CONȚINUTUL CURSULUI #8:

IV. Interpolarea Lagrange.
- IV.4. Algoritmul Neville de determinare a polinomului Lagrange P_n.
- IV.5. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n.

V. Interpolarea Hermite.

Fie $1 \leq m_1 < m_2 < ... < m_{k+1} \leq n+1$ un sistem de numere de la 1 la $n+1$. Notăm cu $P_{m_1,m_2,...,m_{k+1}}(x)$ polinomul de interpolare Lagrange care interpolezaă funcția $f(x)$ relativ la diviziunea $(x_{m_i})_{i=\overline{1,k+1}}$, i.e.

$$P_{m_1,m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_i}) = f(x_{m_i}),\ i = \overline{1, k+1} \quad (1)$$

Se observă că

$$P_n(x) \equiv P_{1,2,...,n+1}(x),\ x \in [a, b] \quad (2)$$

Vom demonstra în continuare următoarea formulă:

$$P_{m_1,m_2,...,m_{k+1}}(x) = \frac{(x - x_{m_1})P_{m_2,...,m_{k+1}}(x) - (x - x_{m_{k+1}})P_{m_1,m_2,...,m_k}(x)}{x_{m_{k+1}} - x_{m_1}} \quad (3)$$

Expresiile din ambele părți ale relației (3) sunt polinoame de gradul k, așadar, pentru demonstrarea egalității este suficient să demonstrăm că acestea coincid în $k+1$ valori distincte. Deoarece $P_{m_1,m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_i}) = f(x_{m_i})$, $i = \overline{1, k+1}$, este natural să verificăm dacă aceste relații sunt verificate și de polinomul din membrul drept al relației (3).

Considerăm următoarele cazuri:

- $m_i = m_1$:

$$\frac{(x_{m_1} - x_{m_1})P_{m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_1}) - (x_{m_1} - x_{m_{k+1}})P_{m_1,m_2,...,m_k}(x_{m_1})}{x_{m_{k+1}} - x_{m_1}} =$$
$$= P_{m_1,m_2,...,m_k}(x_{m_1}) = f(x_{m_1})$$

- $m_i = m_{k+1}$:

$$\frac{(x_{m_{k+1}} - x_{m_1})P_{m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_{k+1}}) - (x_{m_{k+1}} - x_{m_{k+1}})P_{m_1,m_2,...,m_k}(x_{m_{k+1}})}{x_{m_{k+1}} - x_{m_1}} =$$
$$= P_{m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_{k+1}}) = f(x_{m_{k+1}})$$

- $m_i \in \{m_2, ..., m_{k+1}\}$

$$\frac{(x_{m_i} - x_{m_1})P_{m_2,...,m_{k+1}}(x_{m_i}) - (x_{m_i} - x_{m_{k+1}})P_{m_1,m_2,...,m_k}(x_{m_i})}{x_{m_{k+1}} - x_{m_1}} =$$
$$= \frac{(x_{m_i} - x_{m_1})f(x_{m_i}) - (x_{m_i} - x_{m_{k+1}})f(x_{m_i})}{x_{m_{k+1}} - x_{m_1}} = f(x_{m_i})$$

Se construiește următorul șir recurent:

$\{x_1\} : P_1(x) = f(x_1)$

$\{x_2\} : P_2(x) = f(x_2)$

$\vdots$

$\{x_{n+1}\} : P_{n+1}(x)$

$$\{x_1, x_2\} : P_{1,2}(x) = \frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{x_2 - x_1}$$

$$\{x_2, x_3\} : P_{2,3}(x) = \frac{(x - x_2)P_3(x) - (x - x_3)P_2(x)}{x_3 - x_2}$$

$\vdots$

$$\{x_n, x_{n+1}\} : P_{n,n+1}(x) = \frac{(x - x_n)P_{n+1}(x) - (x - x_{n+1})P_n(x)}{x_{n+1} - x_n}$$

$\vdots$

$$\{x_1, ..., x_{n+1}\} : P_{1,2,...,n+1}(x) = \frac{(x - x_1)P_{2,...,n+1}(x) - (x - x_{n+1})P_{1,2,...,n}(x)}{x_{n+1} - x_1}$$

Obținem următorul tabel:

x_i	$P_{m_1}(x)$	$P_{m_1,m_2}(x)$	$P_{m_1,m_2,m_3}(x)$	$P_{m_1,m_2,m_3,m_4}(x)$	...
x_1	$\boxed{P_1(x) = f(x_1)}$ $\searrow$				
x_2	$P_2(x) = f(x_2)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{P_{1,2}(x)}$ $\searrow$			
x_3	$P_3(x) = f(x_3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$P_{2,3}(x)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{P_{1,2,3}(x)}$ $\searrow$		
x_4	$P_4(x) = f(x_3)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$P_{3,4}(x)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$P_{2,3,4}(x)$ $\longrightarrow$ $\searrow$	$\boxed{P_{1,2,3,4}(x)}$ $\searrow$	
...	...	...	...	...	...

Pentru x fixat considerăm matricea Q definită prin:

$$Q_{ij} = P_{i-j+1,\ldots,i}(x), i,j = \overline{1, n+1} \tag{4}$$

Obținem următoarea formulă de recurență:

$$Q_{i,j} = \frac{(x - x_{i-j+1})P_{i-j+2,\ldots,i}(x) - (x - x_i)P_{i-j+1,\ldots,i-1}(x)}{x_i - x_{i-j+1}} =$$
$$= \frac{(x - x_{i-j+1})P_{i-(j-1)+1,\ldots,i}(x) - (x - x_i)P_{(i-1)-(j-1)+1,\ldots,i-1}(x)}{x_i - x_{i-j+1}} =$$
$$= \frac{(x - x_{i-j+1})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}$$

Se observă că elementele matricei Q_{ij} coincid cu polinoamele din tabel.

ALGORITM (Metoda Neville)

Date de intrare: $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$; $(y_i)_{\overline{1,n+1}}$; x;
Date de ieșire: y;

STEP 1: `Se determină matricea` Q

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$$
$$Q_{ij} = \frac{(x - x_{i-j+1})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}},$$
$$i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

STEP 2: `Determină` $P_n = Q_{n+1,n+1}$;

STEP 3: $y = P_n$.

Exemplu 1: Să se afle, conform algoritmului Neville, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Nodurile diviziunii sunt: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$P_1(x) = f(x_1) = e^{-2}, P_2(x) = f(x_2) = e^0 = 1,$$
$$P_3(x) = f(x_3) = e^2;$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{x_2 - x_1} = \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)x + 1,$$
$$P_{2,3}(x) = \frac{(x - x_2)P_3(x) - (x - x_3)P_2(x)}{x_3 - x_2} = x(e^2 - 1) + 1,$$
$$P_{1,2,3}(x) = \frac{(x - x_1)P_{2,3}(x) - (x - x_3)P_{1,2}(x)}{x_3 - x_1}$$
$$= 1 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}x + \frac{e^2 + e^{-2} - 2}{2}x^2.$$

IV.4. Metoda Newton cu diferențe divizate de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Definiția (IV.1.)

Fie funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *și o diviziune* $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$.

(i) *S.n. diferența divizată (DD) de ordin* 0 *a lui* f *în raport cu nodul* x_1*:*

$$f[x_1] := f(x_1)$$

(ii) *S.n. DD de ordin* 1 *a lui* f *în raport cu nodurile* x_1, x_2*:*

$$f[x_1, x_2] := \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

(iii) *S.n. DD de ordin* 2 *a lui* f *în raport cu nodurile* x_1, x_2, x_3*:*

$$f[x_1, x_2, x_3] := \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

Definiția (IV.1. continuare)

(iv) *S.n. DD de ordin n a lui f în raport cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:*

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] := \frac{f[x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_{n+1} - x_1}$$

Propoziția (IV.1.)

Pentru orice $n \geq 1$, are loc relația:

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)} \tag{5}$$

Demonstrație: Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$.
$n = 1$: Conform definiției DD de ordin 1 a lui f în raport cu nodurile x_1 și x_2, are loc relația:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}$$

$n \longmapsto n + 1$: Conform definiției diferenței divizate de ordin $n + 1$ a lui f în raport cu nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x_{n+2}$, are loc relația:

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}] = \frac{f[x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]}{x_{n+2} - x_1}$$
$$= \frac{1}{x_{n+2} - x_1}\left(\sum_{i=2}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)}\right)$$

$$= \frac{1}{x_{n+2} - x_1}\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)} + \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq n+2}}^{n+2}(x_{n+2} - x_j)}\right.$$
$$\left. - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(x_i - x_j)} - \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n+1}(x_1 - x_j)}\right)$$
$$= \sum_{i=2}^{n+1}\left(\frac{x_i - x_1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)} - \frac{x_i - x_{n+2}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)}\right)\frac{f(x_i)}{x_{n+2} - x_1}$$
$$+ \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n+2}}^{n+2}(x_{n+2} - x_j)} + \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n+2}(x_1 - x_j)}$$
$$= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)} + \frac{f(x_{n+2})}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n+2}}^{n+2}(x_{n+2} - x_j)} + \frac{f(x_1)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n+2}(x_1 - x_j)}$$

Teorema (IV.2. formula de interpolare a lui Newton cu DD)

Polinomul de interpolare Lagrange de gradul n asociat funcției $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ și nodurilor de interpolare $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ este dat de formula

$$P_n(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2]\,(x - x_1) + \ldots \tag{6}$$
$$+f[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \tag{7}$$
$$= f[x_1] + \sum_{i=2}^{n+1} f[x_1, \ldots, x_i]\prod_{j=1}^{i-1}(x - x_j), \qquad x \in [a, b] \tag{8}$$

Demonstrație: Se demonstrază prin inducție după $n \geq 1$.
$n = 1$: Are loc relația:

$$P_1(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2)$$
$$= L_{1,1}(x)f(x_1) + L_{1,2}(x)f(x_2) = P_1(x)$$

$n \longmapsto n+1$: Au loc următoarele identități:

$$P_{n+1}(x) = f(x_1) + \sum_{i=2}^{n+2} f[x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=1}^{i-1}(x - x_j)$$

$$= P_n(x) + f[x_1, \ldots, x_{n+2}] \prod_{j=1}^{n+1}(x - x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k} f(x_k) + \sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+2}(x_i - x_j)} \prod_{j=1}^{n+1}(x - x_j)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\prod_{j=1}^{n+1}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2}(x_k - x_j)} f(x_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot \frac{x_k - x_{n+2}}{x - x_{n+2}} + \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \cdot \frac{x - x_k}{x - x_{n+2}} \right) f(x_k)$$

$$+ \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n+2}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_{n+2} - x_j} f(x_{n+2}) = \sum_{k=1}^{n+1} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) + \prod_{\substack{j=1\\ j\neq n+2}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_{n+2} - x_j} f(x_{n+2})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+2} L_{n+1,k}(x) f(x_k) = P_{n+1}(x)$$

Construim în continuare următorul tabel cu diferențe divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$\boxed{f[x_1] = f(x_1)}$ $\searrow$				
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$ $\rightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2]}$ $\searrow$			
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$ $\rightarrow$ $\searrow$	$f[x_2, x_3]$ $\rightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3]}$ $\searrow$		
x_4	$f[x_4] = f(x_3)$ $\rightarrow$ $\searrow$	$f[x_3, x_4]$ $\rightarrow$ $\searrow$	$f[x_2, x_3, x_4]$ $\rightarrow$ $\searrow$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4]}$ $\searrow$	
...	...	...	...	...	...

Fie matricea Q, matricea inferior triunghiulară definită astfel:

$$Q_{ij} = f[x_{i-j+1}, ..., x_i] \tag{9}$$

Se observă că elementele matricei coincid cu diferențele divizate din tabel.

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2	DD ordin 3	...
x_1	$\boxed{f[x_1] = Q_{11}}$				
x_2	$f[x_2] = Q_{21}$	$\boxed{f[x_1, x_2] = Q_{22}}$			
x_3	$f[x_3] = Q_{31}$	$f[x_2, x_3] = Q_{32}$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3] = Q_{33}}$		
x_4	$f[x_4] = Q_{41}$	$f[x_3, x_4] = Q_{42}$	$f[x_2, x_3, x_4] = Q_{43}$	$\boxed{f[x_1, x_2, x_3, x_4] = Q_{44}}$	
...	...	...	...	...	...

Au loc următoarele relații:

$$f[x_{i-j+1}, ..., x_i] = \frac{f[x_{i-j+2}, ..., x_i] - f[x_{i-j+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}}$$

$$= \frac{f[x_{i-(j-1)+1}, ..., x_i] - f[x_{(i-1)-(j-1)+1}, ..., x_{i-1}]}{x_i - x_{i-j+1}}$$

Obținem astfel o relație de recurență pentru componentele matricei Q:

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, \quad j = \overline{2, n+1}, i = \overline{j, n+1} \tag{10}$$

Prima coloană a matricei Q se calculează conform formulei:

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}.$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Newton cu DD, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Construim tabelul diferențelor divizate:

x_i	DD ordin 0	DD ordin 1	DD ordin 2
-1	e^{-2}		
0	1	$1 - e^{-2}$	
1	e^2	$e^2 - 1$	$\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$

Pentru reprezentarea polinomului $P_2(x)$ păstrăm din tabel doar elementele de pe diagonala principală, i.e., $e^{-2}, 1 - e^{-2}$ și $\frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}$. Se obține

$$P_2(x) = e^{-2} + (1 - e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2} + e^2 - 2}{2}(x+1)x.$$

ALGORITM (Metoda Newton cu diferențe divizate)

Date de intrare: $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$; $(y_i)_{\overline{1,n+1}}$; x;

Date de ieșire: y;

STEP 1: Se determină matricea Q

$$Q_{i1} = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$$

$$Q_{ij} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j+1}}, i = \overline{2, n+1}, j = \overline{2, i};$$

STEP 2: Determină $P_n = Q_{11} + \sum_{k=2}^{n+1} Q_{kk}(x - x_1)...(x - x_{k-1})$

STEP 3: $y = P_n$.

V. Interpolarea Hermite.

Fie $\mathcal{P}_{2n+1}$ mulțimea polinoamelor de grad cu mult $2n+1$

$$\mathcal{P}_{2n+1} = \left\{H_{2n+1}(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_{2n+2}x^{2n+1} / \ a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, 2n+2}\right\} \quad (11)$$

Interpolarea Hermite a funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ constă în determinarea unui polinom $H_{2n+1}(x) \in \mathcal{P}_{2n+1}$, numit polinomul de interpolare Hermite de gradul $2n+1$, care satisface relațiile

$$H_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i), \ i = \overline{1, n+1} \quad (12)$$

Valorile $x_i, i = \overline{1, n+1}$ se numesc puncte sau noduri de interpolare.
Spunem că H_{2n+1} interpolează atât funcția f cât și derivata f', relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$.
Polinomul de interpolare Hermite de grad $2n+1$ asociat funcției $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și nodurilor de interpolare $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ este dat de formula

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[H_{n,k}(x)y_k + K_{n,k}(x)z_k\right], \ x \in \mathbb{R} \quad (13)$$

unde

$$y_k = f(x_k), z_k = f'(x_k), k = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

$$H_{n,k}(x) = [L_{n,k}(x)]^2 \left[1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x - x_k)\right], \ x \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n+1} \quad (15)$$

$$K_{n,k}(x) = [L_{n,k}(x)]^2 (x - x_k), \quad x \in \mathbb{R}, k = \overline{1, n+1} \quad (16)$$

Funcțiile $L_{n,k}$ sunt funcțiile de bază care intervin în formula polinomului Lagrange P_n din interpolarea Lagrange.
Vom demonstra în continuare că polinomul H_{2n+1} construit conform formulelor (13) - (16) satisface relațiile (12). În vederea demonstrării vom calcula următoarele mărimi: $H_{n,k}(x_i), H'_{n,k}(x_i), K_{n,k}(x_i), K'_{n,k}(x_i)$.

$$\begin{aligned} H_{n,k}(x_i) &= [L_{n,k}(x_i)]^2 \left[1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x_i - x_k)\right] \\ &= \delta_{ik}^2(1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x_i - x_k)) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases} = \delta_{ik} \end{aligned}$$

Derivând relația (15) se obține

$$H'_{n,k}(x) = 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x) \left[1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x - x_k)\right] + L_{n,k}^2(x) \left[-2L'_{n,k}(x_k)\right] \quad (17)$$

de unde

$$\begin{aligned} H'_{n,k}(x_i) &= 2L_{n,k}(x_i)L'_{n,k}(x_i) \left[1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x_i - x_k)\right] + L_{n,k}^2(x_i) \left[-2L'_{n,k}(x_k)\right] \\ &= 2\delta_{ki}L'_{n,k}(x_i) \left[1 - 2L'_{n,k}(x_k)(x_i - x_k)\right] + \delta_{ki}^2 \left[-2L'_{n,k}(x_k)\right] \\ &= \begin{cases} 2L'_{n,k}(x_i), k = i \\ 0, k \neq i \end{cases} + \begin{cases} -2L'_{n,k}(x_i), k = i \\ 0, k \neq i \end{cases} = 0 \end{aligned}$$

De asemenea,

$$K_{n,k}(x_i) = [L_{n,k}(x_i)]^2 (x_i - x_k) = \delta_{ik}^2(x_i - x_k) = 0 \quad (18)$$

Derivând relația (16) se obține

$$K'_{n,k}(x) = 2L_{n,k}(x)L'_{n,k}(x)(x - x_k) + [L_{n,k}(x)]^2 \quad (19)$$

de unde

$$K'_{n,k}(x_i) = 2L_{n,k}(x_i)L'_{n,k}(x_i)(x_i - x_k) + [L_{n,k}(x_i)]^2 \quad (20)$$

$$= 2\delta_{ik}L'_{n,k}(x_i)(x_i - x_k) + \delta_{ik}^2 = \delta_{ik} \quad (21)$$

În sfârșit, verificăm relațiile (12):

$$H_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=1}^{n+1} [H_{n,k}(x_i)y_k + K_{n,k}(x_i)z_k] = \sum_{k=1}^{n+1}(\delta_{ik}y_k + 0 \cdot z_k) = y_i \quad (22)$$

$$H'_{2n+1}(x_i) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[H'_{n,k}(x_i)y_k + K'_{n,k}(x_i)z_k\right] = \sum_{k=1}^{n+1}(0 \cdot y_k + \delta_{ik}z_k) = z_i \quad (23)$$

Exemplu 3: Să se determine polinomul de interpolare Hermite de gradul 3, $H_3(x)$, astfel încât

$$H_3(0) = 0,\ H_3(1) = 1,\ H'_3(0) = 1,\ H'_3(1) = 0.$$

Rezolvare: Identificăm nodurile de interpolare $x_1 = 0, x_2 = 1$ și datele $y_1 = 0,\ y_2 = 1, z_1 = 1,\ z_2 = 0, n = 1$. Funcțiile $H_{1,1}, H_{1,2}, K_{1,1}, K_{1,2}$ se calculează conform formulelor:

$$H_{1,1}(x) = (L_{1,1}(x))^2(1 - 2L'_{1,1}(x_1)(x - x_1)),\ K_{1,1}(x) = (L_{1,1}(x))^2(x - x_1)$$
$$H_{1,2}(x) = (L_{1,2}(x))^2(1 - 2L'_{1,2}(x_2)(x - x_2)),\ K_{1,2}(x) = (L_{1,2}(x))^2(x - x_2)$$
$$L_{1,1}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},\ L_{1,2}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Avem, prin urmare,

$$L_{1,1}(x) = \frac{x-1}{-1} = 1 - x,\ L_{1,2}(x) = x$$
$$H_{1,1}(x) = (1-x)^2(1+2x),\ K_{1,1}(x) = (1-x)^2 x$$
$$H_{1,2}(x) = x^2(3-2x),\quad K_{1,2}(x) = x^2(x-1)$$

Astfel că,

$$H_3(x) = (1-x)^2(1+2x)\cdot 0 + x^2(3-2x) + (1-x)^2 x + x^2(x-1)\cdot 0$$
$$H_3(x) = -x^3 + x^2 + x \text{ și } H'_3(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

Se observă că H_3 verifică condițiile din enunț:

$$H_3(0) = 0,\ H_3(1) = 1,\ H'_1(0) = 1, H'_3(1) = 0.$$