Nu vor exista la examen subiecte de teorie pură (de tipul enunțare și demonstrare a unor teoreme din curs, spre exemplu).
- **Timpul** pe care studenții îl vor avea la dispoziție pentru rezolvarea subiectelor de examen va fi de **2 ore** începând din momentul încheierii scrierii subiectelor pe tablă. Este interzisă părăsirea sălii de examen în prima oră a examenului, cronometrată din momentul încheierii scrierii subiectelor pe tablă.
- Studenții vor avea voie să aducă și să consulte la examen orice **materiale ajutătoare**, scrise de mână sau tipărite, dar nu vor avea voie în examen cu dispozitive electronice pornite.
- Fiecare student va aduce la examen propriile sale materiale ajutătoare. Nu este permis schimbul de materiale între studenți în timpul examenului.
- Fiecare student va prezenta la examen **carnetul de student** și **cartea de identitate/pașaportul**.

Examenul și temele obligatorii

- Fiecare student se va **semna** pe **fiecare foaie** din lucrarea de examen cu **numele** complet scris în clar și **numărul grupei** din care face parte.
- Fiecare student va scrie pe prima foaie a lucrării denumirea materiei (**logică matematică și computațională**) și data și ora examenului.
- Fiecare grupă va fixa examenul într–o altă zi sau la o altă oră față de examenele celorlalte grupe, **cu cel puțin 4 ore diferență** între orele la care vor fi programate să înceapă eventualele examene ale unor grupe diferite într–o aceeași zi.
- Prefer ca orele la care vor fi programate să înceapă examenele să fie cuprinse între $10:00$ dimineața și $16:00$.
- Dacă vor exista studenți care să fie nevoiți să dea examen la o altă grupă decât cea din care fac parte, atunci este de dorit ca acei studenți să mă anunțe cât mai din timp despre acest lucru.
- Fiecare grupă va primi, pentru **temele obligatorii** pe care le va aduce rezolvate și **redactate corespunzător**, **puncte din oficiu** la examen. **Termenele limită** pentru prezentarea **temelor obligatorii** sunt: pentru fiecare temă obligatorie dată (la curs sau la seminar), 4 săptămâni de cursuri din anul universitar plus o zi, începând cu ziua în care a fost dată tema.