LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ
Cursul XI

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

- **Logica matematică** este o ramură a matematicii care se ocupă cu exprimarea formalizată (i. e. formală, simbolică) a legilor gândirii și studierea acestora cu mijloace matematice.
- Ne propunem să studiem **logica clasică**, în două forme ale ei: **logica clasică a propozițiilor** și **logica clasică a predicatelor** sau a **propozițiilor cu variabile**. Vom face deosebirea dintre aceste două tipuri de logică clasică mai târziu. Ambele sunt **logici bivalente**, adică operează cu doar două **valori de adevăr**: **fals** și **adevărat**.
- Așadar, în **logica clasică**, toate enunțurile (propozițiile, afirmațiile) sunt presupuse a fi **adevărate** sau **false**. Aceasta nu este o condiție trivială, nici măcar dacă eliminăm din discuție enunțurile interogative și pe cele exclamative, după cum ne amintim din primul curs, din exemplul cu enunțul subiectiv, precum și cel cu **paradoxul mincinosului:** să se determine dacă următoarea afirmație este **adevărată** sau **falsă**: *Această afirmație este falsă.*

Logică matematică clasică. Calculul propozițional

- În acest curs vom începe studiul **logicii propoziționale clasice**.
- Vom studia **sistemul formal al calculului propozițional clasic** sub trei aspecte fundamentale:
  1. **sintaxa**, care se ocupă de limbajul formal al calculului propozițional clasic, i. e. de cadrul formal, de exprimarea în simboluri a obiectelor matematice cu care vom lucra;
  2. **algebra**, care asociază o structură algebrică sistemului formal descris în partea de sintaxă și folosește această asociere pentru a transfera proprietățile algebrice ale acelei structuri în proprietăți logice, și invers;
  3. **semantica**, aceasta fiind partea în care, pe baza structurii algebrice atașate logicii, se calculează efectiv **valorile de adevăr** ale enunțurilor (**fals** sau **adevărat**).
- Există și alte aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic, cum ar fi: aspectul **topologic**, cel **probabilist** etc., dar studierea lor depășește cadrul și scopul acestui curs.
- Toate aceste aspecte sub care poate fi studiat un sistem logic sunt denumite *dimensiuni ale sistemului logic*.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiții și notații

Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

1. *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
2. *conectorii logici primitivi*:
   $\neg$: *negația* (se citește: "non" sau "not");
   $\rightarrow$: *implicația* (se citește: "implică");
3. parantezele: (,), [, și].

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Definiție

Șirurile finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Exemplu

$u \to \neg\, v$, $\neg\,(u \to \neg\, v) \to w$, $\to u \to\to uv\neg\,)$ sunt **cuvinte**.

Observație

Intuiția ne determină să conferim "înțeles" simbolurilor primitive, și ne spune că primele două cuvinte din exemplul anterior "au sens", în timp ce al treilea "nu are sens". Dintre cuvintele peste alfabetul definit mai sus, le vom selecta pe cele care "au sens", și le vom numi *enunțuri*. Definiția lor riguroasă succede această observație.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg\psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiție

Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*.

Notație

Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Observație

În definiția de mai sus a enunțurilor, se subînțelege faptul că parantezele au rolul obișnuit: aici, parantezele pot încadra enunțuri, și se folosesc pentru a încadra enunțuri compuse în interiorul altor enunțuri compuse, indicând ordinea în care se aplică regulile (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea unui enunț compus (impropriu spus, ordinea "aplicării conectorilor logici primitivi" pentru obținerea acelui enunț). O *parantezare corectă* a unui enunț este o dispunere a parantezelor în interiorul acelui enunț astfel încât fiecare pereche de paranteze să încadreze un (alt) enunț, și, desigur, astfel încât ordinea aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru obținerea enunțului respectiv să fie indicată corect de acea parantezare.

Observație

Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- $\neg$ apare scris la fel ca un operator unar;
- $\rightarrow$ apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic "unar" $\neg$ și prioritate mai mică celui "binar", $\rightarrow$.
Noțiunea de **prioritate** are aici semnificația obișnuită, de determinare a ordinii "aplicării conectorilor logici", corect spus de determinare a ordinii aplicării regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) pentru construirea unui enunț.
Conectorul cu prioritate mai mare "se va aplica" primul, de fapt regula (E_2) se va aplica înaintea regulii (E_3), i. e., pentru orice enunțuri α și β, scrierea $\neg\alpha \rightarrow \beta$ va semnifica $(\neg\alpha) \rightarrow \beta$.

Observație

Egalitatea între enunțuri care apare în scrierea regulilor (E_2) și (E_3) este egalitatea obișnuită între cuvinte peste un alfabet, între șiruri de simboluri, anume **literal identitatea**, adică egalitatea simbol cu simbol, i. e. egalitatea lungimilor și identitatea (coincidența) simbolurilor de pe aceeași poziție în fiecare cuvânt (ca la șiruri de caractere: identitatea literă cu literă, caracter cu caracter), desigur, modulo parantezarea aleasă.
Adică: două enunțuri **scrise numai cu simboluri primitive** (vom vedea ce sunt simbolurile derivate) sunt *egale* ddacă există câte o parantezare corectă pentru fiecare astfel încât, cu acele parantezări, enunțurile respective să fie literal identice (ca și cuvinte peste alfabetul prezentat mai sus, format din simbolurile primitive).

Remarcă

Dacă recitim observația anterioară, vom remarca faptul că orice enunț se află în **exact una** (i. e. **una și numai una**) dintre cele 3 situații prezentate de regulile (E_1), (E_2) și (E_3).

Remarcă

Noțiunea de enunț este definită recursiv: se pornește de la variabilele propoziționale și se aplică recursia dată de regulile (E_2) și (E_3).
Din faptul că enunțurile sunt șiruri **finite** de simboluri primitive și observația că, prin aplicarea oricăreia dintre regulile (E_1), (E_2) și (E_3), lungimea enunțului format până la momentul curent crește cu cel puțin câte o unitate, deducem faptul că orice enunț se obține prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3) de un număr finit de ori, i. e. printr–un număr finit de aplicări ale regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), i. e., pornind de la variabilele propoziționale (evident, de la un număr finit de variabile propoziționale), într–un număr finit de pași, fiecare pas constând în aplicarea unei reguli de recursie: (E_2) sau (E_3).

Remarcă

Faptul, specificat în definiția unui enunț, că **toate enunțurile** se obțin prin aplicarea regulilor (E_1), (E_2) și (E_3), arată că E este cea mai mică mulțime închisă la regulile (E_1), (E_2) și (E_3), i. e. cea mai mică mulțime cu proprietățile:

1. $V \subseteq E$,
2. pentru orice $\varphi \in E$, rezultă că $\neg\varphi \in E$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in E$,

(cea mai mică în sensul incluziunii, adică E este inclusă în orice mulțime care satisface aceste trei condiții).

Limbajul sistemului formal al calculului propozițional clasic

Notație

Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$\varphi \vee \psi := \neg\, \varphi \to \psi$ (*disjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "sau" ψ)

$\varphi \wedge \psi := \neg\, (\varphi \to \neg\, \psi)$ (*conjuncția* dintre φ și ψ; se citește: φ "și" ψ)

$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (*echivalența logică* dintre φ și ψ; se citește: φ "echivalent cu" ψ)

Definiție

Simbolurile $\vee$, $\wedge$ și $\leftrightarrow$ se numesc *conectorii logici derivați*.

Observație

Conectorii logici derivați se scriu ca niște operatori binari, și le vom acorda aceeași prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv "binar" $\to$.

Remarcă

În această prezentare a sistemului formal al logicii propoziționale clasice, am considerat negația și implicația ca și conectori logici primitivi, iar disjuncția, conjuncția și echivalența ca și conectori logici derivați, introduși prin notațiile de mai sus, pe baza celor primitivi.

Există prezentări ale sistemului formal al logicii propoziționale clasice care sunt echivalente cu cea din acest curs și care folosesc alți conectori logici primitivi.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

- Am definit limbajul cu care vom lucra. Acum vom defini, tot la acest nivel, formal, sintactic, noțiunea de "adevăr" în logica pe care o construim. "Adevărurile sintactice" vor fi "teoremele" acestei logici, iar, pentru a le obține, vom da un set de axiome și vom defini o modalitate prin care, din adevăruri sintactice stabilite până la un moment dat, se deduc alte adevăruri sintactice. Acea modalitate se va numi **regula de deducție modus ponens**.

Definiție

O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$(A_1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$
$$(A_2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$
$$(A_3) \quad (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

Fiecare dintre scrierile (A_1), (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1), (A_2) și (A_3), cu φ, ψ și χ enunțuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1), (A_2) și (A_3), simplu, **axiome**.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

- Așa cum am anunțat, acum vom defini **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), adică modalitatea prin care, din aceste axiome, se obțin toate **teoremele** (**adevărurile sintactice**) în acest sistem logic.

Remarcă

Se poate demonstra că schemele de axiome de mai sus sunt **independente**, i. e. niciuna dintre ele nu poate fi dedusă din celelalte două prin modalitatea de deducție sintactică pe care o vom defini.
Acest fapt arată și că, între aceste trei scheme de axiome, nu există două din care să se deducă sintactic **toate** adevărurile sintactice (teoremele) acestui sistem logic, care se deduc din toate cele trei scheme de axiome.
Se pot, însă, defini alte seturi echivalente de scheme de axiome (adică seturi de scheme de axiome din care se deduc sintactic aceleași teoreme), cu aceiași sau cu alți conectori logici primitivi.

Notație

Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\dfrac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1, atunci este satisfăcută consecința C_2.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Teoremele formale (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notație

Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T.

Notație

Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiție

Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:

$$\frac{\vdash \psi, \ \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}.$$

Remarcă

Regula (T_3), chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulțime închisă la regulile (T_1) și (T_2), i. e. cea mai mică mulțime cu proprietățile:

1. T include mulțimea axiomelor, i. e. $T \supseteq \{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi),\ (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)),\ (\neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$,
2. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in T$, atunci $\varphi \in T$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obțină prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2), adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunț obținut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

În scrierea definiției de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiției, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într–o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarcă

Este imediat că, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală ddacă există o demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele* Σ, numite și *consecințele sintactice ale lui* Σ, se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_2) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_3) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ, atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ;
- (CS_4) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1), (CS_2) și (CS_3) de un număr finit de ori.

Notație

Vom nota faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiție

Regula (CS_3) se numește tot *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia tot "MP") și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică: $\dfrac{\Sigma \vdash \psi, \ \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$.

Remarcă

Regula (CS_4), chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulțimea consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri este cea mai mică mulțime închisă la regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3), i. e. cea mai mică mulțime M cu proprietățile:

1. M include mulțimea tuturor axiomelor, i. e. $M \supseteq \{\varphi \to (\psi \to \varphi), (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)), (\neg\,\varphi \to \neg\,\psi) \to (\psi \to \varphi) \mid \varphi, \psi, \chi \in E\}$,
2. $M \supseteq \Sigma$,
3. pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \to \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că (CS_4) spune că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ nu conține alte elemente decât cele obținute din regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3).

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Definiție

Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O Σ–*demonstrație formală pentru* φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

1. φ_i este o axiomă;
2. $\varphi_i \in \Sigma$;
3. există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ–demonstrației formale $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Remarcă

Amintindu–ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într–o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ.

Remarcă

Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ este o Σ–demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ este o Σ–demonstrație formală.

Remarcă

Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ–demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1), (CS_2) și (CS_3), respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ ddacă există o Σ–demonstrație formală pentru φ.

Remarcă

Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ–demonstrații formale și poate avea Σ–demonstrații formale de lungimi diferite.

Inducția după un concept

Observație

Noțiunile de **teoremă formală** și **consecință sintactică a unei mulțimi de ipoteze** au fost definite recursiv, la fel ca aceea de **enunț**.

Observație

O tehnică importantă de demonstrație la care vom apela în acest capitol al cursului este ceea ce vom numi *inducție după un concept*, pe care o vom întâlni în trei forme:

1. *inducție după enunțuri*
2. *inducție după teoreme formale*
3. *inducție după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*

Acest tip de inducție poate fi privit atât ca **inducție structurală**, cât și ca **inducția obișnuită după un număr natural**.
Într–adevăr, să descriem această metodă de demonstrație, în fiecare dintre cele trei forme în care poate să apară într–un raționament matematic în această teorie, și s–o analizăm, atât ca inducție structurală, cât și ca inducție după un număr natural.

Inducția după enunțuri

Remarcă

Descriem aici *inducția după enunțuri*.
Fie P o proprietate asupra cuvintelor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice variabilă propozițională satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă un enunț ψ satisface proprietatea P, atunci enunțul $\neg\psi$ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri ψ și χ satisfac proprietatea P, atunci enunțul $\psi \rightarrow \chi$ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după enunțuri* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate enunțurile satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea enunțurilor este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de cuvinte care include mulțimea variabilelor propoziționale și care este închisă la regulile (E_2) și (E_3) din definiția enunțurilor, i. e. mulțimea E a enunțurilor este cea mai mică mulțime M de cuvinte care satisface proprietățile:

- $V \subseteq M$;
- *închiderea la* (E_2): dacă $\psi \in M$, atunci $\neg\psi \in M$;
- *închiderea la* (E_3): dacă $\psi, \chi \in M$, atunci $\psi \rightarrow \chi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a cuvintelor care satisfac proprietatea P include pe V și este închisă la regulile (E_2) și (E_3), rezultă că $M_P \supseteq E$, i. e. toate enunțurile sunt printre cuvintele care satisfac proprietatea P.

Inducția după enunțuri

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după enunțuri, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după enunțuri poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de numărul de pași în care se obține un enunț din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ se obține într–un singur pas, adică φ este o variabilă propozițională, atunci φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ se obține în $n + 1$ pași, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem două cazuri:
  1. $\varphi = \neg\,\psi$, pentru un enunț ψ care se obține în n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ satisface proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P;
  2. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, pentru două enunțuri ψ și χ care se obțin, fiecare, în cel mult n pași, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ satisfac proprietatea P; atunci rezultă că φ satisface proprietatea P.

Întrucât orice enunț se obține într–un număr finit de pași din variabile propoziționale prin aplicarea regulilor (E_2) și (E_3), **principiul inducției matematice** (obișnuite, după un număr natural) ne asigură de faptul că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice enunț satisface proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă

Descriem aici *inducția după teoreme formale*.
Fie P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt teoreme formale și – este corect și cu și fără această adăugire) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după teoreme formale* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs amândoi pașii de mai sus, atunci am demonstrat că toate teoremele formale satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea teoremelor formale este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea T a teoremelor formale este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei doi pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că $M_P \supseteq T$, i. e. toate teoremele formale sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după teoreme formale

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după teoreme formale, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după teoreme formale poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei demonstrații formale pentru o teoremă formală, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n+1$**:** dacă teorema formală φ admite o demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n+1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
    - teorema formală φ_j admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
    - teorema formală $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice (obișnuite) arată că, prin metoda de mai sus, am demonstrat că orice teoremă formală satisface proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă

Descriem aici *inducția după consecințele sintactice ale unei mulțimi de ipoteze*.
Fie Σ o mulțime de enunțuri și P o proprietate asupra enunțurilor.
Presupunem că avem de demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Vom proceda astfel:

- **Pasul 1** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice axiomă satisface proprietatea P.
- **Pasul 2** ("pas de verificare"): demonstrăm că orice enunț din Σ satisface proprietatea P.
- **Pasul 3** ("pas de inducție"): demonstrăm că, dacă două enunțuri φ și ψ sunt astfel încât enunțurile ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ (sunt consecințe sintactice ale lui Σ și – este corect și cu și fără această adăugire)) satisfac proprietatea P, atunci enunțul φ satisface proprietatea P.

Metoda *inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze* ne asigură de faptul că, dacă am parcurs toți cei trei pași de mai sus, atunci am demonstrat că toate consecințele sintactice ale lui Σ satisfac proprietatea P.
Corectitudinea acestei metode se poate observa în două moduri:

1. privind–o ca **inducție structurală**
2. privind–o ca **inducție obișnuită după un număr natural**

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție structurală)

Conform unei remarci de mai sus, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor, include mulțimea Σ și care este închisă la regula de deducție (MP), i. e. mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ este cea mai mică mulțime M de enunțuri care satisface proprietățile:

- orice axiomă aparține lui M;
- orice enunț din Σ aparține lui M;
- *închiderea la (MP)*: dacă $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$.

Așadar, odată ce am parcurs cei trei pași de mai sus, adică am demonstrat că mulțimea M_P a enunțurilor care satisfac proprietatea P conține toate axiomele și toate enunțurile din Σ și este închisă la regula de deducție (MP), rezultă că M_P include mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ, i. e. toate consecințele sintactice ale lui Σ sunt printre enunțurile care satisfac proprietatea P.

Inducția după consecințe sintactice

Remarcă (Corectitudinea metodei inducției după consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze, privită ca inducție obișnuită după un număr natural)

Metoda inducției după consecințele sintactice ale lui Σ poate fi privită ca **inducție obișnuită** după numărul natural nenul n dat de lungimea unei Σ–demonstrații formale pentru o consecință sintactică a lui Σ, care se poate scrie detaliat astfel:

- **pasul de verificare:** $n = 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală de lungime 1, φ_1, atunci $\varphi = \varphi_1$ este o axiomă sau un enunț din Σ, și în acest caz φ satisface proprietatea P;
- **pasul de inducție:** $1, 2, \ldots, n \rightsquigarrow n + 1$**:** dacă enunțul φ admite o Σ–demonstrație formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$, de lungime $n + 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $\varphi = \varphi_{n+1}$ și, fie φ este o axiomă sau un enunț din Σ, caz în care φ satisface proprietatea P, fie există $k, j \in \overline{1, n}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$, iar:
  - φ_j admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_j$, de lungime $j \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că φ_j satisface proprietatea P;
  - $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ admite Σ–demonstrația formală $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, de lungime $k \leq n$; ipoteza de inducție ne asigură de faptul că $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_j \rightarrow \varphi$ satisface proprietatea P;

  rezultă că $\varphi = \varphi_{n+1}$ satisface proprietatea P.

Principiul inducției matematice arată că această demonstrație este completă.

Sintaxa sistemului formal al calculului propozițional clasic

Remarcă

Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ:

1. $\emptyset \vdash \varphi$ ddacă $\vdash \varphi$;
2. dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
3. dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Notație

Vom nota acest sistem formal cu $\mathcal{L}$.

Observație

Întreaga prezentare de până acum a fost efectuată la **nivel sintactic**: am pornit de la un **alfabet** (o **mulțime de simboluri**), am definit un tip particular de **cuvinte peste acest alfabet**, numite **enunțuri**, apoi un tip particular de enunțuri, numite **teoreme formale**, și **deducția sintactică** (**inferența sintactică**), care indică modul în care, din teoreme formale, se obțin alte teoreme formale, cu generalizarea la **consecințe sintactice** ale unor mulțimi de enunțuri.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- În această secțiune vom prezenta unele proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$, dintre care cea mai importantă este **Teorema deducției**. Acest rezultat ne va conduce la cele mai semnificative teoreme formale ale lui $\mathcal{L}$.
- Demonstrarea următoarei propoziții este un bun prilej de exersare a inducției după un concept.

Propoziție (o numim ad–hoc Propoziția $\star$)

Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

1. *dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;*
2. *dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;*
3. *dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.*

Demonstrație: (1) Demonstrăm, prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ, că orice consecință sintactică a lui Σ este și consecință sintactică a lui Δ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că ne aflăm în unul dintre cazurile următoare:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\Delta \vdash \varphi$.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Cum $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $\varphi \in \Delta$, prin urmare $\Delta \vdash \varphi$.

Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. au loc: $\Delta \vdash \psi$ și $\Delta \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Delta \vdash \varphi$ prin (MP).
Demonstrația primului punct este încheiată.

(2) Și aici procedăm prin inducție după consecințele sintactice ale lui Σ.
Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci ne situăm în unul dintre următoarele trei cazuri:
Cazul 1: φ este axiomă. Atunci $\vdash \varphi$, i. e. $\emptyset \vdash \varphi$. $\emptyset \subseteq \Sigma$ și $\emptyset$ este o mulțime finită, deci, în acest caz, φ satisface proprietatea pe care trebuie să o demonstrăm.
Cazul 2: $\varphi \in \Sigma$. Atunci: $\{\varphi\} \vdash \varphi$, iar $\{\varphi\} \subseteq \Sigma$ și $\{\varphi\}$ este o mulțime finită.
Cazul 3 (pasul de inducție): există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, și ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ satisfac ipoteza de inducție, i. e. există $\Gamma_1 \subseteq \Sigma$ și $\Gamma_2 \subseteq \Sigma$ a. î. Γ_1 și Γ_2 sunt finite și $\Gamma_1 \vdash \psi$ și $\Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq \Sigma$, $|\Gamma_1 \cup \Gamma_2| \leq |\Gamma_1| + |\Gamma_2| < \infty$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este o mulțime finită, iar, întrucât $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ și $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, prin aplicarea punctului (1) obținem: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi$ și $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi \rightarrow \varphi$, deci $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \varphi$ prin (MP).
Am încheiat demonstrația punctului (2).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

(3) Aici vom folosi **Teorema deducției** (vedeți mai jos), în demonstrarea căreia se utilizează numai punctul (1) din această propoziție. Am preferat scrierea punctelor acestei propoziții unul după altul, în același rezultat, dar puteam intercala, undeva între punctele (1) și (3), rezultatul de mai jos numit **Teorema deducției** și abreviat (TD).
Dacă $\Delta \vdash \varphi$, atunci, conform punctului (2), există o mulțime finită Γ a. î. $\Gamma \subseteq \Delta$ și $\Gamma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi$, adică $\vdash \varphi$, prin urmare $\Sigma \vdash \varphi$.
Dacă $\Gamma \neq \emptyset$, atunci fie $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Delta$.
Dacă orice enunț din Δ este consecință sintactică a lui Σ, atunci, pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$, $\Sigma \vdash \gamma_i$.
$\Gamma \vdash \varphi$ înseamnă că $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi$, ceea ce, conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\} \vdash \gamma_n \rightarrow \varphi$, ceea ce, din nou conform (TD), este echivalent cu $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-2}\} \vdash \gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi)$, și, continuând astfel, prin aplicări succesive ale (TD), obținem $\vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi))\ldots)$, așadar $\Sigma \vdash \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi))\ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_1$, de unde, prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \gamma_2 \rightarrow (\gamma_3 \rightarrow \ldots \rightarrow (\gamma_{n-1} \rightarrow (\gamma_n \rightarrow \varphi))\ldots)$, dar $\Sigma \vdash \gamma_2$, și, continuând în acest mod, prin aplicări succesive ale regulii de deducție (MP), se obține $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația punctului (3).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Propoziție (Principiul identității)

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$. (Vom folosi abrevierea "PI" pentru această teoremă formală.)

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$. Aceasta este o demonstrație sintactică pentru enunțul $\varphi \rightarrow \varphi$:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash [\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)] & (A_2) \\
\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (MP) \\
\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) & (A_1) \\
\vdash \varphi \rightarrow \varphi & (MP)
\end{array}$$

Observație

Uneori, este convenabil ca **demonstrațiile formale (demonstrațiile sintactice)**, cum este cea de mai sus, dar și multe raționamente care urmează în acest curs, să fie alcătuite "de la coadă la cap" (desigur, "pe ciornă"). Demonstrații ca, de exemplu, cea a punctului (1) din propoziția ce succedă **Teorema deducției**, demonstrație care începe prin considerarea unei mulțimi de ipoteze, ar fi dificil de conceput "de la cap la coadă".

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Teoremă (Teorema deducției)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

(Vom abrevia prin "TD" denumirea acestei teoreme.)

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Din punctul (1) din Propoziția $\star$ și (MP), obținem: $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, așadar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$, dar $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$": Ipoteza acestei implicații este: $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Aici vom proceda prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze $\Sigma \cup \{\varphi\}$.
Faptul că $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ arată că ne situăm în unul dintre cazurile următoare, cazuri care dau pașii raționamentului prin inducție:
Cazul 1 (pas de verificare): ψ este o axiomă. Atunci $\vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ conform (A_1), iar o aplicare a regulii (MP) ne dă $\vdash \varphi \rightarrow \psi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Cazul 2 (tot pas de verificare): $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$. Vom împărți acest caz în două subcazuri:
Subcazul 2.1: $\psi \in \Sigma$. Atunci $\Sigma \vdash \psi$. Dar $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ conform (A_1), deci $\Sigma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$. Așadar $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ prin (MP).
Subcazul 2.2: $\psi = \varphi$. Conform (PI), $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\vdash \varphi \to \psi$ și, prin urmare, $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.
Cazul 3 (pasul de inducție): există un enunț α a. î. $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \to \psi$ și α și $\alpha \to \psi$ satisfac ipoteza de inducție, deci $\Sigma \vdash \varphi \to \alpha$ și $\Sigma \vdash \varphi \to (\alpha \to \psi)$. Conform (A_2), $\vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi))$, deci $\Sigma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi))$. Aplicând (MP), obținem $\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi)$, și, aplicând (MP) încă o dată, obținem $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.
Așadar și cea de–a doua implicație este satisfăcută de orice enunțuri φ și ψ și orice mulțime de enunțuri Σ.

Remarcă

În demonstrațiile pentru (PI) și (TD), schema de axiome (A_3) nu a fost folosită.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Observație

Denumirea de **teoremă** pentru rezultatul anterior este o denumire din **metalimbaj**, pentru că acest rezultat este o proprietate a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Denumirea de **teoremă formală** este din limbajul sistemului formal al logicii propoziționale clasice, ea denumește un tip de obiect cu care lucrează acest sistem formal.

Este importantă această distincție. Similaritatea celor două denumiri se datorează faptului că acest sistem formal (al logicii propoziționale clasice) este o formalizare a unor legi ale gândirii (în special a procedeelor gândirii care sunt, în mod curent, folosite în elaborarea raționamentelor matematice), și conține denumiri care îi sugerează întrebuințarea, destinația.

Aceleași considerații sunt valabile pentru **conectorii logici** din sistemul formal al calculului propozițional clasic: $\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$, versus **conectorii logici din metalimbaj**, folosiți în enunțurile referitoare la calculul propozițional clasic, scriși fie prin denumirile lor: "non" sau "not" sau "negație", "implică" sau "rezultă", "sau", "și", "echivalent" sau "ddacă", fie prin simbolurile consacrate, în cazul implicației și echivalenței: $\Rightarrow$ și $\Leftrightarrow$, respectiv.

La fel pentru alți termeni din acest sistem logic, precum și din sistemul formal al calculului cu predicate clasic, prezentat în ultimul curs.

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- (1) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

Demonstrație: Vom aplica succesiv (MP) și (TD).

$$
\begin{array}{ll}
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi & \text{(MP)} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi & \text{(TD)} \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) & \text{(TD)} \\
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{(TD)}
\end{array}
$$

- regula de deducție (R_1): $\dfrac{\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash \varphi \to \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash \varphi \to \chi}$

Demonstrație: Din (1) și (MP). Varianta mai generală cu Σ arbitrar rezultă din (MP) și faptul că (1) implică $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$.

Demonstrații analoge pot fi date pentru rezultatele de mai jos. Vom mai exemplifica prin demonstrații formale în cazul unora dintre acestea. Pentru celelalte, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I. Regulile de deducție sunt numerotate la fel ca în această carte. Aveți ca **temă** parcurgerea demonstrațiilor sintactice pentru toate proprietățile de mai jos, din acest curs și din cartea amintită.

- (2) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
- (3) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$
- (4) $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi)$
- (5) $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$
- regula de deducție (R_3): $\dfrac{\vdash \varphi \to \chi, \vdash \psi \to \chi}{\vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to \chi, \Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \to \chi}$

- (6) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- (7) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- regula de deducție (R_4): $\dfrac{\vdash \chi \rightarrow \varphi, \vdash \chi \rightarrow \psi}{\vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi, \Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
- (8) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$
- (9) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi)$

Demonstrație: Aceasta este o consecință imediată a lui (8).

- regula de deducție (R_0): $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ (această regulă de deducție va fi aplicată, de obicei, fără a fi menționată în mod explicit)

Demonstrație: Din (9) și (MP).

- (10) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- (11) $\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$
- (12) $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$
- (13) $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$
- $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (**Principiul terțului exclus**; îl vom abrevia PTE)
- (14) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

- regula de deducție (R_5): $\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi}$

Demonstrație: Această regulă de deducție rezultă din (14) și (MP).

- (15) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash (\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \psi)) & (1) \\
\vdash (\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \varphi) & (2) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \psi) & (\mathrm{MP}) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}
$$

- (16) $\vdash (\neg\,\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală pentru această teoremă:

$$
\begin{array}{ll}
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\,\neg\,\varphi) \rightarrow ((\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) & (1) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\,\neg\,\varphi) & (3) \\
\vdash (\neg\,\neg\,\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & (\mathrm{MP}) \\
\vdash (\neg\,\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}
$$

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- (17) $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- (18) $\vdash (\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi) \rightarrow \neg\,(\varphi \wedge \psi)$

Demonstrație: Pașii următori formează o demonstrație sintactică pentru această teoremă:

$\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	(6)
$\vdash \neg\,\varphi \rightarrow \neg\,(\varphi \wedge \psi)$	regula de deducție (R_5)
$\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$	(7)
$\vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,(\varphi \wedge \psi)$	regula de deducție (R_5)
$\vdash (\neg\,\varphi \vee \neg\,\psi) \rightarrow \neg\,(\varphi \wedge \psi)$	regula de deducție (R_3)

- (19) $\vdash \neg\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \wedge \neg\,\psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație formală pentru teorema de față:

$\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	(4)
$\vdash \neg\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\,\varphi$	regula de deducție (R_5)
$\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$	(5)
$\vdash \neg\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow \neg\,\psi$	regula de deducție (R_5)
$\vdash \neg\,(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\neg\,\varphi \wedge \neg\,\psi)$	regula de deducție (R_4)

- regula de deducție (R_6): $\dfrac{\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație: Rezultă din axioma (A_2), prin (MP).

- regula de deducție (R_7): $\dfrac{\vdash \psi \to \chi}{\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \psi \to \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)}$

Demonstrație: Iată o demonstrație formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \psi \to \chi & \text{ipoteză} \\
\vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi)) & (A_1) \\
\vdash \varphi \to (\psi \to \chi) & (\text{MP}) \\
\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) & (R_6)
\end{array}$$

- regula de deducție (R_8): $\dfrac{\vdash \varphi, \vdash \psi}{\vdash \varphi \wedge \psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi, \Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi}$

Demonstrație: Din (10) și două aplicări ale lui (MP).

- (20) $\vdash \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$

Demonstrație: Din (2), (3) și (R_8).

- (21) $\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi)$

Demonstrație: Aceasta este o demonstrație sintactică:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \psi \rightarrow \neg\neg\psi & (3) \\
\vdash (\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) & (R_8) \\
\vdash \neg(\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow \neg(\neg\varphi \rightarrow \psi) & (R_5) \\
\vdash (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \vee \psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (22) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

Demonstrație: Din (19), (21) și (R_8).

- (23) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Iată o demonstrație sintactică pentru această teoremă formală:

$$\begin{array}{ll}
\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi & (2) \\
\vdash (\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow [(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)] & (1) \\
\vdash (\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (MP) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\psi) & (2) \\
\vdash \neg\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) & (R_1) \\
\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi) & \text{formă echivalentă}
\end{array}$$

- (24) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$

Demonstrație: Din (18), (23) și (R_8).

Proprietăți sintactice ale lui $\mathcal{L}$

- regula de deducție ($R*$): $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \neg\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \neg\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\psi}$

Demonstrație: În următoarea demonstrație formală, folosim, fără a mai explicita, definiția conectorului logic derivat $\leftrightarrow$: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

$$
\begin{array}{ll}
\vdash \varphi \leftrightarrow \psi & \text{ipoteză} \\
\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) & (6) \\
\vdash \varphi \rightarrow \psi & (MP) \\
\vdash \neg\,\psi \rightarrow \neg\,\varphi & (R_5) \\
\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & (7) \\
\vdash \psi \rightarrow \varphi & (MP) \\
\vdash \neg\,\varphi \rightarrow \neg\,\psi & (R_5) \\
\vdash \neg\,\varphi \leftrightarrow \neg\,\psi & (R_8)
\end{array}
$$

La fel ca la regula de deducție (R_1), rezultă varianta mai generală cu mulțimea de ipoteze Σ arbitrară.

Disjuncție și conjuncție logică între n enunțuri

Notație (abrevieri definite recursiv)

Fie $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (prioritățile: ca la operatori unari, deci aceeași prioritate ca $\neg$):

$$\bigvee_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exercițiu (temă)

Folosind (10) și (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$, are loc:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu (17) și (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \varphi \in E$, are loc echivalența:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash (\bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i) \rightarrow \varphi.$$

A se vedea și Propoziția 7.2.53/pagina 160/cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, precum și demonstrația Propoziției $\star$ de mai sus.

Să reținem aceste proprietăți sintactice de mai sus

Propoziție

Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

- regula de deducție (R_1): $\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow \psi, \vdash \psi \rightarrow \chi}{\vdash \varphi \rightarrow \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi}$
- (4) $\quad \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- (5) $\quad \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$
- regula de deducție (R_3): $\dfrac{\vdash \varphi \rightarrow \chi, \vdash \psi \rightarrow \chi}{\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi, \Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi}{\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$
- (6) $\quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$
- (7) $\quad \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$
- regula de deducție (R_4): $\dfrac{\vdash \chi \rightarrow \varphi, \vdash \chi \rightarrow \psi}{\vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi, \Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi}{\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$
- regula de deducție (R_0): $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi}$ (această regulă de deducție va fi aplicată, de obicei, fără a fi menționată în mod explicit)

Să reținem aceste proprietăți sintactice de mai sus

- (10) $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- (11) $\vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$
- (12) $\vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$
- (13) $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$
- $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$ (**Principiul terțului exclus**; îl vom abrevia PTE)
- (15) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \psi)$
- (16) $\vdash (\neg \varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- regula de deducție (R_8): $\dfrac{\vdash \varphi, \vdash \psi}{\vdash \varphi \wedge \psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi, \Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi}$
- (17) $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- regula de deducție $(R*)$: $\dfrac{\vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\vdash \neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi}$ și $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \vdash \neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi}$

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

- Această secțiune a cursului expune construcția unei algebre Boole care este asociată în mod canonic sistemului formal $\mathcal{L}$.
- Prin această asociere, proprietățile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ se reflectă în proprietăți booleene, și invers.

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$.
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui $\mathcal{L}$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \textit{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$": Conform regulii de deducție (R_8).
"$\Leftarrow$": Conform (6), (7) și (MP).

Definiție

Definim o relație binară $\sim_\Sigma$ pe mulțimea E a enunțurilor lui $\mathcal{L}$, astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \text{ ddacă } \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarcă

Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

$\sim_\Sigma$ *este o relație de echivalență pe* E.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi$ conform remarcii anterioare, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \varphi$, prin urmare $\sim_\Sigma$ este reflexivă.

Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conform regulii de deducție (R_0), $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \varphi$, așadar $\varphi \sim_\Sigma \psi$ ddacă $\psi \sim_\Sigma \varphi$, deci $\sim_\Sigma$ este simetrică.

Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \psi$ și $\psi \sim_\Sigma \chi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \chi$, ceea ce este echivalent, conform remarcii anterioare, cu $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$, conform regulii de deducție (R_1). Din remarca anterioară, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \chi$, i. e. $\varphi \sim_\Sigma \chi$, așadar $\sim_\Sigma$ este tranzitivă.

Deci $\sim_\Sigma$ este o relație de echivalență pe E.

Notație

Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\hat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență $\sim_\Sigma$, și să considerăm mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma} = \{\hat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

Definiție

Pe mulțimea factor $E/_{\sim_\Sigma}$, definim relația binară $\leq_\Sigma$, prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$.

Propoziție

$\leq_\Sigma$ este bine definită.

Demonstrație: Fie $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$ a. î. $\varphi \sim_\Sigma \varphi'$ și $\psi \sim_\Sigma \psi'$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ și $\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$, adică $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi'$, $\Sigma \vdash \varphi' \to \varphi$, $\Sigma \vdash \psi \to \psi'$ și $\Sigma \vdash \psi' \to \psi$, conform remarcii anterioare.
Avem de demonstrat că $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\hat{\varphi'}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi'}^\Sigma$, i. e. că $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi' \to \psi'$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$. Această relație și faptul că $\Sigma \vdash \varphi' \to \varphi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \psi'$, împreună cu regula de deducție (R_1), implică $\Sigma \vdash \varphi' \to \psi'$.
Implicația reciprocă se demonstrează în mod similar.
Așadar, $\leq_\Sigma$ este bine definită.

Lemă

$\leq_\Sigma$ *este o relație de ordine parțială pe* $E/_{\sim_\Sigma}$.

Demonstrație: Conform (PI), pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, așadar $\leq_\Sigma$ este reflexivă.
Din remarca precedentă, pentru orice $\varphi, \psi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, rezultă că $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma = \hat{\psi}^\Sigma$, deci $\leq_\Sigma$ este antisimetrică.
Regula de deducție (R_1) ne asigură de faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \to \chi$, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi \to \chi$, i. e. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, ceea ce înseamnă că $\leq_\Sigma$ este tranzitivă.
Deci $\leq_\Sigma$ este o relație de ordine pe $E/_{\sim_\Sigma}$.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ *este o latice distributivă, în care, pentru orice* $\varphi, \psi \in E$,
$\inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.
Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ *și* $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Demonstrație: Conform lemei precedente, $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este un poset.
Fie $\varphi, \psi \in E$, arbitrare, fixate.

Demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma = \inf\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ este cel mai mare minorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:

(a) $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$;

(b) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma$, rezultă că $\hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \varphi$ și $\Sigma \vdash \chi \rightarrow \psi$, rezultă că
$\Sigma \vdash \chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.

Condiția (a) rezultă din (6) și (7), iar (b) din regula de deducție (R_4).

Acum demonstrăm că, în posetul $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$, $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma = \sup\{\hat{\varphi}^\Sigma, \hat{\psi}^\Sigma\}$, i. e. $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ este cel mai mic majorant al elementelor $\hat{\varphi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma$, i. e.:

(c) $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$;

(d) pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\hat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$ și $\hat{\psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, rezultă că $\widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma \leq_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$, i. e., pentru orice $\chi \in E$ a. î. $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow \chi$, rezultă că
$\Sigma \vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.

Condiția (c) rezultă din (4) și (5), iar (d) din regula de deducție (R_3).

Așadar, am demonstrat că $(E/_{\sim_\Sigma}, \leq_\Sigma)$ este o latice, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, conjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$, iar disjuncția este $\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Unicitatea infimumului și a supremumului într–un poset demonstrează că $\vee_\Sigma$ și $\wedge_\Sigma$ sunt bine definite.
(11) implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$,
$\Sigma \vdash ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi)$, deci
$(\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \leq_\Sigma (\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma$.
(12) implică faptul că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$,
$\Sigma \vdash ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) \rightarrow ((\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$, deci
$(\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma \leq_\Sigma (\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma)$.
Cele două inegalități de mai sus arată că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$,
$(\hat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \hat{\psi}^\Sigma) \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma = (\hat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma) \vee_\Sigma (\hat{\psi}^\Sigma \wedge_\Sigma \hat{\chi}^\Sigma)$, prin urmare laticea $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este distributivă (amintim că, în orice latice, fiecare dintre legile de distributivitate o implică pe cealaltă).

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Conform lui (13), pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$ și $\Sigma \vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$, așadar, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^{\Sigma} \leq_{\Sigma} \hat{\psi}^{\Sigma} \leq_{\Sigma} \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^{\Sigma}$. Aceasta înseamnă că, indiferent cine este $\varphi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^{\Sigma}$ și $\widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^{\Sigma}$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/_{\sim_{\Sigma}}, \vee_{\Sigma}, \wedge_{\Sigma}, \leq_{\Sigma})$. Vom nota $0_{\Sigma} := \widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^{\Sigma}$ și $1_{\Sigma} := \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^{\Sigma}$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Unicitatea minimului și a maximului unui poset arată că această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_{Σ} și 1_{Σ} sunt bine definite.

- Am obținut:

Propoziție

$(E/_{\sim_{\Sigma}}, \vee_{\Sigma}, \wedge_{\Sigma}, \leq_{\Sigma}, 0_{\Sigma}, 1_{\Sigma})$ *este o latice distributivă mărginită.*

Definiție

Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\hat{\varphi}^{\Sigma}}^{\Sigma} := \widehat{\neg \varphi}^{\Sigma}$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Conform regulii de deducție $(R*)$, definiția de mai sus pentru operația unară $\overline{\cdot}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to E/_{\sim_\Sigma}$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$, ceea ce rezultă și din demonstrația următoare și unicitatea complementului în latici distributive mărginite.

Propoziție

$(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Demonstrație: Rezultatele anterioare arată că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită în care, pentru orice $\varphi \in E$, au loc egalitățile:

- $\hat{\varphi}^{\Sigma} \wedge_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^{\Sigma}}^{\Sigma} = \hat{\varphi}^{\Sigma} \wedge_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}^{\Sigma} = 0_\Sigma$ și
- $\hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \overline{\hat{\varphi}^{\Sigma}}^{\Sigma} = \hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \widehat{\neg\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}^{\Sigma} = 1_\Sigma$,

prin urmare $\overline{\hat{\varphi}^{\Sigma}}^{\Sigma}$ este complementul lui $\hat{\varphi}^{\Sigma}$.
Aceasta înseamnă că $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiție

Algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^{\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal $\mathcal{L}$.*

Remarcă

Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \hat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde $\to_\Sigma$ și $\leftrightarrow_\Sigma$ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/_{\sim_\Sigma}, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, \overline{\cdot}^\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg\,\varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \to \psi) = p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Într–adevăr, identitățile (a), (b) și (c) sunt chiar definițiile operațiilor algebrei Boole $E/_{\sim_\Sigma}$. Definiția implicației booleene, (a) și (c) arată că $p_\Sigma(\varphi) \to_\Sigma p_\Sigma(\psi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi) = p_\Sigma(\neg\,\varphi \vee \psi)$, ceea ce arată că (d) este echivalent cu faptul că $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\,\varphi \vee \psi)$, care rezultă din (15), (16) și prima remarcă din această secțiune. (e) se obține, direct, din (b) și (d).
Cele cinci identități de mai sus arată cum conectorii logici sunt convertiți în operații booleene.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ *ddacă* $\hat{\varphi}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Demonstrație: Fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat.

Au loc echivalențele: $\hat{\varphi}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$ ddacă $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \widehat{\varphi \vee \neg\, \varphi}^{\Sigma}$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$.
Așadar, avem de demonstrat că: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$.
Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Conform (A_1), $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg\, \varphi) \rightarrow \varphi)$, deci $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \vee \neg\, \varphi) \rightarrow \varphi)$. Prin (MP), obținem: $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\, \varphi) \rightarrow \varphi$. Conform (13), $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$, după cum ne asigură prima remarcă din această secțiune.
Reciproc, să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\, \varphi)$, sau, echivalent, $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\, \varphi) \leftrightarrow \varphi$, așadar $\Sigma \vdash (\varphi \vee \neg\, \varphi) \rightarrow \varphi$, conform aceleiași prime remarci din această secțiune. Dar (PTE) afirmă că $\vdash \varphi \vee \neg\, \varphi$, și deci $\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\, \varphi$. Prin (MP), obținem $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarcă

Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Notație

În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență $\sim_\emptyset$ se notează, simplu, $\sim$, și are următoarea definiție: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ddacă} \quad \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\,;$$

- clasele de echivalență ale lui $\sim$, $\hat{\varphi}^\emptyset$ ($\varphi \in E$), se notează $\hat{\varphi}$;
- relația de ordine $\leq_\emptyset$ se notează $\leq$;
- operațiile $\vee_\emptyset$, $\wedge_\emptyset$, $\bar{\ }^\emptyset$, $0_\emptyset$ și $1_\emptyset$ se notează, respectiv, $\vee$, $\wedge$, $\bar{\ }$, 0 și 1.

Definiție

$\sim$ se numește *echivalența logică* sau *echivalența semantică* între enunțuri. Algebra Boole $(E/_\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal $\mathcal{L}$*.

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lemă

Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$.

Algebra Lindenbaum-Tarski a lui $\mathcal{L}$

Notă

- A se vedea la seminar exemple de **demonstrații algebrice** în logica propozițională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).
- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei demonstrații algebrice pentru o deducție formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, se folosește faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, așadar $\hat{\sigma}^{\Sigma} = 1_{\Sigma}$.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, construcția algebrei Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$, efectuată prin raționamentul de mai sus scris în cazul particular $\Sigma = \emptyset$.
Am considerat că tratarea directă a cazului general nu crește dificultatea parcursului anterior, și, din acest motiv, am ales să prezint acest caz general, a cărui particularizare la situația $\Sigma = \emptyset$ este imediată.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiție

O *interpretare* (*evaluare*, *semantică*) a lui $\mathcal{L}$ este o funcție oarecare $h : V \to \mathcal{L}_2$.

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, *pentru orice* $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, *pentru orice* $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \to \psi) = \tilde{h}(\varphi) \to \tilde{h}(\psi)$, *pentru orice* $\varphi, \psi \in E$.

Observație

Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}\mid_V = h$, adică funcția $\tilde{h}$ prelungește pe h la E.
În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui $\tilde{h}$, $\neg$ și $\to$ sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii drepți, $\bar{\ }$ și $\to$ sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole $\mathcal{L}_2$. Așadar, putem spune că funcția $\tilde{h}$ transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.
Vom păstra notația $\tilde{h}$ pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Demonstrația propoziției anterioare: Demonstrăm existența și unicitatea lui $\tilde{h}$ prin inducție după conceptul de enunț.

Fie $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$.

Orice enunț φ se află în una **și numai una** dintre situațiile următoare (**numai una** pentru că, dacă nu se folosesc conectorii logici derivați, atunci două enunțuri coincid ddacă sunt **literal identice** ca șiruri de simboluri peste alfabetul lui $\mathcal{L}$, exceptând, eventual, folosiri diferite ale parantezelor, care nu influențează regulile de mai jos):

- (E_1) $\varphi \in V$ (φ este variabilă propozițională)
- (E_2) există $\psi \in E$, a. î. $\varphi = \neg \psi$
- (E_3) există $\psi, \chi \in E$, a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$

și φ se obține într–un număr finit de pași pornind de la variabile propoziționale și aplicând cele trei reguli de mai sus.

Fiecărui $\varphi \in E$ îi asociem un element al lui $\mathcal{L}_2$, pe care îl notăm cu $\tilde{h}(\varphi)$, astfel:

1. dacă $\varphi \in V$, atunci $\tilde{h}(\varphi) := h(\varphi)$
2. dacă $\varphi = \neg \psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ a fost definită, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \overline{\tilde{h}(\psi)}$
3. dacă $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi)$ au fost definite, atunci $\tilde{h}(\varphi) := \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi)$

Principiul inducției după conceptul de enunț ne asigură că, urmând cele trei reguli anterioare, se definesc, recursiv, valorile $\tilde{h}(\varphi)$, pentru toate $\varphi \in E$.

Faptul că orice $\varphi \in E$ se află în una **și numai una** dintre cele trei situații de mai sus arată că lui φ nu i se pot asocia două valori distincte prin această recursie, i. e. valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$ este unic determinată de φ.

Aceste două proprietăți (existența și unicitatea lui $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$, pentru orice $\varphi \in E$) arată că am obținut o funcție $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ complet și corect definită, care asociază fiecărui $\varphi \in E$ valoarea $\tilde{h}(\varphi) \in \mathcal{L}_2$.

De asemenea, $\tilde{h}$ satisface condițiile (a), (b) și (c) din enunț, prin chiar definiția ei.

Am încheiat demonstrația existenței unei funcții $\tilde{h}$ care satisface cerințele din enunț, și fixăm această funcție pentru cele ce urmează, anume demonstrația unicității ei.

Fie $g : E \to \mathcal{L}_2$ o funcție care satisface aceste trei condiții:

- (a_g) $\quad g(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b_g) $\quad g(\neg\,\varphi) = \overline{g(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c_g) $\quad g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Acum fie $\varphi \in E$, arbitrar, fixat. Vom demonstra prin inducție după conceptul de enunț că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Definiția unui enunț arată că ne situăm în unul dintre aceste trei cazuri:

- (E_1) $\varphi \in V$; atunci (a) și (a_g) ne dau: $\tilde{h}(\varphi) = h(\varphi) = g(\varphi)$;
- (E_2) $\varphi = \neg\,\psi$ pentru un $\psi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$; atunci (b) și (b_g) implică: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\neg\,\psi) = \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{g(\psi)} = g(\neg\,\psi) = g(\varphi)$;
- (E_3) $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ pentru două enunțuri $\psi, \chi \in E$ cu proprietatea că $\tilde{h}(\psi) = g(\psi)$ și $\tilde{h}(\chi) = g(\chi)$; atunci (c) și (c_g) arată că: $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \rightarrow \chi) = \tilde{h}(\psi) \rightarrow \tilde{h}(\chi) = g(\psi) \rightarrow g(\chi) = g(\psi \rightarrow \chi) = g(\varphi)$.

Am demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = g(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in E$, i. e. $\tilde{h} = g$, așadar $\tilde{h}$ este unic cu proprietățile din enunț.

Corolar

Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Demonstrație: Imediat, din definițiile conectorilor logici derivați și proprietățile operațiilor într–o algebră Boole.

Definiție

- Spunem că un enunț φ este *adevărat într–o interpretare* h sau că h *satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$; φ se zice *fals în interpretarea* h ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$. Faptul că enunțul φ este adevărat într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \varphi$.
- Un enunț φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare; faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\vDash \varphi$. Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile lui* $\mathcal{L}$.
- Faptul că o mulțime Σ de enunțuri are proprietatea că toate elementele sale sunt adevărate într–o interpretare h se notează cu: $h \vDash \Sigma$; în acest caz, spunem că h *satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ.
- Dacă Σ este o mulțime de enunțuri cu proprietatea că există un model pentru Σ, atunci spunem că Σ *admite un model*.
- Date un enunț φ și o mulțime de enunțuri Σ, spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare h a. î. $h \vDash \Sigma$; acest lucru se notează cu: $\Sigma \vDash \varphi$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Remarcă

Uneori, funcţia $\tilde{h}$ asociată unei interpretări h este numită tot *interpretare*. Valoarea unei interpretări într–un anumit enunţ, uneori numită interpretarea acelui enunţ, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obţine atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din $\mathcal{L}_2$ tuturor variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ. Un enunţ universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunţ a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziţionale care apar în acel enunţ.

În cele ce urmează, vom vedea două rezultate deosebit de importante privind sistemul formal $\mathcal{L}$: **Teorema de completitudine** şi o generalizare a ei, **Teorema de completitudine tare**, numită şi **Teorema de completitudine extinsă**. **Teorema de completitudine a lui** $\mathcal{L}$ afirmă că adevărurile sintactice ale lui $\mathcal{L}$ coincid cu adevărurile semantice ale lui $\mathcal{L}$, i. e. teoremele formale ale lui $\mathcal{L}$ sunt exact enunţurile universal adevărate, tautologiile lui $\mathcal{L}$. **Teorema de completitudine tare pentru** $\mathcal{L}$ afirmă că, în $\mathcal{L}$, consecinţele sintactice ale unei mulţimi Σ de enunţuri coincid cu consecinţele semantice ale lui Σ, i. e. enunţurile care se deduc sintactic din Σ sunt exact enunţurile care se deduc semantic din Σ.

Teoremă (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru $\mathcal{L}$ (TCT))

Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ,

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \textit{ddacă} \quad \Sigma \vDash \varphi.$$

Demonstrație: "$\Rightarrow$:" Presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$. Demonstrăm că $\Sigma \vDash \varphi$.
Fie $h : V \to \mathcal{L}_2$, a. î. $h \vDash \Sigma$, arbitrară. Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\varphi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Procedăm prin inducție după conceptul de consecință sintactică a mulțimii de ipoteze Σ.
$\Sigma \vdash \varphi$ înseamnă că φ se găsește în una dintre următoarele situații:

- (CS_1) φ este o axiomă; aici avem subcazurile:
  axioma (A_1): există $\psi, \chi \in E$ a. î. $\varphi = \psi \to (\chi \to \psi)$;
  atunci $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) \to (\tilde{h}(\chi) \to \tilde{h}(\psi)) = \overline{\tilde{h}(\psi)} \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} \vee \tilde{h}(\psi) = 1 \vee \overline{\tilde{h}(\chi)} = 1$;

axioma (A_2): există $\alpha, \beta, \gamma \in E$ a. î.
$\varphi = (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$, $b := \tilde{h}(\beta)$ și $c := \tilde{h}(\gamma)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c))$ în $\mathcal{L}_2$,
unde $1 \rightarrow 0 = 0$, iar celelalte trei implicații au valoarea 1;
așadar, dacă $a = 0$, atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow 1) = 1 \rightarrow 1 = 1$;
dacă $a = 1$ și $b \rightarrow c = 0$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = 0 \rightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)) = 1$;
dacă $b \rightarrow c = 1$, atunci $b \leq c$, și deci
$a \rightarrow b = \overline{a} \vee b \leq \overline{a} \vee c = a \rightarrow c$,
prin urmare $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) = 1$, deci
$\tilde{h}(\varphi) = (a \rightarrow 1) \rightarrow 1 = 1$;

axioma (A_3): există $\alpha, \beta \in E$ a. î. $\varphi = (\neg\,\alpha \rightarrow \neg\,\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$;
dacă notăm $a := \tilde{h}(\alpha)$ și $b := \tilde{h}(\beta)$, atunci
$\tilde{h}(\varphi) = (\overline{a} \rightarrow \overline{b}) \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$,
pentru că $[b \leq a$ ddacă $\overline{a} \leq \overline{b}]$,
și deci $[b \rightarrow a = 1$ ddacă $\overline{a} \rightarrow \overline{b} = 1]$,
iar în caz contrar ambele implicații sunt 0,
pentru că ne situăm în $\mathcal{L}_2$,

deci $\bar{a} \to \bar{b} = b \to a$, prin urmare $(\bar{a} \to \bar{b}) \to (b \to a) = 1$;

- (CS_2) $\varphi \in \Sigma$; atunci $\tilde{h}(\varphi) = 1$, pentru că $h \vDash \Sigma$;
- (CS_3) există $\psi \in E$, a. î. $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ și $\tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$ (aceste două egalități pentru valori ale lui $\tilde{h}$ reprezintă **ipoteza de inducție**); atunci $\tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi \to \varphi) = 1$, așadar $1 = \tilde{h}(\psi) \leq \tilde{h}(\varphi)$, deci $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Demonstrația implicației directe este încheiată.

"$\Leftarrow$:" Ipoteza acestei implicații este că $\Sigma \vDash \varphi$.
Presupunem prin absurd că $\Sigma \nvdash \varphi$. Atunci $\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_{\Sigma}$ în algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$, prin urmare $\hat{\varphi}^{\Sigma} \in E/_{\sim_{\Sigma}} \setminus \{1_{\Sigma}\}$, așadar $|E/_{\sim_{\Sigma}}| > 1$, deci algebra Boole $E/_{\sim_{\Sigma}}$ este netrivială. Aplicând **Teorema de reprezentare a lui Stone** algebrei Boole netriviale $E/_{\sim_{\Sigma}}$, obținem că există o mulțime $X \neq \emptyset$ și există un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim_{\Sigma}} \to \mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$.
$\hat{\varphi}^{\Sigma} \neq 1_{\Sigma}$ în $E/_{\sim_{\Sigma}}$ și $d : E/_{\sim_{\Sigma}} \to \mathcal{L}_2^X$ este injectiv, prin urmare $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq d(1) = \mathbf{1}$, deci $d(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \neq \mathbf{1}$(= funcția constantă 1) în $\mathcal{L}_2^X = \{f \mid f : X \to \mathcal{L}_2\}$, așadar există un element $x \in X$ cu $d(\hat{\varphi}^{\Sigma})(x) \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$.
Fie $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$, definită prin: pentru orice $f \in \mathcal{L}_2^X$, $\pi(f) := f(x) \in \mathcal{L}_2$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Se arată ușor că π este un morfism boolean. De exemplu, să verificăm comutarea lui π cu $\vee$, iar comutările lui π cu celelalte operații de algebre Boole se demonstrează analog: pentru orice $f, g \in \mathcal{L}_2^X$,
$\pi(f \vee g) = (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \pi(f) \vee \pi(g)$ în $\mathcal{L}_2$.
Considerăm următoarele funcții: incluziunea $i : V \to E$ ($i(u) := u$ pentru fiecare $u \in V$), surjecția canonică $p_\Sigma : E \to E/_{\sim_\Sigma}$, morfismul boolean injectiv $d : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2^X$ considerat mai sus și morfismul boolean $\pi : \mathcal{L}_2^X \to \mathcal{L}_2$ considerat mai sus. Să notăm compunerea acestor funcții cu h: $h := \pi \circ d \circ p_\Sigma \circ i$;
$h : V \to \mathcal{L}_2$ este o interpretare.
Demonstrăm, prin inducție după conceptul de enunț, că, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$. Folosim definiția lui $\tilde{h}$.

- (E_1) dacă $\alpha \in V$, atunci $\tilde{h}(\alpha) = h(\alpha) = \pi(d(p_\Sigma(i(\alpha)))) = \pi(d(p_\Sigma(\alpha))) = \pi(d(\hat{\alpha}^\Sigma)) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;
- (E_2) dacă $\alpha = \neg\,\beta$, pentru un $\beta \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\neg\,\beta) = \overline{\tilde{h}(\beta)} = \overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)} = (\overline{d(\hat{\beta}^\Sigma)})(x) = d(\overline{\hat{\beta}^\Sigma}^{\,\Sigma})(x) = d(\widehat{\neg\,\beta}^\Sigma)(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$;

- (E_3) dacă $\alpha = \beta \to \gamma$, pentru $\beta, \gamma \in E$ cu $\tilde{h}(\beta) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x)$ și $\tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\gamma}^\Sigma)(x)$ (**ipoteza de inducție**), atunci $\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}(\beta \to \gamma) = \tilde{h}(\beta) \to \tilde{h}(\gamma) = d(\hat{\beta}^\Sigma)(x) \to d(\hat{\gamma}^\Sigma)(x) = (d(\hat{\beta}^\Sigma) \to d(\hat{\gamma}^\Sigma))(x) = d(\hat{\beta}^\Sigma \to_\Sigma \hat{\gamma}^\Sigma)(x) = d(\widehat{\beta \to \gamma}^\Sigma)(x) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$.

Demonstrația prin inducție este încheiată. Așadar, pentru orice $\alpha \in E$, $\tilde{h}(\alpha) = d(\hat{\alpha}^\Sigma)(x)$.
În particular, pentru $\alpha := \varphi$, $\tilde{h}(\varphi) = d(\hat{\varphi}^\Sigma)(x) \neq 1$.
Demonstrăm că $h \vDash \Sigma$.
Fie $\sigma \in \Sigma$, arbitrar, fixat.
Conform identității stabilite mai sus, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^\Sigma)(x)$.
Cine este $\hat{\sigma}^\Sigma$ (clasa lui σ în algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$)?
Conform definiției claselor echivalenței $\sim_\Sigma$, unei proprietăți a consecințelor sintactice, **Teoremei deducției**, faptului că $\sigma \in \Sigma$, și deci și $\Sigma \vdash \sigma$, $\hat{\sigma}^\Sigma = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \leftrightarrow \tau\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \sigma \to \tau \text{ și } \Sigma \vdash \tau \to \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \tau \text{ și } \Sigma \cup \{\tau\} \vdash \sigma\} = \{\tau \in E \mid \Sigma \vdash \tau\} = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^\Sigma = 1_\Sigma$, oricare ar fi $\gamma \in E$, pentru că, în conformitate cu **Principiul terțului exclus**, $\vdash \gamma \vee \neg\gamma$, prin urmare $\Sigma \vdash \gamma \vee \neg\gamma$, așadar $\gamma \vee \neg\gamma \in \hat{\sigma}^\Sigma$ conform egalității de mulțimi pe care tocmai am stabilit–o, i. e. $\gamma \vee \neg\gamma \sim_\Sigma \sigma$, deci $\hat{\sigma}^\Sigma = \widehat{\gamma \vee \neg\gamma}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Așadar, $\tilde{h}(\sigma) = d(\hat{\sigma}^{\Sigma})(x) = d(1_{\Sigma})(x) = 1(x) = 1$ (funcția constantă 1 aplicată în x).
Deci $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$, adică $h \vDash \Sigma$.
Am găsit o interpretare h cu proprietățile: $h \vDash \Sigma$ și $\tilde{h}(\varphi) \neq 1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \nvDash \varphi$. Am obținut o contradicție cu ipoteza acestei implicații. Așadar, $\Sigma \vdash \varphi$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

Teoremă (Teorema de completitudine pentru $\mathcal{L}$ (TC))

Pentru orice enunț φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstrație: Se aplică **Teorema de completitudine tare** pentru $\Sigma = \emptyset$.

Remarcă

Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \vDash \varphi$ este numită *corectitudinea lui $\mathcal{L}$*,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \vDash \varphi$ este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui $\mathcal{L}$*.

Corolar (noncontradicția lui $\mathcal{L}$ (principiul noncontradicției))

Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg\varphi$.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există un enunț φ a. î. $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$. Atunci, conform **Teoremei de completitudine**, $\vDash \varphi$ și $\vDash \neg\varphi$, i. e., pentru orice interpretare h, avem: $\tilde{h}(\varphi) = 1$ și $1 = \tilde{h}(\neg\varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{1} = 0$, deci $0 = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este o contradicție.

Propoziție

Algebra Lindenbaum–Tarski, $E/_\sim$, a logicii propoziționale clasice este netrivială.

Demonstrație: $\sim = \sim_\emptyset$. Presupunem prin absurd că $0 = 1$ în algebra Boole $E/_\sim$. Fie $\psi \in E$ și $\varphi = \psi \vee \neg\psi \in E$. Atunci $\hat{\varphi} = 1$, așadar $\vdash \varphi$, conform unei leme de mai sus privind caracterizarea teoremelor formale. Corolarul anterior arată că $\nvdash \neg\varphi$, așadar, conform aceleiași leme, $1 \neq \widehat{\neg\varphi} = \overline{\hat{\varphi}} = \overline{1} = 0$, prin urmare $|E/_\sim| \geq 2$, adică algebra Boole $E/_\sim$ este netrivială.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Notă

A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în $\mathcal{L}_2$, cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr (tabelelor semantice)**.

Notă

A se vedea, în cărțile de G. Georgescu din bibliografia cursului, obținerea **Teoremei de completitudine** prin raționamentul de mai sus efectuat pe cazul particular $\Sigma = \emptyset$, folosind algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$ asociată lui $\mathcal{L}$, din care, apoi, se obține **Teorema de completitudine tare**. A se vedea, în aceleași materiale bibliografice, și rezultatele următoare scrise în cazul particular $\Sigma = \emptyset$. Mai mult despre legătura dintre aceste teoreme în lecția despre **sisteme deductive** și **mulțimi consistente** de mai jos.

Semantica lui $\mathcal{L}$

Propoziție

Pentru orice interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ și orice $\Sigma \subseteq E$ a. î. $h \vDash \Sigma$, există un unic morfism boolean $\overline{h}^{\Sigma} : E/_{\sim_\Sigma} \to \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim_\Sigma} \arrow[dl, "\overline{h}^{\Sigma}"] \\ & \mathcal{L}_2 & \end{tikzcd}$$

Demonstrație: Unicitatea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ rezultă din condiția ca $\overline{h}^{\Sigma}$ să închidă comutativ această diagramă, care face ca singura definiție posibilă pentru $\overline{h}^{\Sigma}$ să fie: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(p_\Sigma(\varphi)) := \tilde{h}(\varphi)$.

Cu această definiție, $\overline{h}^{\Sigma}$ devine morfism Boolean. De exemplu, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
$\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma} \vee_\Sigma \hat{\psi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\widehat{\varphi \vee \psi}^{\Sigma}) = \tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) \vee \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. La fel se demonstrează comutarea lui $\overline{h}^{\Sigma}$ cu celelalte operații de algebră Boole.

Rămâne de demonstrat buna definire a lui $\overline{h}^{\Sigma}$, i. e. independența sa de reprezentanții claselor din $E/_{\sim_\Sigma}$. Fie $\varphi, \psi \in E$, a. î. $\hat{\varphi}^{\Sigma} = \hat{\psi}^{\Sigma}$, ceea ce este echivalent cu $\varphi \sim_\Sigma \psi$, i. e. $\Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, ceea ce este echivalent cu $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \psi$, conform **Teoremei de completitudine tare**. Dar $h \vDash \Sigma$, așadar $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$, adică $\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ în $\mathcal{L}_2$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi)$, i. e. $\overline{h}^{\Sigma}(\hat{\varphi}^{\Sigma}) = \overline{h}^{\Sigma}(\hat{\psi}^{\Sigma})$. Așadar $\overline{h}^{\Sigma}$ este bine definit.

Corolar

Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\overline{h} : E/_{\sim} \rightarrow \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\overline{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & E/_{\sim} \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
 & \mathcal{L}_2 &
\end{tikzcd}$$

Demonstrație: Se aplică propoziția precedentă pentru $\Sigma = \emptyset$.

Sisteme deductive

Definiție

O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* ddacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \Sigma.$$

Remarcă

Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv ddacă $\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma$.

Exemplu

În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Exemplu

Mulțimea T a teoremelor formale este sistem deductiv, deoarece se demonstrează că, oricare ar fi $\varphi \in E$:

$$T \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi$$

(amintim că $\vdash \varphi$ este notația pentru: $\varphi \in T$).

Sisteme deductive

Remarcă

Mai mult, se demonstrează că T este cel mai mic sistem deductiv, deci orice sistem deductiv include pe T.

Mai precis:

Propoziție

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *$T \subseteq \Sigma$ și, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ (i. e. Σ include mulțimea teoremelor formale și este închisă la* **MP***).*

Exemplu

Conform propoziției anterioare, o submulțime a lui E care nu include pe T nu este sistem deductiv.
De exemplu, $\emptyset$ nu este sistem deductiv, ceea ce se observă și din faptul că, oricare ar fi $\varphi \in E$, avem:

$$\emptyset \vdash \varphi \text{ ddacă } \vdash \varphi \text{ ddacă } \varphi \in T,$$

iar $\emptyset \subsetneq T$.

Exercițiu (temă)

Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv (i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere**).

Remarcă

Afirmația din exercițiul anterior arată că, pentru orice $\Sigma \subseteq E$, există cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ, și acesta este egal cu intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri. Se notează cu $D(\Sigma)$, și se numește *sistemul deductiv generat de* Σ, intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ.

Sisteme deductive

Remarcă

Cele de mai sus arată că:

- pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ;
- $D : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ este un **operator de închidere**, adică, pentru orice $\Sigma, \Delta \subseteq E$:
  1. $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
  2. $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
  3. $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

În plus:

Exercițiu (temă)

Operatorul de închidere D este *finitar*, adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:

$$D(\Sigma) = \bigcup_{\substack{\Gamma \subseteq \Sigma, \\ |\Gamma| < \infty}} D(\Gamma).$$

Mulțimi consistente

Definiție

Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* ddacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. ddacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă.

Următorul rezultat arată că mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții.

Propoziție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Atunci sunt echivalente:

1. *Σ este inconsistentă;*
2. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$;*
3. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg \varphi$;*
4. *există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$;*
5. *pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg (\varphi \rightarrow \varphi)$.*

Mulțimi consistente

Corolar

Fie $\Sigma \subseteq E$ *și* $\varphi \in E$. *Atunci:*

1. $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \neg\varphi$;
2. $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă ddacă* $\Sigma \vdash \varphi$.

Exemplu (temă pentru seminar)

- $\emptyset$ este consistentă (conform propoziției anterioare și **principiului noncontradicției:** nu există $\varphi \in E$, astfel încât $\vdash \varphi$ și $\vdash \neg\varphi$);
- E este inconsistentă, în mod trivial;
- A (mulțimea axiomelor) este consistentă;
- T (mulțimea teoremelor formale) este consistentă.

Exercițiu (temă)

Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: Σ e consistentă ddacă algebra Boole $E/_{\sim_\Sigma}$ e netrivială.

Mulțimi consistente

Definiție

Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziție

Orice mulțime consistentă este inclusă într–o mulțime consistentă maximală.

Demonstrația acestei propoziții folosește **Lema lui Zorn**.

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Remarcă

Dacă Σ este o mulțime consistentă, atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ este o mulțime consistentă.

Propoziție

Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

1. *Σ este sistem deductiv;*
2. *dacă $\varphi, \psi \in E$, astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$; mai precis: pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$];*
3. *oricare ar fi $\varphi \in E$, avem: $\varphi \in \Sigma$ sau $\neg\varphi \in \Sigma$; mai precis, oricare ar fi $\varphi \in E$, au loc:*
   - *$\varphi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \notin \Sigma$;*
   - *$\varphi \notin \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \in \Sigma$;*
4. *pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ ddacă $\neg\varphi \vee \psi \in \Sigma$ ddacă [$\neg\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$].*

Sisteme deductive versus mulțimi consistente

Definiție

Fie $\Sigma \subseteq E$. Spunem că Σ *admite un model* ddacă există o interpretare h cu $h \vDash \Sigma$. O astfel de interpretare se numește *model pentru* Σ.

Propoziție

1. *Orice mulțime consistentă admite un model.*
2. *Orice mulțime care admite un model este consistentă* (**temă**).

Corolar

Mulțimile consistente coincid cu mulțimile care admit modele.

Exemplu

T (și, așadar, orice submulțime a lui T) admite ca model orice interpretare.

Notă

A se vedea, în cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia cursului, cum se obține **Teorema de completitudine tare** din **Teorema de completitudine**, folosind faptul că orice mulțime consistentă admite un model. De asemenea, a se vedea, în această carte, demonstrațiile pentru toate rezultatele de mai sus.

Rezoluția în calculul propozițional clasic

Pentru această secțiune a cursului, se poate consulta cartea următoare:

- G. Metakides, A. Nerode, *Principles of Logic and Logic Programming*
- traducere de A. Florea, B. Boldur: *Principii de Logică și Programare Logică*, Editura Tehnică, București, 1998.

Opțional, se poate studia, din cartea aceasta, rezoluția pentru calculul cu predicate, care stă la baza implementării limbajului Prolog.

FNC și FND

Definiție

- Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:
$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală conjunctivă* (sau *este o formă normală conjunctivă*) (*FNC*) ddacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.
- Un enunț $\varphi(\in E)$ *este în formă normală disjunctivă* (sau *este o formă normală disjunctivă*) (*FND*) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observație

Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Existența FNC și FND pentru orice enunț

Amintesc definiția relației de echivalență $\sim = \sim_\emptyset$ pe E, relație care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Folosind definiția lui $\sim$, **Teorema de completitudine**, definiția adevărurilor semantice, compatibilitatea oricărei interpretări cu conectorii logici și o proprietate valabilă în orice algebră Boole, obținem:

Remarcă (două enunțuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeași valoare în orice interpretare)

Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele echivalențe:
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi) = 1) \Leftrightarrow (\forall\, h : V \rightarrow L_2)\,(\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi))$.

Propoziție

Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Punerea unui enunț în FNC

Remarcă

Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \gamma$, folosind un tabel semantic pentru φ, sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- **înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:**

$$\alpha \rightarrow \beta \sim \neg\, \alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg\, \alpha \vee \beta) \wedge (\neg\, \beta \vee \alpha)$$

- **idempotența lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- **comutativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

- **asociativitatea lui $\vee$ și $\wedge$:**

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

Remarcă (continuare)

- **principiul dublei negații:**

$$\neg\neg\alpha \sim \alpha$$

- **legile lui de Morgan:**

$$\neg(\alpha \vee \beta) \sim \neg\alpha \wedge \neg\beta \text{ și } \neg(\alpha \wedge \beta) \sim \neg\alpha \vee \neg\beta$$

- **absorbția:**

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$

- **legile de distributivitate:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

- **proprietățile:**

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg\beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

Referitor la tabele semantice

Observație (echivalența semantică ($\sim$) versus egalitatea de enunțuri)

Fie $\varphi \in E$. Atunci $\varphi \sim \neg\neg\varphi$, dar $\varphi \neq \neg\neg\varphi$. De exemplu, enunțurile *"Plouă."* și *"Nu e adevărat că nu plouă."* sunt echivalente semantic (adică au același sens, același înțeles), dar nu coincid (sunt fraze diferite, nici nu sunt compuse din același număr de cuvinte).

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga E:

Notație

Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

1. $V(p) = \{p\}$
2. $V(\neg\varphi) = V(\varphi)$
3. $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într–un tabel semantic pentru un enunț φ, ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ, adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ.

Definiție

Fie $M \subseteq E$ și $\varphi \in E$.

- Un *model pentru* M este o interpretare care satisface pe M (i. e. o $h : V \rightarrow L_2$ cu $h \vDash M$).
- M se zice *satisfiabilă* ddacă admite un model (i. e. ddacă există $h : V \rightarrow L_2$ cu $h \vDash M$).
- φ se zice *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă (i. e. ddacă există $h : V \rightarrow L_2$ cu $h \vDash \varphi$).

Să ne amintim următoarea:

Propoziție

O mulțime de enunțuri este satisfiabilă ddacă este consistentă.

Remarcă

Este imediat, din caracterizarea pentru $\sim$ de mai sus, că, dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabilă ddacă ψ e satisfiabilă.

Formă clauzală

Definiție

Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M.

Corolar

Orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într–o formă clauzală.

Lemă

O mulțime de enunțuri e satisfiabilă ddacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Deducție semantică versus satisfiabilitate

Propoziție

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi \in E$ *și* $\Gamma \subseteq E$.

(a) Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$
2. $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(b) În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\vDash \psi$
2. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil*

(c) Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \psi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ *nu e satisfiabilă*
3. $\neg\psi$ *nu e satisfiabil, sau există* $k \in \mathbb{N}^*$ *și* $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ *astfel încât* $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\psi$ *nu e satisfiabil.*

Demonstrație: Folosim definiția deducției semantice și a adevărurilor semantice, proprietatea interpretărilor de a transforma conectorii logici în operații booleene în $\mathcal{L}_2$, precum și faptul că $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 \neq 1$.

(a) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = 1 \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1) = \ldots = \tilde{h}(\varphi_n) = \tilde{h}(\neg\,\psi) = 1$ ddacă $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\,\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\,\psi) = 1$ ddacă $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\,\psi$ nu e satisfiabil.

(b) $\vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $\tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $\tilde{h}(\neg\,\psi) = 1$ ddacă $\neg\,\psi$ nu e satisfiabil.

(c) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă, pentru orice $h : V \to \mathcal{L}_2$, $h \vDash \Gamma \Rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$ ddacă nu există $h : V \to \mathcal{L}_2$ cu $h \vDash \Gamma \cup \{\neg\,\psi\}$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\,\psi\}$ nu e satisfiabilă ddacă $\neg\,\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\{\psi_1, \ldots, \psi_k, \neg\,\psi\}$ nu e satisfiabilă, conform lemei anterioare, ddacă $\neg\,\psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \neg\,\psi$ nu e satisfiabil, conform punctului (a).

Problemă

Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat corect și complet pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Clauze și mulțimi de clauze

Definiție

- O *clauză* este o mulțime finită de literali ($\{L_1, \ldots, L_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$).
- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literali, clauza fără elemente) se notează cu $\square$ (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, $\emptyset$, în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* ddacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.
- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \ldots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă ($\square$) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** $\square$ se identifică cu $\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \to L_2$, $\tilde{h}(\bigvee\limits_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee\limits_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \ldots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și $C_1, \ldots, C_k$ clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \ldots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componența ei sunt satisfăcute de o aceeași interpretare (au un același model, au un model comun).

Satisfiabilitate pentru (mulțimi de) clauze

Remarcă

Sunt imediate următoarele proprietăți:

- o mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;
- $\emptyset$ (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

Propoziție

Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

1. *dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă C e nesatisfiabilă și $D \subseteq C$, atunci D e nesatisfiabilă;*
2. *$C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;*
3. *dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabile;*
4. *dacă S e nesatisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;*
5. *dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabile;*
6. *dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar mulțimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (**regula rezoluției**):*

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}$$

Demonstrații prin rezoluție

Notă

Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Notă

Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Remarcă

- Dacă într–o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare $\square$, atunci M nu e satisfiabilă.
- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare $\square$ **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.

- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**.

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat *DP*)

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;

$S_1 := S$; $i := 1$;

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i)$;
$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg\, v_i \in C\}$;
$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\}$;
$T_i := T_i^0 \cup T_i^1$;
$U_i := \emptyset$;

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^0 \neq \emptyset$,
  atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg\, v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\}$;

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i$;
$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists\, p \in V)\,(p, \neg\, p \in C)\}$
(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,
  atunci OUTPUT: S *e satisfiabilă*;
  altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,
    atunci OUTPUT: S *nu e satisfiabilă*;
    altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Teorema Davis–Putnam

Propoziție

Cu notațiile din algoritmul DP, au loc:

1. *pentru fiecare i, $V(S_{i+1}) \subsetneq V(S_i)$, așadar algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ execuții ale pașilor $1-4$, cu $S_{i+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{i+1}$;*
2. *pentru fiecare i, S_i e satisfiabilă ddacă S_{i+1} e satisfiabilă, așadar OUTPUT–ul algoritmului DP este corect.*

Corolar (Teorema Davis–Putnam)

Algoritmul DP este corect și complet.

Teoremă

Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. *S nu e satisfiabilă;*
2. *există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ din S.*

Corectitudinea regulii rezoluției

Notație

Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui $\square$ dintr–o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.

Corolar

Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $\Gamma \vDash \varphi$;
2. $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarcă

În concluzie, regula rezoluției este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic.