FMI, Info, Anul II, 2017-2018
Programare logică

Seminar 6
Rezoluţie SLD. Sisteme de rescriere.

Teorie pentru S6.1:

- O *clauză definită* este o formulă de forma:
  - $P(t_1, \ldots, t_n)$ (formulă atomică), unde P este un simbol de predicat, iar $t_1, \ldots, t_n$ termeni
  - $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$, unde toate P_i, Q sunt formule atomice.
- O regulă din Prolog $\mathtt{Q} :- \mathtt{P_1}, \ldots, \mathtt{P_n}$ este o clauză $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$, iar un fapt din Prolog $\mathtt{P}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$ este o formulă atomică $P(t_1, \ldots, t_n)$.
- O clauză definită $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \to Q$ poate fi gândită ca formula $Q \vee \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n$.
- Pentru o mulţime de clauze definite T, *regula rezolutiei SLD* este

$$\text{SLD} \quad \boxed{\frac{\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_i \vee \cdots \vee \neg P_n}{(\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_m \vee \cdots \vee \neg P_n)\theta}}$$

  unde $Q \vee \neg Q_1 \vee \cdots \vee \neg Q_m$ este o clauză definită din T (în care toate variabilele au fost redenumite) şi θ este c.g.u pentru P_i şi Q.

- Fie T o mulţime de clauze definite şi $P_1 \wedge \ldots \wedge P_m$ o ţintă, unde P_i sunt formule atomice. O derivare din T prin rezoluţie SLD este o secvenţă $G_0 := \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m$, G_1, …, G_k, … în care G_{i+1} se obţine din G_i prin regula SLD. Dacă există un k cu $G_k = \square$ (clauza vidă), atunci derivarea se numeşte *SLD-respingere*.

Teorema 1 (Completitudinea SLD-rezoluţiei)**.** *Sunt echivalente:*

(i) există o SLD-respingere a lui $P_1 \wedge \ldots \wedge P_m$ *din* T*,*

(ii) $T \vDash P_1 \wedge \cdots \wedge P_m$.

(S6.1) Găsiţi o SLD-respingere pentru următoarele programe Prolog şi ţinte:

(a)
```
1. r :- p,q.    5. t.    ?- w.
2. s :- p,q.    6. q.
3. v :- t,u.    7. u.
4. w :- v,s.    8. p.
```

(b)
```
1. q(X,Y) :- q(Y,X), q(Y,f(f(Y))).    ?- q(f(Z),a).
2. q(a,f(f(X))).
```

(c)
```
1. p(X) :- q(X,f(Y)), r(a).    4. r(X) :- q(X,Y).    ?- p(X), q(Y,Z).
2. p(X) :- r(X).               5. r(f(b)).
3. q(X,Y) :- p(Y).
```

Demonstraţie:

(a)

$G_0 = \neg w$

$G_1 = \neg v \vee \neg s$ (4)

$G_2 = \neg t \vee \neg u \vee \neg s$ (3)

$G_3 = \neg u \vee \neg s$ (5)

$G_4 = \neg s$ (7)

$G_5 = \neg p \vee \neg q$ (2)

$G_6 = \neg q$ (8)

$G_7 = \square$ (6)

(b)

$G_0 = \neg q(f(Z), a)$

$G_1 = \neg q(a, f(Z)) \vee \neg q(a, f(f(a)))$ (1 cu $\theta(X) = f(Z)$ şi $\theta(Y) = a$)

$G_2 = \neg q(a, f(Z))$ (2 cu $\theta(X) = a$)

$G_3 = \square$ (2 cu $\theta(Z) = f(X)$)

(c)

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y, Z)$

$G_1 = \neg r(X_1) \vee \neg q(Y, Z)$ (2 cu $\theta(X) = X_1$)

$G_2 = \neg q(Y, Z)$ (5 cu $\theta(X_1) = f(b)$)

$G_3 = \neg p(Z_1)$ (3 cu $\theta(X) = Y_1$ şi $\theta(Y) = Z_1$)

$G_4 = \neg r(X)$ (2 cu $\theta(Z_1) = X$)

$G_5 = \square$ (5 cu $\theta(X) = f(b)$)

$\square$

Teorie pentru S6.2:

Fie T o mulţime de clauze definite şi o ţintă $G_0 = \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m$. Un *arbore SLD* este definit astfel:

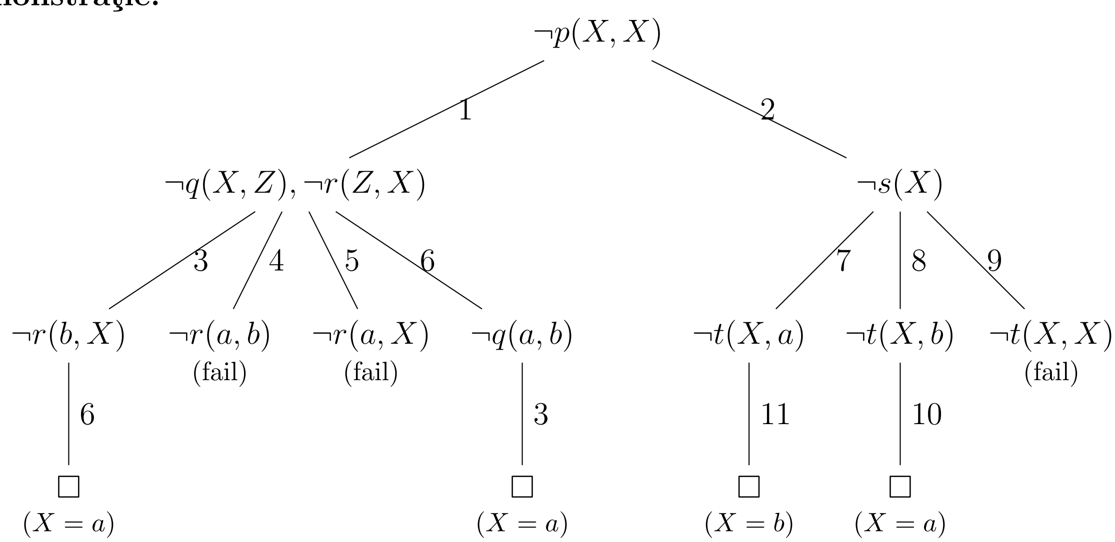
- Fiecare nod al arborelui este o ţintă (posibil vidă)
- Rădăcina este G_0
- Dacă arborele are un nod G_i, iar G_{i+1} se obţine din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in T$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1}. Muchia dintre G_i şi G_{i+1} este etichetată cu C_i.

Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\square$ (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din T.

(S6.2) Desenaţi arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos şi ţinta `?- p(X,X).`

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```

Demonstraţie:



$\square$

Teorie pentru S6.3:

- Pentru un limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$, o *regulă de rescriere* $l \to r$ este formată din doi termeni $l, r \in Trm_{\mathcal{L}}$ astfel încât l nu este variabilă şi $Var(r) \subseteq Var(l)$.
- Un *sistem de rescriere (TRS)* este o mulţime finită de reguli de rescriere.
- Dacă R este un sistem de rescriere, pentru $t, t' \in Trm_{\mathcal{L}}$ definim relaţia $t \to_R t'$ astfel:

$$\boxed{\begin{array}{lll} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(l)] \text{ şi} \\ & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta_s(r)], \text{ unde} \\ & & c \text{ context, } l \to r \in R, \theta \text{ substituţie} \end{array}}$$

- Un termen t este *reductibil* dacă există un termen t' astfel îcât $t \to t'$.
- Un termen t este *în formă normală* (ireductibil) dacă nu este reductibil.
- t_0 este *o formă normală a lui* t dacă $t \xrightarrow{*} t_0$ şi t_0 este în formă normală.
- t_1 şi t_2 *se intâlnesc* ($t_1 \downarrow t_2$) dacă există $t \in T$ a.î. $t_1 \xrightarrow{*} t \xleftarrow{*} t_2$.

(S6.3) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă 0, un simbol de funcţie s de aritate 1 şi un simbol de funcţie f de aritate 2. Folosind sistemul de rescriere

$$R = \{f(g(x)) \to g(x),\ g(f(x)) \to g(x)\},$$

rescrieţi termenii $t_1 = f(f(g(f(g(0)))))$ şi $t_2 = f(f(0))$ până la o formă normală. Caracterizaţi formele normale ale sistemului R.

Demonstraţie:

Forma normală a lui t_1 este $g(g(0))$, deoarece

$$t_1 = f(f(g(f(g(0))))) \to_R f(f(g(g(0)))) \to_R f(g(g(0))) \to_R g(g(0)),$$

iar t_2 este în formă normală.

Formele normale pentru sistenul R sunt $f(\ldots(f(0))\ldots)$, $g(\ldots(g(0))\ldots)$ şi 0. $\square$

Teorie pentru S6.4:

- Un sistem de rescriere se numeşte

- *noetherian:* dacă nu există reduceri infinite $t_0 \to t_1 \to t_2 \to \ldots$.
- *confluent:* $t_1 \stackrel{*}{\leftarrow} t \stackrel{*}{\to} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$.
- *complet* (convergent, canonic): confluent şi noetherian.

- Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

  (i) $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,

  (ii) există t un subtermen al lui l_1 care nu este variabilă
  ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)

  (iii) există θ c.g.u pentru t şi l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

  Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numeşte *pereche critică.*

$$\begin{tikzcd}
 & \theta(l_1) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
\theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)]
\end{tikzcd}$$

Teorema 2 (Teorema Perechilor Critice)**.** *Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:*

(i) R este confluent,

(ii) $t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).

(S6.4) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu două simboluri de funcţie f şi g de aritate 1. Cercetaţi dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluent:

$$R = \{f(f(x)) \to g(x)\}.$$

Demonstraţie:

Se observă că R este noetherian, deci putem aplica Teorema Perechilor Critice. Determinăm perechile critice ale sistemului R. Redenumind variabilele, considerăm $l_1 \to r_1, l_2 \to r_2 \in R$ ca fiind $f(f(x)) \to g(x)$ şi $f(f(y)) \to g(y)$, respectiv. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(x)$ şi $f(f(x))$. Investigăm fiecare caz:

- $t := f(x)$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(z)$. Mai mult, $\theta(x) = f(y)$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $P_1 = (g(f(y)), f(g(y)))$.

- $t := f(f(x))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $P_1 = (g(y), g(y))$.

Evident $g(y) \downarrow g(y)$, dar $g(f(y)) \not\downarrow f(g(y))$ deoarece $g(f(y))$ şi $f(g(y))$ sunt deja în formă normală. Din Teorema Perechilor Critice obţinem că R nu este confluent. $\square$

(S6.5) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu trei simboluri de constantă a, b şi c, un simbol de funcţie g de aritate 1 şi un simbol de funcţie f de aritate 2. Cercetaţi dacă sistemul de rescriere de mai jos este confluent:

$$R = \{f(x, x) \to a, \quad f(x, g(x)) \to b, \quad c \to g(c)\}.$$

Demonstraţie:

Se observă că R nu se termină:

$$c \to_R g(c) \to_R g(g(c)) \to_R \ldots .$$

În concluzie nu putem aplica Teorema perechilor critice pentru a stabili confluenţa. Se observă că:

$$\begin{tikzcd}
 & f(c,c) \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
a & & f(c,g(c)) \arrow[dr] & \\
 & & & b
\end{tikzcd}$$

Cum $a \not\downarrow b$, sistemul R nu este confluent. $\square$

(S6.6) Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu trei simboluri de constantă a, b şi c, un simbol de funcţie g de aritate 1 şi un simbol de funcţie f de aritate 2. Găsiţi perechile critice pentru sistemul de rescriere:

$$R = \{f(x, x) \to a, \quad f(x, g(x)) \to b, \quad c \to g(c)\}.$$

Demonstraţie:

Printre cazurile posibile, se numără:

- Cazul $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \to \mathbf{a}$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \to \mathbf{a}$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică (a, a).
- **Cazul** $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \to \mathbf{a}$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})) \to \mathbf{b}$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul** $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \to \mathbf{a}$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{c} \to \mathbf{g}(\mathbf{c})$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul** $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \to \mathbf{b}$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{g}(\mathbf{y})) \to \mathbf{b}$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
  - $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, $\theta(x) = y$ este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică (b, b).
- **Cazul** $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x})) \to \mathbf{b}$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{c} \to \mathbf{g}(\mathbf{c})$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = f(x, z)$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
  - $\mathbf{t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{g}(\mathbf{x}))$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Nu există c.g.u. pentru t şi l_2.
- **Cazul** $\mathbf{l_1} \to \mathbf{r_1} = \mathbf{c} \to \mathbf{g}(\mathbf{c})$ şi $\mathbf{l_2} \to \mathbf{r_2} = \mathbf{c} \to \mathbf{g}(\mathbf{c})$. Considerăm subtermenii t ai lui l_1 care nu sunt variabile:
  - $\mathbf{t} = \mathbf{c}$. Observăm că $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pentru contextul $c = z$. Mai mult, orice substituţie este c.g.u. pentru t şi l_2. Obţinem perechea critică $(g(c), g(c))$.

În concluzie, perechile critice pentru R sunt (a, a), (b, b) şi $(g(c), g(c))$. $\square$