Leopea Cătălina, grupa 243

Tema 5 - Probabilitate și Statistică

Exercițiul 1

Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un șir de v.a. independente și repartizate uniform pe $[0, \theta]$, $\theta > 0$. $Y_n = \max_{1 \le k \le n} X_k$

$Y_n \xrightarrow{P} \theta$

$$P(Y_n < x) = P(X_1 < x, X_2 < x, \dots, X_n < x)$$
$$= P(X_i < x)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$X_n \xrightarrow{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|\theta - Y_n| > \varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0$

$$P(Y_n < \theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

$\lim_{n\to\infty} P(Y_n < \theta - \varepsilon) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(\theta - Y_n > \varepsilon) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} \theta$

Exercițiul 2

Fie $(X_n)_{n \ge 1}$ un șir de v.a pozitive și independente cu $E[X_n] = c \in (0,1), \forall n$. $Y_n = X_1 X_2 \dots X_n$

$Y_n \xrightarrow{P} 0$

$\lim_{n\to\infty} (|Y_n - 0| > \varepsilon) \Rightarrow 0, \forall \varepsilon > 0$

$\lim_{n\to\infty} (Y_n > \varepsilon) \to 0, \forall \varepsilon > 0$

Folosim inegalitatea lui Markov: Dacă X este o v.a.

nonnegativă și $\varepsilon > 0 \Rightarrow P(X > \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$ $\Big| \Rightarrow$

$Y_n =$ nonnegativ

$\Rightarrow P(Y_n > \varepsilon) \leq \frac{E[Y_n]}{\varepsilon}, \forall \varepsilon > 0$

$E[Y_n] = E[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = E[X_1] \ldots E[X_n] = c^n$

$0 \leq P(Y_n > \varepsilon) \leq \frac{c^n}{\varepsilon} \quad \Big| \cdot \lim_{n \to \infty}$

$\lim_{n \to \infty} 0 \leq \lim_{n \to \infty} P(Y_n > \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{\varepsilon} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq \lim_{n \to \infty} P(Y_n > \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{\varepsilon} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (Y_n > \varepsilon) \to 0, \forall \varepsilon > 0$

crit. cleștelui

0

$\Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} 0$

Exercițiul 3

Presupunem $N = 100$ becuri cu durata de viață v.a. identic repartizate de lege exp de medie 5h.

Care e probabilitatea să mai avem un bec intact după 525h?

$\exp(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$

$E[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx$

notăm $f = x$, $g' = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \Rightarrow g = -e^{-\lambda x}$

$\int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$

$$\frac{1}{\lambda} = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5}x}$$

$$Y_m = X_1 + X_2 + \dots + X_{100}$$

$$P(Y_m > 525) = ?$$

$$Var(X_i) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} = 25 \Rightarrow \sigma_X = 5$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E[Y_m] = m \cdot E[X_i] = 100 \cdot 5 = 500$$

$$Var(Y_m) = m\, Var(X_i) \Rightarrow \sigma_{Y_m} = \sqrt{m}\sqrt{Var(X_i)} = 5 \cdot 10 = 50$$

$$P(Y_m > 525) \approx P\left(Z > \frac{525-500}{50}\right) = P\left(Z > \frac{1}{2}\right)$$

$P\left(Z > \frac{1}{2}\right)$ în $N(0,1) = 0.31$

Exercițiul 4

$N = 200$ apartamente, pp nr de mașini pe apartament e

0, 1, 2 cu $p = 0.1; 0.6; 0.3$

not $m =$ nr minim de locuri de parcare cu precizie 95%

X	0	1	2
$p(X)$	0.1	0.6	0.3

$$\Rightarrow E[X] = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.3 = 1.2$$

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

$$= 0.6 + 1.2 - 1.44 = 0.36$$

$$\sigma_X = 0.6$$

$$S_{200} = X_1 + \dots + X_{200}$$

$$E[S_{200}] = 200 \cdot 1.2 = 240$$

$$V(S_{200}) = 200 \cdot 0.36 = 72$$

$P(S_{200} < m) = 0.95$

$P(S_{200} < m) \simeq P\left(Z < \frac{m-240}{\sqrt{240} \cdot 0.6}\right)$ in $N(0,1)$

Fct. quantilă de ordin 0.95 este 1.645.

$1.645 = \frac{m-240}{\sqrt{200} \cdot 0.6} \Rightarrow m = 1.645\sqrt{200} \cdot 0.6 + 240 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow m = 23.2638 \cdot 0.6 + 240$
$= 253.9582 \simeq 254$

Exercițiul 5

a) X v.a cu $E[X] = 0$, $\sigma^2 < \infty$

$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$, $\forall a > 0$

$P(X \geq a) = P(X + b \geq a + b)$, $b > 0$ fixat

$P(X + b \geq a + b) \leq P((X+b)^2 \geq (a+b)^2)$, $(a+b) > 0$

Folosim inegalitatea lui Markov:

$P((X+b)^2 \geq (a+b)^2) \leq \frac{E[(X+b)^2]}{(a+b)^2} = \frac{E[X^2 + 2bX + b^2]}{(a+b)^2}$

$= \frac{E[X^2] + 2bE[X] + b^2}{(a+b)^2} = \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$

notăm $\frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2} = g(b)$, $\min g(b) = \frac{\sigma^2}{a}$

$g'(b) = \frac{2(ab - \sigma^2)}{(b+a)^3}$

		$\frac{\sigma^2}{a}$	
g	$\searrow$		$\nearrow$
g'	$- - -$	0	$+ + + +$

$P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}$, $\forall b > 0$ fixat

$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma^2}{a}\right)^2}{\left(a + \frac{\sigma^2}{a}\right)^2} = \frac{\sigma^2 a^2 + \sigma^4}{(a^2+\sigma^2)^2} = \frac{\sigma^2}{a^2+\sigma^2}$

b) 200 persoane din care 100 bărbați

100 perechi a câte 2 persoane

P_{max} a.î. max 30 să fie perechi mixte

Fie P o permutare a celor 200 persoane $\Rightarrow$

$P_1, P_2, \dots, P_{100}$ $\qquad X_{P_i} = \begin{cases} 1, & \text{pereche mixtă} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$P_{Mix} = \sum_{i=1}^{100} P_i$, $E[P_i] = \frac{1}{2} \Rightarrow E[P_{Mix}] = 100 \cdot E[P_i] = 50$

$P(P_{Mix} > 30) < \frac{E[P_{Mix}]}{30} = \frac{5}{3}$

$P(P_{Mix} < 30) \in [0,1] \Rightarrow 1$ e majorant al mulțimii valorilor posibile ale lui $P(P_{Mix} < 30)$

Exercițiul 6

X v.a cu val în $[a,b]$.

$Var(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$

Fie $g(y) = E[(X-y)^2]$; $g'(y) = (E[(X-y)^2])' =$

$= (E[X^2] - 2yE[X] + y^2)' = -2E[X] + 2y$; $g''(y) = 2 > 0$

y			
$g''(y)$	$+ \quad + \quad +$		$+ \quad + \quad +$
$g'(y)$		$\nearrow$	
$g'(y)$	$- \quad - \quad - \quad -$	0	$+ \quad + \quad + \quad +$
$g(y)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$$g'(y) = 0 = -2E[X] + 2y \Rightarrow y = E[X] \Rightarrow Min(g) = y$$

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = g(E[X])$$

$$\Rightarrow Var(X) \le g\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{b+a}{2}\right) \le \frac{(b-a)^2}{4}$$

//

$$g\left(\frac{b+a}{2}\right) = E\left[\left(X - \frac{b+a}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4} E[(X-b+X-a)^2]$$

$$X - b \le 0, \quad X - a \ge 0 \Rightarrow$$

$$(X-b+X-a)^2 \le (-(X-b)+X-a)^2$$
$$\le (b-a)^2$$

$$\frac{1}{4} E[(X-b+X-a)^2] \le \frac{1}{4} E[(b-a)^2] = \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow Var(X) \le \frac{(b-a)^2}{4}$$