

LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI COMPUTAȚIONALĂ

Cursul XII

Claudia MUREȘAN

cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

- 1 Calculul clasic cu predicate
- 2 Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor
- 3 Sintaxa calculului cu predicate clasic
- 4 Semantica logicii clasice a predicatelor

1 Calculul clasic cu predicate

2 Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

3 Sintaxa calculului cu predicate clasic

4 Semantica logicii clasice a predicatelor

Calculul clasic cu predicate

- În a doua parte a acestui curs vom studia **logica clasică a predicatelor**.
- **Predicatele** se mai numesc **propoziții cu variabile**.
- **Exemplu de predicat:** “ x este un număr prim” este un predicat cu variabila x ; acest predicat nu are o valoare de adevăr; pentru a obține din el un enunț cu valoare de adevăr, trebuie să-i dăm valori variabilei x .
- Variabilei x i se indică un domeniu al valorilor posibile, de exemplu \mathbb{N} . Se dorește ca, prin înlocuirea lui x din acest predicat cu o valoare arbitrară din acest domeniu, să se obțină o propoziție adevărată sau falsă.
- Înlocuind în acest predicat pe $x := 2 \in \mathbb{N}$, se obține propoziția adevărată “2 este un număr prim”, iar înlocuind $x := 4 \in \mathbb{N}$, se obține propoziția falsă “4 este un număr prim”.
- Dacă desemnăm pe \mathbb{N} ca domeniu al valorilor pentru variabila x din predicatul de mai sus, atunci putem să aplicăm un cuantificator acestei variabile, obținând, astfel, tot un enunț cu valoare de adevăr: propoziția $(\forall x \in \mathbb{N}) (x \text{ este un număr prim})$ este falsă, în timp ce propoziția $(\exists x \in \mathbb{N}) (x \text{ este un număr prim})$ este adevărată. De fapt, în enunțuri cuantificate, vom considera domeniul valorilor variabilelor stabilit de la început, și nu-l vom mai preciza după variabilele cuantificate (“ $\in \mathbb{N}$ ”).

În ce fel de structuri algebrice pot lua valori variabilele?

- Așadar, pentru a exprima matematic modul de lucru cu predicate, avem nevoie nu numai de noțiunea de propoziție cu sau fără variabile și de conectori logici, ci și de un domeniu al valorilor pentru variabilele care apar în predicate (i. e. în propozițiile cu variabile).
- Pentru a descrie sistemul formal al calculului cu predicate clasic, vom avea nevoie de noțiunea de **structură de ordinul I**, reprezentând un anumit gen de structuri algebrice. Variabilele vor fi considerate ca luând valori în diverse **structuri de ordinul I**, și **clasa structurilor de ordinul I de un anumit tip** va avea asociată propria ei logică clasică cu predicate (îi vom asocia un limbaj, apoi un sistem logic bazat pe acel limbaj).
- Intuitiv, **structurile de ordinul I** sunt structuri algebrice care posedă o mulțime suport și operații, relații și constante (operații zeroare) pe această mulțime suport, i. e. operații și relații care acționează (numai) asupra elementelor mulțimii suport.
- Când, într-o structură algebrică, există operații sau relații care acționează asupra submulțimilor mulțimii suport, i. e. asupra unor mulțimi de elemente din mulțimea suport, atunci spunem că structura respectivă este o **structură de ordinul II**. În același mod (referindu-ne la mulțimi de mulțimi de elemente ș. a. m. d.) pot fi definite **structurile de ordinul III, IV etc..**

- 1 Calculul clasic cu predicate
- 2 Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor
- 3 Sintaxa calculului cu predicate clasic
- 4 Semantica logicii clasice a predicatelor

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

O *structură de ordinul I* este o structură de forma

$$\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i \in I}, (R_j)_{j \in J}, (c_k)_{k \in K}),$$

unde:

- A este o mulțime nevidă, numită *universul structurii* \mathcal{A}
- I, J, K sunt mulțimi oarecare de indici (care pot fi și vide)
- pentru fiecare $i \in I$, există $n_i \in \mathbb{N}^*$, a. î. $f_i : A^{n_i} \rightarrow A$ (f_i este o operație n_i -ară pe A)
- pentru fiecare $j \in J$, există $m_j \in \mathbb{N}^*$, a. î. $R_j \subseteq A^{m_j}$ (R_j este o relație m_j -ară pe A)
- pentru fiecare $k \in K$, $c_k \in A$ (c_k este o constantă din A)

În general, operațiilor și relațiilor din componența lui \mathcal{A} li se atașează indicele \mathcal{A} , pentru a le deosebi de simbolurile de operații și relații din limbajul pe care îl vom construi în continuare; astfel, structura de ordinul I de mai sus se notează, de regulă, sub forma: $\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i \in I}, (R_j^{\mathcal{A}})_{j \in J}, (c_k^{\mathcal{A}})_{k \in K})$.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate semnăturilor lor

Definiție

Tipul sau semnătura structurii de ordinul I \mathcal{A} din definiția anterioară este tripletul de familii de numere naturale: $\tau := ((n_i)_{i \in I}; (m_j)_{j \in J}; (0)_{k \in K})$.

Orice structură de forma lui \mathcal{A} de mai sus se numește *structură de ordinul I de tipul (sau semnătura) τ* .

Exemplu

- Orice poset nevid este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{P} = (P, \leq)$, de tipul (semnătura) $\tau_1 = (\emptyset; 2; \emptyset)$ (\leq este o relație binară). **Nu orice** structură de ordinul I de semnătura τ_1 este un poset.
- Orice latice nevidă este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$, de tipul (semnătura) $\tau_2 = (2, 2; 2; \emptyset)$ (\vee și \wedge sunt operații binare (i. e. de aritate 2, i. e. cu câte două argumente), iar \leq este o relație binară). **Nu orice** structură de ordinul I de semnătura τ_2 este o latice.
- Orice algebră Boole este o structură de ordinul I de forma $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, \leq, 0, 1)$, de tipul (semnătura) $\tau_3 = (2, 2, 1; 2; 0, 0)$ (\vee și \wedge sunt operații binare, \neg este o operație unară, \leq este o relație binară, iar 0 și 1 sunt constante (operații zeroare, i. e. de aritate zero, i. e. fără argumente)). **Nu orice** structură de ordinul I de semnătura τ_3 este o algebră Boole.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

- Fiecărei signaturi τ a unei structuri de ordinul I (fiecărei clase de structuri de ordinul I de o anumită signatură τ) i se asociază un limbaj, numit **limbaj de ordinul I** și notat, de obicei, cu \mathcal{L}_τ , în care pot fi exprimate proprietățile algebrice ale structurilor de ordinul I de signatura τ .
- Să considerăm o signatură $\tau := ((n_i)_{i \in I}; (m_j)_{j \in J}; (0)_{k \in K})$, pe care o fixăm.
- **Alfabetul limbajului de ordinul I** \mathcal{L}_τ este format din următoarele **simboluri primitive**:
 - 1 o mulțime infinită de **variabile**: $V = \{x, y, z, u, v, \dots\}$;
 - 2 **simboluri de operații**: $(f_i)_{i \in I}$; pentru fiecare $i \in I$, numărul natural nenul n_i se numește *ordinul* sau *aritatea* lui f_i ;
 - 3 **simboluri de relații**: $(R_j)_{j \in J}$; pentru fiecare $j \in J$, numărul natural nenul m_j se numește *ordinul* sau *aritatea* lui R_j ;
 - 4 **simboluri de constante**: $(c_k)_{k \in K}$;
 - 5 **simbolul de egalitate**: $=$ (un semn egal îngroșat) (*a nu se confunda cu egalul simplu!*);
 - 6 **conectorii logici primitivi**: \neg (*negația*), \rightarrow (*implicația*);
 - 7 **cuantificatorul universal**: \forall (*oricare ar fi*)
 - 8 paranteze: $(,), [,]$, precum și virgula.
- Pentru comoditate, vom spune uneori: “operații”, “relații” și “constante” în loc de “simboluri de operații”, “simboluri de relații” și “simboluri de constante”, respectiv.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Termenii limbajului \mathcal{L}_τ se definesc, recursiv, astfel:

- 1 variabilele și simbolurile de constante sunt termeni;
- 2 dacă f este un simbol de operație n -ară și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este un termen;
- 3 orice termen se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Definiție

Formulele atomice ale limbajului \mathcal{L}_τ se definesc, recursiv, astfel:

- 1 dacă t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică;
- 2 dacă R este un simbol de relație m -ară și t_1, \dots, t_m sunt termeni, atunci $R(t_1, \dots, t_m)$ este o formulă atomică;
- 3 orice formulă atomică se obține prin aplicarea regulilor (1) și (2) de un număr finit de ori.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație

Majoritatea autorilor consideră virgula ca având semnificație implicită, subînțeleasă, în scrierea termenilor și a formulelor atomice, și nu includ virgula în limbajul \mathcal{L}_T .

Definiție

Formulele limbajului \mathcal{L}_T se definesc, recursiv, astfel:

- ① formulele atomice sunt formule;
- ② dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă;
- ③ dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \rightarrow \psi$ este o formulă;
- ④ dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\varphi$ este o formulă;
- ⑤ orice formulă se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Notăție

Se notează cu $Form(\mathcal{L}_T)$ mulțimea formulelor limbajului \mathcal{L}_T .

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație

Și aici ne vom întâlni cu **inducția după un concept**, care va putea fi privită, ca și până acum, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție obișnuită după un număr natural (dat de numărul de pași necesari pentru a obține acel concept printr-o recursie).

De exemplu, inducția după termeni sau formule ne asigură de faptul că mulțimile variabilelor sunt definite pentru toți termenii, respectiv toate formulele, prin recursiile de mai jos.

Notăție

Introducem abrevierile: pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x :

- **conectorii logici derivați** \vee (*disjuncția*), \wedge (*conjuncția*) și \leftrightarrow (*echivalența*) se definesc astfel:

$$\varphi \vee \psi := \neg \varphi \rightarrow \psi$$

$$\varphi \wedge \psi := \neg (\varphi \rightarrow \neg \psi)$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$$

- **cuantificatorul existențial** \exists (*există*) se definește astfel:

$$\exists x \varphi := \neg \forall x \neg \varphi$$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Observație (convenție privind scrierea conectorilor logici, a cuantificatorilor și a simbolului de egalitate)

- \neg, \forall, \exists vor avea prioritate mai mare;
- $\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow, =$ vor avea prioritate mai mică.

Notăție (mulțimile din această notație vor fi definite recursiv mai jos)

Pentru orice termen t și orice formulă φ , notăm:

- $V(t) :=$ mulțimea variabilelor termenului t
- $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor *libere* ale formulei φ

Definiție

Pentru orice termen t :

- dacă $t = x$, unde x este o variabilă, atunci $V(t) := \{x\}$
- dacă $t = c$, unde c este o constantă, atunci $V(t) := \emptyset$
- dacă $t = f(t_1, \dots, t_n)$, unde f este un simbol de operație n -ară și t_1, \dots, t_n

sunt termeni, atunci $V(t) := \bigcup_{i=1}^n V(t_i)$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate semnăturilor lor

Definiție

Pentru orice formulă φ :

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, unde t_1 și t_2 sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := V(t_1) \cup V(t_2)$
- dacă $\varphi = R(t_1, \dots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m -ară și t_1, \dots, t_m sunt termeni, atunci $FV(\varphi) := \bigcup_{i=1}^m V(t_i)$
- dacă $\varphi = \neg \psi$, pentru o formulă ψ , atunci $FV(\varphi) := FV(\psi)$
- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ , atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x , atunci $FV(\varphi) := FV(\psi) \setminus \{x\}$

Remarcă

Este imediat, din definiția anterioară și definiția conectorilor logici derivați și a cuantificatorului existențial, că, pentru orice formule ψ, χ și orice variabilă x :

- $FV(\psi \vee \chi) = FV(\psi \wedge \chi) = FV(\psi \leftrightarrow \chi) = FV(\psi) \cup FV(\chi)$
- $FV(\exists x \psi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$

Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor

Definiție

Pentru orice variabilă x și orice formulă φ :

- dacă $x \in FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă liberă a lui φ* ;
- dacă $x \notin FV(\varphi)$, atunci x se numește *variabilă legată a lui φ* ;
- dacă $FV(\varphi) = \emptyset$ (i. e. φ nu are variabile libere), atunci φ se numește *enunț*.

Exemplu

- În formula $\exists x(x^2=x)$, x este variabilă legată. Această formulă este un enunț.
- În formula $\forall y \forall z (z \cdot x \leq y \cdot z)$, x este variabilă liberă.

Notăție (cum specificăm că nu avem alte variabile libere)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și x_1, \dots, x_n variabile.

Dacă t este un termen cu $V(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, atunci vom nota $t(x_1, \dots, x_n)$.

Dacă φ este o formulă cu $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, atunci vom nota $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Structuri de ordinul I și limbaje asociate semnăturilor lor

Observație (diferența dintre tipurile de variabile, intuitiv)

- **Variabilele libere** sunt variabilele care nu intră sub incidența unui cuantificator, variabilele cărora “avem libertatea de a le da valori”.
- **Variabilele legate** sunt variabilele care intră sub incidența unui cuantificator, deci sunt destinate parcurgerii unei întregi mulțimi de valori.

Definiție

Fie x o variabilă, $\varphi(x)$ o formulă și t un termen.

Formula obținută din φ prin *substituția lui x cu t* se notează cu $\varphi(t)$ și se definește astfel:

- fiecare $y \in V(t)$ se înlocuiește cu o variabilă $v \notin V(t)$ care nu apare în $\varphi(x)$, în toate aparițiile *legate* ale lui y în $\varphi(x)$;
- apoi se înlocuiește x cu t .

Exemplu

Fie variabilele x, y, z , formula $\varphi(x) := \exists y(x < y)$ și termenul $t := y + z$.

Atunci $\varphi(t)$ se obține astfel:

- $\varphi(x) = \exists y(x < y)$ se înlocuiește cu $\exists v(x < v)$;
- prin urmare, $\varphi(t) = \exists v(y + z < v)$.

- 1 Calculul clasic cu predicate
- 2 Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor
- 3 Sintaxa calculului cu predicate clasic
- 4 Semantica logicii clasice a predicatelor

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Axiomele calculului cu predicate clasic: pentru φ, ψ, χ formule arbitrare, t termen arbitrar, n, i numere naturale nenule arbitrare și $x, y, y_1, \dots, y_n, v_1, \dots, v_n$ variabile arbitrare:

- axiomele calculului propozițional:

$$(G_1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(G_2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(G_3) \quad (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

- regula $(\rightarrow \forall)$:

$$(G_4) \quad \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x\psi), \text{ dacă } x \notin FV(\varphi)$$

- o regulă privind substituțiile:

$$(G_5) \quad \forall x\varphi(x, y_1, \dots, y_n) \rightarrow \varphi(t, y_1, \dots, y_n)$$

- axiomele egalității:

$$(G_6) \quad x=x$$

$$(G_7)$$

$$(x=y) \rightarrow (t(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) = t(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_n))$$

$$(G_8)$$

$$(x=y) \rightarrow (\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_n) = \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, y, v_{i+1}, \dots, v_n))$$

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notăție

Faptul că o formulă φ este *teoremă (formală) (adevăr sintactic)* a(l) lui \mathcal{L}_τ se notează cu $\vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

- 1 Orice axiomă e teoremă formală a lui \mathcal{L}_τ .
- 2 Pentru orice formule φ, ψ , $\frac{\vdash \psi, \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$ (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
- 3 Pentru orice formulă φ și orice variabilă x , $\frac{\vdash \varphi}{\vdash \forall x \varphi}$ (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
- 4 Orice teoremă formală se obține prin aplicarea regulilor (1), (2) și (3) de un număr finit de ori.

Sintaxa calculului cu predicate clasic

Notăție

Fie Σ o mulțime de formule ale lui \mathcal{L}_τ . Faptul că o formulă φ se deduce (formal) din ipotezele Σ (φ este consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ) se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ și se definește, recursiv, ca mai jos.

Definiție

Fie Σ o mulțime de formule ale lui \mathcal{L}_τ .

- 1 Orice axiomă a lui \mathcal{L}_τ se deduce formal din Σ .
- 2 $\Sigma \vdash \varphi$, oricare ar fi $\varphi \in \Sigma$.
- 3 Pentru orice formule φ, ψ ,
$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$$
 (regula de deducție *modus ponens* (MP)).
- 4 Pentru orice formulă φ și orice variabilă x ,
$$\frac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \forall x \varphi}$$
 (regula de deducție numită *principiul generalizării* (PG)).
- 5 Orice consecință sintactică a lui Σ se obține prin aplicarea regulilor (1), (2), (3) și (4) de un număr finit de ori.

Remarcă

Pentru orice formulă φ , are loc echivalența:

$$\emptyset \vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice mulțime de **formule** Σ , orice **enunț** φ și orice **formulă** ψ , are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

- 1 Calculul clasic cu predicate
- 2 Structuri de ordinul I și limbaje asociate signaturilor lor
- 3 Sintaxa calculului cu predicate clasic
- 4 Semantica logicii clasice a predicatelor

- Fie \mathcal{A} o structură de ordinul I de semnatură τ .
- Fixăm pe \mathcal{A} pentru cele ce urmează.
- A va fi universul structurii \mathcal{A} (mulțimea ei suport).
- Pentru fiecare simbol de operație f , fiecare simbol de relație R și fiecare simbol de constantă c din semnatura τ , notăm cu $f^{\mathcal{A}}$, respectiv $R^{\mathcal{A}}$, respectiv $c^{\mathcal{A}}$ operația, respectiv relația, respectiv constanta corespunzătoare din \mathcal{A} .

Definiție

O *interpretare* (sau *evaluare*, sau *semantică*) a limbajului \mathcal{L}_τ în structura \mathcal{A} este o funcție $s : V \rightarrow A$.

Fiecare variabilă $x \in V$ este "interpretată" prin elementul $s(x) \in A$.

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice termen t , definim recursiv elementul $t^{\mathcal{A}}(s) \in A$, ce reprezintă *interpretarea lui t în \mathcal{A}* :

- dacă $t = x$, cu x variabilă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := s(x)$
- dacă $t = c$, cu c constantă, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1, \dots, t_n)$, unde f este un simbol de funcție n -ară, iar t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $t^{\mathcal{A}}(s) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s), \dots, t_n^{\mathcal{A}}(s))$

Notăție

Pentru orice interpretare $s : V \rightarrow A$, orice variabilă x și orice element $a \in A$, notăm cu $s[\overset{x}{a}] : V \rightarrow A$ interpretarea definită prin: oricare ar fi $v \in V$,

$$s[\overset{x}{a}](v) := \begin{cases} a, & \text{dacă } v = x, \\ s(v), & \text{dacă } v \neq x. \end{cases}$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Definiție

Pentru orice interpretare s și orice formulă φ , *valoarea de adevăr a lui φ în interpretarea s* este un element din algebra Boole standard $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, notat cu $\|\varphi(s)\|_{\mathcal{A}}$ sau $\|\varphi(s)\|$, și definit, recursiv, astfel:

- dacă $\varphi = (t_1 = t_2)$, pentru doi termeni t_1, t_2 , atunci

$$\|\varphi(s)\| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) = t_2^{\mathcal{A}}(s), \\ 0, & \text{dacă } t_1^{\mathcal{A}}(s) \neq t_2^{\mathcal{A}}(s) \end{cases}$$

- dacă $\varphi = R(t_1, \dots, t_m)$, unde R este un simbol de relație m -ară, iar t_1, \dots, t_m sunt termeni, atunci

$$\|\varphi(s)\| := \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0, & \text{dacă } (t_1^{\mathcal{A}}(s), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \notin R^{\mathcal{A}} \end{cases}$$

- dacă $\varphi = \neg \psi$, pentru o formulă ψ , atunci $\|\varphi(s)\| := \overline{\|\psi(s)\|}$ în \mathcal{L}_2

- dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două formule ψ, χ , atunci

$$\|\varphi(s)\| := \|\psi(s)\| \rightarrow \|\chi(s)\| \text{ în } \mathcal{L}_2$$

- dacă $\varphi = \forall x \psi$, pentru o formulă ψ și o variabilă x , atunci

$$\|\varphi(s)\| := \bigwedge_{a \in A} \|\psi(s[\overset{x}{a}])\| \text{ în } \mathcal{L}_2$$

Semantica logicii clasice a predicatelor

Remarcă

Este imediat că, pentru orice interpretare $s : V \rightarrow A$, orice formule ψ, χ și orice variabilă x , au loc egalitățile:

- $\|(\psi \vee \chi)(s)\| = \|\psi(s)\| \vee \|\chi(s)\|$ în \mathcal{L}_2
- $\|(\psi \wedge \chi)(s)\| = \|\psi(s)\| \wedge \|\chi(s)\|$ în \mathcal{L}_2
- $\|(\psi \leftrightarrow \chi)(s)\| = \|\psi(s)\| \leftrightarrow \|\chi(s)\|$ în \mathcal{L}_2
- $\|(\exists x \psi)(s)\| = \bigvee_{a \in A} \|\psi(s[\overset{x}{a}])\|$ în \mathcal{L}_2

Lemă

Fie $s_1, s_2 : V \rightarrow A$ două interpretări. Atunci, pentru orice termen t , are loc implicația: $s_1 \upharpoonright_{V(t)} = s_2 \upharpoonright_{V(t)} \Rightarrow t^A(s_1) = t^A(s_2)$.

Propoziție

Fie $s_1, s_2 : V \rightarrow A$ două interpretări. Atunci, pentru orice formulă φ , are loc implicația: $s_1 \upharpoonright_{FV(\varphi)} = s_2 \upharpoonright_{FV(\varphi)} \Rightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|$.

Semantica logicii clasice a predicatelor

Corolar

Dacă φ este un enunț, atunci $\|\varphi(s)\|_{\mathcal{A}}$ nu depinde de interpretarea $s : V \rightarrow A$.

Notăție

Corolarul anterior ne permite să notăm, pentru orice enunț φ și orice interpretare $s : V \rightarrow A$, $\|\varphi(s)\|_{\mathcal{A}}$ cu $\|\varphi\|_{\mathcal{A}}$ sau $\|\varphi\|$.

Definiție

Pentru orice enunț φ , notăm:

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ ddacă } \|\varphi\|_{\mathcal{A}} = 1.$$

În acest caz, spunem că \mathcal{A} *satisface* φ sau φ *este adevărat în* \mathcal{A} sau \mathcal{A} *este model pentru* φ .

Pentru orice mulțime Γ de enunțuri, spunem că \mathcal{A} *satisface* Γ sau că \mathcal{A} *este model pentru* Γ ddacă $\mathcal{A} \models \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Gamma$. Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \models \Gamma$.

Remarcă

Este imediat, din definiția mulțimii variabilelor libere ale unei formule, că, dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ este o formulă, atunci $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ este un enunț.

Definiție

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice variabile x_1, \dots, x_n și orice formulă $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, notăm:

$$\mathcal{A} \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ ddacă } \mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

În acest caz, spunem că \mathcal{A} *satisface* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ sau $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ *este adevărată în* \mathcal{A} sau \mathcal{A} *este model pentru* $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Pentru orice mulțime Σ de formule, spunem că \mathcal{A} *satisface* Σ sau că \mathcal{A} *este model pentru* Σ ddacă \mathcal{A} este model pentru fiecare formulă din Σ . Notăm acest lucru cu $\mathcal{A} \models \Sigma$.

Remarcă

$$\mathcal{A} \models \emptyset.$$

- Renunțăm la fixarea structurii \mathcal{A} (**nu** și la fixarea semnăturii τ).

Definiție

Dacă φ este un enunț, atunci spunem că φ este *universal adevărat* (*adevăr semantic, tautologie*) ddacă $\mathcal{A} \models \varphi$, oricare ar fi structura de ordinul I \mathcal{A} de semnătură τ . Notăm acest lucru cu $\models \varphi$.

Definiție

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in V$ și $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ este o formulă, atunci spunem că $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ este *universal adevărată* (*adevăr semantic, tautologie*) ddacă enunțul $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ este universal adevărat. Notăm acest lucru cu $\models \varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Semantica logicii clasice a predicatelor

Definiție

Pentru orice mulțime Σ de formule și orice formulă φ , spunem că φ *se deduce semantic din ipotezele* Σ sau că φ *este consecință semantică a mulțimii de ipoteze* Σ ddacă φ este adevărată în orice model \mathcal{A} al lui Σ , i. e., pentru orice structură de ordinul I \mathcal{A} de semnatură τ , are loc implicația: $\mathcal{A} \models \Sigma \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi$. Notăm acest lucru prin: $\Sigma \models \varphi$.

Remarcă

Pentru orice formulă φ , are loc echivalența:

$$\emptyset \models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi.$$

Teoremă (Teorema deducției semantice)

Pentru orice mulțime de **formule** Σ , orice **enunț** φ și orice **formulă** ψ , are loc echivalența:

$$\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi.$$

Teoremă (Teorema de completitudine tare (Teorema de completitudine extinsă))

Pentru orice formulă φ și orice mulțime de formule Σ , are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \models \varphi.$$

În cazul particular în care $\Sigma = \emptyset$, din **Teorema de completitudine extinsă** obținem:

Corolar (Teorema de completitudine)

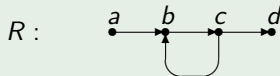
Pentru orice formulă φ , are loc echivalența:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \models \varphi.$$

Exercițiu

Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate clasic. Fie signatura $\tau = (1; 2; \emptyset)$ și structura de ordinul I de această signatură $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, unde $A = \{a, b, c, d\}$ este o mulțime cu 4 elemente, iar funcția $f^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ și relația binară $R^{\mathcal{A}}$ pe A vor fi notate respectiv cu f și R , și sunt definite prin: $f(a) = b, f(b) = c, f(c) = d, f(d) = a$ (vezi tabelul de mai jos) și $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\} \subset A^2$ (vezi reprezentarea grafică de mai jos). Să se calculeze valorile de adevăr ale enunțurilor: $\exists x (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ și $\exists x \forall y (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$.

x	a	b	c	d
$f(x)$	b	c	d	a



Semantica logicii clasice a predicatelor

Rezolvare: Amintim că, pentru orice $t, u \in A$:

$$\|R(t, u)\| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t, u) \in R, \\ 0, & \text{dacă } (t, u) \notin R. \end{cases}$$

Valoarea de adevăr a primului enunț este:

$$\begin{aligned} & \| \exists x (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x)) \| = \\ & \bigvee_{t \in A} (\|R(t, f(t))\| \wedge \|R(f(t), t)\|) = 1, \end{aligned}$$

pentru că:

$$\|R(b, f(b))\| \wedge \|R(f(b), b)\| = \|R(b, c)\| \wedge \|R(c, b)\| = 1 \wedge 1 = 1.$$

Al doilea enunț are valoarea de adevăr:

$$\begin{aligned} & \| \exists x \forall y (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y)) \| = \\ & \bigvee_{t \in A} \bigwedge_{u \in A} (\|R(u, f(f(t)))\| \vee \|R(f(t), u)\|) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), u)||) \right) \vee \\ & \left(\bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), u)||) \right) \vee \\ & \left(\bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), u)||) \right) \vee \\ & \left(\bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), u)||) \right) = \\ & 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0, \end{aligned}$$

pentru că:

$$||R(a, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), a)|| = ||R(a, c)|| \vee ||R(b, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{deci } \bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), u)||) = 0;$$

$$||R(a, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), a)|| = ||R(a, d)|| \vee ||R(c, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{deci } \bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), u)||) = 0;$$

$$||R(a, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), a)|| = ||R(a, a)|| \vee ||R(d, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{deci } \bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), u)||) = 0;$$

$$||R(d, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), d)|| = ||R(d, b)|| \vee ||R(a, d)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

$$\text{deci } \bigwedge_{u \in A} (||R(u, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), u)||) = 0.$$

Observație

Recomand cărțile de G. Georgescu din bibliografia din Cursul I, precum și alte lucrări din acea listă, pentru studiul **logicii clasice a predicatelor**. În aceste materiale bibliografice se găsesc mai multe rezultate decât cele enumerate mai sus, precum și demonstrații pentru toate aceste rezultate.