# Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale

**- Ecuaţii cu derivate parţiale -**

**Prof.dr.** Ioan Roşca

# Contents

# Chapter 1

# Ecuaţii cu derivate parţiale

În acest capitol, după ce se stabilesc notaţiile folosite pe parcursul întregii cărţi (secţiunea 1) se definesc ecuaţiile şi sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale (secţiunea 2).

În secţiunea a treia se face o clasificare a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul doi, dîndu-se atunci cînd este posibil algoritmi de aducere la forma canonică a unei ecuaţii cu derivate parţiale. Utilizînd conul caracteristic asociat unui operator diferenţial liniar se face o clasificare a ecuaţiilor cu derivate parţiale de un ordin arbitrar.

Clasificarea sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale, utilizînd conul caracteristic, se face în secţiunea a patra. Pentru sistemele hiperbolice de ordinul întîi în două variabile independente se dă un algoritm de aducere la forma canonică. Acest prim capitol se încheie cu o secţiune de probleme şi exerciţii.

æ

## 1.1 Definiţii şi notaţii

În această secţiune se reamintesc cîteva notaţii şi rezultate clasice de analiză, geometrie, etc., rezultate necesare în tratarea problemelor ce fac obiectul acestui curs.

### 1.1.1 Puncte şi mulţimi în spaţii euclidiene

Vom nota cu $\mathbb{Z}$ mulţimea numerelor întregi, cu $R$ mulţimea numerelor reale, cu $\mathbb{C}$ mulţimea numerelor complexe. Punctele din $R^n$ vor fi în general notate prin $x, y, \xi, \zeta$; coordonatele lui $x$ fiind $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, unde $x_i \in R, \quad i = 1, \dots, n$.

Dacă $U$ este o submulţime a lui $R^n$ vom nota cu $\overset{\circ}{U}$ interiorul lui $U$ cu $\overline{U}$ inchiderea lui $U$; iar cu $\partial U$ frontiera lui $U$ adică $\partial U = \overline{U} \setminus \overset{\circ}{U}$.

Prin domeniu vom înţelege o mulţime deschisă U (nu în mod necesar conexă) cu $\partial U = \partial(R^n \setminus \bar{U})$, adică U nu are puncte frontieră interne.

Dacă $x$ şi $y$ sînt puncte din $R^n$, vom nota cu $x \cdot y$ produsul scalar dintre x şi y definit prin $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ , iar dacă $x$ şi $y$ sînt puncte din $\mathbb{C}^n$ produsul scalar dintre x şi y va fi notat tot prin $x \cdot y$ dar va fi definit prin $x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_n \bar{y}_n$ . Cu $||x||$ vom nota norma euclidiană a lui $x$ definită prin $||x|| = (x \cdot x)^{1/2} = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}$.

Vom nota cu $B(x, r) = \{y \in R^n; ||x - y|| < r\}$ bila centrată în $x$ şi de raza $r > 0$ iar cu $S(x, r) = \{y \in R^n; ||y - x|| = r\}$ sfera centrată în $x$ şi de raza $r$, adică frontiera bilei $B(x, r)$.

Vom scrie $G \subset\subset U$ cînd $\overline{G} \subset U$ şi $\overline{G}$ este o submulţime compactă din $R^n$. Dacă $x \in R^n$ şi $G \subset R^n$, notăm prin $dist(x, G)$ distanţa de la $x$ la $G$, adică numărul $\inf_{x \in G} ||x - y||$. Similar, dacă $F, G \subset R^n$,

$$dist(F, G) = \inf_{y \in F} dist(y, G) = \inf_{x \in G, y \in F} ||x - y||.$$

### 1.1.2 Multiindici şi derivate

Fie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un n-uplu de numere întregi nenegative, adică $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Un element $\alpha$ din $\mathbb{Z}_+^n$ se numeşte **multiindice sau multiindex**. Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $t \in \mathbb{Z}_+$, atunci

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) \quad \text{şi} \quad t\alpha = (t\alpha_1, \dots, t\alpha_n).$$

Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ şi $\alpha_i \geq \beta_i \ \forall i = 1, \dots, n$ atunci $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Notăm cu $e_i$ multiindicele din $\mathbb{Z}_+^n$ care are 1 pe pozitia $i$ şi zero în rest. Definim lungimea lui $\alpha$ prin $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Vom folosi factorialul, combinările, aranjamentele pentru multiindici, definite în felul următor:

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!; \quad C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots C_{\alpha_n}^{\beta_n} \quad ; A_\alpha^\beta = A_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots A_{\alpha_n}^{\beta_n}$$

Pe mulţimea multiindicilor $\mathbb{Z}_+^n$ utilizăm relaţia de ordine $\prec$ definită prin

$$\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \begin{cases} |\alpha| < |\beta| \\ \\ |\alpha| = |\beta| \text{ şi } \alpha_i < \beta_i \text{ unde } i \text{ este cel mai mare întreg cu } \alpha_i \neq \beta_i \end{cases}$$

De exemplu, dacă $\alpha = (3,1,0,1)$ şi $\beta = (1,2,1,1)$ atunci $\alpha \prec \beta$ ; iar dacă $\alpha = (1,4,1,1)$ şi $\beta = (2,3,1,1)$ atunci $\beta \prec \alpha$.

Multimea $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^3; |\alpha| < 3\}$ ordonată crescător este dată de $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(2,0,0),(1,1,0),(0,2,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.

Fiind date numerele reale $a_\alpha, (|\alpha| \leq k)$ vom nota $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ elementul din $R^{N(k)}$ dat de ordonarea lui $\alpha$ , în modul descris mai sus , unde $N(k)$ este cardinalul mulţimii $\{\alpha; |\alpha| \leq k\}$. Similar, dacă $S \subset \{\alpha; |\alpha| \leq k\}$ vom consideră $card(S)$-uplul $(a_\alpha)_{\alpha\in S}$.

Fiind date elementele $a_\alpha(|\alpha| \leq k), a_\alpha \in R^n$ vom nota $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ elementul din $R^{n\dot{N}(k)}$ dat de următoarea ordonare $((a_{j,\alpha})_{j=1,n})_{|\alpha|\leq k}$. Analog se prezintă situaţia cînd $a_\alpha \in \mathbb{C}$ sau $a_\alpha \in \mathbb{C}^n$.

Dacă $x \in R^n$ sau $\mathbb{C}^n$, iar $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, notăm $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ .

În general, operatorii diferenţiali vor fi notaţi cu ajutorul simbolurilor $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, iar derivata de ordin $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se exprimă prin

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \ldots \Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}.$$

Cînd $\alpha = (0,0,..,0)$, atunci $\partial^\alpha$ este operatorul identitate. Cu această notaţie este natural să notăm prin $\partial u$ , n-uplul de funcţii $(\partial u_1, \ldots, \partial_n u)$ cînd $u$ este o funcţie diferenţiabilă; deşi în cele mai multe cazuri vom folosi notaţiile obişnuite $grad\, u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$ sau $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$.

Dacă $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ este un n-uplu de funcţii continue pe mulţimea $V \subseteq R^n$ şi $u$ este o funcţie diferenţiabilă, definim derivata direcţională $\partial_\lambda u$ sau $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ pe $V$ prin

$$\partial_\lambda u(x) = \lambda(x) \cdot grad\, u(x) = \lambda(x) \cdot \nabla u(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \cdot \partial_j u(x).$$

Dacă $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$ atunci prin $\partial^\alpha u$ vom nota $(\partial^\alpha u_1, \ldots, \partial^\alpha u_n)^T$.

Unul din avantajele notaţiilor de mai sus , propuse de Laurent Schwartz, este scrierea sub o formă concisă a regulii de derivare a lui Leibnitz şi a formulei lui Taylor, şi anume

$$\partial^\alpha (u \cdot v) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta u\, \partial^\gamma v, \qquad f(x+\xi) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} \xi^\alpha \partial^\alpha f(x).$$

### 1.1.3 Spaţii de funcţii

Suportul unei funcţii $u$ definite pe $\Omega$ este complementara în $\Omega$ celei mai mari mulţimi deschise pe care $u = 0$, adică

$$supp\, u = \overline{\{x \in \Omega; \quad u(x) \neq 0\}}$$

Vom spune ca $u$ are suport compact în $\Omega$ dacă $supp\, u \Subset G$.

#### Spaţii de funcţii continue

Dacă $\Omega$ este o submulţime a lui $R^n$, notăm prin $C(\Omega)$ spaţiul funcţiilor continue pe $\Omega$ ( în raport cu topologia relativă pe $\Omega$). Dacă $\Omega$ este un deschis din $R^n$ vom nota prin:

- $C(\Omega)$ spaţiul funcţiilor continue pe $\Omega$.
- $C_0(\Omega)$ mulţimea funcţiilor continue cu suportul compact în $\Omega$,
- $C^k(\Omega)$ spaţiul funcţiilor continue ce posedă derivate continue pînă la ordinul $k$ pe $\Omega$, adică $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow R; \partial^\beta u \in C(\Omega), |\beta| \leq k\}$.
- $C_0^k(\Omega)$ mulţimea funcţiilor $u \in C^k(\Omega)$ cu suportul compact în $\Omega$,
- $C^k(\overline{\Omega})$ spaţiul acelor funcţii din $C^k(\Omega)$ cu proprietatea ca $u$ şi $\partial^\beta u$ ($|\beta| \leq k$) pot fi prelungite prin continuitate la $\overline{\Omega}$.
- $C^\infty(\Omega)$ spaţiul funcţiilor indefinit derivabile, adică $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\Omega)$.
- $C_0^\infty(\Omega)$ mulţimea funcţiilor din $C^\infty(\Omega)$ cu suportul compact în $\Omega$.
- $C^\infty(\overline{\Omega})$ spaţiul funcţiilor $u$ indefinit derivabile cu proprietatea că $\partial^\beta u$ admite o prelungire prin continuitate la $\overline{\Omega}$, adică $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(\overline{\Omega})$.
- $C^\alpha(\Omega)$ cu $0 < \alpha < 1$ spaţiul funcţiilor continue pe $\Omega$ care satisfac local o condiţie Hölder de exponent $\alpha$, adică $u \in C^\alpha(\Omega)$ cînd pentru orice compact $V \subset \Omega$ există o constantă $C > 0$ astfel ca
$$|u(x) - u(y)| \leq C||x - y||^\alpha, \quad \forall\, x, y \in V.$$
- $C^{k+\alpha}(\Omega)$ cu $k$ întreg şi $0 < \alpha < 1$, mulţimea acelor funcţii $u \in C^k(\Omega)$ astfel ca $\partial^\beta u \in C^\alpha(\Omega)$ pentru $|\beta| \leq k$ ( sau echivalent, numai pentru $|\beta| = k$).
- $C^\omega(\Omega)$ mulţimea funcţiilor real analitice pe $\Omega$. Funcţia $f : \Omega \longrightarrow R$ se zice **real analitică** în $y \in \Omega$ dacă există $c_\alpha \in R$ şi o vecinătate $V \in \mathcal{V}(y)$ astfel ca
$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} c_\alpha (x - y)^\alpha \qquad \forall x \in V.$$
O funcţie $f$ este real analitică în $\Omega$ dacă este real analitică în orice punct $y \in \Omega$.

æ

## 1.2 Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale

În această secţiune se defineşte ce se înţelege printr-o ecuaţie sau un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale, şi se dau cîteva exemple de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale ce intervin în mecanică şi fizica matematică.

### 1.2.1 Ecuaţii cu derivate parţiale

**DEFINIŢIA 1.2.1**

*Fie* $F : U \times V \subset R^n \times \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ *o funcţie de* $n + N$ *variabile, unde* $N = N(k)$ *este cardinalul mulţimii* $\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; |\alpha| \leq k\}$. *Funcţia* $F$ *defineşte* **ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul** $k$

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \tag{1.1}$$

In (1.1) se presupune tacit că măcar una din derivatele $\partial^\alpha u$ cu $|\alpha| = k$ apare efectiv în ecuaţie. Formularea generală (1.1) include şi ecuaţii absurde, de exemplu: $\exp(\partial_1 u) = 0$, la fel ca ecuaţia de tipul $(\partial_1 u)^2 - 4 = 0$, care este, în realitate, produsul a două ecuaţii diferite $\partial_1 u - 2 = 0$ şi $\partial_1 u + 2 = 0$. Nu vom formula restricţi pentru $F$ pînă cînd nu vom considera problemele specifice ecuaţiilor cu derivate parţiale.

**DEFINIŢIA 1.2.2**

*Ecuaţia cu derivate parţiale* (1.1) *se numeşte:*

- **liniară** *dacă* $F$ *este o funcţie afină în variabilele* $(u_\alpha)_{|\alpha| \leq k}$ *adică ecuaţia* (1.1) *se poate scrie sub forma*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x) \tag{1.2}$$

- **aproape liniară** *dacă* $F$ *este o funcţie afină în variabilele* $(u_\alpha)_{|\alpha|=k}$ *şi coeficienţii lui* $(\partial^\alpha u)_{|\alpha|=k}$ *sînt funcţii numai de* $x$, *adică ecuaţia* (1.1) *se poate scrie sub forma*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1})$$

- **cvasiliniară** *dacă* $F$ *este o funcţie afină în variabilele* $(u_\alpha)_{|\alpha|=k}$ , *adică ecuaţia* (1.1) *se poate scrie sub forma*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha\Big(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}\Big) \partial^\alpha u = f\Big(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| < k-1}\Big).$$

- **neliniară** *dacă nu intră în nici una din clasele de mai sus.*

Dacă notăm cu $P(x,\partial) = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ un **operator diferenţial liniar** de ordin $k$, ecuaţia (1.2) se scrie simplu sub forma $Pu = f$.

**DEFINIŢIA 1.2.3**

*O funcţie* $u : G \subset U \longrightarrow \mathbb{C}$ *( G deschisă) se numeşte* **soluţie clasică** *a ecuaţiei* (1.1) *dacă u este continuă şi toate derivatele* $\partial^\alpha u$ *ce apar explicit în F există şi sînt continue pe G,* $(\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leq k} \in V$ *pentru orice* $x \in G$ *şi ecuaţia* (1.1) *este verificată punctual, adică*

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{|\alpha|\leq k}) = 0 \quad \forall \ x \in G.$$

Pentru o ecuaţie liniară vom introduce şi un alt tip de soluţie. Dacă $u \in C^k(G)$ şi $f = P(x,\partial)u$, integrînd prin părţi ( de fapt utilizînd formula flux-divergenţă ) pentru orice $g \in C_0^\infty(\Omega)$ obţinem

$$\int_\Omega f(x)g(x)dx = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_G g(x)a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)dx =$$

$$= \sum_{\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_G u(x)\partial^\alpha(a_\alpha g)(x)dx = \int_G u(x)\ {}^tP(x,\partial)g(x)dx$$

unde ${}^tP(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq k}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha(x)\ \cdot)$ este **transpusul formal** al operatorului $P(x,\partial)$. Egalităţile de mai sus sugerează definiţia următoare:

**DEFINIŢIA 1.2.4**

*Dacă coeficienţii* $a_\alpha$ *aparţin spaţiului* $C^{|\alpha|}(G)$*, iar f aparţine spaţiului* $L^1_{loc}(G)$ *atunci u din* $L^1_{loc}(G)$ *se numeşte* **soluţie generalizată** *în sens Sobolev sau* **soluţie slabă** *a ecuaţiei (1.2) dacă*

$$\int_G f(x)g(x)dx = \int_G u(x)\ {}^tP(x,\partial)g(x)dx \qquad \forall g \in C_0^\infty(G)$$

*adică*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_G u\partial^\alpha(a_\alpha g)dx = \int_G fgdx \qquad \forall g \in C_0^\infty(G).$$

**Legătura dintre soluţia clasică şi soluţia generalizată**

Legătura dintre soluţia clasică şi cea generalizată va fi analizată în cele ce urmează.

**REMARCA 1.2.1**

- *Dacă* $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G)$, $|\alpha| \leq k$ *orice soluţie clasică a ecuaţiei* (1.2) *este o soluţie generalizată.*

- *Dacă $u$ este soluţie generalizată, în general, nu rezultă că $u$ este soluţie clasică, chiar mai mult, s-ar putea ca nici derivatele generalizate care intervin în operatorul $P(x, \partial)$ să nu existe.*

**Demonstraţie.** Prima afirmaţie, din remarcă, rezultă imediat dacă ţinem seama de calculele pe care le-am făcut înainte de definirea soluţiei generalizate.

Să observăm că funcţia $u : R^2 \longrightarrow R$ definită prin $u(x_1, x_2) = H(x_1 + x_2)$, unde $H(t) = 0$ cînd $t < 0$ şi $H(t) = 1$ cînd $t > 0$, numită funcţia Heaviside, este soluţie generalizată a ecuaţiei $\partial_1 u - \partial_2 u = 0$. Intr-adevăr, pentru orice $g \in C_0^\infty(R^2)$ avem:

$$\int_{R^2} u(x_1, x_2)^t(\partial_1 - \partial_2)g(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{R^2} u(x_1, x_2)(\partial_2 g - \partial_1 g)(x_1, x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{R^2} H(x_1 + x_2)(\partial_2 g - \partial_1 g)(x_1, x_2)dx_1dx_2 = -4\int_{R^2} H(y_1)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= -4\int_0^\infty \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_2}dy_2\Big)dy_1 = 0.$$

În calculele de mai sus s-a efectuat schimbarea de variabilă $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 - x_2$ notată $\chi$ şi s-a ţinut seama că funcţia $\tilde{g}$ definită prin $\tilde{g} = g \circ \chi^{-1}$, adică $\tilde{g}(y_1, y_2) = g((y_1 + y_2)/2, (y_1 - y_2)/2)$, este din $C_0^\infty(R^2)$. Deci $u$ este soluţie în sens generalizat a ecuaţiei $\partial_1 u - \partial_2 u = 0$.

Să arătăm că pentru funcţia $u$ nu există derivatele generalizate $\partial_1 u$ şi $\partial_2 u$. Presupunem că $h \in L^1_{loc}(R^2)$ este derivata generalizată a funcţiei $u$ în raport cu $x_1$, adică

$$\int_{R^2} h(x)g(x)dx = -\int_{R^2} u(x)\partial_1 g(x)dx \qquad \forall g \in C_0^\infty(R^2).$$

Dar

$$\int_{R^2} u(x_1, x_2)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_{R^2} H(x_1 + x_2)\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{R^2} H(y_1)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_1}(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_1}(y_1, y_2)dy_1\Big)dy_2 =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(0, y_2)dy_2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(-y_2, y_2)dy_2$$

deci

$$\int_{R^2} h(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(-t, t)dt, \quad \forall g \in C_0^\infty(R^2) \tag{1.3}$$

Pentru obţinerea formulei (1.3) s-a efectuat schimbarea de variabilă $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2$. notată $\chi$. Fie $D = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 + x_2 = 0\}$, $D_+ = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 + x_2 > 0\}$ şi $D_- = \{(x_1, x_2) \in R^2; x_1 + x_2 < 0\}$. Pentru orice $g \in C_0^\infty(D_+)$ respectiv $g \in C_0^\infty(D_-)$ din (1.3) rezultă $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(-t, t)dt = 0$, deci $h = 0$ a.p.t. în $D_+$ respectiv $D_-$. Cum $D$ este de măsură nulă în $R^2$ şi $R^2 = D_- \cup D \cup D_+$ rezultă că $h = 0$ a.p.t. în $R^2$ deci $\displaystyle\int_{R^2} h(x)g(x)dx = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(R^2)$, de unde folosind (1.3) rezultă $\int_{-\infty}^{+\infty} g(-t,t)dt = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(R^2)$. Dar evident, există funcţii $g \in C_0^\infty(R^2)$ astfel ca $\int_{-\infty}^{+\infty} g(-t,t)dt \neq 0$.

**REMARCA 1.2.2**

*Dacă soluţia generalizată u are toate derivatele generalizate ce apar în ecuaţia* (1.2), *atunci această funcţie satisface aproape peste tot în G ecuaţia* (1.2). *In plus dacă u este soluţie generalizată şi are toate derivatele clasice ce intervin în ecuaţie continue atunci această funcţie este soluţie clasică.*

**Demonstraţie.** Din definiţia soluţiei generalizate avem

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \int_G u(x)\partial^\alpha(a_\alpha g)(x)dx = \int_G f(x)g(x)dx, \forall g \in C_0^\infty(G) \tag{1.4}$$

Cum $a_\alpha \in C^{|\alpha|}(G)$ rezultă $a_\alpha g \in C_0^{|\alpha|}(G)$ şi utilizînd definiţia derivatei generalizate rezultă egalităţile

$$(-1)^{|\alpha|} \int_G u(x)\partial^\alpha(a_\alpha g)(x)dx = \int_G a_\alpha(x)g(x)\partial^\alpha u(x)dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(G) \tag{1.5}$$

Din (1.4) şi (1.5) se obţine

$$\int_G g(x)[P(x,\partial)u(x) - f(x)]dx = 0, \qquad \forall g \in C_0^k(G)$$

de unde folosind lema Raymond-Dubois (vezi anexa), rezultă că $P(x,\partial)u - f = 0$ a.p.t. în $G$. □

Dacă coeficienţii $a_\alpha$ aparţin spaţiului $C^\infty(G)$ putem aplică operatorul $P$ oricărei distribuţii $v$ pe $G$. Un element $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se numeşte **soluţie în distribuţii** dacă (1.2) are loc în sensul distribuţiilor, adică

$$\sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha(a_\alpha v)\rangle = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(G).$$

**Exemple de ecuaţii cu derivate parţiale**

Cîteva exemple de ecuaţii cu derivate parţiale care apar în mecanică, fizica matematică, etc. vor fi date în cele ce urmează. Acolo unde se poate, vom determina soluţia generală a ecuaţiei exemplificate.

**EXEMPLUL 1.2.1** Pentru ecuaţia $\partial_1 u = 0$ în $R^2$ soluţia generală este evident $u(x_1,x_2) = f(x_2)$ unde $f$ este o funcţie arbitrară.

Ecuaţia $\partial_1 u = 0$ dă informaţii complete despre comportarea lui u ca funcţie de $x_1$ (trebuie să fie constantă), dar nu dă nici o informaţie despre dependenţa funcţiei $u$ de $x_2$.

**EXEMPLUL 1.2.2** Soluţia generală a ecuaţiei $\partial_1\partial_2 u = 0$ este în $R^2$ dată de $u(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ unde $f$ şi $g$ sînt funcţii din $C^2(R)$.

Ecuaţia $\partial_1\partial_2 u = 0$ nu dă informatii despre dependenţa lui $u$ de $x_1$ sau $x_2$, spune doar că aceasta dependenţă este într-un anumit sens ,, necuplată “.

**EXEMPLUL 1.2.3** Operatorul $\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$ se numeşte **laplacian** (sau operatorul lui Laplace) şi se notează cu $\triangle_n$ (indicele $n$ indica faptul că acest operator se aplică funcţiilor de $n$ variabile ). Operatorul $\triangle$ este invariant la transformările ortogonale.

Intr-adevăr, dacă $T$ este o transformare ortogonală în $R^n$, deci o transformare de forma

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \quad \text{cu} \quad \sum_{1}^{n} t_{ij} t_{kj} = \delta_{ik} \quad \forall i, k = 1, \ldots, n$$

şi $v(y) = u(T^{-1}y)$, atunci $\triangle u(x) = \triangle v(Tx)$ pentru orice $x$ din $R^n$. Aceasta este o proprietate crucială a laplacianului, ceea ce face ca el să intervină în descrierea multor fenomene din mediile izotrope. Ecuaţia $\triangle u = 0$ poartă numele lui Laplace, iar ecuaţia $\triangle u = f$ poartă numele lui Poisson. Soluţiile ecuatiei lui Laplace se numesc **funcţii armonice**. Ecuaţia $\triangle u + k^2 u = f$ poartă numele lui Helmholtz .

**EXEMPLUL 1.2.4** Operatorul $\partial_{n+1}^2 - (\partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2)$ este **operatorul undelor** sau operatorul lui d'Alembert.

Acest operator intervine în studiul fenomenelor de propagare a undelor şi în descrierea fenomenelor de vibraţie. Grupul transformarilor liniare care invariază operatorul lui d'Alembert este grupul lui Lorentz ce intervine în studiul relativităţii.

**EXEMPLUL 1.2.5** Operatorii din exemplele de la 2.3) şi 2.4) sînt operatori de ordinul doi omogeni. Dacă punctul din $R^{n+1}$ este de forma $(x_1, \cdots, x_n, t)$ atunci operatorul

$$\partial_t - \triangle_n$$

este *operatorul căldurii* şi se utilizează la descrierea diferitelor fenomene de transfer, ca transferul căldurii în medii omogene, fenomene de difuzie, etc. Operatorul căldurii nu este omogen.

**EXEMPLUL 1.2.6** Un alt operator care diferă foarte puţin de operatorul căldurii şi anume $(1/i)\partial_t - \triangle_n$ intervine în ecuaţia lui Schrodinger şi a fost introdus pentru descrierea comportării electronului şi a altor particole elementare.

**EXEMPLUL 1.2.7** Ecuaţia

$$\Big[1 + (\partial_2 u)^2\Big]\partial_1^2 u - 2\partial_1 u \cdot \partial_2 u \cdot \partial_1\partial_2 u + \Big[1 + (\partial_1 u)^2\Big]\partial_2^2 u = 0$$

este cvasiliniară şi intervine în studiul unor probleme din calculul variaţional.

**EXEMPLUL 1.2.8** Un exemplu de ecuaţie neliniară de ordinul trei, pentru o funcţie $u$, este dat de ecuaţia Korteweg-de Vries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

ecuaţie ce a apărut pentru prima dată în studiul mişcării valurilor.

**EXEMPLUL 1.2.9** Ecuaţia

$$\partial_1^2 u \cdot \partial_2^2 u - (\partial_1 \partial_2 u)^2 = f(x_1, x_2)$$

numită ecuaţia lui Monge-Amper este o ecuaţie neliniară ce intervine în studiul suprafeţelor în geometrie.

### 1.2.2 Sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale

**DEFINIŢIA 1.2.5**

*Fie $F = (F_1, \ldots, F_q)^T : U \times V \subset R^n \times \mathbb{C}^{pN} \longrightarrow \mathbb{C}^q$ o aplicaţie $q$-dimensională de $n+pN$ variabile, unde $N = card\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; |\alpha| \leq k\}$. Aplicaţia $F$ defineşte un* **sistem de ordinul $k$ de $q$-ecuaţii cu derivate parţiale şi $p$ funcţii necunoscute**

$$F\Big(x, (\partial^\alpha u_1, \ldots, \partial^\alpha u_p)_{|\alpha| \leq k}\Big) = 0 \tag{1.6}$$

Pe componente un sistem de ordinul $k$ de $q$-ecuaţii şi $p$-funcţii necunoscute se scrie sub forma:

$$\begin{cases} F_1\Big(x, (\partial^\alpha u_1, \ldots, \partial^\alpha u_p)_{|\alpha| \leq k}\Big) = 0 \\ \vdots \\ F_q\Big(x, (\partial^\alpha u_1 \ldots, \partial^\alpha u_p)_{|\alpha| \leq k}\Big) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

În definiţia de mai sus se face presupunerea că $F_1, \cdots, F_q$ sînt independente, în sensul că nici una nu poate fi dedusă din celelalte prin derivare şi eliminare.

Ţinind seama de relaţia dintre $p$ şi $q$ se spune că sistemul este:

- **determinat** dacă $q = p$;
- **supradeterminat** dacă $q > p$ ;
- **subdeterminat** dacă $q < p$.

**DEFINIŢIA 1.2.6**

- *Sistemul (1.7) se zice* **liniar** *dacă aplicaţia $F$ este* **afină** *în* $(\partial^\alpha u_1, \ldots, \partial^\alpha u_p)_{|\alpha|\leq k}$, *adică*

$$\sum_{|\alpha|\leq k} A_\alpha(x)\partial^\alpha u = f(x)$$

*unde $A_\alpha(x)$ sînt matrici de tipul $q \times p$ iar $f(x)$ este un vector cu q-linii ($A_\alpha : G \longrightarrow L(\mathbb{C}^p,\mathbb{C}^q)$ , $f : G \longrightarrow \mathbb{C}^q$).*

- *Sistemul (1.7) se zice* **cvasiliniar** *dacă aplicaţia $F$ este afină* **numai** *în derivatele de ordinul $k$, adică*

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|\leq k-1})\partial^\alpha u = f(x, (\partial^\beta)_{|\beta|\leq k-1}).$$

Scris pe componente un sistem liniar de ordinul $k$ de $q$-ecuaţii şi $p$-funcţii necunoscute este de forma

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{j=1}^{p} \Big(A_\alpha(x)\Big)_{ij} \partial^\alpha u_j = f_i(x) \qquad \forall i = 1, \ldots, q$$

iar un sistem cvasiliniar este de forma

$$\sum_{|\alpha|=k} \sum_{j=1}^{p} \Big(A_\alpha(x, (\partial^\beta u_1, \ldots, \partial^\beta u_p)_{|\beta|\leq k-1})\Big)_{ij} \partial^\alpha u_j =$$

$$= f_i\Big(x, (\partial^\beta u_1, \ldots, \partial^\beta u_p)_{|\beta|\leq k-1}\Big) \quad \forall \;\; i \in \{1, \ldots, q\}.$$

**DEFINIŢIA 1.2.7**

*O funcţie $u = (u_1, \ldots, u_p) : G \subset U \longrightarrow \mathbb{C}^p$ ($G$ deschis) se numeşte* **soluţie clasică** *a sistemului* (1.6) *dacă $u_1, \ldots, u_p$ sînt continue pe $G$ toate derivatele $\partial^\alpha u_i$ ce apar explicit în $F$ există şi sînt continue pe $G$, $(\partial^\alpha u_1(x), \ldots, \partial^\alpha u_p(x))_{|\alpha|\leq k} \in V$ pentru orice $x \in G$ şi sistemul* (1.7) *este verificat punctual, adică*

$$F_i\Big(x, (\partial^\alpha u_1(x), \ldots, \partial^\alpha u_p(x))_{|\alpha|\leq k}\Big) = 0, \quad \forall x \in G, \quad \forall i = 1, \ldots q.$$

### Exemple de sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale

Cîteva exemple de sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale vor fi prezentate în cele ce urmează.

**EXEMPLUL 1.2.10** Ecuaţiile diferenţiale Cauchy-Riemann $\partial_1 u - \partial_2 v = 0$, $\partial_2 u + \partial_1 v = 0$ reprezintă un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute. Pentru acest tip particular de sistem rezultă uşor prin derivare şi eliminare că funcţiile $u$ şi $v$ sînt armonice. Este interesant de observat ca acest exemplu simplu a generat o întreagă teorie matematică.

**EXEMPLUL 1.2.11** Operatorul **gradient** acţionează asupra unei funcţii definite pe o submulţime din $R^n$ cu valori în $\mathbb{C}$. Operatorul gradient notat *grad* se defineşte astfel

$$grad\, u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_n u)$$

sau folosind scrierea matriceală $grad\, u = \sum_{j=1}^{n} A_j^T \partial_j u$ unde $A_j = (0, \cdots, 1, \cdots 0)$. Cu ajutorul operatorului *grad* se defineşte sistemul supradeterminat

$$grad\, u = f \tag{1.8}$$

sau scris pe componente

$$\partial_1 u = f_1, \ \cdots \ , \partial_n u = f_n \tag{1.9}$$

Studiul sistemelor supradeterminate copleşeşte prin dificultăţile sale. Dacă (1.9 ) are loc, presupunind ca $f_j$ sînt derivabile, obţinem

$$\partial_k f_j = \partial_k \partial_j u = \partial_j \partial_k u = \partial_j f_k \tag{1.10}$$

deci sistemul (1.8) are soluţie clasică dacă şi numai dacă sînt satisfăcute relaţiile (1.10). Relaţiile (1.10) poartă numele de condiţii de compatibilitate şi sînt în număr de $n(n-1)/2$.

**EXEMPLUL 1.2.12** Operatorul **divergenţă** notat *div* acţionează asupra unei funcţii definite pe o submulţime din $R^n$ cu valori în $\mathbb{C}^n$. Operatorul divergenţă se defineşte astfel

$$div\, u = \partial_1 u_1 + \cdots + \partial_n u_n$$

Folosind scrierea matriceală operatorul *div* este de forma $div = \sum_{j=1}^{n} A_j \partial_j u$ unde $A_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Este evident că sistemul $div\, u = f$ are mai multe soluţii. Într-adevăr, să fixăm un $j$ între 1 şi $n$ şi să luăm drept $u_j$ o primitivă a lui $f$ în raport cu $x_j$, iar $u_k = 0$ pentru $k \neq j$ . În felul acesta se obţine o soluţie. Acest tip de raţionament funcţionează pentru toate sistemele liniare subdeterminate, luînd $p - q$ necunoscute egale cu zero, vom reduce sistemul la un sistem determinat.

Între operatorii $\triangle$ , *div* şi *grad* există următoarea relaţie: $div\ grad = \triangle$ .

**EXEMPLUL 1.2.13** Operatorul **rotor** acţionează asupra unei funcţii derivabile definite pe o submulţime $G$ din $R^3$ cu valori în $\mathbb{C}^3$. Operatorul rotor notat *rot* se defineşte astfel:

$$rot\, u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)^T$$

sau folosind scrierea matriceală $rot\, u = \sum_{j=1}^{3} A_j \partial_j u$ unde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi care poate fi scris sugestiv astfel

$$rot\,u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

(dezvoltind acest determinant simbolic după linia întîi), unde

$$e_1 = (1,0,0)^T, e_2 = (0,1,0)^T, e_3 = (0,0,1)^T$$

Cu ajutorul rotorului se generează un sistem determinat de trei ecuaţii cu trei necunoscute de forma $rot\,u = f$ .

**EXEMPLUL 1.2.14** Un alt exemplu de sistem supradeterminat este cel generat de gradientul complex

$$\bar{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}\right)$$

Sistemul $\bar{\partial} u = 0$ poartă numele de ecuaţiile Cauchy - Riemann în mai multe variabile. Soluţiile ecuaţiei $\bar{\partial} u = 0$, cînd funcţia $u$ este continu diferenţiabilă, sînt funcţii olomorfe în n variabile complexe $z_1, \ldots, z_n$, funcţii a căror teorie a fost viguros dezvoltata în ultimii ani.

**EXEMPLUL 1.2.15** Relaţia $\partial_1 u \cdot \partial_2 v - \partial_2 u \cdot \partial_1 v = 0$ care exprimă faptul că jacobianul funcţiilor $u$ şi $v$ se anulează este un alt exemplu de sistem subdeterminat.

**EXEMPLUL 1.2.16** Sistemul $\partial_1 u_1 + a\partial_2 u_1 = 0$, $\partial_1 u_2 + b\partial_2 u_2 = 0$ este constituit din două ecuaţii independente, iar soluţia acestui sistem este de forma

$$u_1(x_1,x_2) = f(x_2 - a \cdot x_1), \quad u_2(x_1,x_2) = g(x_2 - b \cdot x_1).$$

**EXEMPLUL 1.2.17** Sistemul $\partial_1 u + (1/\rho_0)\partial_2 p = 0$, $\partial_1 p + \rho_0 c_0^2 \partial_2 u = 0$ descrie propagarea undelor sonore plane într-un mediu în repaus.

În ecuaţiile de mai sus $u$ este viteza de perturbare a mediului, $p$ presiunea în acest mediu. Constantele $\rho_0$ şi $c_0$ sînt legate de proprietăţile mediului în repaus : $\rho_0$ este densitatea, iar $c_0$ este o constantă ce caracterizează compresibilitatea. Soluţia generală a sistemului este dată de

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= [f(x_2 - c_0 \cdot x_1) + g(x_2 + c_0 \cdot x_1)]/2 \\ p(x_1,x_2) &= \rho_0 c_0 [f(x_2 - c_0 \cdot x_1) + g(x_2 + c_0 \cdot x_1)]/2 \end{aligned}$$

unde $f$ şi $g$ sînt funcţii din $C^1(R)$. Această soluţie se obţine prin multiplicarea celei de a două ecuaţii prin $1/(\rho_0 c_0)$ şi, apoi ecuaţia obţinută se adună la prima ecuaţie şi apoi scăzînd-o din prima ecuaţie rezultînd sistemul

$$\partial_1\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) + c_0 \partial_2\left(u + \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0, \qquad \partial_1\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) - c_0 \partial_2\left(u - \frac{p}{\rho_0 c_0}\right) = 0.$$

Notînd $u_1 = u + p/\rho_0 c_0$, $u_2 = u - p/\rho_0 c_0$ se obţine un sistem de forma celui din exemplul de mai sus, de unde se obţine soluţia cautată.

**EXEMPLUL 1.2.18** Un alt exemplu de sistem cu derivate parţiale este sistemul dat mai jos, sistem ce descrie comportarea cîmpului electromagnetic într-un mediu material.

$$\begin{array}{lrcl} a) & div(\varepsilon E) & = & 4\pi\rho \\ b) & div(\mu H) & = & 0 \\ c) & rot(E) & = & -(1/c)\cdot\partial_t(\mu H) \\ d) & rot(H) & = & (1/c)\cdot\partial_t(\varepsilon E)+(4\pi/c)\cdot I \end{array} \tag{1.11}$$

unde $E(x,t)=(E_1,E_2,E_3)$ este intensitatea cîmpului electric, $H(x,t)=(H_1,H_2,H_3)$ este intensitatea cîmpului magnetic, $\rho-$ densitatea de sarcină, $\varepsilon-$ constanta dielectrică a mediului, $\mu-$ permiabilitatea magnetică a mediului, $I(x,t)=(I_1,I_2,I_3)$ - densitatea curentului de conducţie, $c-$ viteza luminii în vid ($3\cdot 10^{10}\, cm/s$).

Ecuaţiile sistemului de mai sus sînt cunoscute în literatura de specialitate ca *ecuaţiile lui Maxwell.* În cazul proceselor staţionare ecuaţiile lui Maxwell devin :

- ecuaţiile electrostaticii $\quad div(\varepsilon E)=4\pi\rho, \quad rot(E)=0$
- şi ecuaţiile magnetostaticii $\quad div(\mu H)=0 \quad rot(H)=(4\pi/c)I.$

Dacă $\rho=0, \quad \varepsilon=const., \quad I=\lambda E, \quad \lambda=const.$, atunci pentru componentele lui $E$ şi $H$ se obţine ecuaţia telegrafistului

$$\partial_t^2 u - a^2\triangle u + (4\pi\lambda/\varepsilon)\partial_t u = 0,$$

unde $a=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Pentru a obţine acest lucru se aplică operatorul *rot* ecuaţiei (1.11c) şi se foloseşte (1.11a) şi (1.11d) rezultînd ecuaţia pentru componentele lui $E$. Analog, pentru a obţine ecuaţia pe care o verifică componentele lui $H$ se aplică rotorul ecuaţiei (1.11d) apoi se utilizează (1.11b) şi (1.11c).

**EXEMPLUL 1.2.19** Sistemul

$$\rho\partial_t^2 u = \mu\triangle u + (\lambda+\mu) grad\ div u + f(x,t) \tag{1.12}$$

unde $u=(u_1,\ldots,u_n)$, este sistemul ce apare în studiul **elasticităţii liniare izotrope dinamice**.

In (1.12) $\lambda$ şi $\mu$ sînt constantele lui Lamé, $f$ este vectorul forţelor exterioare, iar $\rho$ este densitatea mediului elastic. Sistemul (1.12 ) scris pe componente are forma

$$\rho\partial_t^2 u_i = \mu\triangle\, u_i + (\lambda+\mu)\partial_i(\sum_{k=1}^{n}\partial_k u_k) + f_i(x,t), \quad i\in\{1,\ldots,n\}. \tag{1.13}$$

Dacă $u$ nu depinde de timp se obţin din (1.13) ecuaţiile elasticităţii liniare staţionare:

$$\mu\triangle u + (\mu+\lambda) grad\ div u + f = 0. \tag{1.14}$$

**EXEMPLUL 1.2.20** Ecuaţiile plasticităţii perfecte sînt date de sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=0,\quad (\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+4\sigma_{xy}^2=4K^2 \tag{1.15}$$

unde $\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}$ este tensorul tensiunilor, iar $K$ este o constantă. Considerînd transformările

$$\sigma_{xx}=K(\sigma-cos\varphi),\quad \sigma_{yy}=K(\sigma+cos\varphi),\quad \sigma_{xy}=Ksin\varphi$$

a treia ecuaţie din (1.15) este identic verificată iar primele două ecuaţii se transformă în sistemul cvasiliniar

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y}+\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

**EXEMPLUL 1.2.21** Un ultim exemplu de sistem de ecuaţii cu derivate parţiale pe care îl dăm este sistemul de ecuaţii Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t v-\nu\triangle v+\sum_{k=1}^{n}v_k\partial_k v+(gradp)/\rho=f(x,t) \\ \\ \partial_t\rho+div(\rho v)=0 \end{cases} \tag{1.16}$$

unde $v=(v_1,\ldots,v_n)$ este vectorul vitezelor, $\rho$ densitatea fluidului, iar $p$ presiunea.

### 1.2.3 Despre echivalenţa dintre o ecuaţie şi un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi

Între sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi şi o ecuaţie cu derivate parţiale de ordin superior cu acelasi număr de variabile independente, în general, nu mai are loc o echivalenţa ca în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare. Acest lucru se poate vedea foarte bine din exemplul următor:

$$\partial_1u+\partial_2v=-x_2u \qquad \partial_2u+\partial_1v=x_2v.$$

Derivînd ultimele două ecuaţii în raport cu $x_1,x_2$ obţinem sistemul

$$\partial_1u+\partial_2v=-x_2u \qquad \partial_2u+\partial_1v=x_2v \qquad \partial_1^2u+\partial_1\partial_2v=-x_2\partial_1u$$

$$\partial_1\partial_2u+\partial_2^2v=-u-x_2\partial_2u \quad \partial_1\partial_2u+\partial_1^2v=x_2\partial_1v \quad \partial_2^2u+\partial_1\partial_2v=v+x_2\partial_2v.$$

Din ecuaţiile 1, 3 ,6 se obţine $v=\partial_2^2u-\partial_1^2u+x_2^2u$. Folosind ultima relaţie şi ecuaţiile 1 şi 2 rezultă ecuaţiile:

$$\partial_2(x_2^2u+\partial_2^2u-\partial_1^2u)+\partial_2u+x_2u=0$$

$$\partial_1(x_2^2u+\partial_2^2u-\partial_1^2u)+\partial_2u-x_2(x_2^2u+\partial_2^2u-\partial_1^2u)=0,$$

deci am obţinut două ecuaţii de ordinul trei. Derivînd în continuare rezultă 12 ecuaţii şi 10 necunoscute. Dar prin eliminarea a 10 entităţi din 12 ecuaţii, de obicei, rezultă două ecuaţii independente de ordinul 3.

æ

## 1.3 Clasificarea şi forma canonică a ecuaţiilor cu derivate parţiale

În această secţiune este dată o clasificare pentru ecuaţiile cu derivate parţiale. În cazul ecuaţiilor de ordinul doi în două variabile independente se dau algoritmi de aducere la forma canonică.

### 1.3.1 Clasificarea şi forma canonică a ecuaţiilor de ordinul doi cu n variabile independente

Intr-un domeniu $G$ din $R^n$ se consideră ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul doi

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u + F(x, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_n u) = 0 \tag{1.17}$$

Se fac următoarele ipoteze: coeficienţii $a_{ij}$ sînt funcţii reale, funcţia $u$ aparţine lui $C^2(G)$; matricea $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,n}$ este simetrică. Ipoteza că A este simetrică nu este restrictivă deoarece notînd $a'_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$, şi $a''_{ij} = (a_{ij} - a_{ji})/2$ avem

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j u = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}\partial_i\partial_j u + \sum_{i,j=1}^{n} a''_{ij}\partial_i\partial_j u.$$

Funcţia $u$ fiind de clasa $C^2$ avem $\partial_j\partial_k u = \partial_k\partial_j u$ şi ţinînd cont că $a''_{ij} = -a''_{ji}$ obţinem $\sum_{i,j=1}^{n} a''_{ij}(x)\partial_i\partial_j u = 0$ de unde rezultă $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}(x)\partial_i\partial_j u$.

Vom căuta formula de modificare a coeficienţilor $a_{ij}$ la o transformare de coordonate de clasa $C^2$ a variabilelor independente $y = y(x)$. Deoarece transformarea de coordonate are jacobianul nenul, într-o vecinătate a fiecărui punct, variabilele $x$ pot fi exprimate în funcţie de $y$, adică $x = x(y)$. Notăm $\tilde{u}(y) = u(x(y))$. Evident $u(x) = \tilde{u}(y(x))$ şi

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_p}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p \partial y_q}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_q}{\partial x_j} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_p}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \tag{1.18}$$

Introducînd relaţiile (1.18) în ecuaţia (1.17) obţinem

$$\sum_{p,q=1}^{n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p \partial y_q}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_q}{\partial x_j}\Big) + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_p}\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j}\Big) = \tilde{F}(y, \tilde{u}, \partial_1\tilde{u}, \ldots, \partial_n\tilde{u}) \tag{1.19}$$

Notînd cu $\tilde{a}_{pq}$ coeficienţii derivatelor de ordinul doi obţinem

$$\tilde{a}_{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial y_q}{\partial x_j} \tag{1.20}$$

iar ecuaţia (1.19) se reduce la forma:

$$\sum_{p,q=1}^{n} \tilde{a}_{pq}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p \partial y_q} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \partial_1\tilde{u}, \ldots, \partial_n\tilde{u}) = 0.$$

Fixăm punctul $x_0$ şi fie $y_0 = y(x_0)$, $\quad b_{pi} = \dfrac{\partial y_p}{\partial x_i}(x_0)$. În punctul $x_0$ ecuaţia (1.20) se poate scrie sub forma: $\tilde{a}_{pq}(y_0) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) b_{pi} b_{qj}$. Formula de transformare a coeficienţilor $a_{ij}$ în punctul $x_0$ coincide cu formula de transformare a formei patratice:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) t_i t_j \tag{1.21}$$

prin transformarea liniară nesingulară

$$t_i = \sum_{p=1}^{n} b_{pi} s_p \quad i \in \{1, \dots, n\}, \;\; det(b_{pi}) \neq 0 \tag{1.22}$$

Utilizînd transformarea (1.22), forma patratica (1.21 ) devine : $\sum_{p,q=1}^{n} \tilde{a}_{pq}(y_0) s_p s_q$.

Pentru a simplifica ecuaţia (1.17) în punctul $x_0$, prin schimbarea de variabila $y = y(x)$, este suficient să simplificăm în acest punct forma pătratică (1.21) prin transformarea liniară nesingulară (1.22). Ori este bine cunoscut (vezi cursul de algebră liniară) că există totdeauna o transformare nesingulară (1.22) , prin care forma patratică (1.21) este adusă la forma canonică:

$$\sum_{p=1}^{r} s_p^2 - \sum_{p=r+1}^{m} s_p^2 \qquad m \leq n \tag{1.23}$$

unde în conformitate cu legea de inerţie a formelor pătratice (vezi cursul de algebră), numerele $r$ şi $m$ nu depind de transformarea (1.22). Acest fapt ne permite să clasificăm ecuaţiile cu derivate parţiale (1.17) în funcţie de valorile coeficienţilor $a_{ij}$ în punctul $x_0$.

- Dacă în forma pătratică (1.23) $m = n$ şi toţi termenii au acelaşi semn ( $r = n$ sau $r = 0$ ) ecuaţia (1.17 ) este de **tip eliptic** ;
- Dacă $m = n$, dar există termeni de semne diferite ( $1 \leq r \leq n - 1$ ), ecuaţia este de **tip hiperbolic** ( în cazul $r = 1$ sau $r = n - 1$ ecuaţia este de tip *hiperbolic normal*);
- Dacă $m < n$ ecuaţia este de **tip parabolic ( normal parabolic** dacă $m = n - 1$, $r = 1$ sau $r = n - 1$).

Subliniem că această clasificare depinde de punctul $x_0$, deoarece $r$ şi $m$ depind de punctul $x_0$. De exemplu ecuaţia $\quad x_2 \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0 \quad$ este de tip mixt: de tip hiperbolic pentru $x_2 < 0$ şi de tip eliptic pentru $x_2 > 0$.

Dacă în ecuaţia (1.17) coeficienţii $a_{ij}$ sînt constanţi, să considerăm transformarea (1.22) care reduce forma pătratică (1.21) la forma canonică (1.23). Transformarea liniară:

$$y_p = \sum_{i=1}^{n} b_{pi} x_i, \quad p \in \{1, \dots, n\}$$

reduce ecuaţia (1.17) la forma canonică:

$$\sum_{p=1}^{r} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p^2} - \sum_{p=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_p^2} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \partial_1 \tilde{u}, \ldots, \partial_n \tilde{u}) = 0 \tag{1.24}$$

### 1.3.2 Aducerea la forma canonică a ecuaţiilor de ordinul doi cu două variabile independente

Mai sus am examinat metoda de aducere la forma canonică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea, într-un punct arbitrar din domeniul $G$ de definiţie al ecuaţiei. În legatură cu această metodă apare ca naturală intrebarea: există o transformare $y = y(x)$ care să reducă ecuaţia (1.17) la forma canonică (1.24) într-o vecinătate a punctului $x_0$ ? Am văzut că dacă coeficienţii ecuaţiei sînt constanţi o asemenea transformare există. Pentru ca o asemenea transformare să existe, în cazul unei ecuaţii arbitrare de ordinul doi, trebuie ca numărul de condiţii:

$$\tilde{a}_{pq} = 0,\ p \neq q, \quad p, q \in \{1, \ldots, n\}; \quad a_{pp} = s_p a_{11}, \quad p \in \{2, \ldots, n\}, \quad a_{11} \neq 0$$

unde $s_p \in \{0, -1.1\}$ să nu depăşească numărul de funcţii necunoscute: $y_1, \ \ldots \ , y_p$ adică $n(n-1)/2 + n - 1 \leq n$, deci $n \leq 2$.

În continuare vom arată că pentru ecuaţiile cu două variabile independente de ordinul doi există întotdeauna o transformare $y = y(x)$ de clasă $C^2$ care să reducă ecuaţia (1.17) la forma canonică (1.24) într-o vecinătate a unui punct. Pentru aceasta, să considerăm ecuaţia de ordinul doi cu două variabile independente scrisă sub forma:

$$a(x)\partial_1^2 u + 2b(x)\partial_1\partial_2 u + c(x)\partial_2^2 u + F(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u) = 0 \tag{1.25}$$

în care presupunem că $a, b, c$ aparţin $C^2(G)$, $G \subset R^2$ şi nu se anulează simultan. În acest caz putem presupune că $a \neq 0$ în $G$. Într-adevăr, în caz contrar, sau $c \neq 0$ şi schimbînd $x_1$ cu $x_2$ obţinem o ecuaţie în care $a \neq 0$ sau dacă $a$ şi $c$ se anulează în acelasi punct atunci $b \neq 0$ într-o vecinătate a aceluiaşi punct şi transformarea $y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$ conduce la o ecuaţie în forma dorită. Trecînd la noile variabile

$$y_1 = y_1(x_1, x_2), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2), \quad y_1, y_2 \in C^2(G), \quad \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \neq 0$$

ecuaţia (1.25) devine:

$$\tilde{a}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + 2\tilde{b}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1 \partial y_2} + \tilde{c}(y)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{F}(y, \tilde{u}, \partial_1 \tilde{u}, \partial_2 \tilde{u}) = 0$$

unde

$$
\begin{aligned}
\tilde{a} = &\ a \cdot \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + c \cdot \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\Big)^2 \\
\tilde{b} = &\ a \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + b \cdot \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big) + c \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \\
\tilde{c} = &\ a \cdot \Big(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + c \cdot \Big(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\Big)^2
\end{aligned}
\tag{1.26}
$$

Dacă notăm cu $d = b^2 - a \cdot c$ şi $\tilde{d} = \tilde{b}^2 - \tilde{a} \cdot \tilde{c}$ atunci uşor se obţine că

$$\tilde{d} = d \cdot \Big(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big)^2$$

deci semnul lui d nu se modifică la o transformare de coordonate.

În conformitate cu clasificarea dată pot aparea următoarele trei tipuri de ecuaţii:

- **hiperbolic** dacă $d > 0$;
- **parabolic** dacă $d = 0$;
- **eliptic** dacă $d < 0$.

Inainte de a arată posibilitatea găsirii unei schimbări de variabilă care să reducă ecuaţia la forma canonică să reamintim cîteva noţiuni de ecuaţii diferenţiale.

**DEFINIŢIA 1.3.1**

*O funcţie neconstantă* $F : J \times V \subset R \times R^n \longrightarrow R$ *se numeşte* **integrală primă** *a sistemului de ecuaţii diferenţiale*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad f : J \times G \longrightarrow R^n \tag{1.27}$$

*dacă pentru orice soluţie u a sistemului (1.27) cu* $u : \tilde{J} \subset J \longrightarrow V$ *funcţia* $x \to F(x, u(x))$ *este constantă pe* $\tilde{J}$.

Următoarea propoziţie spune cînd o funcţie este *integrală primă* pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale.

**TEOREMA 1.3.1**

*Dacă funcţia f este continuă, atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţia neconstantă* $F : \tilde{J} \times V \longrightarrow R$ *de clasa* $C^1$ *să fie o integrală primă a sistemului (1.27) este ca în orice punct* $(x, y)$ *din* $\tilde{J} \times V$ *să aibă loc relaţia :*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y)) \cdot f_j(x, y) = 0$$

**Demonstraţie.** Fie $F$ o integrală primă şi $(x_0, y_0) \in J \times V$. Funcţia $f$ fiind presupusă continuă există o soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale cu $y(x_0) = y_0$.

Funcţia $F$ fiind o integrală primă, funcţia $x \longrightarrow F(x, y(x))$ este constantă, deci are derivata nulă. Cum $F$ este de clasa $C^1$ derivata poate fi calculată cu ajutorul teoremei de derivare a funcţiilor compuse şi deci

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y(x)) \frac{dy_j}{dx} = 0.$$

Ţinînd seama că $y$ este soluţie a sistemului diferenţial deducem că

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y(x)) f_j(x, y(x)) = 0.$$

În punctul $x_0$ relaţia de mai sus devine

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x_0, y_0)) \cdot f_j(x_0, y_0) = 0$$

şi cum punctul $(x_0, y_0)$ a fost ales arbitrar în $J \times V$ se obţine necesitatea condiţiei.

Suficienţa este imediată, deoarece dacă $y$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale (1.27) avem

$$\frac{d}{dx} F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y(x)) \frac{dy_j}{dx}(x) = 0$$

deci funcţia $x \longrightarrow F(x, y(x))$ este o constantă. □

**TEOREMA 1.3.2**

*Fie $a, b, c$ funcţii reale de clasa $C^2$ şi $\varphi$ o funcţie de clasa $C^1$. Funcţia $\varphi$ este o soluţie a ecuaţiei*

$$a \cdot \Big(\frac{\partial z}{\partial x_1}\Big)^2 + 2b \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial z}{\partial x_2} + c \cdot \Big(\frac{\partial z}{\partial x_2}\Big)^2 = 0 \tag{1.28}$$

*dacă şi numai dacă $\varphi$ este o integrală primă a uneia din următoarele ecuaţii diferenţiale*

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_1(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2(x_1, x_2) \tag{1.29}$$

*unde* $\lambda_1 = (b - \sqrt{d})/a, \quad \lambda_2 = (b + \sqrt{d})/a, \quad d = b^2 - ac$

**Demonstraţie.** Folosind Teorema 1.3.1 demonstraţia rezultă imediat. Într-adevăr, ecuaţia (1.28) se scrie sub forma:

$$a \cdot \Big[\frac{\partial z}{\partial x_1} + \lambda_1(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2}\Big] \cdot \Big[\frac{\partial z}{\partial x_1} + \lambda_2(x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2}\Big] = 0 \tag{1.30}$$

Dacă $\varphi$ este soluţie a ecuaţiei (1.28) atunci

$$\Big[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big](x_1, x_2) = 0 \ \text{ sau } \ \Big[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big](x_1, x_2) = 0$$

deci $\varphi$ este o integrală primă a uneia din ecuaţiile (1.29). *Reciproc*, dacă $\varphi$ este o integrală primă a uneia dintre ecuaţiile diferenţiale (1.29) atunci $\varphi$ este o soluţie a ecuaţiei (1.30), deci soluţie a ecuaţiei (1.28). □

### Aducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip hiperbolic

În cazul ecuaţiilor hiperbolice $d = b^2 - ac$ este pozitiv şi deci ecuaţia $a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$ are două rădăcini $\lambda_1, \lambda_2$ distincte. Fie $\varphi_1, \varphi_2$ integralele prime ale ecuaţiilor diferenţiale:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_1(x_1, x_2), \qquad \frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Folosind Teorema 1.3.2 rezultă că $\varphi_1, \varphi_2$ sînt soluţii ale ecuaţiei (1.28). Transformarea

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \qquad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \tag{1.31}$$

este o schimbare de variabilă. Într-adevăr, dacă $\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = 0$, atunci $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = 0$ şi cum $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = 0$, $\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = 0$ obţinem $\lambda_1 = \lambda_2$, deci $d = 0$, o contradicţie. Folosind transformarea (1.31 ) se obţine $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$. Am obţinut astfel că forma canonică a unei ecuaţii de tip hiperbolic este

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_1\partial y_2} = \tilde{F}(y_1, y_2, \tilde{u}, \partial_1\tilde{u}, \partial_2\tilde{u})/2\tilde{b}(y_1, y_2)$$

Menţionăm că schimbarea $\xi = y_1 + y_2, \quad \eta = y_1 - y_2$ aduce ecuaţia (1.25) la o altă formă canonică echivalentă, şi anume:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}) = 0.$$

### Aducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip parabolic

În cazul ecuaţiilor parabolice $d = b^2 - ac = 0$ şi deci ecuaţia $\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$ are o singură soluţie $\lambda(x_1, x_2)$. Fie $\varphi_1$ o integrală primă a ecuaţiei

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda(x_1, x_2)$$

şi $\varphi_2$ funcţional independentă de $\varphi_1$. Transformarea $y_1 = \varphi_1(x_1, x_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2)$ este o tranformare de coordonate şi obţinem $\tilde{a} = 0$. Cum $d = b^2 - ac = 0$ rezultă

$$\tilde{b} = a \cdot [\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \lambda(x_1, x_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}] \cdot [\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \lambda(x_1, x_2)\frac{\partial y_2}{\partial x_2}] = 0.$$

Am obţinut astfel următoarea formă canonică pentru ecuaţii parabolice

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial y_2^2} = -\tilde{F}(y_1, y_2, \tilde{u}, \partial_1\tilde{u}, \partial_2\tilde{u})/\tilde{c}(y_1, y_2).$$

### Aducerea la forma canonică a ecuaţiilor de tip eliptic

În cazul ecuaţiilor de tip eliptic $d < 0$. Să presupunem că $a, b, c$ coeficienţii ecuaţiei (1.25), sînt funcţii analitice în variabilele $x_1, x_2$ într-o vecinătate a unui punct din domeniul de definiţie al ecuaţiei. În acest caz soluţiile ecuaţiei $a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$ sînt funcţii analitice şi pentru $x_1, x_2$ reali $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$ . Conform unei teoreme clasice într-o vecinătate suficient de mică există o integrală primă a ecuaţiei

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \lambda_1(x_1, x_2)$$

Fie

$$y_1 = (\varphi(x_1, x_2) + \bar{\varphi}(x_1, x_2))/2, \quad y_2 = (\varphi(x_1, x_2) - \bar{\varphi}(x_1, x_2))/2 \tag{1.32}$$

unde $\bar{\varphi}$ este conjugata funcţiei $\varphi$. Se observă foarte uşor că $\bar{\varphi}$ este o integrală primă a ecuaţiei $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \overline{\lambda}_1(x_1, x_2)$. Prin modul de construcţie se vede ca $y_1, y_2$ sînt liniar independente şi efectuînd calculele indicate de transformarea (1.32) obţinem $\tilde{b} = 0, \quad \tilde{c} = \tilde{a} \neq 0$, deci forma canonică a unei ecuaţii eliptice este

$$\partial_1^2\tilde{u} + \partial_2^2\tilde{u} = \tilde{F}(y, \tilde{u}, \partial_1\tilde{u}, \partial_2\tilde{u}).$$

### Ecuaţia lui Tricomi

După cum am mai remarcat ecuaţia $x_2\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$ numită ecuaţia lui Tricomi, este de tip mixt: pentru $x_2 < 0$ este de tip hiperbolic, iar pentru $x_2 > 0$ este de tip eliptic. Ecuaţia lui Tricomi apare în aerodinamică: domeniul hiperbolic corespunde mişcării subsonice, iar domeniul eliptic corespunde mişcării supersonice.

Pentru $x_2 < 0$ ecuaţia caracteristicilor are forma

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \pm 1/\sqrt{-x_2} \tag{1.33}$$

Curbele $(3/2)x_1 + (-x_2^3)^{1/2} = c_1, \quad (3/2)x_1 - (-x_2^3)^{1/2} = c_2$ sînt integrale prime ale ecuatiei (1.33) deci caracteristici pentru ecuaţia lui Tricomi şi sînt reprezentate în figura 1.1. Prin transformarea $y_1 = (3/2)x_1 + (-x_2^3)^{1/2}, \quad y_2 = (3/2)x_1 - (-x_2^3)^{1/2}$ ecuaţia lui Tricomi se reduce la următoarea formă canonică

$$\partial_1\partial_2\tilde{u} - \frac{1}{6(y_1 - y_2)} \cdot (\partial_1\tilde{u} - \partial_2\tilde{u}) = 0.$$

Pentru $x_2 > 0, \quad \varphi(x_1, x_2) = (3/2)x_1 - i(x_2^3)^{1/2}$ este o integrală primă pentru ecuaţia $\dfrac{dx_2}{dx_1} = i/\sqrt{x_2}$ şi transformarea $y_1 = (3/2)x_1, \quad y_2 = -(x_2^3)^{1/2}$ reduce ecuaţia Tricomi la forma canonică $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u + (3y_2)^{-1}\partial_2 u = 0.$

Figure 1.1: Caracteristicile ecuaţiei lui Tricomi.

**Ecuaţii neliniare**

Ecuaţia neliniară de ordinul doi

$$F(x, u, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq 2}) = 0$$

cu o singura funcţie necunoscuta $u$ se numeşte eliptică, hiperbolică sau parabolică în punctul $x^0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$, respectiv în domeniul $G$, pentru o soluţie dată $u^*(x_1, ..., x_n)$, dacă ecuaţia

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

este *eliptică, hiperbolică* sau *parabolică* în punctul $x^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$, respectiv în domeniul $G$, unde

$$A_{ij}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(x, u^*, (\partial^\alpha u^*)_{|\alpha|\leq 2}), \qquad p_{ij} = \partial_i \partial_j u.$$

### 1.3.3 Clasificarea ecuaţiilor folosind conul caracteristic

Dacă pentru ecuaţiile de ordinul doi se poate face o clasificare relativ completă, nu acelaşi lucru se întimplă în general. Partea principală (adică grupul termenilor de ordin maxim) joacă un rol important în studiul operatorilor liniari. În particular, **polinomul caracteristic** al operatorului $P$ (sau simbolul principal) definit prin

$$P_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad x \in G, \quad \xi \in R^n$$

poate furniza informaţii interesante privind proprietăţile lui $P$, permiţînd separarea unor clase de asemenea operatori.

**DEFINIŢIA 1.3.2**

- *Un vector* $\xi \in R^n \setminus \{0\}$ *se numeşte* **caracteristic** *(respectiv* **necaracteristic***) pentru operatorul* $P$ *în punctul* $x$ *dacă* $P_k(x,\xi) = 0$ *(respectiv* $P_k(x,\xi) \neq 0$*).*
- *Mulţimea vectorilor caracteristici* $\mathcal{C}_P(x)$ *constituie* **conul caracteristic** *pentru operatorul* $P$ *în punctul* $x$.
- *Un operator liniar* $P$ *se zice* **eliptic** *în punctul* $x$ *dacă*

$$P_k(x,\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in R^n \quad \xi \neq 0$$

*adică un operator liniar este eliptic în punctul* $x$ *dacă conul caracteristic în punctul* $x$ *este vid (*$\mathcal{C}_P(x) = \emptyset$ *).*

Multimea $\mathcal{C}_P(x)$ este efectiv un con, deoarece datorită omogenităţii lui $P_k(x,\xi)$ dacă $\xi \in \mathcal{C}_P(x)$ şi $r > 0$ atunci $r\xi \in \mathcal{C}_P(x)$.

a Operatorul $\partial_1 + i\partial_2$ de ordin 1 este un operator eliptic în $R^2$.

b Operatorul $\triangle = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ este un operator eliptic în $R^n$.

c Operatorul $P(x,\partial) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_i\partial_j + \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_i + a(x)$ este eliptic în punctul $x$ dacă şi numai dacă matricea $A(x) = (a_{ij}(x))$ este strict definită.

d Operatorul $a(x)\partial_1^2 + 2b(x)\partial_1\partial_2 + c(x)\partial_2^2$ este eliptic în $x$ dacă şi numai dacă $b^2(x) - a(x)c(x) < 0$.

Din c) şi d) se observă că noţiunea de operator eliptic introdusă aici coincide cu noţiunea de operator eliptic ce a fost deja analizată pentru ecuaţii de ordinul al doilea.

**DEFINIŢIA 1.3.3**

*Un operator diferenţial* $P$ *de ordinul* $2m$ *se zice*

- **tare eliptic** *în* $x$ *dacă există* $\alpha > 0$ *un număr real şi* $\gamma$ *un număr complex astfel încît*

$$Re(\gamma P_{2m}(x,\xi)) \geq \alpha \|\xi\|^{2m} \quad \forall \ \xi \in R^n \tag{1.34}$$

- **uniform eliptic** *în domeniul* $G$ *dacă există un număr complex* $\gamma$ *şi un număr real* $\alpha > 0$ *independente de* $x$ *astfel ca*

$$Re(\gamma P_{2m}(x,\xi)) \geq \alpha \|\xi\|^{2m} \qquad \forall \xi \in R^n, \quad x \in G.$$

**REMARCA 1.3.1**

*Operatorul* $P = \partial_1^4 + \partial_2^4 - \partial_3^4 + i(\partial_1^2 + \partial_2^2)\partial_3^2$ *este eliptic, dar nu este tare eliptic.*

**Demonstraţie.** Într-adevăr, dacă $P(x,\xi) = 0$ atunci $\xi = 0$, deci operatorul P este eliptic. Dacă există $\alpha > 0$ şi $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ aşa încît să aibă loc (1.34) atunci

$$\gamma_1(\xi_1^4 + \xi_2^4 - \xi_3^4) - \gamma_2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_3^2 \geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2$$

Luînd $\xi_1 = \xi_2 = 0$ şi $\xi_3 \neq 0$ rezultă $\gamma_1 < 0$, apoi luînd $\xi_3 = 0$ rezultă $\gamma_1 > 0$, o contradicţie, deci operatorul $P$ nu este tare eliptic. □

Se spune că operatorul $P$ este eliptic, respectiv tare eliptic în domeniul $G$ dacă este eliptic, respectiv tare eliptic în orice punct din $G$.

**DEFINIŢIA 1.3.4** *Hipersuprafata $S$ se numeşte*

- **caracteristică** *pentru operatorul liniar $P$ în punctul $x \in S$, dacă vectorul $\nu(x)$ este în $\mathcal{C}_P(x)$;*
- **necaracteristică** *pentru operatorul diferenţial $P$ dacă nu este caracteristică în nici un punct ( adică $\nu(x) \notin \mathcal{C}_P(x), \quad \forall x \in S$).*

Deci o hipersuprafaţă $S = \{x; \varphi(x) = 0, \partial\varphi \neq 0\}$ este caracteristică în punctul $x$ pentru operatorul liniar $P(x,\partial) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ dacă $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(\partial\varphi(x))^\alpha = 0$.

**DEFINIŢIA 1.3.5**

*Varietăţile* $S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = const\}$, *cu* $grad\,\varphi \neq 0$, *unde $\varphi$ este soluţia ecuaţiei neliniare de ordinul întîi*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n} = 0 \tag{1.35}$$

*se numesc* **caracteristici** *ale operatorului $P$ iar ecuaţia* (1.35) *se numeşte* **ecuaţia caracteristicilor** *operatorului $P$.*

**DEFINIŢIA 1.3.6** *Operatorul diferenţial $P$ se zice:*

- **hiperbolic** *în punctul $x$, dacă există $\theta \in R^n$ astfel ca pentru orice $\xi \in R^n$ liniar independent de $\theta$, ecuaţia în $\lambda$, $\quad P_k(x, \lambda\theta + \xi) = 0, \quad$ are $k$ rădăcini reale.*
- **strict hiperbolic** *în punctul $x$, dacă există $\theta \in R^n$ astfel ca pentru orice $\xi \in R^n$ independent liniar de $\theta$ ecuaţia în $\lambda$, $\quad P_k(x, \lambda\theta + \xi) = 0, \quad$ are $k$ rădăcini reale şi distincte.*

- **strict hiperbolic** *(sau tare hiperbolic)* **în raport cu hipersuprafaţa** $S = \{x \in R^n; \varphi(x) = 0\}$ *dacă oricare ar fi* $\xi$ *din* $R^n$ *liniar independent de* $\partial\varphi(x)$ *ecuaţia în* $\lambda$

$$P_k(x, \xi + \lambda\partial\varphi(x)) = 0 \tag{1.36}$$

*are k rădăcini reale şi distincte.*

• Se observă că un operator este strict hiperbolic în punctul $x$ dacă există $\theta \in R^n$ astfel ca orice hiperplan bidimensional $\Pi$ ce trece prin $\theta$ intersectează conul caracteristic dupa k lini distincte. Operatorul $P$ se zice hiperbolic în domeniul $G$ dacă este hiperbolic în orice punct din $G$.

• Orice operator strict hiperbolic în raport cu o hipersuprafata $S$ în punctul $x$ este strict hiperbolic. Într-adevăr, putem lua $\theta = \partial\varphi(x)$. Nu orice operator strict hiperbolic în punctul $x$ este strict hiperbolic în raport cu orice hipersuprafaţă ce trece prin $x$. De exemplu operatorul $\partial_1\partial_2$ este hiperbolic în orice punct din $R^2$ dar nu este strict hiperbolic în raport cu suprafaţa $S = \{(x_1, x_2); x_2 = 0\}$.

• Operatorul undelor este strict hiperbolic în orice punct din $R^n$. Într-adevăr, dacă luăm $\theta = (0, ..., 0, 1)$ şi pentru orice $\xi$ din $R^n$ independent liniar cu $\theta$ , adică $\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 \neq 0$ ecuaţia (1.36) are forma

$$\lambda^2 + 2\xi_n\lambda + \xi_n^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2 = 0$$

de unde rezultă $\lambda_1 = -\xi_n - (\sum_{i=1}^{n-1} {\xi_i}^2)^{1/2}$, $\lambda_2 = -\xi_n + (\sum_{i=1}^{n-1} {\xi_i}^2)^{1/2}$ care sînt reale şi distincte. În acelaşi timp am arătat că operatorul undelor este strict hiperbolic în raport cu hiperplanul $H = \{x \in R^n : x_n = 0\}$.

• O ecuaţie neliniară de ordinul $k$, $F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k}) = 0$ se numeşte eliptică, (hiperbolică) în punctul $x^0$, respectiv în domeniul $G$, pentru o soluţie data $u^+$, dacă operatorul $\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha$ este eliptic, (hiperbolic) în punctul $x_0$, respectiv în domeniul $G$, unde

$$a_\alpha(x) = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\Big(x, (\partial^\beta u^+(x))_{|\beta|\leq k}\Big) \quad \text{şi} \quad p_\alpha = \partial^\alpha u.$$

Ecuaţia caracteristicilor pentru o ecuaţie neliniară de ordinul k în raport cu o soluţie $u^+$ este dată de ecuaţia

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\Big(x, (\partial^\beta u^+(x))_{|\alpha|\leq k}\Big)(\partial\varphi)^\alpha = 0$$

æ

# Probleme si exerciţii

1. Să se determine: $card\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; |\alpha| = k\}$, $card\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n; |\alpha| \leq k\}$.

2. Să se arate că dacă $\Omega$ este un deschis din $R^n$, atunci $u \in C^k(\overline{\Omega})$ dacă şi numai dacă există un deschis $U \subset R^n$ cu $\overline{\Omega} \subset U$ şi $v \in C^k(U)$ astfel ca $v(x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega$.

3. Să se arate ca $u \in C^\alpha(\Omega)$ dacă şi numai dacă pentru orice compact $V \subset \Omega$ există o constantă $C > 0$ astfel că pentru orice $y \in R^n$ suficient de aproape de zero
$$\sup_{x \in V} |u(x+y) - u(x)| \leq C\|y\|^\alpha.$$

4. Să se arate că $u \in C^{k+\alpha}(\Omega)$ dacă şi numai dacă $u \in C^k(\Omega)$ şi $\partial^\beta u \in C^\alpha(\Omega)$ $\forall \beta, |\beta| = k$.

5. Să se arate că dacă $\Omega$ este un deschis din $R^n$ şi există $C > 0$ şi $\alpha > 1$ astfel ca
$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x-y\|^\alpha \qquad \forall x, y \in \Omega$$
atunci $u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$.

6. Să se arate că $supp\, \partial^\alpha u \subseteq supp\, u$.

7. Să se arate că dacă $\Omega \subset R^n$ este un deschis şi $u \in C_0(\Omega)$, atunci $u$ se anulează într-o bandă frontieră, adica $\exists \epsilon > 0$ astfel ca $u(x) = 0\ \forall x \in \Omega$ cu $dist(x, \partial\Omega) \leq \epsilon$.

8. Să se arate că dacă $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ şi $\int_\Omega f(x)g(x)dx = 0\ \forall g \in C_0^\infty(\Omega)$, atunci $f = 0$ a.p.t. în $\Omega$ (lema Raymond-Dubois ).

9. Să se arate că dacă $f \in C^k(\Omega)$ atunci $f$ are derivate generalizate de orice ordin $\alpha$ cu $|\alpha| \leq k$ şi derivatele generalizate ale lui $f$ sînt egale cu derivatele în sens clasic.

10. Să se arate că derivata generalizată a unei funcţii nu depinde de ordinea de derivare, adică $\partial^\alpha \partial^\beta u = \partial^\beta \partial^\alpha u = \partial^{\alpha+\beta} u$.

11. Să se arate că dacă o funcţie admite o derivată generalizată de ordin $\alpha$, ea poate să nu admită derivate generalizate de ordin mai mic. Este această afirmaţie adevărată dacă dimensiunea spatiului este unu ?

12. Fie $\Omega$ un deschis mărginit din $R^n$ şi fie $p, q \in R$ astfel ca $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Să se demonstreze:

    a) Dacă $u \in L^q(\Omega)$ atunci $u \in L^p(\Omega)$ şi $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq (vol(\Omega))^{1/p-1/q}\|u\|_{L^q(\Omega)}$ unde $vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx$.

    b) Dacă $u \in L^\infty(\Omega)$, atunci $\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$;

c) Dacă $u \in L^p(\Omega)$ pentru $1 \leq p < \infty$ şi există o constantă $k$ astfel că pentru orice $p \geq 1$ să avem $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq k$ atunci $u \in L^\infty(\Omega)$ şi $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k$.

13. Să se arate că $L^\infty(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ dacă $1 \leq p \leq q \leq \infty$ şi $L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ scufundările fiind continue (în general necompacte).

14. Să se arate că dacă $1 \leq p \leq \infty$ iar $p'$ este conjugatul său $p' = \infty$ dacă $p = 1$ şi $(1/p + 1/p' = 1)$ dacă $1 < p < \infty$, atunci pentru orice $v \in L^{p'}(\Omega)$ funcţionala $L_v$ pe $L^p(\Omega)$ definită prin

$$L_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \ \ \forall \ \ u \in L^p(\Omega)$$

este liniară şi continuă pe $L^p(\Omega)$, şi $\|L_v\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

15. Să se arate că pentru orice $1 \leq p < \infty$, pentru orice funcţională $L$ liniară şi continuă pe $L^p(\Omega)$ există şi este unic un element $v \in L^{p'}(\Omega)$ $(1/p + 1/p' = 1)$ astfel ca $L(u) = \int_\Omega v(x)u(x)dx \ \ \forall \ \ u \in L^p(\Omega)$, în plus $\|L\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

16. Să se arate că dualul spaţiului $L^1(\Omega)$ este spaţiul $L^\infty(\Omega)$, iar dualul spaţiului $L^\infty(\Omega)$ conţine pe $L^1(\Omega)$ şi se identifică cu spaţiul funcţiilor absolut continue, finit aditive şi cu variaţia mărginită pe $\Omega$.

17. Să se arate că $\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to R$ definită prin $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) \ \ \forall \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ unde $a \in R^n$, este o distribuţie pe $\Omega$ şi nu există $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ astfel ca $\delta_a(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \ \ \forall \ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

18. Să se arate că derivata distribuţiei generate de funcţia lui Heaviside este distribuţia Dirac.

19. Să se demonstreze următoarele proprietăţi pentru derivata generalizată.

a) derivata generalizată de ordin $\alpha$ este unică;

b) dacă există $v$ derivata generalizată de ordinul $\alpha$ pentru o funcţie $u$ în domeniul $\Omega$, atunci oricare ar fi subdomeniul $\Omega' \subset \Omega$, $v$ va fi derivata generalizată a lui $u$ în subdomeniul $\Omega'$;

c) dacă în domeniul $\Omega$ funcţia $v$ este derivata generalizată de ordin $\alpha$ a funcţiei $u$, iar $w$ este derivata generalizată de ordinul $\beta$ a funcţiei $v$, atunci $w$ este derivata de ordin $\alpha + \beta$ a funcţiei $u$ în $\Omega$;

d) dacă $u$ are în domeniul $\Omega$ derivata generalizată de ordin $\alpha$ cu $|\alpha| = k$, precum şi toate derivatele generalizate de ordin inferior, atunci dacă $\xi \in C^\infty(\Omega)$, funcţia $\xi u$ va admite derivata generalizată de ordinul $\alpha$, care se va calcula după regulile obişnuite de derivare;

e) fie funcţiile $u_m$, $m = 1, \cdots$ care au derivate generalizate de acelaşi ordin $\alpha$, şi $v_m = \partial^\alpha u_m$, în domeniul mărginit $\Omega$. Dacă ambele şiruri converg în $L^1_{loc}(\Omega)$ către $u$ respectiv $v$ atunci funcţia $v$ este derivata generalizată a funcţiei $u$ ($v = \partial^\alpha u$ în $\Omega$);

f) dacă funcţia $u$ satisface condiţia Lipschitz (cu $\alpha = 1$ ) pe închiderea $\overline{\Omega}$ a domeniului $\Omega$, atunci funcţia $u$ are în $\Omega$ toate derivatele generalizate de ordinul întîi şi aceste derivate sînt mărginite.

20. Să se arate că dacă $U$ este un deschis din $R^n$, $f : U \to R$ şi $u : R \to R$ sînt de clasă $C^1$ atunci
$$grad\,(u \circ f) = u' \circ grad\, f$$

21. Să se arate că dacă $U$ este un deschis din $R^3$, $f : U \longrightarrow R$ şi $u : U \longrightarrow R^3$ sînt funcţii din $C^1(U)$ atunci
$$\begin{aligned} div(fu) &= f div(u) + (u, grad\, f) \\ rot\,(fu) &= f\ rot\,(u) - u \times grad\, f \\ div(u \times v) &= (rot\, u) \cdot v - (rot\, v) \cdot u \end{aligned}$$

22. Să se arate că dacă $u : U \subset R^3 \to R^3, f : U \longrightarrow R$ sînt funcţii de clasa $C^2$ atunci : $div\ grad\, f = \triangle f$, $rot\,(rot\,(u)) = grad\,(div\, u) - \triangle u$, $rot\,(grad\, f) = 0$, $div\,(rot\, u) = 0$.

23. Să se determine ecuaţiile pe care le verifică următoarele funcţii:
$$u = f(x + y), \quad u = f(x - y), \quad u = f(x/y), \quad u = f(x^2 + y^2).$$

24. Să se determine ecuaţia pe care o verifică următoarea funcţie:
$$u = f(a)x + ay + g(a)$$
unde a este un parametru.

25. Să se determine toate functiile armonice care depind numai de $\|x\|$.

26. Să se arate că dacă $u = (u_1, u_2, u_3)$ verifică ecuaţia undelor elastice omogene (1.12) atunci fiecare $u_i$ satisface ecuaţia de ordinul patru
$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\triangle\Big)\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\mu}{\rho}\triangle\Big)u_i = 0.$$

27. Să se arate că dacă $u = (u_1, u_2, u_3)$ verifică ecuaţile elasticitatii liniare omogenă atunci fiecare componenta $u_i$ verifică ecuaţia $\triangle^2 v = 0$.

28. Să se aducă la forma canonică următoarele ecuaţii cu coeficienţi constanţi

$a)\ \partial_1^2 u + 2\partial_1\partial_2 u - 2\partial_1\partial_3 u + 2\partial_2^2 u + 6\partial_3^2 u = 0,$

$b)\ 4\partial_1^2 u - 4\partial_1\partial_2 u - 2\partial_2\partial_3 u + \partial_2 u + \partial_3 u = 0,$

$c) \partial_1\partial_2 u - \partial_1\partial_t u + \partial_3^2 u - 2\partial_3\partial_4 u + 2\partial_t^2 u = 0$

29. Să se aducă la forma canonică următoarele ecuaţii în domeniul în care îşi păstrează tipul:

$$a)\partial_1^2 u - 2\partial_1\partial_2 u - 3\partial_2^2 u + \partial_2 u = 0; \quad b)\partial_1^2 u - 6\partial_1\partial_2 u + 10\partial_2^2 u + \partial_1 u - 3\partial_2 u = 0;$$

$$c)4\partial_1^2 u + 4\partial_1\partial_2 u + \partial_2^2 u - 2\partial_2 u = 0; \quad d)(1+x_1^2)\partial_1^2 u + (1+x_2^2)\partial_2^2 u + x_2\partial_2 u = 0;$$

$$e)4x_2^2\partial_1^2 u - e^{2x_1}\partial_2^2 u = 0; \quad f)\partial_1^2 u - 2\sin(x_1)\partial_1\partial_2 u + (2-\cos^2(x_1))\partial_2^2 u = 0.$$

30. Să se afle soluţia generală a urmatoarelor ecuaţii:

$$a)\ 3\partial_1^2 u - 5\partial_1\partial_2 u - 2\partial_2^2 u + 3\partial_1 u + \partial_2 u = 0, \quad b)\ \partial_1\partial_2 u + a\partial_1 u + b\partial_2 u + abu = 0$$

$$c)\ x_2\partial_1^2 u + (x_1 - x_2)\partial_1\partial_2 u - x_1\partial_2^2 u = 0, \quad d)\ x_1^2\partial_1^2 u - x_2^2\partial_2^2 u = 0.$$

31. Să se determine conul caracteristic şi ecuaţia caracteristicilor pentru operatorii:

$$\partial_1, \quad \partial_1\partial_2, \quad \partial_1 + i\partial_2, \quad \triangle_n$$

32. Să se arate că dacă $P$ este un operator liniar de ordinul $m$ şi $\xi \neq 0$ este un vector în direcţia axei $x_j$ ($\xi_i = 0, i \neq j$) atunci $\xi \in \mathcal{C}_P(x)$ dacă şi numai dacă coeficentul lui $\partial_j^m$ din $P$ se anulează în $x$.

33. Să se arate că operatorii $\partial_1 + i\partial_2$, şi $\triangle_n$ sînt eliptici.

34. Să se afle soluţia generală a ecuatiei $\partial_1\partial_2\partial_3 u = e^{x_1+x_2+x_3}$ şi să se arate că operatorul $\partial_1\partial_2\partial_3$ este hiperbolic dar nu este strict hiperbolic.

35. Să se arate că orice operator eliptic cu coeficienţi constanţi reali este de ordin par (dacă $n > 2$ ).

36. Să se scrie ecuaţia caracteristicilor şi să se determine tipul următoarelor sisteme:

$$a)\begin{cases}\partial_1 u - \partial_2 v = 0\\ \partial_2 u + \partial_1 v = 0\end{cases} \quad b)\begin{cases}\partial_1 u - \partial_2 v = 0\\ \partial_2 u - \partial_1 v = 0\end{cases} \quad c)\begin{cases}\partial_1 u = \partial_2 v\\ \partial_2 u = \partial_1 v\end{cases}$$

37. Să se scrie sub forma matriceală sistemul:

$$\begin{aligned}
\rho_0\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}\\
\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}\\
\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= (k + \frac{4}{3}\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + (k - \frac{2}{3}\mu)\frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= (k - \frac{2}{3}\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + (k + \frac{4}{3}\mu)\frac{\partial v}{\partial y}\\
\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} &= \mu(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})\\
\sigma_{12} &= \sigma_{21}
\end{aligned}$$

şi apoi să se determine ecuaţia caracteristicilor.

38. Să se aducă la forma canonică sistemul :

$$\begin{aligned}&\partial_1 u - \partial_2 v + au + bv = f,\\&\partial_2 u - \partial_1 v - bu - av = g\end{aligned}$$

şi să se determine soluţia lui generală.

39. Să se arate că sistemul: $\partial_t p = \rho c^2 \, div \, u, \quad \rho \partial_t u = grad \, p$ unde $u = (u_1, u_2, u_3)$ este hiperbolic, nu este strict hiperbolic. Să se determine caracteristicile acestui sistem.

æ

# Chapter 2

# PROBLEMA CAUCHY

Acest capitol este destinat studiului problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale şi se compune din doua părţi.

În prima parte ( §5) se studiază problema Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi şi se arată că studiul acestei probleme se poate reduce la studiul problemei Cauchy pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale.

În partea a doua ( §6) rezultatul central este teorema clasică a matematicenei Sofia Kowalevskaia (1850 - 1891), rezultat anticipat însă de lucrările lui A. L. Cauchy (1789 - 1857) din deceniul cinci al secolului XIX. Se demonstrează teorema Cauchy - Kowalevskaia pentru sisteme cvasiliniare de ordinul întîi, apoi pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii de ordinul k. Incheiem acest capitol cu teorema de unicitate a lui E. Holmgren demonstrată în 1901.

## 2.1 Problema Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi

Această secţiune este destinată studiului problemei Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi. Fiind dată ecuaţia

$$F(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) = 0 \tag{2.1}$$

(unde $F$ şi $u$ sînt presupuse cu valori reale), o hipersuprafaţă $S$ şi o funcţie (cu valori reale) $u^0$ definită pe $S$, se caută o functie $u$ definită într-o vecinătate a lui $S$, soluţie a ecuaţiei (2.1) şi care verifică în plus

$$u(x) = u^0(x), \quad \forall x \in S \tag{2.2}$$

Hipersuprafaţa $S$ se numeţe **hipersuprafaţă iniţială (varietate iniţială)**, în timp ce funcţia $u^0$ se numeşte **dată initială**. Relaţia $u(x) = u^0(x), \quad x \in S$ poartă numele de **condiţie iniţială** a problemei Cauchy (2.1), (2.2).

Faptul remarcabil care apare în legătură cu găsirea soluţiei problemei (2.2) pentru ecuaţia (2.1) este că această soluţie se poate determina cunoscînd soluţiile unui sistem de ecuaţii diferenţiale (autonome) ataşat ecuaţiei (2.1).

Vom remarca de asemenea faptul că aspectele legate de rezolvarea ecuaţiei (2.1) nu sînt valabile în cazul sistemelor de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi şi nici în cazul cînd funcţiile $F$ sau $u$ sînt cu valori complexe.

### 2.1.1 Ecuaţii liniare de ordinul întîi

Vom consideră în continuare ecuaţia liniară de ordinul întîi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u + b(x)u = f(x) \tag{2.3}$$

unde $a_1, \dots, a_n, b, f$ sînt presupuse funcţii de clasa $C^1$ pe un domeniu $\Omega$ din $R^n$. Pentru a avea efectiv o ecuaţie cu derivate parţiale vom presupune că $|a_1(x)|^2 + \cdots + |a_n(x)|^2 \neq 0$. Notînd cu $L$ operatorul diferenţial ce intervine în ecuaţia (2.3) adică

$$Lu = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u + b(x)u$$

atunci conul caracteristic al operatorului $L$ în punctul $x$ este un hiperplan ortogonal pe $A(x) = (a_1(x), ..., a_n(x))$ , deoarece $\mathcal{C}_L(x) = \{\xi \in R^n \setminus \{0\} : A(x) \cdot \xi = 0\}$. De aici rezultă ca o hipersuprafaţă $S$ este caracteristică în $x$ dacă şi numai dacă $A(x)$ este tangent la $S$ în $x$.

• Vom studia, pentru început, ecuaţia omogenă generată de partea principală a operatorului $L$, adică ecuaţia

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u = 0 \tag{2.4}$$

Ecuaţiei (2.4) îi ataşăm următorul sistem de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{dt} = A(x) \tag{2.5}$$

sau scris pe componente

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = a_n(x)$$

numit **sistem caracteristic** asociat ecuaţiei (2.4). Orice soluţie a sistemului (2.5) se numeşte **curbă caracteristică** (sau simplu caracteristică) a ecuaţiei (2.4).

### TEOREMA 2.1.1

*Orice integrală primă a sistemului caracteristic (2.5) este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4) şi reciproc, orice soluţie a ecuaţiei (2.4) este o integrală primă a sistemului caracterisitic (2.5).*

**Demonstraţie.** Fie $u$ o integrală primă a sistemului (2.5) şi $x_0$ un punct din domeniul de definiţie al ecuaţiei (2.4) iar $x$ o soluţie a sistemului caracteristic (2.5) cu proprietatea că $x(0) = x_0$. Pentru orice $t$ în vecinătatea lui zero avem

$$0 = \frac{d}{dt}u(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x(t)) \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x(t)) \partial_j u(x(t))$$

şi deci luînd t=0 obţinem $\sum_{j=1}^{n} a_j(x_0)\partial_j u(x_0) = 0$. Cum $x_0$ a fost ales arbitrar rezultă că $u$ este soluţie a ecuaţiei (2.4). *Reciproc*, dacă $u$ verifică într-un domeniu $\Omega$ ecuaţia (2.4) şi $x$ este o soluţie a sistemului (2.5) avem

$$\frac{d}{dt}u(x(t)) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x(t)) \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x(t)) a_j(x(t)) = 0$$

de unde rezultă că $u$ este o integrală primă pentru sistemul (2.5). □

### COROLARUL 2.1.1

*Dacă $\Phi \in C^1(\Omega_1), \Omega_1 \subset R^k$ şi $u_1, \ldots, u_k$ sînt $k$ integrale prime ale sistemului caracteristic (2.5), atunci funcţia $u = \Phi(u_1, ..., u_k)$ este o soluţie a ecuatiei (2.4).*

**Demonstraţie.** Cum

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_1}, \quad \ldots \quad , \frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_n}$$

din relaţiile de mai sus obţinem $L(u) = L(u_1)\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \cdots + L(u_k)\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_k} = 0$ deci $u$ este soluţie a ecuaţiei (2.4). □

**TEOREMA 2.1.2**

*În orice punct $x^0 \in \Omega$ astfel încît $A(x^0) \neq 0$ există $n-1$ integrale prime funcţional independente ale sistemului diferenţial caracteristic (2.5).*

**Demonstraţie.** Deoarece $A(x^0) \neq 0$ putem presupune că $a_n(x_0) \neq 0$. Să rezolvăm acum problema Cauchy $x(0) = \xi, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}, x_n^0)$ pentru sistemul (2.5). Presupunind $\xi$ suficient de apropiat de $x^0$, se obţine soluţia $x = \varphi(t; \xi)$ sau pe componente

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, x_n^0) \\ \vdots \\ x_n = \varphi_n(t; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, x_n^0) \end{cases} \tag{2.6}$$

Inlocuind $t = 0$ se obţine sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1(0; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, x_n^0) = & \xi_1 \\ & \vdots \\ \varphi_{n-1}(0; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, x_n^0) = & \xi_{n-1} \\ \varphi_n(0; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1}, x_n^0) = & x_n^0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Să interpretăm (2.6) ca un sistem implicit în $(t, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Folosind (2.7) rezultă că $(0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$ verifică sistemul (2.6) şi mai mult

$$\frac{D(\varphi_1, \ \cdots, \varphi_n)}{D(t, \xi_1, \cdots \ , \xi_{n-1})}(0, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0) = (-1)^n a_n(x^0) \neq 0.$$

Din teorema funcţiilor implicite rezultă că există o vecinătate $\omega$ a punctului $x^0$ şi funcţiile $v, u_1, \ldots, u_{n-1}$ de clasă $C^1$ pe $\omega$ astfel ca

$$t = t(x), \quad \xi_1 = u_1(x), \ldots, \xi_{n-1} = u_{n-1}(x) \tag{2.8}$$

Se observă uşor că funcţiile $u_i$ nu sînt identic constante şi că are loc relaţia

$$\frac{D(u_1, \ldots, u_{n-1})}{D(x_1, \ldots, x_{n-1})}(x^0) = 1.$$

Cu alte cuvinte funcţiile $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sînt funcţional independente într-o vecinătate a punctului $x^0$. Să demonstrăm că $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sînt integrale prime, adică $t \longrightarrow u_i(\psi(t))$ este o funcţie constantă pentru orice soluţie $\psi$ a sistemului (2.5) şi pentru orice $1 \leq i \leq n-1$. Din (2.6), (2.7), (2.8) rezultă că $u_i(\psi(t))$ este constantă pentru $i = 1, \ldots, n-1$ şi pentru orice soluţie $\psi$ a sistemului(2.5) care la momentul $t = 0$ ia valoarea $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_n^0)$. Să considerăm acum o soluţie oarecare $x = \phi(t, z)$ a sistemului (2.5) care rămîne în $\omega$ şi care la momentul $t = 0$ ia valoarea $z$. Ca o consecinţă a teoremei de unicitate pentru sisteme autonome are loc relaţia:

$$\phi(t + \tau; z) = \phi(t, \phi(\tau, z)) \tag{2.9}$$

Pe de altă parte, sistemul $z = \phi(\tau; \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, x_n^0)$ are conform teoremei funcţiilor implicite o soluţie unică $(\tau(z), \xi_1(z), \ldots, \xi_{n-1}(z))$ pentru $z$ într-o vecinătate a punctului $x^0$. Conform relaţiei (2.9) avem $\phi(t; z) = \phi(t; \phi(\tau(z), \xi_1(z), \ldots, \xi_{n-1}(z), x_n^0)) =$

$= \phi(t+\tau(z); \xi_1(z), \ldots, \xi_{n-1}(z), x_n^0) = \psi(t)$. Din cele arătate mai sus rezultă $u_i(\psi(t)) = const$, pentru $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Cu aceasta Teorema 2.1.2 este complet demonstrată. □

**REMARCA 2.1.1**

*Sistemul (2.5) are numai $n-1$ integrale prime funcţional independente.*

**Demonstraţie.** Dacă $u_1, \cdots, u_{n-1}$ sînt cele $n-1$ integrale prime funcţional independente obţinute în Teorema 2.1.2 iar $u$ este o altă integrală primă, folosind Teorema 2.1.1 obţinem sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u_1 = 0, \quad \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u_{n-1} = 0,$$

care în orice punct $x_0$ cu $A(x_0) \neq 0$ poate fi interpretat ca un sistem de ecuaţii algebrice în necunoscutele $a_j(x_0)$. Cum $A(x_0) = (a_1(x_0), ..., a_n(x_0)) \neq 0$ rezultă că determinantul sistemului care este chiar iacobianul funcţiilor $u_1, \ldots, u_{n-1}, u$ este nul deci există $U$ astfel ca

$$u = U(u_1, u_, \cdots, u_{n-1}) \tag{2.10}$$

□

Aşadar, dacă se cunosc $n-1$ integrale prime funcţional independente ale sistemului (2.5) atunci problema integrării ecuaţiei cu derivate parţiale (2.4) este rezolvată. Orice soluţie a ecuaţiei (2.4) se obţine prin particularizarea funcţiei U din soluţia generală (2.10).

**EXEMPLUL 2.1.1** *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_1 \cdots x_{n-1} \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Sistemul caracteristic asociat ecuaţiei de mai sus este

$$\frac{dx_1}{dt} = 1, \frac{dx_2}{dt} = x_1, \cdots, \frac{dx_n}{dt} = x_1 \cdots x_{n-1}.$$

Acest sistem are următoarele $n-1$ integrale prime funcţional independente $u_1 = x_1^2 - 2x_2$, $u_2 = x_2^2 - 2x_3, \ldots, u_{n-1} = x_{n-1}^2 - 2x_n$. Deci, soluţia generală a ecuaţiei de mai sus va fi $u = U(x_1^2 - 2x_2, x_2^2 - 2x_3, \ldots, x_{n-1}^2 - 2x_n)$, unde $U$ este o funcţie arbitrară de clasă $C^1$.

### Problema Cauchy restrinsă

Problema Cauchy restrînsă constă în determinarea unei soluţii $u$ pentru ecuaţia (2.4) cu data initială $u^0$ , adică

$$u(x) = u^0(x) \quad \forall x \in S \tag{2.11}$$

unde $S$ este o mulţime deschisă din hiperplanul $H = \{x \in R^n;\ \ x_n = x_n^0\}$.

Vom arată că dacă $a_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \neq 0$ atunci problema (2.4), (2.11) are soluţie pentru orice funcţie reală de clasa $C^1$. Dacă această condiţie nu este satisfăcută, în general, problema Cauchy nu are soluţie (Problema $\partial_1 u = 0$, cu $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = u^0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ are soluţie numai dacă $\partial_1 u^0 = 0$).

Fie $u_1, \ldots, u_{n-1}$ integrale prime funcţional independente ale sistemului caracteristic (2.5). Din $u_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_1, \ldots, u_{n-1}(x_1, ..., u_{n-1}, x_n^0) = \bar{u}_{n-1}$ cum $u_1, \ldots, u_{n-1}$ sînt funcţional independente, există $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ funcţii de clasa $C^1$ astfel ca $x_1 = \varphi_1(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, x_{n-1} = \varphi_{n-1}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})$. Funcţia $u$ definită prin

$$u = u^0(\varphi_1(u_1, \cdots, u_{n-1}), \cdots, \varphi_{n-1}(u_1, \cdots, u_{n-1}))$$

va fi soluţia căutată a problemei (2.4), (2.11). Într-adevăr, $u$ fiind o funcţie de integrale prime verifică ecuaţia (2.4), iar dacă se inlocuieste $x_n$ prin $x_n^0$ se obţine

$$u(x', x_n^0) = u^0(\varphi_1(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1})) = u^0(x'),\ \ x' \in S.$$

**EXEMPLUL 2.1.2** *Să se determine soluţia problemei:*

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad u(x, y, 1) = x - y.$$

Sistemul caracteristic are pe $u_1 = \sqrt{x} - \sqrt{z}$, $\quad u_2 = \sqrt{y} - \sqrt{z}$ două integrale prime funcţional independente. Formăm sistemul: $u_1(x, y, 1) = \bar{u}_1$, $u_2(x, y, 1) = \bar{u}_2$ adică $\sqrt{x} - 1 = \bar{u}_1$, $\sqrt{y} - 1 = \bar{u}_2$ de unde aflam $x$ şi $y$ în functie de $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, adică $x = \varphi_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\bar{u}_1 + 1)^2$, $y = \varphi_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (\bar{u}_2 + 1)^2$ deci $u = u_0(\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2)) = \varphi_1(u_1, u_2) - \varphi_2(u_1, u_2) = (u_1 + 1)^2 - (u_2 + 1)^2 = x - y + 2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{z})$. Soluţia problemei de mai sus este dată de $\quad u(x, y, z) = x - y + 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot (1 - \sqrt{z})$.

### Problema Cauchy generală

Problema Cauchy generală constă în determinarea unei funcţii $u$, soluţie a ecuaţiei (2.4) şi care verifică $\ u(x) = u^0(x) \quad \forall\ x \in S$ unde $S$ este o hipersuprafaţă $(n-1)$ dimensională. Dacă hipersuprafaţa $S$ este dată de ecuaţia carteziană $h(x_1, ..., x_n) = 0$ , adică

$$S = \{x \in R^n;\ \ h(x_1, ..., x_n) = 0\} \tag{2.12}$$

unde $h$ este o funcţie de clasă $C^1$ cu $\partial h \neq 0$, atunci prin schimbarea de variabilă $\chi :\quad y_1 = x_1,\ \ldots, y_{n-1} = x_{n-1},\ y_n = h(x_1, ..., x_n)$ $\quad$ ecuaţia (2.4) se transformă într - o ecuaţie de forma $\sum_{k=1}^n \bar{a}_k \partial_k \bar{u} = 0$ unde $\bar{a}_k = \sum_{j=1}^n a_j \partial_j y_k,\quad k = 1, \ldots, n$ şi $\bar{u} = u \circ \chi^{-1}$. Condiţia $\bar{a}_n \neq 0$ este echivalentă cu

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial h}{\partial x_j} \neq 0$$

ceea ce inseamnă că hipersuprafaţa $S$ nu este caracteristică.

Dacă $\bar{a}_n \neq 0$, problema Cauchy $\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{a}_k \partial_k \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(y', 0) = u^0(\chi^{-1}(y', 0))$ are o unică soluţie de clasă $C^1$. Din cele de mai sus şi Teorema 2.1.2 obţinem teorema următoare:

**TEOREMA 2.1.3**

*Dacă $S$ este o hipersuprafaţă necaracteristică de clasă $C^1$ şi dacă $a_1, \dots, a_n$ şi $u^0$ sînt funcţii cu valori reale de clasa $C^1$, atunci există o soluţie unică a ecuaţiei (2.4), definită într-o vecinătate a lui $S$ şi care verifică $u = u^0$ pe $S$.*

Soluţia problemei Cauchy (2.4), (2.2) se poate determina la fel ca soluţia problemei (2.4), (2.11) dacă se cunosc $n-1$ integrale prime independente ale sistemului (2.5).

• Dacă $S$ este de forma $S = \{x \in R^n; h(x) = 0\}$ se determină $x_1, \dots, x_n$ din sistemul compatibil $u_1(x_1, \dots, x_n) = \bar{u}_1 \quad \dots \quad u_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = \bar{u}_{n-1}, \quad h(x_1, ..., x_n) = 0$ adică $x_1 = \varphi_1(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}), \cdots, x_n = \varphi_n(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1})$. Funcţia

$$u = u^0(\varphi_1(u_1, ..., u_{n-1}), \cdots, \varphi_n(u_1, ...u_{n-1}))$$

este soluţie a problemei (2.4), (2.2).

• Dacă hipersuprafaţa $(n-1)-$ dimensională $S$ se exprimă parametric prin

$$x_1 = g_1(s_1, \dots, s_{n-1}), \cdots, x_n = g_n(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad (s_1, \dots, s_{n-1}) \in U \subset R^{n-1},$$

soluţia se determină astfel. Din $u_1(g(s))) = \bar{u}_1, \quad \dots, \quad u_{n-1}(g(s)) = u_{n-1}$ se obţine $s = \varphi(\bar{u_1}, \dots, \bar{u}_{n-1})$, adică $s_j = \varphi_j(\bar{u_1}, \dots, \bar{u}_{n-1})$, $j = 1, \dots, n-1$. Funcţia $u = u^0\Big(g(\varphi(u_1, \dots, u_{n-1}))\Big)$ este soluţie a problemei (2.4), (2.2).

• Soluţia problemei (2.4), (2.2) se poate obţine fără a determina integralele prime ale sistemului (2.5). Presupunem că hipersuprafaţa $S$ se scrie parametric sub forma $x = g(s)$, adică

$$x_j = g_j(s_1, \dots, s_{n-1}), \quad j = 1, \dots, n, \quad s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in U \subset R^{n-1}.$$

Problema Cauchy

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(x), \quad x_j(0) = g_j(s), \quad j = 1, \dots, n$$

are soluţia $x = \varphi(t; g(s))$, de unde se obţine $t(x), s(x)$. Soluţia problemei (2.4), (2.2) va fi funcţia $u$ definită într-o vecinatate a lui $S$ prin $u(x) = u^0\Big(g_1(s(x)), \dots, g_n(s(x))\Big)$.

### Problema Cauchy pentru ecuaţia liniară neomogenă

Să considerăm acum ecuaţia liniară (2.3). Problema Cauchy constă în determinarea unei funcţii de clasă $C^1$ ce verifică ecuaţia (2.3) şi condiţia iniţiala (2.2). Dacă

hipersuprafaţa $S$ este caracteristică în $x_0$, cantitatea $\sum_{j=1}^{n} a_j(x_0)\partial_j u(x_0)$ este egala cu $||A(x_0)|| \dfrac{\partial u^0}{\partial \tau}(x_0)$, unde $\tau = A(x_0)/||A(x_0)||$ este o direcţie tangentă la $S$ în $x_0$, adică este complet determinată de valorile lui $u^0$ în $x_0$, şi deci, în general nu este egală cu $f(x_0) - b(x_0)u(x_0)$.
( De exemplu, luînd ecuaţia $\partial_1 u = 0$ şi hiperplanul $S = \{x \in R^n; x_n = 0\}$, nu putem avea $u = u^0$ pe $S$ fără ca $\partial_1 u^0 = 0$ pe $S$.) Pentru a putea rezolva problema Cauchy, în general, trebuie să presupunem că $S$ este o hipersuprafaţă necaracteristică, şi aşa vom face în continuare.

Dacă considerăm acum o curbă caracteristică, adică o soluţie a sistemului (2.5) atunci în lungul unei asemenea curbe o soluţie $u$ a ecuaţiei (2.3) trebuie să satisfacă

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \partial_j u \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u = f - bu \tag{2.13}$$

Prin orice punct $x_0 \in S$ trece o unică curbă caracteristică, anume soluţia sistemului (2.5) cu $x(0) = x_0$. Deoarece hipersuprafaţa $S$ este necaracteristică în lungul acestei curbe, soluţia $u$ a ecuaţiei (2.3) este pur şi simplu soluţia ecuaţiei diferenţiale (2.13) cu condiţia iniţială: $u(0) = u^0(x_0) = u^0(x(0))$. Deci şi în acest caz problema Cauchy pentru ecuaţia liniară (2.3) s-a redus la o problema Cauchy pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale:

$$\frac{du}{dt} = f(x) - b(x)u, \quad \frac{dx_1}{dt} = a_1(x), \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = a_n(x).$$

**TEOREMA 2.1.4**

*Dacă $S$ este o hipersuprafaţă necaracteristică de clasa $C^1$ pentru ecuaţia (2.3) şi dacă funcţiile $a_1, \ldots, a_n, b, f, u^0$ sînt funcţii cu valori reale de clasa $C^1$, atunci există o unică soluţie de clasa $C^1$ a ecuaţiei (2.3) definită într-o vecinătate a lui $S$ şi care satisface $u = u_0$ pe $S$.*

Această teoremă este un caz particular a unui rezultat mai general pentru ecuaţii cvasiliniare, care va fi demonstrat ulterior.

### Ecuaţii liniare cu coeficienţi în $\mathbb{C}$

Rezultatele prezentate anterior nu rămîn adevărate dacă $a_1, \ldots, a_n, f$ şi $b$ sînt funcţii ce iau valori în $\mathbb{C}$. Părţile reale şi imaginare ale lui $a_j = a'_j + ia''_j$, $f = f' + if''$, $b = b' + ib''$, $u = u' + iu''$ din ecuaţia (2.3) verifică relaţiile:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j \partial_j u' - \sum_{j=1}^{n} a''_j \partial_j u'' - b'u' - b''u'' = f', \ \ \sum_{j=1}^{n} a''_j \partial_j u' + \sum_{j=1}^{n} a'_j \partial_j u'' + b''u' + b'u'' = f''.$$

Aceste relaţii formează un sistem de două ecuaţii cu două necunoscute $u'$ şi $u''$. Dacă $a_j$ şi $b$ sînt reale ($a''_1 = \cdots a''_n = b'' = 0$), ecuaţiile acestui sistem sînt necuplate: primă ecuaţie conţine numai pe $u'$ iar a două ecuaţie conţine numai pe $u''$, astfel putem rezolva separat cele două ecuaţii şi obtinem soluţia $u = u' + iu''$ pentru ecuaţia (2.3). Dacă $a_j$ şi $b$ sînt funcţii cu valori complexe sistemul de mai sus s-ar putea să nu posede soluţie, deci ecuaţia (2.3) să nu admită în general o soluţie, aşa cum rezultă din teorema urmatoare:

**TEOREMA 2.1.5**

*Fie $f$ o funcţie reală continuă ce depinde numai de $x_3$. Dacă există o funcţie $u$ de clasa $C^1$ în variabilele $(x_1, x_2, x_3)$ satisfăcînd $\partial_1 u + i\partial_2 u - 2i(x_1 + ix_2)\partial_3 u = f(x_3)$ într-o vecinătate a originii, atunci $f$ este o funcţie analitică în $x_3 = 0$.*

**Demonstraţie.** Presupunem $Lu = f$ în mulţimea

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3);\ \ x_1^2 + x_2^2 < R^2,\ \ |x_3| < R\} \quad (R > 0),$$

unde $Lu = \partial_1 u + i\partial_2 u - 2i(x_1 + ix_2)\partial_3 u$. Fie $z = x_1 + ix_2$. Scriem $z$ în coordonate polare ca $re^{i\theta}$ şi luăm $s = r^2$. Considerăm $V$, ca funcţie de $t = x_3$ şi $r$ ( sau echivalent de $t$ şi $s$) definită de integrala de contur

$$V(t, r) = \int_{|z|=r} u(x_1, x_2, t)dz = ir\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)\cdot e^{i\theta}d\theta.$$

Din teorema Stokes avem $V(t, r) = i\displaystyle\int_{|z|<r}(\partial_1 u + i\partial_2 u)(x_1, x_2, t)dx_1dx_2 =$
$= i\displaystyle\int_0^r\int_0^{2\pi}(\partial_1 u + \partial_2 u)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\rho d\rho d\theta.$ Deci

$$\frac{\partial V}{\partial r}(t, r) = i\int_0^{2\pi}(\partial_1 u + \partial_2 u)(r\cos\theta, r\sin\theta, t)rd\theta = \int_{|z|=r}(\partial_1 u + \partial_2 u)(x_1, x_2, t)\frac{r}{z}dz.$$

Prin urmare, pentru $0 \leq s < R^2$, $|t| < R$ folosind ecuaţia $Lu = f$ avem

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} = \int_{|z|=r}(\partial_1 u + \partial_2 u)(x_1, x_2, t)\frac{dz}{2z} =$$

$$= i\int_{|z|=r}\frac{\partial u}{\partial t}(x_1, x_2, t)dz + f(t)\int_{|z|=r}\frac{dz}{2z} = i\frac{\partial V}{\partial t}(r, t) + \pi i f(t)$$

Dacă $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$, atunci $U(t, s) = V(t, r) + \pi F(t)$ satisface $\partial_t U + i\partial_s U = 0$. Funcţia $U$ este olomorfă de argument $w = t+is$ în domeniul $0 < s < R^2$, $|t| < R$, şi $U$ este continuă pe dreapta $s = 0$. Mai mult, $V = 0$ cînd $s = 0$, astfel $U(t, 0) = \pi F(t)$ este reală. Prin urmare, din principiul de reflexie a lui Schwartz, formula $U(t, -s) = \overline{U(t, s)}$ dă o prelungire olomorfă a lui $U$ la o întreagă vecinătate a originii. În particular, $U(t, 0) = \pi F(t)$ este analitică în $t$, deci la fel este $f = F'$. $\square$

### 2.1.2 Ecuaţii cvasiliniare de ordinul întîi

Vom considera acum ecuaţia de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\partial_j u = b(x,u) \tag{2.14}$$

unde functiile $a_1, \ldots, a_n, b$ sînt definite pe $\Omega \subset R^{n+1}$ cu valori reale de clasa $C^1$ şi verifică condiţia $\sum_{j=1}^{n} |a_j(x,u)|^2 \neq 0 \quad \forall \ (x,u) \in \Omega$.

**DEFINIŢIA 2.1.1**

*O funcţie $u : D \subset R^n \to R$ de clasa $C^1$ cu proprietatea că $(x, u(x)) \in \Omega$, $\forall \ x \in D$ şi $\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x))\partial_j u(x) = b(x, u(x))$ $\forall \, x \in D$ se numeşte soluţie a ecuaţiei (2.14)*

**Artificiul Jacobi**

Ecuaţiei (2.14) îi asociem următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întîi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial V}{\partial x_j} + b(x,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{2.15}$$

Următoarea teoremă dă legătura dintre soluţiile ecuaţiei (2.14) şi (2.15).

**TEOREMA 2.1.6**

1) *Dacă $V$ este o soluţie a ecuaţiei (2.15) definită pe $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ iar $(x_0, u_0) \in \tilde{\Omega}$ este astfel ca $\dfrac{\partial V}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0$, atunci funcţia $u$ definită de ecuaţia $V(x,u) - V(x_0, u_0) = 0$ este o soluţie a ecuaţiei (2.14).*

2) *Dacă $u$ este o soluţie a ecuaţiei (2.14), atunci există $V$ o soluţie a ecuaţiei (2.15) astfel ca $V(x, u(x)) \equiv 0$*

**Demonstraţie.** 1) Cum $\dfrac{\partial V}{\partial u}(x_0, u_0) \neq 0$ există o funcţie $u : \tilde{D} \to R$ astfel ca $V(x, u(x)) = V(x_0, u_0)$ şi a cărei derivate în raport cu $x_j$ verifică

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x, u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv 0, \quad j = 1, \ldots n.$$

Înmulţind relaţiile de mai sus cu $a_j(x, u(x))$ şi adunîndu-le, obţinem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j}(x, u(x))\, a_j(x, u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x, u(x)) \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j(x, u(x))\, \frac{\partial u}{\partial x_j}(x, u(x)) = 0.$$

Dar $V$ este o soluţie a ecuaţiei (2.15) deci are loc identitatea:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u(x))\frac{\partial V}{\partial x_j}(x,u(x)) + \frac{\partial V}{\partial u}(x,u(x)) \cdot b(x,u(x)) \equiv 0$$

de unde rezultă $\frac{\partial V}{\partial u}(x,u(x))\Big[\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) - b(x,u(x))\Big] = 0$ şi ţinînd seama de faptul că $\frac{\partial V}{\partial u}(x,u(x)) \neq 0$ obţinem că $u$ este o soluţie a ecuaţiei (2.14).

2) Fie $V_1,\ldots,V_n$, $n$ integrale prime ale sistemului

$$\frac{du}{dt} = b(x,u), \quad \frac{dx_1}{dt} = a_1(x,u),\ \ldots\ , \frac{dx_n}{dt} = a_n(x,u).$$

Fie $U_i(x) = V_i(x,u(x))$. Vom arăta că $\frac{D(U_1,\cdots,U_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} = 0$. Dar

$$\frac{D(U_1,...,U_n)}{D(x_1,...,x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} + \frac{\partial V_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} + \frac{\partial V_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Cum $V_1,\cdots V_n$ sînt soluţii ale ecuaţiei (2.15) şi $u$ soluţie a ecuaţiei (2.14) vom avea

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} - b(x,u) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + b(x,u)\frac{\partial V_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1,\ldots n$$

care este un sistem de $n+1$ ecuaţii în $a_1,\cdots a_n$. Cum $\frac{D(V_1,\ldots,V_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)} \neq 0$ pentru compatibilitate trebuie ca

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} & -b\frac{\partial V_1}{\partial u} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} & -b\frac{\partial V_n}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u}{\partial x_n} & +b \end{vmatrix}$$

determinant care este egal cu $\frac{D(U_1,\cdots,U_n)}{D(x_1,\cdots,x_n)} \cdot b(x,u) = 0$. Dar $b(x,u(x))$ nu poate să fie identic nul, deoarece dacă ar fi aşa din ultimile $n$ ecuaţii de mai sus ar rezulta că $a_1(x,u(x)) = \cdots = a_n(x.u(x)) \equiv 0$ ceea ce contrazice ipoteza făcută că $a_1^2(x,u(x)) + \cdots + a_n^2(x,u(x)) \neq 0$. Deci $\frac{D(U_1,\cdots,U_n)}{D(x_1\cdots,x_n)} = 0$, de unde rezultă că există $\Phi$ de clasă $C^1$ astfel ca $\Phi(U_1,\cdots U_n) \equiv 0$. Luînd $V(x,u) = \Phi(V_1(x,u),\cdots V_n(x,u))$ obţinem că $V$ este soluţie a ecuaţiei (2.15) şi $V(x,u(x)) \equiv 0$. □

**EXEMPLUL 2.1.3** *Să se determine soluţia ecuaţiei:* $x_1 u\partial_1 u + x_2 u\partial_2 u = -x_1 x_2$.

Sistemul caracteristic asociat este

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 u, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2 u, \quad \frac{du}{dt} = -x_1 x_2$$

de unde obţinem că $V_1(x_1, x_2, u) = x_1/x_2$ şi $V_2(x_1, x_2 u) = u^2 + x_1 x_2$ sînt integrale prime funcţional independente, deci soluţia generală a ecuaţiei este dată sub formă implicită $F(x_1/x_2, u^2 + x_1 x_2) = 0, \quad (x_1, x_2) \in R^2, \quad x_2 \neq 0$ unde $F : R^2 \longrightarrow R$ este o funcţie de clasă $C^1$. □

### Problema Cauchy. Existenţă şi unicitate

Unei soluţii $u$ a ecuaţiei cu derivate parţiale (2.14) într-o mulţime deschisă $D \subset R^n$ îi corespunde o hipersuprafaţă $S = \{(x, u(x)), x \in D\}$ din $R^{n+1}$ numită *hipersuprafaţă integrală*. Funcţiile $a_1, \ldots, a_n, b$ definesc un cimp vectorial în spaţiul $R^{n+1}$ ( sau într-o porţiune a sa $\Omega$ ). Cum $(\partial_1 u, \ldots, \partial_n u, -1)$ constituie direcţia normalei la hipersuprafaţa integrală $S$, ecuaţia (2.14) exprimă faptul ca normala la hipersuprafaţa $S$ este perpendiculară în fiecare punct pe direcţia vectorului $(a_1, \cdots, a_n, b)$. Deci hipersuprafeţele integrale sînt acele hipersuprafeţe care în fiecare din punctele sale sînt tangente la $(a_1, \ldots, a_n, b)$.

**TEOREMA 2.1.7**

*Dacă $P(x^0, u^0)$ este un punct de pe hipersuprafaţa $S = \{(x, u(x)), x \in D\}$ iar $\gamma$ este o curbă caracteristică (soluţia sistemului (2.5)) ce trece prin $P$, atunci $\gamma$ se află complet pe hipersuprafaţa $S$.*

**Demonstraţie.** Fie $\gamma$ dată prin $(x(t), z(t))$ unde $x$ şi $z$ sînt soluţii ale sistemului caracteristic asociat

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x, z), \quad \cdots, \quad \frac{dx_n}{dt} = a_n(x, z), \quad \frac{dz}{dt} = b(x, z)$$

pentru care $x(t^0) = x^0$, $z(t^0) = u^0$. Din $\gamma$ şi $S$ formăm expresia :

$$U(t) = z(t) - u(x(t)) \tag{2.16}$$

Desigur, $U(t^0) = 0$, deoarece $P$ se afla pe $S$. Folosind sistemul caracteristic obţinem

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt}(t) &= \frac{dz}{dt} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x) \frac{dx_j}{dt} = b(x, z) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x) a_j(x, z) = \\ &= b(x, u(x) + U(t)) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x) a_j(x, u(t) + U(t)) \end{aligned}$$

adică, am obţinut că $U$ verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{dU}{dt} = b(x, u(x) + U) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j u(x) a_j(x, u(t) + U) \tag{2.17}$$

Dar, $U \equiv 0$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (2.17), deoarece $u : D \to R$ satisface ecuaţia (2.14). Din unicitatea soluţiei problemei Cauchy, pentru ecuaţia de mai sus obţinem că $U \equiv 0$ este singura soluţie care se anulează în $t = t_0$, deci funcţia $U$ definită prin (2.16) se anulează identic, prin urmare $(x(t), z(t)) = (x(t), u(x(t)) \in S$ adică curba $\gamma$ este cuprinsă în întregime în $S$. □

**REMARCA 2.1.2**

1 *Dacă două hipersuprafete integrale $S_1$ şi $S_2$ au un punct $P$ în comun atunci $S_1$ şi $S_2$ se intersectează după curba caracteristică care trece prin $P$.*

2 *Dacă două hipersuprafeţe integrale $S_1$ şi $S_2$ se intersectează (fără să fie tangente), în lungul unei curbe $\gamma$, atunci $\gamma$ este o curbă caracteristică.*

**Demonstraţie.** 1) Fie $\gamma$ curba caracteristică care trece prin $P$. Din Teorema 2.1.7 rezultă că $\gamma$ se află atît pe $S_1$ cît şi pe $S_2$, deci $\gamma \subset S_1 \cap S_2$.

2) Să considerăm planele $\pi_1$, $\pi_2$ tangente la $S_1$ şi $S_2$ într-un punct $P$ a curbei $\gamma$. Fiecare din hiperplane conţin $(a_1, \ldots, a_n, b)$ în $P$. Deoarece $\pi_1 \neq \pi_2$ rezultă că intersecţia lui $\pi_1$ cu $\pi_2$ are direcţia $(a_1, a.., a_n, b)$. Cum direcţia tangentei $T$ la $\gamma$ în $P$ aparţine de asemenea hiperplanelor $\pi_1$ şi $\pi_2$, rezultă că $T$ are direcţia $(a_1, \ldots, a_n, b)$ şi deci $\gamma$ este o curbă caracteristică. □

Să presupunem acum că data initială $u^0$ este prescrisă pe hipersuprafaţa $S$, adică

$$u(x) = u^0(x) \quad \forall x \in S \tag{2.18}$$

Dacă formăm varietatea $S^* = \{(x, u^0(x)), x \in S\}$ din $R^{n+1}$, atunci graficul soluţiei $u$ al problemei Cauchy (2.14), (2.18) va fi hipersuprafaţa din $R^{n+1}$ generată de curbele integrale ce trec prin $S^*$ (vezi figura 2.1).

Din nou este nevoie să presupunem că $S$ este într-un anumit sens necaracteristică. Aceasta revine la a spune că pentru orice $x \in S$ vectorul $A(x) = (a_1(x, u^0(x)), \ldots, a_n(x, u^0(x))$ nu este tangent lui $S$ în $x$ ( Să observăm că în această condiţie, intervine atit data iniţială $u^0$ cît şi hipersuprafaţa $S$).

• Dacă hipersuprafaţa $S$ este de forma $S = \{x \in R^n, h(x) = 0\}$ unde $h$ este de clasă $C^1$ şi $\partial h \neq 0$, condiţia de mai sus revine la

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u^0(x)) \partial_j h(x) \neq 0 \quad x \in S.$$

• Dacă hipersuprafaţa $S$ este reprezentată parametric de aplicaţia $g : U \subset R^{n-1} \longrightarrow R^n$, luînd $(s_1, \ldots, s_{n-1})$ coordonatele pe $R^{n-1}$, condiţia de mai sus revine la

Figure 2.1:

$$\triangle = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial s_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial s_{n-1}} & a_1(g(s), u^0(g(s))) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial s_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial s_{n-1}} & a_n(g(s), u^0(g(s))) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.19}$$

**TEOREMA 2.1.8**

*Dacă $S$ este o hipersuprafaţă de clasă $C^1$ din $R^n$ şi dacă $a_1, \ldots, a_n, b$ şi $u^0$ sînt funcţii de clasă $C^1$ astfel ca pentru orice $x \in S$ vectorul $(a_1(x, u^0(x)), \ldots, a_n(x, u^0(x)))$ nu este tangent în $x$ hipersuprafeţei $S$, atunci există o soluţie de clasă $C^1$, definită într-o vecinătate a lui $S$, adică problema Cauchy (2.14 ) (2.18) are soluţie unică.*

**Demonstraţie.** Unicitatea soluţiei rezultă din Remarca 2.1.2. Dacă $u$ este soluţie a problemei Cauchy (2.14) (2.18) graficul funcţiei $u$ este format din reuniunea tuturor curbelor integrale ale cîmpului vectorial $A(x, y) = (a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y), b(x, y))$ ce trec prin $S^* = \{(x, u^0(x)), x \in S\}$. Orice hipersuprafaţă $S$ de clasă $C^1$ poate fi acoperită cu mulţimi deschise pe care ea admite o reprezentare parametrică $x = g(s)$. Dacă rezolvăm problema Cauchy pe fiecare asemenea mulţime, din unicitate, soluţiile locale **coincid** pe domeniul lor comun şi deci prin lipire se obţine soluţia globală. Este suficient, prin urmare, să presupunem că $S$ este reprezentată parametric prin $x = g(s)$, adică $S = \{g(s); s \in U\} \subset R^n$ unde $U \subset R^{n-1}$. Pentru fiecare

$s \in U \subset R^{n-1}$ considerăm problema Cauchy

$$\frac{\partial x_j}{\partial t}(s,t) = a_j(x,y), \quad x_j(s,0) = g_j(s) \qquad j = 1,\dots,n$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = b(x,y), \qquad y(s,0) = u^0(g(s)).$$

Aici $s$ este doar un parametru, astfel că avem un sistem diferenţial ordinar în $t$. Acest sistem are o unică soluţie ( $x_1,\dots,x_n,y$ ) definită pentru $t$ mic, şi $(x_1,\dots,x_n,y)$ este o funcţie de clasă $C^1$ în $s$ şi $t$. Din condiţia că $S$ este necaracteristică pentru $A$, adică relaţia (2.19) este satisfacută, şi din teorema funcţiilor implicite rezultă că aplicaţia $(s,t)\longrightarrow x(s,t) = (x_1(s,t),\dots,x_n(s,t))$ este inversabilă într-o vecinătate a lui $S$, obţinînd $s$ şi $t$ ca funcţii în $x$ de clasa $C^1$ pe $S$. Luînd acum $u(x) = y(s(x),t(x))$ avem evident $u = u^0$ pe $S$ şi din derivarea funcţiilor compuse avem

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j u &= \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial y}{\partial s_k}\frac{\partial s_k}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j}\Big) = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial y}{\partial s_k}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial s_k}{\partial x_j}\Big) + \frac{\partial y}{\partial t}\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial t}{\partial x_j} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial y}{\partial s_k} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial s_k}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}\Big) + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_j} = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial y}{\partial s_k}\frac{\partial s_k}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t} = b,
\end{aligned}$$

deoarece $s_1,\dots,s_{n-1}$ şi $t$ sînt variabile independente. Cu aceasta demonstraţia este terminată. $\square$

### EXEMPLUL 2.1.4

*Să se rezolve problema $u\partial_1 u + \partial_2 u = 1$, $u = s/2$ pe segmentul $x_1 = x_2 = s$, $0 < s < 1$.*

Aici $n = 2$ , $g_1(s) = s$, $g_2(s) = s$, $s \in (0,1)$ şi $a_1(x,y) = y$, $a_2(x,y) = 1$. Condiţia (2.19) este satisfăcută pe $S$ deoarece

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(s) & a_1(g(s),u^0(g(s))) \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s) & a_2(g(s),u^0(g(s))) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - s/2 \neq 0 \text{ pentru } 0 < s < 1.$$

Rezolvînd problema Cauchy

$$\frac{dx_1}{dt} = y, \quad \frac{dx_2}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \qquad (x_1,x_2,y)_{|t=0} = (s,s,s/2),$$

obţinem $y(s,t) = t + (s/2)$, $x_2(s,t) = t + s$, $x_1(s,t) = (t^2/2) + (st/2) + s$. Din ultimele două ecuaţii obţinem $t(x) = 2(x_1 - x_2)/(x_2 - 2)$ şi $s(x) =$

$(x_2^2-2x_1)/(x_2-2)$, deci $u(x)=y(s(x),t(x))=t(x)+s(x)/2=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_2-2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x_2^2-2x_1}{x_2-2}=\dfrac{x_2^2-4x_2+2x_1}{2(x_2-2)}$. Rezultă că $u(x_1,x_2)=\dfrac{x_2^2-4x_2+2x_1}{2(x_2-2)}$ este soluţia problemei Cauchy. □

**REMARCA 2.1.3**

*Dacă ecuaţia (2.14) este liniară şi neomogenă, din Teorema 2.1.7 rezultă Teorema 2.1.4.*

**Demonstraţie.** Într-adevăr, dacă $S$ este necaracteristică atunci $(a_1(x),\dots,a_n(x))$ nu este tangent la $S$ în nici un punct $x\in S$ şi deci există o soluţie într-o vecinătate a lui $S$, egală cu $u^0$ pe $S$.

**Problema Cauchy. Nonexistenta şi nonunicitatea soluţiei**

În paragraful anterior s-a arătat existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy cînd pentru orice $x\in S$ vectorul $A(x)=(a_1(x,u^0(x)),\dots,a_n(x,u^0(x))$ nu este tangent în $x$ hipersuprafeţei $S$. Exemplul următor arată că dacă această condiţie nu este îndeplinită, adică există $x^0\in S$ astfel ca vectorul $A(x^0)$ este tangent hipersuprafeţei $S$ în $x^0$, în general, problema Cauchy nu admite soluţii, iar dacă admite o soluţie atunci problema Cauchy are o infinitate de soluţii.

**EXEMPLUL 2.1.5**

*Să se determine forma lui $u^0$ pentru care problema $x_1\partial_1 u+x_2\partial_2 u=u;\quad u|_S=u^0$ unde $S=\{(x_1,x_2);\ \ x_2=x_1,\ x_1>0\}\subset R^2$ are soluţie.*

Aici $n=2$, $g_1(s)=s$, $g_2(s)=s$, $s>0$, $a_1((x_1,x_2),y)=x_1$, $a_2((x_1,x_2),y)=x_2$, iar

$$\triangle=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial s}(s) & a_1(g(s),u^0(g(s)))\\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial s}(s) & a_2(g(s),u^0(g(s)))\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & g_1(s)\\ 1 & g_2(s)\end{vmatrix}=g_2(s)-g_1(s)=s-s=0$$

În semispaţiul $x_1>0$ soluţia generală a ecuaţiei $x_1\partial_1 u+x_2\partial_2 u=u$ este de forma $u(x_1,x_2)=Q(x_2/x_1)\cdot x_1$, unde $Q$ este o funcţie derivabilă arbitrară. ( Forma lui $u$ se poate obţine astfel: Scriind sistemul caracteristic se observă că $u_1=x_2/x_1$ este o integrală primă. Efectuînd schimbarea de variabilă : $\xi=x_2/x_1$, $\eta=x_1^2$ ecuaţia se transformă în $2\eta\partial_\eta\tilde{u}=\tilde{u}$ ce are soluţia $\tilde{u}(\xi,\eta)=Q(\xi)\sqrt{\eta}$. Deci $u(x_1,x_2)=Q(x_2/x_1)x_1$ ). Cum $u(x_1,x_1)=Q(1)x_1$ pentru $x_1>0$ rezultă că problema Cauchy are soluţie dacă $u^0$ are forma $u^0(t)=ct,\ t>0$, unde $c$ este o constantă. (Este suficient să alegem funcţia $Q$ astfel ca $Q(1)=c$ ). Dacă $u^0$ nu are forma indicată mai sus, atunci problema Cauchy nu are nici o soluţie. În concluzie dacă $u^0(t)=ct$, $t>0$

problema Cauchy are o infinitate de soluţii (de exemplu $u(x_1, x_2) = k(x_1 - x_2) + cx_1,\ \ k \in R$), iar dacă $u^0$ nu este de forma de mai sus problema Cauchy nu are nici o soluţie.

**TEOREMA 2.1.9**

*Dacă $\Delta = 0$ pe $S^* \subset R^{n+1}$ atunci condiţia necesară şi suficientă ca problema Cauchy (2.14)(2.18) să aibă soluţie este ca $S^*$ să fie o varietate caracteristică $(n-1)-$ dimensională, adică în orice punct $(x^0, y^0) \in S^*$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, vectorul $(a_1(x^0, y^0), \ldots, a_n(x^0, y^0), b(x^0, y^0))$ să fie tangent la $S^*$ în $(x^0, y^0)$.*

**Demonstraţie.** Din condiţia $\Delta = 0$ pe $S^*$ există funcţiile $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de clasă $C^1$ în $s_1, \ldots, s_{n-1}$ astfel ca $a_i(x^0, y^0) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k(x_0) \dfrac{\partial g_i}{\partial s_k}(s_0), \quad i = 1, \ldots n$ unde $x^0 = g(s_0)$ şi $y^0 = u^0(s_0)$. Pentru o soluţie $u$ a ecuaţiei (2.14 ) într-un punct $(x^0, y^0) \in S^*$ avem

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial u}{\partial s_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial g_i}{\partial s_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \frac{\partial g_i}{\partial s_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} a_i = b,$$

deci

$$(a_1(x^0, y^0), \ldots a_n(x^0, y^0), b(x^0, y^0)) = (\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial s_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_{n-1}}{\partial s_1} & \dfrac{\partial u}{\partial s_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \dfrac{\partial g_{n-1}}{\partial s_{n-1}} & \dfrac{\partial u}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix}$$

adică vectorul $(a_1(x^0, y^0), \ldots, a_n(x^0, y^0), b(x^0, y^0))$ este tangent în $(x^0, y^0)$ la $S^*$.

Alegem o varietate $(n-1)$ dimensională $S'$ care intersctează $S^*$ după o varietate $S''$, $(n-2)-$ dimensională şi pentru care $\Delta \neq 0$. Atunci există o unică hipersuprafaţă integrală ce trece prin $S'$, deci $S'$ conţine toate curbele caracteristice ce trec prin $S''$ şi de asemenea varietate $S^*$care este generată de ele. □

### 2.1.3 Ecuaţii neliniare de ordinul întîi

Ne vom ocupa acum de studiul ecuaţiilor neliniare de ordinul întîi.

Fie $F : U \times V \times W \subset R^n \times R \times R^n \longrightarrow R$ o functie de $2n+1$ variabile de clasă $C^1$. Funcţia $F$ defineşte ecuaţia cu derivate parţiale

$$F(x_1,\ \ldots\ , x_n, u, \partial_1 u,\ \ldots\ , \partial_n u) = 0 \tag{2.20}$$

Numim soluţie a ecuaţiei (2.20) o funcţie $u\ :\ \tilde{U}\ \subset\ U \longrightarrow V$ de clasa $C^1$ cu $(\partial_1 u(x),\ \ldots\ , \partial_n u(x)) \in W$ pentru orice $x \in \tilde{U}$ şi astfel încît ecuaţia (2.20) este satisfăcută identic în $x$, adică

$$F(x, u(x), \partial_1 u(x), \ldots, \partial_n u(x)) \equiv 0 \quad \forall\ \ x \in \tilde{U} \tag{2.21}$$

Utilizînd notaţiile lui Monge $p_j = \partial_j u, \quad j = 1, \dots, n$ ecuaţia (2.20) se mai scrie $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0$. Pentru a avea efectiv o ecuaţie cu derivate parţiale se presupune că $\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial F}{\partial p_j}\Big)^2 \neq 0$. Studiul ecuaţiei (2.20) poate fi din nou redus la studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale. Fie $u : \tilde{U} \longrightarrow V$ o soluţie a ecuatiei (2.20). La început, considerăm curbele integrale ale cîmpului vectorial $\Big(\frac{\partial F}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial p_n}\Big)$ adică soluţiile ecuaţiilor

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_j}, \qquad j = 1, \dots, n \tag{2.22}$$

În lungul acestor curbe funcţia $y$ definită prin $y(t) = u(x(t))$ trebuie să satisfacă

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}. \tag{2.23}$$

În cazul cvasiliniar (2.14), $F(x, u, p) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, u)p_j - b(x, u)$ deci $\frac{\partial F}{\partial p_j} = a_j$ şi

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x, u)$$

iar (2.22, 2.23) formează un sistem determinat în variabile $(x_1, \dots, x_n, u)$ - în fapt sistemul folosit în demonstrarea Teoremei 2.1.8.

Pentru cazul neliniar general avem, de asemenea, nevoie de ecuaţii pentru variablele $(p_1, \dots, p_n)$ care vor fi obţinuţe în cele ce urmează. Din (2.22) avem

$$\frac{dp_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} \cdot \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial F}{\partial p_k}.$$

Derivînd, de asemenea, ecuaţia (2.20) în raport cu $x_j$, avem

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial p_k}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial p_k}.$$

Combinind aceste ecuaţii, obţinem

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} - p_j \frac{\partial F}{\partial u}. \tag{2.24}$$

Renunţînd la presupunerea ca $u$ este o soluţie dată, vedem că (2.21),(2.23), şi (2.24) formează un sistem de $2n + 1$ ecuaţii diferenţiale pentru $2n + 1$ necunoscute $(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ numit sistem caracteristic pentru ecuaţia (2.20). Deci am ataşat ecuaţiei (2.20) sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{array}{lrcl} a) & \dfrac{dx_j}{dt} & = & \dfrac{\partial F}{\partial p_j}(x, u, p), \quad j = 1, \dots, n \\ b) & \dfrac{du}{dt} & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial F}{\partial p_j}(x, u, p) \\ c) & \dfrac{dp_j}{dt} & = & -\dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x, u, p) - p_j \dfrac{\partial F}{\partial u}(x, u, p), \quad j = 1, \dots, n \end{array} \tag{2.25}$$

Este uşor de văzut că $F(x,u,p)=0$ este o integrală primă pentru sistemul (2.25). Într-adevăr

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}+\frac{\partial F}{\partial u}\sum_{i=1}p_i\frac{\partial F}{\partial p_i}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big(-\frac{\partial F}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial F}{\partial u}\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\Big[\frac{\partial F}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial x_i}-p_i\frac{\partial F}{\partial u}\Big]=0.$$

Dîndu-se o hipersuprafaţă $S$ de clasă $C^1$ şi o funcţie $u^0$ pe $S$, problema Cauchy pentru ecuaţia (2.20) constă în determinarea unei funcţii $u$ de clasă $C^1$ într-o vecinătate $\omega$ a lui $S$ astfel ca $u$ să verifice ecuaţia (2.20), adică $F(x,u(x),\partial_1 u(x),\ldots,\partial_n u(x))=0\ \ \forall\ \ x\in\omega$ şi condiţia iniţială pe $S$, adică

$$u(x)=u^0(x)\ \ \forall\ \ x\in S. \tag{2.26}$$

In rezolvarea problemei Cauchy (2.20),(2.26) se utilizează metoda caracteristicilor (metoda Cauchy ) sau metoda Lagrange.

### Metoda caracteristicilor sau metoda lui Cauchy

Presupunem că $F$ este o funcţie de clasă $C^2$. Funcţiile $\dfrac{\partial F}{\partial p_i},\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i},\ \dfrac{\partial F}{\partial u}$ fiind funcţii de clasă $C^1$ pentru orice $(x^0,y^0,p^0)\in R^{2n+1}$, sistemul (2.25) cu condiţiile iniţialele

$$\begin{array}{l} x_i=x_i(t;x^0,y^0,p^0),\ \ i=1,\ldots,n\\ y\ =y\ (t;x^0,y^0,p^0)\\ p_i=p_i(t;x^0,y^0,p^0),\ \ i=1,\ldots,n \end{array} \tag{2.27}$$

admite soluţie unică. Soluţia căutată a problemei Cauchy (2.20),(2.27) va fi generată de o familie unidimensională de curbe caracteristice (soluţii ale sistemului (2.25)a,b) care la momentul $t=0$ se sprijină pe varietatea iniţială $S^*$ din $R^{n+1}$ $(n-1)$-dimensională, definită prin

$$S^*=\{(x,y)\in R^n;\ \ y=u^0(x),x\in S\}.$$

Prin urmare, presupunînd că hipersuprafaţa $S$ de clasă $C^1$ este reprezentată parametric prin $x=g(s)$ cu $s\in D\subset R^{n-1}$ sau pe componente

$$x_1=g_1(s),\ldots,x_n=g_n(s),\ \ s\in D$$

sîntem conduşi a lua

$$x_1^0=g_1(s),\ldots,x_n^0=g_n(s),\ \ y^0=h(s)=u^0(g(s)),\ \ \ s=\{s_1,\ldots,s_{n-1})\in D \tag{2.28}$$

iar faptul că funcţia definind hipersuprafaţa $S^*$ va trebui să verifice ecuaţia (2.20) ne obligă să impunem condiţia

$$F(g_1(s),\ \dots\ , g_n(s), h(s),\ p_1^0,\ \dots\ , p_n^0) = 0\ \ \forall\ \ s \in D \tag{2.29}$$

In fine, vom impune pentru $p_1^0, \dots, p_n^0$ condiţiile

$$\sum_{k=1}^{n} p_k^0 \cdot \frac{\partial g_k}{\partial s_j}(s) = \frac{\partial h}{\partial s_j}(s),\ \ \forall\ \ s \in D,\ \ j \in \{1, \dots, n-1\} \tag{2.30}$$

Semnificaţia geometrică a ecuaţiei (2.30) este clară, dacă avem în vedere că

$$\Big(\frac{\partial g_1}{\partial s_j}, \dots, \frac{\partial g_n}{\partial s_j}\Big)_{j=1}^{n}$$

formează o bază a planului tangent la varietatea $S^*$, iar $(p_1^0, \dots, p_n^0, -1)$ ar urma să fie vectorul normal la suprafaţa integrală $S' = \{(x, y), y = u(x)\}$ în punctele varietăţii iniţiale $S^*$ (Cum $S'$ trebuie să conţină pe $S^*$, cerem ca planul tangent la $S^*$ şi la $S'$ să coincidă în punctele lui $S^*$ ).

În general, sistemul (2.29), (2.30) de $n$ ecuaţii cu $n$ funcţii necunoscute $(p_1^0, \dots, p_n^0)$ poate să nu aibe soluţie sau soluţia să nu fie unică. Vom căuta soluţii care să satisfacă condiţia

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s_1}(s) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial s_{n-1}}(s), & \frac{\partial F}{\partial p_1}(g(s), u^0(g(s)), p(g(s)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial s_1}(s) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial s_{n-1}}(s), & \frac{\partial F}{\partial p_n}(g(s)), u^0(g(s)), p(g(s)) \end{vmatrix} \neq 0,\ s \in D \tag{2.31}$$

ţinînd seama de condiţia (2.31) şi de teorema funcţiilor implicite, sistemul (2.29) (2.30) defineşte în mod unic funcţiile

$$p_i^0 = p_i^0(s),\ \ s \in D_0 \subset D,\ \ i = 1, ..., n \tag{2.32}$$

de clasă $C^1$ pe o mulţime deschisă $D_0 \subset D$. Inlocuind (2.28),(2.32) în (2.27) obţinem pentru funcţiile $x_j, y$ şi $p_j$ nişte expresii de forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_j = A_j(t, s),\ j = 1, \cdots, n \\ y = B(t, s) \\ p_j = E_i(t, s), j = 1, \dots, n \end{array}\right\} t \in I_0,\quad s \in D_0. \tag{2.33}$$

unde $A_j$, $B$, $E_j$ sînt funcţiile de clasă $C^1$ pe domeniul $I_0 \times D_0 \subset I \times D$, iar $I$ este domeniul de existenţă a sistemului (2.25).

Sistemul format din primele $n$ ecuaţii din (2.33) se poate explicita în raport cu $t$ şi $s = (s_1, \cdots, s_{n-1})$ dacă ţinem seama de faptul că $\Delta \neq 0$.

$$\Big(\frac{D(A_1,\ \cdots\ , A_n)}{D(t, s_1, \cdots, s_{n-1})}(0, s_1, \dots, s_{n-1} = (-1)^{n-1}\Delta(s_1, \dots, s_{n-1})\Big).$$

Aplicaţia $(t, s) \rightarrow x(t, s)$ poate fi inversată, dînd pe $t$ şi $s = (s_1, \dots, s_{n-1})$ ca funcţii de clasă $C^1$ în $x$. Funcţia $u$ definită într-o vecinătate $\omega$ a lui $S$ prin $u(x) = y(t(x),\ s(x))\ \ x \in \omega$ este soluţie a problemei Cauchy (2.20), (2.26).

æ

## 2.2 Problema Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale

Acestă secţiune este destinată studiului problemei Cauchy pentru ecuaţii şi sisteme de ecuaţii cu derivate parţiale. Vom demonstra mai întîi teorema Cauchy - Kovalevskaia pentru sisteme de ecuaţii sub forma normală (se va rezolva problema Cauchy restrinsă) şi în final vom da rezolvarea problemei Cauchy generale.

Vom spune că o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul k

$$F(x, (\partial^{\alpha} u)_{|\alpha| \le k}) = 0 \tag{2.34}$$

este normală relativ la variabila $x_n$ dacă poate fi scrisă sub forma

$$\partial_n^k u = f(x, (\partial^{\alpha} u)_{|\alpha| \le k, \alpha_n < k}) \tag{2.35}$$

unde $f$ nu conţine în argumentele sale derivate de ordin mai mare sau egal cu $k$ şi derivate în raport cu $x_n$ de ordin mai mare decit $k - 1$.

Problema Cauchy pentru o ecuaţie sub forma normala se formuleaza astfel :

*Să se determine $u : G \subset R^n \longrightarrow \mathbb{C}$ o funcţie de clasă $C^k$ ce verifică ecuaţia (2.35) şi care pentru $g_0, \ldots, g_{k-1}$ funcţii date satisface condiţiile iniţiale*

$$\partial_n^j u(x', x_n^0) = g_j(x'), \;\; \forall\, (x', x_n^0) \in G, \quad j \in \{0, \ldots, k-1\} \tag{2.36}$$

Vom spune că un sistem de N ecuaţii cu derivate parţiale cu N funcţii necunoscute $(u_1, ...u_N)$ este normal relativ la variabila $x_n$ dacă este de forma :

$$\partial_n^{k_i} u_i = f_i(x, (\partial^{\alpha} u_1, \ldots, \partial^{\alpha} u_N)_{|\alpha| \le k_i, \alpha_n < k_i}) \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.37}$$

unde functiile $f_i$ nu conţin derivate de ordin mai mare decit $k_i$ şi derivate în raport cu $x_n$ mai mare decit $(k_i - 1)$. Pentru sistemele de ecuaţii cu derivate parţiale se defineşte următoarea problema Cauchy :

*Să se determine functiile $(u_1, ..., u_N) : G \subset R^n \longrightarrow \mathbb{C}^N$ care verifică ecuaţiile (2.37) şi în plus satisfac condiţiile iniţiale*

$$\partial_n^j u^i(x', n^0 = g_{ij}(x'), \;\; \forall\, (x', x_n^0) \in G \;\; j \in \{0, \ldots, k_i - 1\} \quad i \in \{1, \ldots, N\} \tag{2.38}$$

*unde functiile $g_{ij}$ sînt date.*

Problemele Cauchy formulate mai sus se numesc **probleme Cauchy restrinse** ataşate ecuaţiei (2.35), respectiv sistemului (2.38).

### 2.2.1 Problema Cauchy pentru sisteme cvasiliniare de ordinul întîi

Vom consideră în cele ce urmează problema Cauchy pentru un sistem cvasiliniar de N ecuaţii cu derivate parţiale cu N necunoscute. Problema Cauchy pentru un asemenea sistem se scrie:

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} a^i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x,u), \quad u(x',0) = g(x') \tag{2.39}$$

sau pe componente sub forma :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N} a^i_{jk}(x,u_1,...,u_N)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + b_j(x,u_1,...,u_N), \;\; u_j(x',0) = g_j(x'), \; 1 \leq j \leq N.$$

Vom demonstra un rezultat de existenta şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy, rezultat ce este o versiune a teoremei Cauchy-Kowalevskaia.

**TEOREMA 2.2.1 (Cauchy - Kowalevskaia)**

*Fie $a^i_{jk}$ şi $b_j$ funcţii real analitice de variabila $z = (x_1,\ldots,x_{n-1},u_1,\ldots,u_N)$ în originea spaţiului $R^{N+n-1}$. Sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N} a^i_{jk}(z)\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + b_j(z), \quad j = 1,\ldots,N \tag{2.40}$$

*şi condiţiile iniţiale*

$$u_j = 0 \quad \textit{pentru} \quad x_n = 0; \quad j = 1,\ldots,N \tag{2.41}$$

*are o unică soluţie $u = (u_1,\ldots,u_N)$ [1] ce este real analitică în origine ( adică există $\omega$ o vecinătate a originii în $R^n$ şi $(u_1,\ldots,u_n) : \omega \longrightarrow R^N$ o unică soluţie analitică a problemei Cauchy (2.40), (2.41).)*

**Demonstraţie.** Vom face demonstraţia în mai multe etape

1) Pentru orice soluţie $(u_1,\ldots,u_N)$ ce este real analitică în origine, şi pentru orice $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ aplicînd $D^\alpha$ şi luînd $x = 0$ obţinem relaţii de forma

$$D_n D^\alpha u_j(0) = P_\alpha(d^\beta a^i_{jk}(0), d^\gamma b_j(0), D^\delta u_k(0)) \tag{2.42}$$

În formulele de mai sus $D$ este operatorul gradient în raport cu $x$ iar $d$ este operatorul gradient în raport cu $z$

$$D = (\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}), \qquad d = (\frac{\partial}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial z_{N+n-1}}) \tag{2.43}$$

[1] unică în clasa funcţiilor real analitice

unde $\beta, \gamma, \delta, i, j, k$ verifică relaţiile

$$\beta, \gamma \in \mathbb{Z}^{N+n-1}; \quad |\beta|,\ |\gamma| \leq |\alpha|; \ \ \delta \in \mathbb{Z}^n; \ |\delta| \leq |\alpha| + 1; \ \delta_n \leq \alpha_n \tag{2.44}$$

$$i \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad j, k \in \{1, \ldots, N\} \tag{2.45}$$

şi $P_\alpha$ este un polinom în argumentele sale, polinom a cărui coeficienţi sînt întregi ne-negativi. [2] În plus, din (2.41)

$$D^\alpha u_j(0) = 0 \quad \text{pentru} \quad \alpha_n = 0 \tag{2.46}$$

Prin inducţie după $\alpha_n$ obţinem din (2.42), (2.46) toate $D^\alpha u_j(0)$ numai în funcţie de $d^\beta a^i_{jk}(0)$, $d^\gamma b_j(0)$. Deci $u_j(x)$ sînt unic determinate de (2.42), (2.46) *Reciproc*, dacă calculăm recursiv $c^\alpha_j$ din (2.42), (2.46) înlocuind peste tot $D^\alpha u_j(0)$ prin $c^\alpha_j$ şi dacă seriile

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} c^\alpha_j x^\alpha$$

converg şi reprezintă funcţiile $(u_1, \ldots, u_N)$ într-o vecinătate $\omega$ a lui 0 în $R^n$, atunci $(u_1, \ldots, u_N)$ este o soluţie real analitică în 0 a problemei (2.40, 2.41). Într-adevăr, $c^\alpha_j = D^\alpha u_j(0)$ sînt satisfăcute. Mai mult, pentru funcţia real analitică $u_k$ ambii membrii ai ecuaţiei (2.40) vor fi real analitici în 0, şi (2.42) tocmai garantează identitatea coeficienţilor din seriile de puteri pentru ambii membri. Rămîne să arătăm că seriile formale cu coeficienţii $D^\alpha u_j(0)/\alpha!$ obţinute din (2.42), (2.46) converg într-o vecinătate a lui $x = 0$ în $R^n$. Pentru aceasta vom utiliza metoda majorantelor.

2) Acum vom presupunem că avem o altă problema Cauchy

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{N} A^i_{jk}(z) \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + B_j(z), \quad U_j(x', 0) = 0 \ \ j \in \{1, \ldots, N\} \tag{2.47}$$

pentru care: ştim că are o soluţie real analitică într-o vecinătate a originii din $R^n$; functiile $A^i_{jk}$ şi $B_j$ sînt majorante pentru $a^i_{jk}$ şi $b_j$.

Soluţia $U = (U_1, \ldots, U_N)$ a problemei (2.47), (2.48) are elementele date de:

$$U_j(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha U_j(0)}{\alpha!} x^\alpha$$

şi este real analitică în 0. Cum, evident $|D^\alpha u_j(0)| \leq D^\alpha U_j(0)$ au loc pentru $D^\alpha u_j(0)$ calculat din (2.42), (2.46). Deci $U$ este un majorant pentru $u$. Seriile formale de puteri care exprimă pe $u$ fiind majorate de serii convergente, sînt convergente şi reprezinta o soluţie a problemei Cauchy într-o vecinătate a originii.

3) Rămîne să construim pentru sistemul iniţial un sistem majorant pentru care putem să determinăm o soluţie real analitică. Presupunem ca $a^i_{jk}$ şi $b_j \in C_{M,r}(0)$

[2] nici derivarea funcţiilor compuse şi nici derivarea unui produs nu poate duce la altceva

($\exists M > 0$ şi $r > 0$ cu aceste proprietăţi) şi deci seria $Mr/(r - z_1 - \cdots - z_{N+n-1})$ este un majorant pentru $a^i_{jk}$, $b_j$. Considerăm următoarea problemă Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_n U_m = \dfrac{Mr}{r - \sum_{j=1}^{n-1} x_j - \sum_{j=1}^{N} U_j} \cdot \Big( \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{k=1}^{N} \partial_k U_i + 1 \Big) \\ \\ U_m(x', 0) = 0 \end{cases}, m = 1, \ldots, N \tag{2.48}$$

Pentru a găsi o soluţie a problemei Cauchy (2.48) considerăm problema Cauchy

$$\partial_t V = Mr(r - s - Nv)^{-1} \Big[ 1 + N(n-1) \partial_s V \Big], \quad V(s, 0) = 0 \tag{2.49}$$

pentru necunoscuta scalară $V$ în două variabile $s$ şi $t$. Observăm că $U = (U_1, \ldots, U_N)$, unde

$$U_m(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1 + \cdots + x_{n-1}, x_n), \quad m = 1, \ldots, N,$$

este o soluţie a problemei (2.48) dacă şi numai dacă $V$ este o soluţie a problemei (2.49). Să observăm că problema (2.49) are într-o vecinătate a lui zero o soluţie real analitică de forma :

$$V(s, t) = (r - s - \sqrt{(r - s)^2 - 2MNrnt})/\, Nn.$$

Aceasta soluţie a fost obţinută astfel : s-a scris ecuaţia din (2.49) sub forma :

$$(r - s - Nv)\, \partial_t V - MrN(n-1)\, \partial_s V = Mr$$

apoi sistemul caracteristic asociat:

$$\frac{dt}{d\tau} = r - s - Nv, \quad \frac{ds}{d\tau} = -MrN(n-1), \quad \frac{dV}{d\tau} = Mr$$

cu condiţiile iniţiale $t(0) = 0, \quad s(0) = \sigma, \quad V(0) = 0$ , de unde s-a găsit

$$t = \frac{1}{2} MrN(n-2)\tau^2 + (r - \sigma)\tau, \quad s = -MrN(n-1)\tau + \sigma, \quad V = Mr\tau$$

Eliminînd din relaţiile de mai sus $\sigma$ şi $\tau$ se obţine soluţia căutată $V$. (Semnul minus în faţa radicalului a fost luat ca să fie verificată condiţia $V(s, 0) = 0$ ). □

Utilizînd rezultatul de mai sus, putem demonstra teorema următoare.

### TEOREMA 2.2.2

*Dacă $S$ este o submulţime deschisă din hiperplanul $H = \{x \in R^n, \ \ x_n = x_n^0\}$, $g_j$, $j = 1, \ldots, N$ sînt funcţii analitice în $S$ iar $a^i_{jk}, b_j$ sînt analitice într-o vecinătate a lui $S \times g(S) \subset R^{N+n}$ atunci există $\omega \subset R^n$ o vecinătate a lui $S$ şi funcţiile real analitice $u_j : \omega \to R$ astfel ca $u = (u_1, \cdots, u_N)$ să fie soluţie a problemei Cauchy (2.39).*

**Demonstraţie.** Fie $y(x', x_n) = u(x', x_n + x_n^0) - g(x')$. Observăm că $u$ este soluţie a problemei Cauchy (2.39) dacă şi numai dacă $y$ este soluţie a problemei

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{a}^i(x, y)\frac{\partial y}{\partial x_i} + \tilde{b}(x, y), \quad y(x', 0) = 0 \tag{2.50}$$

unde

$$\tilde{a}^i_{jk}(x, y) = a^i_{jk}(x', x_n + x_n^0, y + g(x')),\ i \in \{1, \ldots, n-1\},\ j, k \in \{1, \ldots, N\}$$

$$\tilde{b}_j(x, y) = b_j(x', x_n + x_n^0, y + g(x')) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N} a^i_{jk}(x', x_n + x_n^0, y + g(x')) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x').$$

Pentru a elimina pe $x_n$ din $\tilde{a}^i$ şi $\tilde{b}$ adăugăm în plus o componentă $y_0$ lui $y$ ce satisface

$$\frac{\partial y_0}{\partial x_n} = 1 \quad \text{şi} \quad y_0(x', 0) = 0.$$

Atunci $y_0 = x_n$ şi putem înlocui pe $x_n$ prin $y_0$ în $\tilde{a}^i$, $\tilde{b}$ şi să adăugăm în plus ecuaţia şi condiţia iniţială de mai sus. Deci problema Cauchy (2.39) este echivalentă cu problema

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=0}^{N} \tilde{\tilde{a}}^i_{jk}(x', y_0, \ldots, y_N)\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \tilde{\tilde{b}}_j(x', y_0 \ldots y_N) \quad y_i(x', 0) = 0,\ \ j \in \{0, \ldots, N\} \tag{2.51}$$

unde $\tilde{\tilde{a}}^0_{00} = \tilde{\tilde{a}}^i_{0k} = \tilde{\tilde{a}}^k_{j0} = 0$, $\tilde{\tilde{a}}^i_{jk} = \tilde{a}^i_{jk} = \tilde{a}^i_{jk}$, $\quad j, k = 1, \ldots, N$ şi $\tilde{\tilde{b}}_0 = 1$, $\tilde{\tilde{b}}_j = \tilde{b}_j$ pentru $j = 1, \ldots, N$. Pentru orice $t \in\ S' = S - (0', x_n^0)$ folosind Teorema 2.2.1 există o soluţie $y^t$ a problemei (2.51) reprezentată prin serii convergente în $(x - t)$ într-o mulţime

$$\sigma_t = \{x \in R^N; |x_1 - b_1| + \cdots + |x_{n-1} - t_{n-1}| + |x_n| < \rho(t)\}.$$

Aici $\rho(t)$ poate fi ales suficient de mic ca $\sigma_t \cap \{x \in R^n; x_n = 0\} \subset S'$. Să considerăm $U = \bigcup_{t \in S'} \sigma_t$. Funcţia $y : U \to R^{N+1}$ definită prin $y(x) = y^t(x)$ dacă $x \in \sigma_t$ este soluţie a problemei Cauchy (2.51). □

## 2.2.2 Problema Cauchy pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul k

Vom consideră în cele ce urmează problema Cauchy pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul $k$. Deci vom studia următoarea problemă :

$$\partial_n^k u = f(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k,\ \alpha_n < k}), \quad \partial_n^j u(x, 0) = g_j(x),\ \ j \in \{0, \ldots, k-1\} \tag{2.52}$$

Asociem problemei Cauchy (2.52) o problema Cauchy pentru un sistem cvasiliniar de ordinul întîi, de forma :

$$\partial_n y = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x, y)\partial_i y + b(x, y), \quad y(x', 0) = g(x') \tag{2.53}$$

Pentru $y = (y_\alpha)_{|\alpha| \le k}$ considerăm sistemul

$$
\begin{array}{lll}
\text{a)} & \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_n} & = y_{\alpha+e_n} \quad \text{dacă} \quad |\alpha| < k \\
\text{b)} & \dfrac{\partial y_\alpha}{\partial x_n} & = \dfrac{\partial y_{\alpha - e_{i(\alpha)} + e_n}}{\partial x_{i(\alpha)}} \quad \text{dacă} \quad |\alpha| = k, \quad \alpha_n < k \\
\text{c)} & \dfrac{\partial y_{ke_n}}{\partial x_n} & = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \displaystyle\sum_{|\alpha|<k} \dfrac{\partial f}{\partial y_{\alpha+e_n}} \cdot y_{\alpha+e_n} + \sum_{|\alpha|=k,\ \alpha_n<k} \dfrac{\partial f}{\partial y_\alpha} \cdot \dfrac{\partial y_{\alpha - e_{i(\alpha)} + e_n}}{\partial x_{i(\alpha)}}
\end{array}
\tag{2.54}
$$

şi condiţiile iniţiale

$$
y(x',0) = \tilde{g}_\alpha(x') = \begin{cases} \partial^{\alpha'} g_{\alpha_n}(x') \ \text{ dacă } \ \alpha = (\alpha', \alpha_n), |\alpha| \le k, \alpha_n < k \\ \\ f(x', 0, (\tilde{g}_\alpha(x'))_{|\alpha| \le k, \alpha_n < k}) \ \text{ dacă } \alpha = ke_n \end{cases}
\tag{2.55}
$$

**TEOREMA 2.2.3**

*Fie $f, g_j, j = 0, \cdots, k-1$ funcţii real analitice.*

*a) Dacă $u$ este soluţie a problemei Cauchy (2.52) atunci $y = (y_\alpha)_{|\alpha| \le k}$ definit prin $y_\alpha = \partial^\alpha u$ este soluţie a problemei Cauchy (2.54), (2.55).*

*b) Dacă $y = (y_\alpha)_{|\alpha| \le k}$ este soluţie a problemei Cauchy (2.54), (2.55) atunci $u = y_0 = y_{(0,\ldots,0)}$ este soluţie a problemei (2.52).*

**Demonstraţie.** Punctul a) se demonstrează imediat. Pentru a putea urmări mai uşor ideile demonstraţiei punctului b), o să considerăm mai întîi cazul particular $n = 2$, $k = 2$. În acest caz problema Cauchy (2.52) devine

$$
\partial_2^2 u = f(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \partial_1^2 u, \partial_1 \partial_2 u), \ \ u(x,0) = g_0(x_1), \ \partial_2 u(x_1, 0) = g_1(x_1)
\tag{2.56}
$$

iar sistemul (2.54) devine:

$$
\begin{array}{l}
\text{a)} \ \dfrac{\partial y_{00}}{\partial x_2} = y_{01}, \ \ \text{b)} \ \dfrac{\partial y_{10}}{\partial x_2} = y_{11}, \ \ \text{c)} \ \dfrac{\partial y_{01}}{\partial x_2} = y_{02}, \\[2ex]
\text{d)} \ \dfrac{\partial y_{20}}{\partial x_2} = \partial_1 y_{11}, \ \ \text{e)} \ \dfrac{\partial y_{11}}{\partial x_2} = \partial_1 y_{02} \\[2ex]
\text{f)} \ \dfrac{\partial y_{02}}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{00}} y_{01} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{10}} y_{11} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{01}} y_{02} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{20}} \dfrac{\partial y_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{11}} \dfrac{\partial y_{02}}{\partial x_1}
\end{array}
\tag{2.57}
$$

Condiţiile (2.55) se scriu

$$
\begin{array}{l}
\text{a)}\ y_{00}(x_1, 0) = g_0(x_1), \ \text{b)}\ y_{10}(x_1, 0) = g_0'(x_1), \ \text{c)}\ y_{01}(x_1, 0) = g_1(x_1), \\[2ex]
\text{d)}\ y_{20}(x_1, 0) = g_0''(x_1), \ \text{e)}\ y_{11}(x_1, 0) = g_0'(x_1), \\[2ex]
\text{f)}\ y_{02}(x_1, 0) = f_0(x_1, 0, g_0(x_1), g_0'(x_1), g_1(x_1), g_0''(x_1), g_1'(x_1))
\end{array}
\tag{2.58}
$$

unde am notat $y_{ij} = y_{(i,j)}$ pentru considerente evidente. Din ecuaţiile(2.57b) şi (2.57d) obţinem $\partial_2 y_{20} = \partial_1 y_{11} = \partial_2 y_{10} = \partial_2\partial_1 y_{10}$, deci $y_{20} = \partial_1 y_{10} + c(x_1)$. Insă din condiţiile (2.58b) şi (2.58d) rezultă: $g_0''(x_1) = g_0''(x_1) + c(x_1)$, deci $c(x_1) = 0$, adică

$$y_{20} = \partial_1 y_{10}. \tag{2.59}$$

Din ecuaţiile (2.57c) şi (2.57e) obţinem $\partial_2 y_{11} = \partial_1 y_{02} = \partial_1\partial_2 y_{01} = \partial_2\partial_1 y_{01}$, deci $y_{11} = \partial_1 y_{01} + c(x_1)$. Utilizînd condiţiile (2.58c) şi (2.58c) obţinem $c(x_1) = 0$, adică

$$y_{11} = \partial_1 y_{01} = \partial_1\partial_2 y_{00} = \partial_2\partial_1 y_{00}. \tag{2.60}$$

Din ecuaţia (2.57f) $\partial_2 y_{02} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{00}}\dfrac{\partial y_{00}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{10}}\dfrac{\partial y_{10}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y_{01}}\dfrac{\partial y_{01}}{\partial x_2} +$

$$+\frac{\partial f}{\partial y_{20}}\frac{\partial y_{20}}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial y_{11}}\frac{\partial y_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}[f(x_1, x_2, y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{20}, y_{11})]$$

deci $y_{02} = f(x_1, x_2, y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{20}, y_{11}) + c(x_1)$ şi utilizînd condiţia iniţială (2.58f) obţinem

$$f(x_1, 0, g_0(x_1), g_0'(x_1), g_1(x_1), g_0''(x_1), g_1'(x_1)) =$$
$$= f(x_1, 0, g_0(x_1), g_0'(x_1), g_1(x_1), g_0''(x_1), g_1'(x_1)) + c(x_1)$$

deci $y_{02} = f(x_1, x_2, y_{00}, y_{10}, y_{01}, y_{20}, y_{11})$. Din (2.57b) şi (2.60) obţinem : $\partial_2 y_{10} = y_{11} = \partial_2\partial_1 y_{00}$ deci $y_{10} = \partial_1 y_{00} + c(x_1)$ şi utilizînd condiţiile (2.58a) şi (2.58b) obţinem $c(x_1) = 0$, adică $y_{10} = \partial_1 y_{00}$. Din ecuaţiile (2.57c) şi (2.57a) avem: $y_{02} = \partial_2 y_{01} = \partial_2^2 y_{00}$, deci $y_{01} = \partial_2 y_{00}$, $y_{10} = \partial_1 y_{00}$, $y_{20} = \partial_1^2 y_{00}$, $y_{11} = \partial_1\partial_2 y_{00}$, $y_{02} = \partial_2 y_{00}$ şi luînd $u = y_{00}$ obţinem

$\partial_2^2 u = f(x_1, x_2, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \partial_1^2 u, \partial_1\partial_2 u)$, $u(x_1, 0) = g_0(x_1)$, $\partial_2 u(x_1, 0) = g_1(x_1)$ adică $u$ este soluţie pentru problema (2.56).

Să considerăm cazul general. Din ecuaţia (2.54a) obţinem:

$$y_{\alpha + ie_n} = \partial_n^i y_\alpha \quad |\alpha| + i \leq k \tag{2.61}$$

iar din ecuaţiile (2.54b) rezultă că pentru $|\alpha| = k$ şi $\alpha_n < k$ avem

$$\partial_n y_\alpha = \partial_n \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}}$$

adică $y_\alpha = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}} + c(x')$. Dar din condiţiile iniţiale (2.55) obţinem

$$y_\alpha(x', 0) = \partial^{\alpha'} g_{\alpha_n}(x') = \partial_{i(\alpha)}\partial^{\alpha' - e_{i(\alpha)}} g_{\alpha_n}(x') = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}}(x', 0)$$

astfel că $c(x') = 0$ şi avem

$$y_\alpha = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}} \quad \text{pentru} \quad |\alpha| = k,\ \alpha_n < k \tag{2.62}$$

Apoi, din (2.54c), (2.61) şi (2.62) avem:

$$\partial_n y_{ke_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{|\alpha| \leq k,\ \alpha_n < k} \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \cdot \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}[f(x, (y_\alpha)_{|\alpha \leq k,\ \alpha_n < k})]$$

astfel că $y_{ke_n} = f(x, (y_\alpha)_{|\alpha|\le k, \alpha_n<k}) + c(x')$. Dar, din condiţiile (2.55) obţinem

$$y_{ke_n}(x', 0) = f(x', 0, (\partial^{\alpha'} g_{\alpha_n}(x'))_{|\alpha|\le k, \alpha_n<k}) = f(x', 0, (y_\alpha(x', 0))_{|\alpha\le k, \alpha_n<k}) + c(x')$$

astfel că $c(x') = 0$ şi prin urmare

$$y_{ke_n}(x) = f(x, (y_\alpha)_{|\alpha\le k,\ \alpha_n<k}). \tag{2.63}$$

În final vom arăta că

$$y_\alpha = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}} \text{ dacă } \quad \alpha \ne 0. \tag{2.64}$$

Demonstraţia se face prin inducţie după $k - |\alpha|$. Pasul iniţial a fost stabilit în (2.62). Din (2.54a) şi ipoteza de inducţie avem $\partial_n y_\alpha = y_{\alpha+e_n} = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha-e_{i(\alpha)}+e_n} = \partial_n \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha-e_{i(\alpha)}}$ astfel că $y_\alpha(x) = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha-e_{i(\alpha)}} + c(x')$. Dar din condiţiile iniţiale (2.55)

$$y_\alpha(x', 0) = \partial^{\alpha'} g_{\alpha_n}(x') = \partial_{i(\alpha)} \partial^{\alpha' - e_{i(\alpha)}} g_{\alpha_n}(x') = \partial_{i(\alpha)} y_{\alpha - e_{i(\alpha)}}(x', 0)$$

deci $c(x') = 0$ şi (2.64) este stabilit. Aplicînd (2.61) şi (2.64) găsim că

$$y_\alpha = \partial^\alpha y_0. \tag{2.65}$$

Din (2.65), (2.63) şi (2.61) rezultă că $u = y_0$ verifică (2.52). □

Teorema Cauchy - Kowalevskaia pentru o ecuaţie de ordinul $k$ normală în raport cu variabila $x_n$ ia forma

### TEOREMA 2.2.4

*Dacă funcţiile $g_0, \ ,\dots, g_{k-1}$ sînt real analitice într-o mulţime deschisă din hiperplanul $H = \{x \in R^n; x_n = 0\}$, iar $f$ este real analitică într-o vecinătate a lui $S \times \tilde g(S) \subset R^m$ unde $\tilde g = (\partial^{\alpha'} g_j)_{|(\alpha',j)|\le k,\ j<k}$ $m = n + card\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_+; |\alpha| \le k, \alpha_n < k\}$, atunci există $\omega$ o vecinătate a lui $S$ şi $u : \omega \to R$ o unică soluţie real analitică a problemei Cauchy (2.52).*

**Demonstraţie.** Utilizînd Teorema 2.2.3, problema Cauchy (2.52) se transformă într-o problemă Cauchy pentru sistemul (2.54) cu condiţia (2.55). Se aplică apoi teorema Cauchy-Kowalevskaia. □

Să considerăm acum o problemă Cauchy pentru o ecuaţie liniară de ordinul $k$

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \quad \partial_n^j u(x', 0) = g_j(x'), \ \ j \in \{0, \dots, k-1\} \tag{2.66}$$

Utilizînd pentru problema (2.66) teorema Cauchy-Kowalevskaia obţinem teorema:

### TEOREMA 2.2.5

*Dacă $g_0, \ \dots\ , g_{k-1}$ sînt funcţii real analitice într-o mulţime deschisă $S$ din hiperplanul $H = \{x \in R^n, \ \ x_n = 0\}$ iar $f$ şi $a_\alpha$ sînt real analitice în $S$ cu $a_{(0,\dots,k)}(x) \ne 0$, $x \in S$, atunci există $\omega \subset R^n$ o vecinătate a lui $S$ şi $u : \omega \to R$ o soluţie real analitică a problemei Cauchy (2.66).*

**Demonstraţie.** Deoarece $a_{(0,\dots,k)}(x^0) \neq 0$ pentru $x^0 \in S$ există o vecinătate $\omega^{x_0}$ a lui $x^0$ în $R^n$ astfel ca $a_{(0,\dots,k)}(x) \neq 0$ pentru $x \in \omega^{x^0}$, deci în această vecinătate putem împărţi ecuaţia (2.66) cu $a_{(0,\dots,k)}(x)$ şi obţinem ecuaţia

$$\partial_n^k u = \sum_{|\alpha|\le k,\ \alpha_n<k} \tilde{a}_\alpha(x)\partial^\alpha u + \tilde{b}(x)$$

unde $\tilde{a}_\alpha = -a_\alpha(x)/a_{(0,\dots,k)}(x)$ şi $\tilde{b}(x) = f(x)/a_{(0,\dots,b)}(x)$. Aplicînd teorema Cauchy Kowalevskaia ( Teorema 2.2.4 ) se obţine rezultatul dorit. □

**REMARCA 2.2.1**

a) *Dacă datele nu sînt analitice nu avem asigurată, în general, existenţa soluţiei problemei Cauchy.*

b) *Teorema Cauchy-Kovalevskaia are un caracter local.*

c) *În ipotezele teoremei Cauchy - Kowalevskaia, soluţia unei probleme Cauchy nu depinde continuu de date, de fapt nu avem nici un control al dependenţei soluţiei de datele Cauchy.*

**Demonstraţie.** a) Problema $\partial_1^2 u+\partial_1^2 u = 0$; $u(x_1,0) = g(x_1)$, $\partial_2 u(x_1,0) = 0$ admite soluţie dacă şi numai dacă $g$ este analitică. Intr-adevăr dacă $g$ este analitică din teorema Cauchy-Kowalevskaia rezultă că problema Cauchy admite soluţie analitică. *Reciproc,* dacă problema Cauchy admite o soluţie analitică $u$, atunci $u(x_1,0)$ este analitică, deci $g$ trebuie să fie analitică.

b) Problema $\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0$, $u(x_1,0) = 2x_1/(x_1^2 + a^2)$, $\partial_2 u(x_1,0) = 0$, cu $a$ real, are o soluţie real analitică în jurul originii, dar care este singulară în punctele $(0,a),(0,-a)$ adică în punctele $\pm ia$. Soluţia problemei Cauchy de mai sus este

$$u(x_1,x_2) = Re\left(\frac{1}{z-ia} + \frac{1}{z+ia}\right)$$

cu $z = x_1 + ix_2$, care este real analitică în jurul originii şi cu singularitate în $\pm ia$.

c) Vom considerăm următorul exemplu în $R^2$ dat de Hadamard:

$$\partial_1^2 u + \partial_2^2 u = 0, \quad u(x_1,0) = 0, \ \ \partial_2 u(x_1,0) = ke^{-\sqrt{k}}\sin(kx_1)$$

cu $k$ întreg pozitiv. Se verifică uşor că această problemă are următoarea soluţie

$$u(x_1,x_2) = e^{-\sqrt{k}}\sin(kx_1)sh\ (kx_2).$$

Cînd $k \to \infty$ datele Cauchy $g_k$ şi derivabilele lor de orice ordin tind uniform la zero. Dar dacă $x_2 \neq 0$ $\lim\limits_{k\to\infty} e^{-\sqrt{k}} sh\ (kx_2) = +\infty$, astfel ca soluţia oscilează din ce în ce mai repede şi cu amplitudine din ce în ce mai mare. Soluţia pentru cazul limită $k \longrightarrow \infty$ este desigur $u \equiv 0$. □

**REMARCA 2.2.2**

*Problema* $\partial_1^2 u - \partial_2 u = 0$; $u(x_1, 0) = \dfrac{1}{1+x_1^2}$ *nu are soluţie analitică în jurul originii.*

Dacă problema ar avea soluţie analitică atunci $u(x_1, x_2) = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j$ unde

$$a_{2i,j} = \frac{(2i+2j)!}{(2i)!(2j)!}(-1)^{i+j}$$

şi $a_{2i+1,j} = 0, \ \ i, j \geq 0$. Seria de mai sus nu converge în nici o vecinătate a originii, pentru că în toate punctele de forma $(0, x_2), x_2 \neq 0$ este divergentă. Explicaţia acestui fenomen constă în faptul că ecuaţia nu este sub formă normală. Deci problema de mai sus nu are soluţie analitică în jurul originii, ea are soluţie mărginită de clasă $C^\infty$ aşa cum o să vedem la studiul problemei Cauchy pentru ecuaţii parabolice. □

### 2.2.3 Problema Cauchy generală

În paragraful de faţă ne vom ocupa de problema Cauchy pentru care datele Cauchy nu sînt date pe hiperplanul $H = \{x \in R^n \mid x_n = x_n^0\}$ ci pe o hipersuprafaţă oarecare $S$. Fie deci o ecuaţie de ordinul $k$

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \tag{2.67}$$

unde $F$ va fi presupusă în cele ce urmează de clasă $C^1$. Fie $S$ o hipersuprafaţă de clasă $C^k$. Dacă $\lambda$ este o direcţie netangentă la $S$ şi $u$ o funcţie de clasă $C^{k-1}$ pe o vecinătate a lui $S$, cantităţile

$$u, \frac{\partial u}{\partial \lambda}, \cdots, \frac{\partial^j u}{\partial \lambda^j}, \cdots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \lambda^{k-1}} \ \text{ unde } \ \frac{\partial^j u}{\partial \lambda^j}(x) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} \lambda^\alpha \partial^\alpha u(x)$$

sînt numite date Cauchy ale lui $u$ pe $S$.

Problema Cauchy generală, pentru o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul $k$, constă în determinarea unei funcţii $u$ de clasă $C^k$ ce verifică ecuaţia (2.67) şi datele Cauchy sînt prescrise, adică o problemă Cauchy constă în determinarea lui $u : G \subset R^n \longrightarrow R$ unde $G$ este o vecinătate a lui $S$ astfel ca

$$\begin{cases} F(x, (\partial_u^\alpha)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \quad \text{în} \quad G \subseteq R^n \\ \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \lambda^j}(x) = g_j(x), \quad \forall x \in S, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1 \end{cases} \tag{2.68}$$

unde $\lambda$ este o direcţie netangentă la$S$.

**REMARCA 2.2.3**

*Problema Cauchy generală nu este rezolvabilă în general.*

De exemplu, luînd ecuaţia $\partial_1\partial_2 u = 0$, în $R^2$, $S = \{(x_1, x_2); x_2 = 0\}$, $\lambda(x) = (0, 1)$, atunci dacă $u$ este o soluţie a acestei ecuaţii cu $u(x_1, 0) = g_0(x_1)$, $\partial_2 u(x_1, 0) = g_1(x_1)$, trebuie să avem $\partial_1 g_1 = 0$, adică $g_1$ este o constantă. Pe de altă parte dacă $g_1$ este o constantă nu avem unicitate, putem lua $u(x_1, x_2) = g_0(x_1) + f(x_2)$ unde $f$ este orice funcţie derivabilă cu $f'(0) = g_1$.

Pentru a rezolva problema Cauchy generală vom face o schimbare de coordonate astfel ca hipersuprafaţa $S$ să se transforme într-un hiperplan. Pentru a alege transformarea necesară, să analizăm cum se transformă ecuaţia (2.67) la o transformare de coordonate regulată de clasă $C^k$. Fie transformarea de coordonate

$$y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n),\ \cdots, y_n = y_n(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.69}$$

şi presupunem că $y_i \in C^k$, $i = 1, \ldots, n$.

În noile coordonate ecuaţia (2.67) se transformă în ecuaţia

$$\overline{F}(y, (\partial_y^\beta \tilde{u})_{|\beta|\le k}) = 0 \tag{2.70}$$

unde

$$\overline{F}(y, (\partial_y^\beta \tilde{u})_{|\beta|\le k}) = F(x(y), \tilde{u}, \sum \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial x_1}, \ldots)$$

iar $\tilde{u}(y) = u(x(y))$. Dacă suprafaţa $S$ are forma $S = \{x \in R^n; G(x) = 0\}$ unde $G$ este de clasă $C^k$ şi $grad\, G \neq 0$ (putem presupune chiar că $\partial_n G(0) \neq 0$), alegem transformarea (2.69) de forma $y_1 = x_1,\ \cdots, y_{n-1} = x_{n-1},\ y_n = G(x_1, \ldots, x_n)$. Observăm că în ipotezele făcute transformarea de mai sus este regulată de clasă $C^k$ deoarece

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \partial_1 G & \partial_2 G & \ldots & \partial_{n-1} G & \partial_n G \end{vmatrix} = \partial_n G$$

Vom aduce ecuaţia (2.67 la o formă normală pentru a putea aplica teorema Cauchy Kovalevskaia. Acest lucru se poate face, de exemplu, dacă

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{p}_{(0,\ldots,k)}} \neq 0 \tag{2.71}$$

unde am notat $\overline{p}_\alpha = \partial_y^\alpha \tilde{u}$. Cum

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{p}_{(0,\cdots,k)}} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial p_\alpha}{\partial \overline{p}_{(0,\cdots,k)}}$$

şi

$$p_\alpha = \partial_x^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} \tilde{u}}{\partial y_n^{|\alpha|}} \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} + \cdots$$

rezultă

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial \overline{p}_{(0,\cdots,k)}} = \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Ţinînd cont că $y_n = G(x_1, \dots, x_n)$ obţinem că (2.71) se scrie sub forma

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \neq 0 \tag{2.72}$$

**DEFINIŢIA 2.2.1**

*Varietăţile* $\{x \in R^n; G(x_1, \dots, x_n) = const.\ cu\ grad\, G \neq 0\}$, *unde* $G$ *este o soluţie a ecuaţiei neliniare de ordinul întîi*

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial G}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} = 0 \tag{2.73}$$

*se numesc* **caracteristici** *ale ecuaţiei (2.67), iar ecuaţia (2.73) se numeşte* **ecuaţia caracteristicilor**.

**TEOREMA 2.2.6**

*Dacă datele iniţiale sînt analitice,* $S$ *este necaracteristică pentru* $F$*, iar direcţia* $\lambda$ *este netangentă lui* $S$ *în origine, există o vecinătate deschisă conexă* $\omega$ *a originii astfel încît problema Cauchy generală* (2.68) *să aibă o unică soluţie analitică în* $\omega$.

**Demonstraţie.** Din faptul că $F$ este analitică şi $S$ este o hipersuprafaţă necaracteristică putem să aducem ecuaţia (2.67) la forma normală

$$\partial_n^k v = f(y, (\partial^\alpha v)_{|\alpha| \le k, \alpha_n < k}) \tag{2.74}$$

unde $f$ este analitică. În continuare vom căuta să calculăm

$$\partial_n^j v(y', 0) \qquad j = 0, \dots, k-1.$$

Mai întîi să observăm că pentru $x \in S \cap \omega$, $v(y', 0) = u(x) = g_0(x)$, deci $v(y', 0) = h_0(y')$, unde $h_0$ este o funcţie cunoscută şi analitică pe $\omega \cap \{y_n = 0\}$. Pentru a calcula $\partial_n v(y', 0)$ observăm că

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \partial_j u(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \partial_j v(x', G(x)) + \partial_n v(x', G(x)) \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \partial_j G(x)$$

Luînd $x \in S \cap \omega$, cum $\lambda$ este netangent lui $S$, adică $(\lambda(x), \partial v(x)) \neq 0$ şi observînd că $\partial_j v(y', 0) = \partial_j h_0(y')$, $\ j = 1, 2, \dots, n-1$ din egalitatea de mai sus se poate calcula $\partial_n v(y', 0) = h_1(y')$, $h_1$ cunoscută şi analitică pe $\omega \cap \{y_n = 0\}$. Iterînd acest raţionament, vom putea determina funcţiile $h_0, \dots, h_{k-1}$ analitice pe $\omega \cap \{y_n = 0\}$, astfel încît

$$\partial_n^j v(y', 0) = h_j(y') \quad \forall (y', 0) \in \omega \tag{2.75}$$

Pentru problema Cauchy (2.74) şi (2.75) putem aplica teorema Cauchy - Kowalevskaia şi rezultă că există $v$ o soluţie analitică a problemei Cauchy (2.74 şi (2.75), deci există o soluţie analitică într-o vecinătate a originii din $R^n$ a problemei (2.68). $\square$

**TEOREMA 2.2.7**

*Dacă datele iniţiale sînt analitice, hipersuprafaţa $S$ este necaracteristică pentru $F$, iar $\lambda$ este netangent lui $S$ în nici un punct $x \in S$, atunci există $\omega$ o vecinătate a lui $S$ şi $u : \omega \longrightarrow R$ o unică soluţie real analitică a problemei Cauchy (2.68).*

**Demonstraţie.** Pentru orice $t \in S$, folosind Teorema 2.2.6, există o soluţie $u^t$ real analitică a problemei Cauchy (2.68) într-o mulţime $\sigma_t = \{x \in R^n; \|x - t\| < \rho(t)\}$. Fie $\omega = \bigcup_{t\in S} \sigma_t$. Funcţia $u : \omega \longrightarrow R$ este o soluţie real analitică a problemei Cauchy (2.68). □

Şi acum cîteva observaţii în legătură cu teoremele demonstrate anterior.

**REMARCA 2.2.4**

a) *Teorema 2.2.6 nu este adevărată dacă $S$ este o suprafaţă caracteristică.*

b) *Teorema 2.2.7 nu este adevărată dacă direcţia $\lambda$ este tangentă la $S$.*

**Demonstraţie.** Să considerăm problema $\partial_1\partial_2 u = 0 \quad u_{|S} = 0, \quad \partial_2 u_{|S} = f(x_1)$ unde $S = \{(x_1, x_2); x_2 = x_1^2\} = \{(x_1, x_2), G(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0\}$. În cazul de faţă $\lambda(x) = (0, 1)$ şi este netangent la $S$ deoarece

$$\langle \partial G(x), \lambda(x) \rangle = \partial_1 G(x)\lambda_1(x) + \partial_2 G(x)\lambda_2(x) = -2x_1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Soluţia generală a ecuaţiei $\partial_1\partial_2 u = 0$ este $u(x_1, x_2) = h(x_1) + g(x_2)$. Incercînd să determinăm $h$ şi $g$ astfel încît să se verifice cele două condiţii iniţiale, obţinem

$$h(x_1) + g(x_1^2) = 0, \qquad g'(x_1^2) = f(x_1),$$

aşadar problema pusă admite soluţie dacă şi numai dacă $f$ este o funcţie pară ($f(-x_1) = f(x_1)$). Aceasta se explică prin faptul că pentru funcţia $G(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2$, $\partial_1 G \cdot \partial_2 G = -2x_1$ care se anulează în origine, deci $S$ este caracteristică în origine pentru operatorul $\partial_1\partial_2$.

b) Să considerăm problema $\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0, \quad u\,|_{x_2=x_1^2}= 0, \quad \partial_1 u|_{x_2=x_1^2} = f(x_1)$. Prin schimbarea de variabilă $y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2$ operatorul $\partial_1^2 - \partial_2^2$ se transformă în $4\partial_1\partial_2$, aşadar soluţiile ecuaţiei de mai sus sînt de forma

$$u(x) = h(x_1 + x_2) + g(x_1 - x_2)$$

Condiţiile iniţiale vor fi verificate dacă

$$h(x_1 + x_1^2) + g(x_1 - x_1^2) = 0, \quad h'(x_1 + x_1^2) + g'(x_1 - x_1^2) = f(x_1)$$

de unde derivînd prima egalitate şi scăzînd-o din a două se obţine

$$2x_1(g'(x_1 - x_1^2) - h'(x_1 + x_1^2)) = f(x_1)$$

Rezultă că problema dată admite soluţie dacă şi numai dacă $f(0) = 0$. Explicaţia constă în faptul că vectorul $\lambda = (1, 0)$ este tangent curbei $S$ definită prin $S = \{(x_1, x_2) \in R^2, G(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 = 0\}$ în origine spaţiului $R^2$, deoarece $\partial_1 G(x)\lambda_1 + \partial_2 G(x)\lambda_2 = -2x_1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -2x_1$. □

# Probleme şi exerciţii

1. Pentru fiecare din următoarele ecuaţii să se găsească integrală generală şi să se calculeze trei soluţii diferite. Să se descrie domeniul în planul $(x_1, x_2)$ în care fiecare soluţie este definită

   a) $x_1^2\partial_1 + x_2^2\partial_2 u = 2x_1x_2$ b) $u\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1$ c) $x_1\partial_1 u + x_2^2\partial u = (x_1 + x_2)u$

   d) $\partial_2 u = 3x_2^2$ e) $(x_2 + u)\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1 - x_2$ f) $x_1\partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1x_2(u^2 + 1)$

   g) $x_1(x_2 - u)\partial_1 u + x_2(u - x_1)\partial_2 u = u \cdot (x_1 - x_2)$ h) $u\partial_2 u = -x_2$

2. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

   a) $\partial_1 u + \partial_2 u = u$; $u =$ constant pe curba $C : x_1 = t,\ x_2 = 0,\ t \in R.$

   b) $x_1^2\partial_1 u + x_2^2\partial_2 u = u^2$; $u = 1$ pe curba $C : x_2 = 2x_1$.

   c) $x_1(x_2 - u)\partial_1 u + x_2(u - x_1)\partial_2 u = u \cdot (x_1 - x_2)$; $u = t$ pe curba iniţială $C : x_1 = t,\ x_2 = 2t/(t^2 - 1),\ \ 0 < t < 1.$

   d) $x_1\partial_1 u - x_2\partial_2 u = 0$; $u = x_1^2$ pe curba $C : x_2 = x_1,\ x_1 > 0.$

3. Pentru fiecare din următoarele probleme

$$a(x_1, x_2, u)\partial_1 u + \partial_2 u = b(x_1, x_2, u), \quad u(x_1, x_2^0) = f(x_1);$$
$$\partial_1 u + a(x_1, x_2, u)\partial_2 u = b(x_1, x_2, u), \quad u(x_1^0, x_2) = f(x_2)$$

   să se formuleze şi să se demonstreze un rezultat de existenţă şi unicitate.

4. Se consideră ecuaţia $u \cdot \partial_1 u + x_2\partial_2 u = x_1$ şi curba $C : x_1 = t,\ x_2 = t,\ t > 0.$ Să se decidă dacă există o soluţie unică, nu există nici o soluţie, sau există o infinitate de soluţii într-o vecinătate a punctului $(1, 1)$, pentru fiecare problemă Cauchy cu datele iniţiale: a) $u = 2t$ pe $C$, b) $u = t$ pe $C$, c) $u = \sin(\pi\, t/2)$ pe $C$.

5. Să se afle soluţia problemei: $u\partial_1 u + \partial_2 u = 0$, $u(x_1, 0) = x_1$.

6. Pentru $a$ şi $f$ funcţii de clasă $C^1$ să se arate că $u = f(x_1 - a(u)x_2)$ este soluţie implicită a problemei Cauchy. $a(u)\partial_1 u + \partial_1 u = 0,\ \ u(x_1, 0) = f(x_1)$.

7. Să se determine soluţia problemei Cauchy:

$$\partial_t u_1 + u_1\partial_x u_1 = 0, \quad \partial_t u_2 + \partial_x(u_1u_2) = 0, \quad \partial_t u_3 + \partial_x(u_1u_3) + p\partial_x u_1 = 0,$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_2(x, 0) = g(x), \quad u_3(x, 0) = h(x).$$

   unde $f, g, h$ sînt funcţii de clasă $C^1$ iar $p$ este o constantă.

8. Să se determine utilizînd teorema Cauchy - Kowalewskaia soluţia problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2^2 u = 0;\ \ u(x_1, 0) = x_1^2 + 1,\ \ \partial_2 u(x_1, 0) = 2x_1 + 1.$$

9. Să se arate că dacă $f$ şi $g$ sînt funcţii analitice în vecinătatea originii atunci soluţia problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u = 0, \quad u(0, x_2) = f(x_2), \quad \partial_1 u(0, x_2) = g(x_2)$$

se scrie sub forma

$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_1^{2k}}{(2k)!}\frac{x_2^j}{j!} f^{(k+j)}(0) + x_1 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_1^{2k}}{(2k+1)!}\frac{x_2^j}{j!} g^{(k+j)}(0)$$

10. Să se arate că dacă $f$ şi $g$ sînt funcţii analitice atunci problema Cauchy

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u = 0, \quad u(x_1, 0) = f(x_1), \quad \partial_2 u(x_1, 0) = g(x_1)$$

are soluţie analitică dacă şi numai dacă $g = f''$ şi în acest caz soluţia se scrie sub forma

$$u(x_1, x_2) = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} f^{(j+2k)}(0) x_1^j x_2^k.$$

11. Să se găsească soluţia analitică a problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u = F(x_2), \quad u(0, x_2) = f(x_2), \quad \partial_1 u(0, x_2) = g(x_2)$$

cînd $F$, $f$, $g$ sînt funcţii analitice în vecinătatea originii: caz particular $F(t) = \sin t$, $f(t) = \cos t$, $g(t) = \exp(t)$.

12. Să se găsească soluţia analitică a problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u = F(x_1), \quad u(0, x_2) = f(x_2), \quad \partial_1 u(0, x_2) = g(x_2)$$

cînd $F$, $f$, $g$ sînt funcţii analitice în vecinătatea originii: caz particular $F(t) = e^t$, $f(t) = e^t$, $g(t) = e^t$.

13. Să se găsească soluţia analitică a problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u + b\partial_1 u + au = 0, \quad u(0, x_2) = f(x_2), \quad \partial_1 u(0, x_2) = g(x_2)$$

cînd $a$, $b \in R$ iar $f$, $g$ sînt funcţii analitice într-o vecinătatea originii.

14. Să se determine soluţia analitică a problemei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + e^x, \ \ t \in R, x \in R, \quad u(0, x) = x^2, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = x \ \ \forall\, x \in R$$

15. Să se găsească soluţia analitică a problemei

$$\partial_1^2 u - \partial_2 u = e^{x_2}, \quad u(x_1, 0) = e^{x_1}.$$

16. Să se arate că problema Cauchy $(x_1^2+x_2^2)\partial_1^2 u+\partial_1^2 u+\partial_1\partial_2 u-u=0$; $u(0,x_2)=1$, $\partial_1 u(0,x_1)=0$ nu are soluţie (de clasă $C^2$ ) în nici o vecinătate a originii (din $R^2$ ).

17. Să se arate că există $\Omega$ o vecinătate deschisă (şi conexă ) a originii (din $R^2$) astfel încît problema Cauchy:

$$x_1\partial_1 u - x_2\partial_2 u = x_1 - x_2; \;\; u(x_1,0)=x_1$$

să aibă în $C^1(\Omega)$ o infinitate de soluţii.

18. Să se arate că problema Cauchy $2x_1x_2\partial_1 u-(1-x_2^2)\partial_2 u=0, \quad u(x_1,0)=x_1$ are soluţie analitică (unică ) definită în $\Omega=\{(x_1,x_2)\in R^2;\ -1<x_2<1\}$.

19. Dacă $f$ este o funcţie analitică să se arate că problema Cauchy:

$$\partial_1 u + x_2^2\partial_2 u = 0; \quad u(0,x_2)=f(x_2),$$

are o unică soluţie analitică reprezentată prin $u(x_1,x_2)=f(x_2/(1+x_1x_2))$.

20. Are problema Cauchy: $x_1\partial_1 u - x_2\partial_2 u = 0; \quad u(x_1,0)=0$ soluţie unică în $C^1(R^2)$ ?

21. Fie $Lu=0$ un sistem de ecuaţii liniar cu coeficienţi constanţi, pentru care hiperplanul $H=\{x\in R^n; x_n=0\}$ este necaracteristic. Fie $u=u(x_1,\ldots,x_n)$ o soluţie de clasă $C^m$ în $\mathcal{R}=\{x\in R^n, x_n\geq 0\}$. Să se arate că funcţia $u$ este unic determinată de valorile sale pe hiperplanul $H$.

22. Să se arate că dacă funcţia $u\in C^2(\bar{\Omega})$ verifică ecuaţia $\triangle u(x)=0 \quad \forall x\in\Omega$ şi $u(x)=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}(x)=0 \quad x\in\Gamma$, unde $\Gamma\subset\partial\Omega$ este o varietate analitică, atunci $u=0$ în $\bar{\Omega}$.

    **Indicaţie.** Din teorema de unicitate a lui Holmgren rezultă $u=0$ într-o vecinătate a varietăţii $\Gamma$. Deoarece $u$ este analitică pe $\Omega$, urmează de aici că $u=0$ pe $\bar{\Omega}$.

æ

# Bibliography


[1] Adams, R. A., Sobolev spaces, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975

[2] Barbu, V., Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale, Editura Academiei Române, Bucureşti 1963

[3] Bers,L., F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York,London,Sydney,1964

[4] Boboc, N.,& G. Bucur, Măsură şi capacitate, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

[5] Brezis, H., Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983

[6] Courant, R., Partial Differential Equations, Interscience Publishers, New York, 1962

[7] Courant, R., D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vols I and II, Interscience, 1953 and 1962

[8] Cristescu, R., & G. Marinescu, Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1964

[9] Dautray, R., J.L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, Masson, Paris 1988

[10] Dieudonne, J., History of Functional Analysis, North Holland, Mathematic Studies, Amsterdam, New York, Oxford,1983

[11] Dincă, G., Metode variaţionale şi aplicaţii, Editura tehnică, Bucureşti 1980.

[12] Dincă, G., Operatori monotoni în teoria plasticităţii, Editura Academiei Române, Bucureşti 1972.

[13] Dinculeanu, N., Teoria măsurii şi funcţii reale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964

[14] Dinculeanu, N., Integrarea pe spaţii local compacte, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1965

[15] Dunford, N., & J. Schwartz, Linear Operators, I, II, Interscience, New York, 1958, 1963

[16] Folland, G.B., Introduction to Partial Differential Equations, Princeton University Press, 1976

[17] Friedman, A., Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969

[18] Garabedian, P. R. Partial Differential Equations, John Wiley & Sons, 1964

[19] Gilbag, D., & N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1963

[20] Godounov,S., Équation de la physique mathématique, Éditions Mir, Moscou 1973

[21] Guelfand, I. M., & G. E. Chilov, Les distributions, 1, 2,3, Dunod, Paris, 1962, 1964, 1965

[22] Hormander, Lars, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, 1964

[23] Iftimie, V., Ecuaţii cu derivate parţiale, Tipografia Universităţii Bucureşti 1980

[24] John, F., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1982

[25] Kalik Carol, Ecuaţii cu derivate parţiale, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1980

[26] Kantorovici, L. V., & G.P. Akilov, Analiză funcţională, Editura Stiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986

[27] Kecs, W., Produsul de convoluţie şi aplicaţii, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1978

[28] Kecs, W., & P.P. Teodorescu, Introducere în teoria distribuţiilor cu aplicaţii în tehnică, Editura tehnică, Bucureşti, 1975

[29] Khoam,Vo-Khac Distributions, Analyse de Fourier, Operateur aux derivées partielles, Librairie Vuibert, Paris, 1970

[30] Lions, J.L., Équations differentielles operationnelles et problèmes aux limites, Springer-Verlag, 1961

[31] Lebedev, N. N., Funcţii speciale şi aplicaţiile lor, Editura tehnică, Bucureşti, 1957

[32] Marinescu, G., Spaţii vectoriale normate, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1956

[33] Marinescu, G., Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice, Editura Academiei Române, Bucureşti, 1959

[34] Marinescu, G., Espsces Vectoriels pseudotopoloques, D V W, Berlin, 1963

[35] Mihlin, S. G., Ecuaţii liniare cu derivate parţiale, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1983

[36] Mikhailov, V., Équations aux dérivèes partiellles, Éditions Mir, Moscou 1980

[37] Mirică, St., Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, Tipografia Universităţii Bucureşti, 1989

[38] Mizohata, S., The theory of partial differential equations, Cambridge, 1973

[39] Nečas, J., Les méthodes directes en théorie de équations élliptiques, Académie Tchéchoslovaque des Scinces, Prague, 1967

[40] Nicolescu, M., Analiza matematică, Editura tehnică, Bucureşti, 1958

[41] Nicolescu, M., Funcţii reale şi elemente de topologie, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968

[42] Oleinik, C., Spaţii de funcţii şi ecuaţii cu derivate parţiale (note de curs în limba rusă)

[43] Prasad Ph. & R. Ravindran, Partial Differential Equations, Wiley Eastern Limited

[44] Raviart, P.A., J.M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1983

[45] Schwartz, L., Théorie des distributions, I et II, Hermann, Paris, 1950-1951

[46] Schwartz, L., Analyse mathematique, I, II, Hermann, Paris, 1967

[47] Teodorescu, N., V. Olariu, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti 1975

[48] Teodorescu, N., V. Olariu, Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale, 3 volume, Editura tehnică, Bucureşti, 1978, 1979, 1980

[49] Tihonov, A.N. & A.A. Samarski, Ecuaţiile fizicii matematice, Editura tehnică, Bucureşti 1956

[50] Tréves, F., Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, 1967

[51] Tréves, F., Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975

[52] Vladimirov, V.S., Ecuaţiile fizicii matematice, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti 1980

[53] Vladimirov,V.S., & alţii, Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1981

[54] Wloka, J., Partial Differential Equations, Cambridge University Press, 1987

[55] Yosida, K., Functional Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New york, 1978