EXEMPLE DE FUNCȚII IZOTONE CARE NU PĂSTREAZĂ (TOATE) INFIMUMURILE ȘI SUPREMUMURILE

EX – 1

~ MATERIAL PENTRU STUDENȚI ~

<u>Definiții</u> și <u>denumiri echivalente</u>:

- <u>morfism de poseturi</u> $\Leftrightarrow$ <u>funcție izotonă</u> $\Leftrightarrow$ <u>funcție crescătoare</u> $\overset{(def.)}{\Longleftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) care păstrează ordinea;
- <u>funcție antitonă</u> $\Leftrightarrow$ <u>funcție descrescătoare</u> $\overset{(def.)}{\Longleftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) care inversează ordinea;

<u>Obs.</u>: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ poseturi, iar: $\geq := \leq^{-1}$, $\sqsupseteq := \sqsubseteq^{-1}$. Fie $f : A \to B$. Atunci: f este funcție antitonă între poseturile $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ $\Leftrightarrow$ f este funcție izotonă ($\shortparallel$ morfism de poseturi) între poseturile $(A, \leq)$ și $(B, \sqsupseteq)$ ("dualul lui $(B, \sqsubseteq)$") $\Leftrightarrow$ ... între $(A, \geq)$ (dualul lui $(A, \leq)$) și $(B, \sqsubseteq)$.

f este funcție antitonă $\Updownarrow$

Temă: Având în vedere observația anterioară, gândiți-vă ce proprietăți demonstrate pentru funcții izotone sunt valabile și pentru funcții antitone. De exemplu, unele proprietăți de acest gen rezultă din faptul că dualul unui lanț este tot un lanț (i.e.: dacă $\leq$ este o relație de ordine totală) atunci relația de ordine $\geq := \leq^{-1}$ este, de asemenea, totală).

chiar dacă și numai dacă, evident (pt. că $(\leq^{-1})^{-1} = \leq$)

(EX-2)

- izomorfism de poseturi $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ izomorfism de ordine $\overset{(def.)}{\Leftrightarrow}$ funcție (definită între două poseturi) izotonă, bijectivă și cu inversa izotonă $\Leftrightarrow$ morfism bijectiv de poseturi cu inversa tot morfism de poseturi;

- morfism de latici $\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ funcție (definită între două latici) care păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente (ale acelor latici);

$\hookrightarrow$ din această definiție, rezultă, prin inducție după numărul de elemente, că orice morfism de latici păstrează infimumurile și supremumurile mulțimilor finite și nevide de elemente (ale acelor latici);

• <u>izomorfism de latici</u> $\overset{(def.)}{\Longleftrightarrow}$ morfism bijectiv de latici, cu inversa tot morfism de latici.

<u>Teorii</u> • orice morfism de latici este funcție izotonă, dar nu și reciproc;

• nu orice morfism bijectiv de poseturi este izomorfism de poseturi, i.e.: nu orice funcție izotonă bijectivă are și inversa izotonă;

• orice morfism bijectiv de latici are inversa tot morfism de latici, i.e.: orice morfism bijectiv de latici este izomorfism de latici, i.e.: izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;

- izomorfismele de latici coincid cu izomorfismele de poseturi definite între două latici, i.e.: o funcție definită între două latici este izomorfism de latici dacă și numai dacă este izomorfism de poseturi (între

$\Updownarrow$

(funcție izotonă bijectivă cu inversa tot izotonă)

poseturile subiacente acelor latici).

<u>Obs.:</u> Am demonstrat la seminar că, dacă $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ sunt poseturi, $f : A \rightarrow B$ este o funcție izotonă (între aceste poseturi), iar $X \subseteq A$ și $Y \subseteq A$ a.î. există $\inf(X)$ și $\sup(Y)$ în posetul $(A, \leq)$, și există $\inf(f(X))$ și $\sup(f(Y))$ în

posetul $(B, \leq)$, atunci au loc inegalitățile: EX-5

$$f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$$

și

$$\sup(f(Y)) \leq f(\sup(Y)).$$

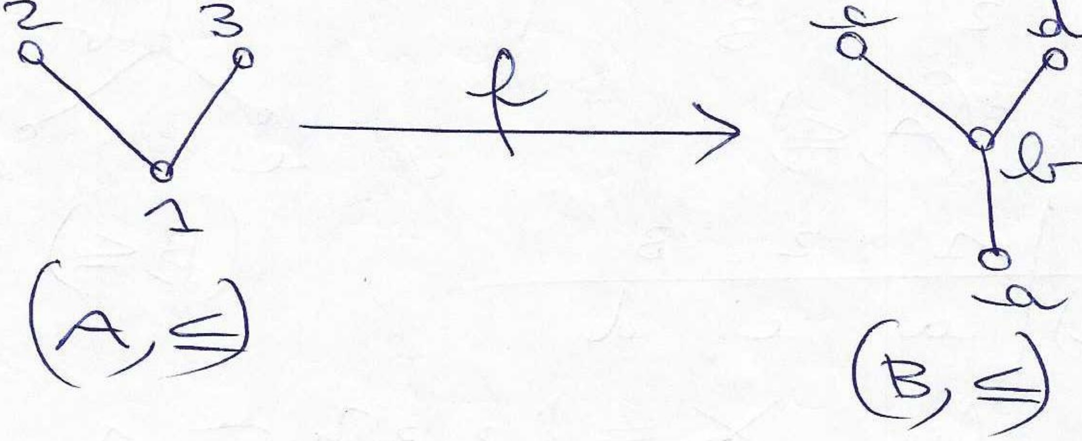
Să dăm exemple în care inegalitățile de mai sus sunt stricte.

Vom folosi notațiile uzuale: $\geq := \leq^{-1}$, $< := \leq \cap \neq$, $> := <^{-1} = \geq \cap \neq$.

→ DAT DE UN STUDENT.

<u>Exemplu</u> de funcție izotonă care nu păstrează infimumurile:

Considerăm poseturile date de următoarele diagrame Hasse:



și $f : A \to B$ definită prin tabelul:

u	1	2	3
$f(u)$	a	c	d

$f(1) \leq f(2)$ și $f(1) \leq f(3)$, EX-6

așadar f e izotonă.

Fie $X = \{2,3\} \subset A$.

$\inf(X) = \inf\{2,3\} = 1.$ $(*)$

$\inf(f(X)) = \inf(f(\{2,3\})) =$

$= \inf\{f(2), f(3)\} = \inf\{c, d\} = b.$ $(**)$

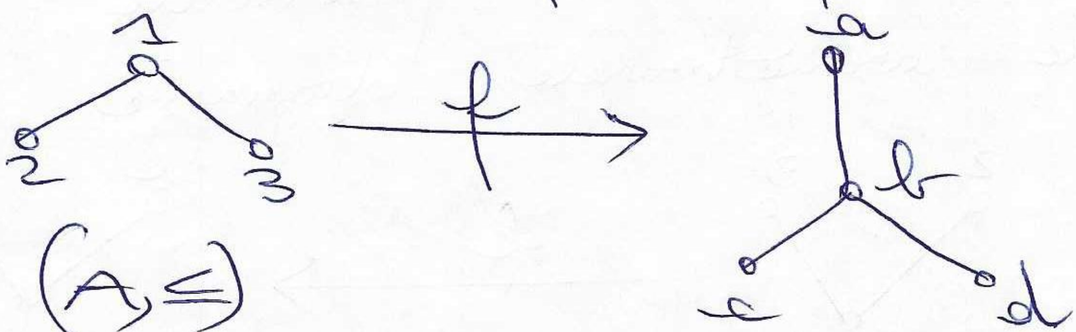
$f(1) = a < b.$ $\left(\begin{smallmatrix} * \\ ** \end{smallmatrix}\right)$.

$(*), (**), \left(\begin{smallmatrix} * \\ ** \end{smallmatrix}\right) \Rightarrow f(\inf(X)) < \inf(f(X)).$

<u>Exemplu</u> de funcție izotonă care nu păstrează supremumurile:

Analizăm exemplul precedent:

fie:



$(A, \leq)$ $(B, \leq)$

u	1	2	3
$f(u)$	a	c	d

și fie $Y = \{2,3\} \subset A. \Rightarrow$

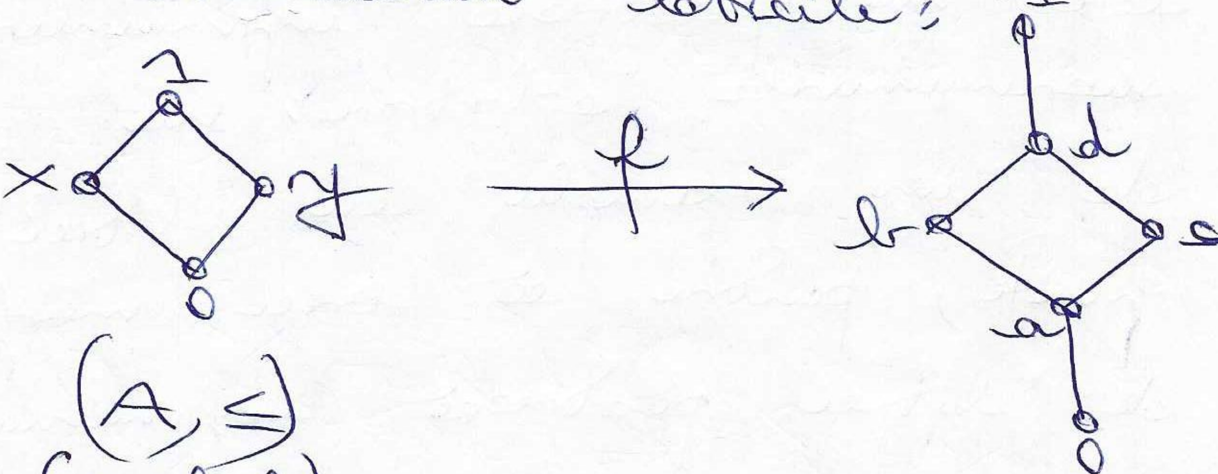
$\Rightarrow \begin{cases} \sup(Y) = 1 \\ f(Y) = \{c, d\} \Rightarrow \sup(f(Y)) = b. \end{cases} \Rightarrow$

EX-7

$\Rightarrow f(\sup(Y)) = f(1) = a > b =$
$= \sup(f(Y))$. Se observă că f e izotonă (pt. că e izotonă între $(A, \geq)$ și $(B, \geq)$).

<u>Exemplu</u> de funcție izotonă între două latici care nu păstrează infimumurile și nici supremumurile, nici măcar pe cele ale perechilor de elemente, așadar nu este morfism de latici:

Considerăm laticile:



$(A, \leq)$ (rombul) (vom vedea că este chiar algebră Boole)

$(B, \leq)$

și $f : A \to B$,

u	0	x	y	1
$f(u)$	0	b	c	1.

Cum $f(0) \leq f(x) \leq$
$\leq f(y) \leq f(1)$, $\Rightarrow f$ e izotonă.

EX-8

$$\left.\begin{array}{l}\inf\{x,y\}=0;\ f(0)=0<a,\\ \inf(f(\{x,y\}))=\inf\{b,c\}=\underline{a}.\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f(\inf\{x,y\})<\inf(f(\{x,y\})).$$

$$\left.\begin{array}{l}\sup\{x,y\}=1;\ f(1)=1>d,\\ \sup(f(\{x,y\}))=\sup\{b,c\}=d.\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f(\sup\{x,y\})>\sup(f(\{x,y\})).$$

<u>Exemplu</u> de morfism de latici care nu păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare: nu putem da un exemplu cu latici finite, pentru că orice morfism de latici păstrează infimumurile și supremumurile mulțimilor finite și nevide.

Considerăm lanțul $(\mathbb{R}, \leq)$, unde $\leq$ este relația de ordine naturală pe $\mathbb{R}$. ~~Definim f~~

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$. Definim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel: pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

EX-9

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x \leq a; \\ x, & \text{dacă } a < x < b; \\ x+1, & \text{dacă } x \geq b. \end{cases}$$

f este izotonă între $(\mathbb{R}, \leq)$ și $(\mathbb{R}, \leq)$ (i.e. f este endomorfism al posetului $(\mathbb{R}, \leq)$).

$(\mathbb{R}, \leq)$ este lanț. $\xRightarrow{\text{(v. cursul)}}$ $\Rightarrow (\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$ este latice.

Am văzut la seminar că orice funcție izotonă între un lanț și o latice este morfism de latici, precum și o proprietate care o generalizează pe aceasta, anume că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare.

Prin urmare, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} f(\min\{x,y\}) = \min\{f(x), f(y)\} \\ \text{și } f(\max\{x,y\}) = \max\{f(x), f(y)\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este morfism de lattici (endomorfism al latticii $(\mathbb{R}, \max, \min, \leq)$). EX-10

Considerăm intervalul deschis $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

$\inf((a,b)) = a$; $f(a) = a-1$.

$f((a,b)) = (a,b) \Rightarrow \inf(f((a,b))) = \inf((a,b)) = a$.

$\Rightarrow f(\inf((a,b))) = a - 1 < a = \inf(f((a,b)))$.

$\sup((a,b)) = b$; $f(b) = b+1$.

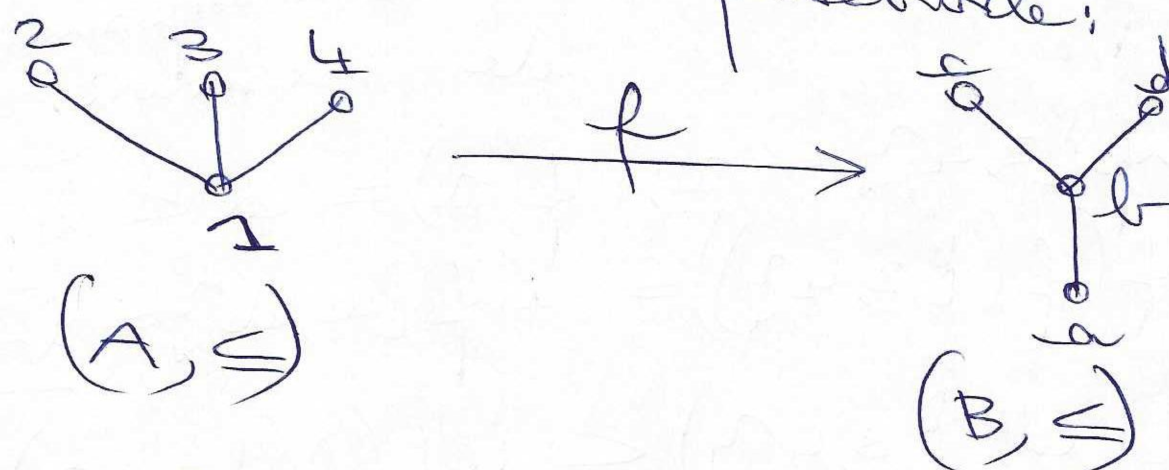
$f((a,b)) = (a,b) \Rightarrow \sup(f((a,b))) = \sup((a,b)) = b$.

$\Rightarrow f(\sup((a,b))) = b + 1 > b = \sup(f((a,b)))$.

<u>Obs.!</u> Am demonstrat la seminar că orice izomorfism de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare.

<u>Exemplu</u> de morfism bijectiv de poseturi care nu păstrează infimumurile (prin dualizarea acestui exemplu se obține un morfism bijectiv de poseturi care nu păstrează supremumurile):

Considerăm poseturile:



și $f : A \to B$,

u	1	2	3	4
$f(u)$	a	b	c	d

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ e bijectivă}, \\ \left.\begin{array}{l} f(1) \leq f(2) \\ f(1) \leq f(3) \\ f(1) \leq f(4) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ e izotonă.} \end{cases}$$

Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi.

$f^{-1} : B \to A$ este dată de

tabelul:

x	a	b	c	d
$f^{-1}(x)$	1	2	3	4

EX - 12

$b \leq c$,

$f^{-1}(b) = 2 \nleq 3 = f^{-1}(c)$ (2 și 3 sunt incomparabile în $(A, \leq)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}$ nu este izotonă $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ nu este izomorfism de poseturi.

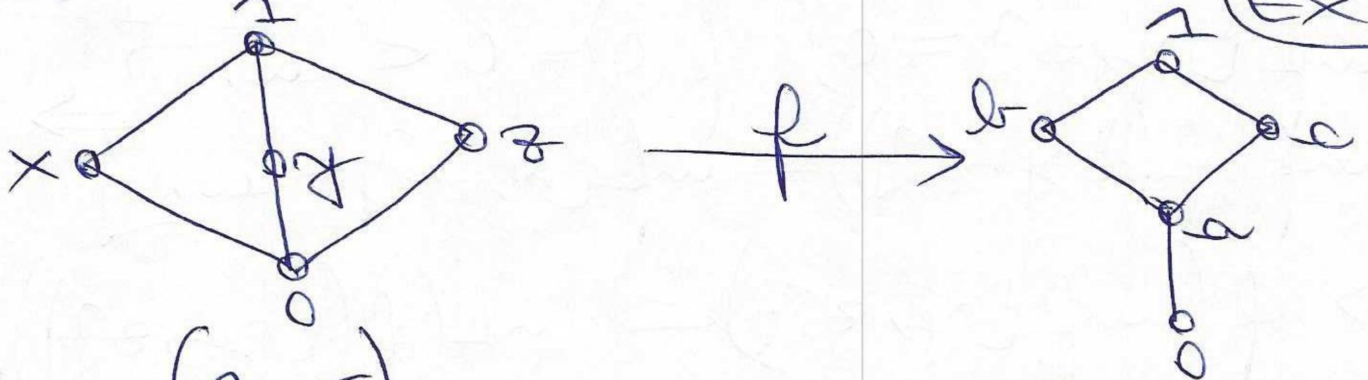
$\inf\{3,4\} = 1$; $f(1) = a < b$,

$\inf(f(\{3,4\})) = \inf\{c,d\} = b$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf\{3,4\}) < \inf(f(\{3,4\}))$.

Exemplu de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici care nu păstrează infimumurile perechilor de elemente (implicit nu este morfism de latici) (studiindu-l obținem o astfel de fct. care nu păstrează sup.,) Considerăm laticile date de următoarele diagrame Hasse, și funcția dată prin tabelul de mai jos:

EX-13



$(A, \leq)$ (diamantul) $\qquad (B, \leq)$

$f: A \to B$,

u	0	x	y	z	1
$f(u)$	0	a	b	c	1

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \text{ e bijectivă.} \\ \left. \begin{array}{l} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \\ f(0) \leq f(y) \leq f(1) \\ f(0) \leq f(z) \leq f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ este izotonă.} \end{array} \right.$$

Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi (dar nu e izomorfism de poseturi, pt. că nu e izomorfism de latici, (v. teorema) nu e nici măcar morfism de latici; sigur că dacă ar fi morfism de latici, atunci, întrucât e bijectivă, ar fi izomorfism de latici).

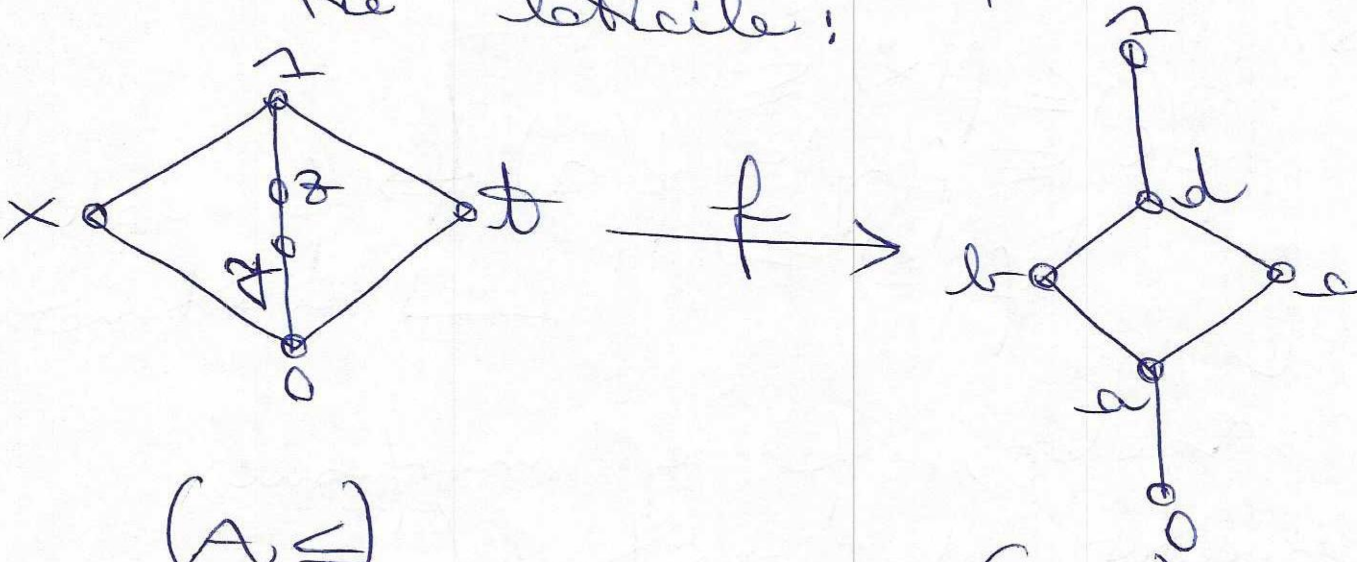
$\inf\{y,z\} = 0$, $f(0) = 0 < a$,

$\inf(f(\{y,z\})) = \inf\{b,c\} = a$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf\{y,z\}) < \inf(f(\{y,z\}))$.

__Exemplu__: de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici care nu păstrează nici infimumurile, nici supremumurile perechilor de elemente!

Fie laticile:



$(A, \le)$ $(B, \le)$

şi $f : A \to B$ dată prin tabelul:

u	0	x	y	z	t	1
$f(u)$	0	b	a	d	c	1

$$\Rightarrow \begin{cases} f \text{ e bijectivă.} \\ f(0) \le f(x) \le f(1) \\ f(0) \le f(y) \le f(z) \le f(1) \\ f(0) \le f(t) \le f(1) \end{cases} \Rightarrow f \text{ e izotonă.}$$

Așadar, f e morfism bijectiv de poseturi.

$$\left.\begin{array}{l} \inf\{x,t\}=0;\ f(0)=0<a, \\ \inf(f(\{x,t\}))=\inf\{b,c\}=a, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\inf\{x,t\})<\inf(f(\{x,t\})).$$

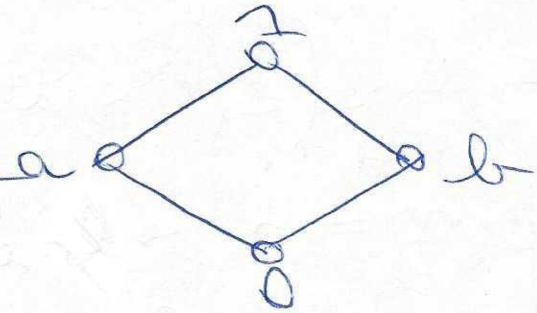
$$\left.\begin{array}{l} \sup\{x,t\}=1;\ f(1)=1>d, \\ \sup(f(\{x,t\}))=\sup\{b,c\}=d, \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\sup\{x,t\})>\sup(f(\{x,t\})).$$

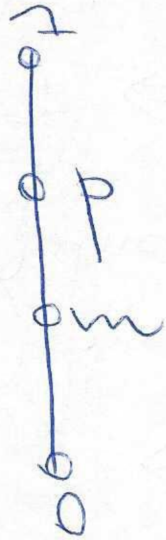
Obs.: Evident că nu putem găsi un morfism bijectiv de latici care să nu păstreze infimumurile și / sau supremumurile, pentru că teorema de mai sus ne asigură de faptul că orice morfism bijectiv de latici este izomorfism de latici, deci izomorfism de poseturi, așadar păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare, conform

~~observației~~ anterioare.

<u>Exemplu</u> de morfism bijectiv de poseturi definit între două latici distributive, care nu e morfism de latici:



$\xrightarrow{f}$



$\mathcal{L}_2^2$ (rombul)
(latice distributivă)
(vom vedea că este chiar algebră Boole)

$\mathcal{L}_4$
(latice distributivă)
(ca orice lanț cu $\vee = \max$, $\wedge = \min$)

x	0	a	b	1
$f(x)$	0	m	p	1

Evident, f e bijectivă. În $\mathcal{L}_2^2$ avem: $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$; în $\mathcal{L}_4$ avem:

$$f(0) = 0 \leq f(a) = m \leq f(1) = 1, \quad f(0) = 0 \leq f(b) = p \leq f(1) = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f e izotonă, adică f este morfism de poseturi.

Deci f e morfism bijectiv de poseturi.

EX-17

În $\mathcal{L}_2^2$ avem: $\begin{cases} a \vee b = 1, \\ a \wedge b = 0. \end{cases}$

În $\mathcal{L}_4$ avem următoarele:

$$\begin{cases} m \vee p = \max\{m, p\} = p, \\ m \wedge p = \min\{m, p\} = m. \end{cases}$$

Așadar: $f(a \wedge b) = f(0) = 0 \neq$ $\neq m = m \wedge p = f(a) \wedge f(b)$, iar $f(a \vee b) = f(1) = 1 \neq p = m \vee p \neq$ $\neq f(a) \vee f(b)$. Oricare dintre nonegalitățile $f(a \wedge b) \neq$ $\neq f(a) \wedge f(b)$ și $f(a \vee b) \neq$ $\neq f(a) \vee f(b)$ arată că f nu e morfism de latici.

REFERITOR LA COMUTAREA IZOMORFISMELOR DE POSETURI CU INFIMUMURILE ȘI SUPREMUMURILE ARBITRARE, PUTEM OBSERVA URMĂTOAREA PROPRIETATE MAI TARE DECÂT CEA FĂCUTĂ LA SEMINAR:

Prop.: Fie $(A,\leq)$ și $(B,\leq)$ poseturi, $X\subseteq A$, $Y\subseteq A$, iar $f: A\to B$ un izomorfism între aceste poseturi. Atunci au loc:

(a) $\exists\, \inf(X)$ în $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \inf(f(X))$ în $(B,\leq)$;

(b) $\exists\, \sup(Y)$ în $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \sup(f(Y))$ în $(B,\leq)$;

(c) dacă au loc condițiile echivalente de la (a), atunci: $f(\inf(X)) = \inf(f(X))$;

(d) dacă au loc condițiile echivalente de la (b), atunci: $f(\sup(Y)) = \sup(f(Y))$.

EX-18

Demonstrație: EXERCIȚIU TEMĂ.

(c) și (d) au fost demonstrate la seminar, iar (b) rezultă din (a), prin dualitate.

La (a), se aplică def. infimumului; e suficient să se demonstreze "$\Rightarrow$", din "$\Rightarrow$" și faptul că și f^{-1} e izom. de poseturi, iar $f^{-1}(f(X)) = X$, rezultă "$\Leftarrow$".

Imaginea lui $f(X)$ prin f^{-1} coincide cu preimaginea lui $f(X)$ prin f, care este egală cu X chiar pt. orice fct. inj. f.

(A se vedea unul dintre primele seminarii pt. rezultatul: f – injectivă $\Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X$.)