

ANALIZĂ TOPOLOGICĂ

①

① Notatii uzuale : Fie A o multime nevidă:

- 1) $\overset{\circ}{A}$ = interiorul lui A .
- 2) \overline{A} = aderența / închiderea lui A .
- 3) A' = punct de acumulare
- 4) $\text{Fr}(A)$ = frontiera lui A .
- 5) $\text{Izo}(A)$ = mulțimea punctelor izolate.

OBS: Când mi se cere să facem analiza topologică a unei mulțimi, trebuie să determinăm $\overset{\circ}{A}$, \overline{A} , A' , $\text{Fr}(A)$, $\text{Izo}(A)$.

② SPAȚIU METRIC

(X, d) formează spațiu metric dacă:

1. $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in A$; pozitivă
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; nedegenerată
3. $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in A$; simetrie
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \forall x, y, z \in X$; inegalitatea triunghiului.

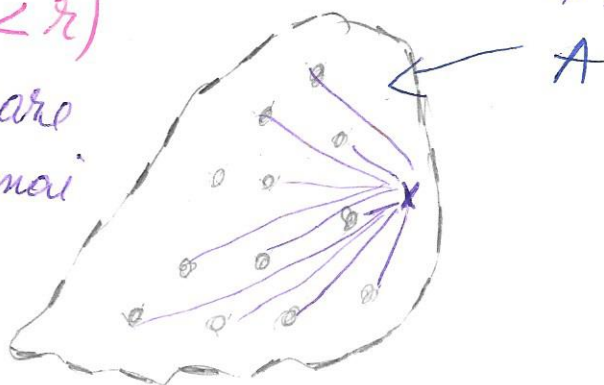
③ BILĂ DESCHISĂ : Notăție $B(x, r)$; unde x este centrul și $r > 0$

$$B(x, r) = \{y \in A \mid d(x, y) < r\}$$

(toate elementele din A , care se află la o distanță mai mică de x decât raza r)

ex:

$B(6, 5)$:



Bilă închisă

2

$$B[x, r] = \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$$

Alte notații: \tilde{B}, \bar{B} ;

• INTERIORUL LUI A .

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A \mid x \text{ punct interior al lui } A\}.$$

x este punct interior al lui $A \Leftrightarrow$

$$\exists r > 0, \text{ o } B(x, r) \subseteq A$$

OBS:

$$\overset{\circ}{A} \subseteq A$$

$\overset{\circ}{A}$ = cea mai mare mulțime deschisă, inclusă în A .

• PUNCT ADERENT

$$\bar{A} = \{x \in A \mid x \text{ punct aderent al lui } A\}$$

x punct aderent al lui $A \Leftrightarrow$

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

cu cel puțin un
element comun.

} în orice vecinătate
a lui x se găsește
cel puțin un punct
din A .

OBS:

$$1) A \subseteq \bar{A}$$

2) \bar{A} = cea mai mică submulțime închisă care-l
include pe A .

* vecinătate = orice interval deschis care îl cuprinde pe x
o lui x

PUNCT DE ACUMULARE

$$A' = \{x \in X \mid x \text{ punct de acumulare al lui } A\}$$

$$\forall r > 0, B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

Orice distanță r am alege, este cel puțin o bilă, care să nu includă elementul în sine

(Dacă în orice vecinătate a lui x se găsește cel puțin un element din A diferit de x).

OBS

$$A' \subseteq \bar{A}$$

$$\bar{A} = A \cup A'$$

FRONTIERA

$$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$$

Dacă este punct aderent al mulțimii \bar{A} ,
sau \bar{A} .
(complementul de A).

PUNCTE IZOLATE

$$Iso(A) = \bar{A} \setminus A'$$

Dacă \exists cel puțin o vecinătate a lui x , care nu conține niciun punct din A diferit de x .

NOTAȚIE	CEREREZINTĂ	FORMULĂ	ADICĂ
A°	interiorul lui A $A^\circ = \{x \in A \mid x \text{ pt interior}\}$ <i>cel mai mic mulțime deschisă, inclusă în A</i>	$\exists r > 0 \text{ a. } B(x, r) \subseteq A$	$(x-r, x+r) \subseteq A$
\bar{A}	aderență / închiderea lui A . $\bar{A} = \{x \in A \mid x \text{ pt aderent}\}$ <i>cea mai mică submulțime închisă, conș. inclusă pe A.</i>	$\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ <i>În orice vecinătate a lui x, \exists cel puțin un pct din A.</i>	$(x-r, x+r) \cap A \neq \emptyset$ $\boxed{\bar{A} = A \cup A'}$
A'	punct de acumulare $A' = \{x \in A \mid x \text{ pct de acumulare}\}$	$\forall r > 0, B(x, r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ <i>În orice vecinătate a lui x ne găsim cel puțin un elem. din $A \neq x$</i>	$(x-r, x+r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$
$\bar{r}_r(A)$	Frontiera lui A .	x este punct de frontieră, dacă este punct aderent pentru \bar{A} sau \bar{A}^c (complement)	$\bar{r}_r(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$
$I_{20}(A)$	Puncte izolate	Există cel puțin un punct în vecinătatea lui x , care nu conține niciun punct din A , diferit de x .	$I_{20}(A) = \bar{A} \setminus A'$
$B(x, r)$	Bila deschisă cu centru x și rază r .	$B(x, r) = \{y \in A \mid d(x, y) < r\}$ <i>Toate elementele din A, care se află la o distanță mai mică decât r față de x.</i>	$e.x: \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array}$
$B[x, r]$	Bila închisă cu centru x și rază r .	$B[x, r] = \{y \in A \mid d(x, y) \leq r\}$	$B(6, 5) \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \\ 1 \quad \quad 6 \end{array}$

