MATERIAL SUPLIMENTAR PENTRU LMC (S VIII)

Teor. Knaster – Tarski:

Fie $(L, \leq)$ un poset şi $f : L \to L$ o funcţie izotonă, a.î. $\exists$ în $(L, \leq)$ $\inf\{x \in L \mid f(x) \leq x\} \stackrel{not.}{=} e \in L$.

Atunci:

(1) $f(e) = e$ (i.e., e este punct fix al lui f) şi $e = \min\{x \in L \mid f(x) \leq x\}$;

(2) $(\forall b \in L)\,[f(b) = b \Rightarrow e \leq b]$ (i.e., e este cel mai mic punct fix al lui f).

Şi dual, iar $\leq \to \geq := \leq^{-1}$, $\inf \to \sup$, $\min \to \max$.

Dem.:

Not. $A := \{x \in L \mid f(x) \leq x\} \subseteq L$.

Cf. ipotezei, $\exists \inf(A) = e \in L$ în posetul $(L, \leq)$.

Pp. prin absurd că $A = \emptyset$.

Atunci $\Rightarrow \exists\, e = \inf(\emptyset) \in L$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \max(L)$,
$f(a) \in L$, $\Rightarrow f(a) \leq a$, $\Leftrightarrow a \in A \rightarrow$
$\rightarrow$ Abs cu $A = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow A \neq \emptyset$, $\Leftrightarrow \exists\, x \in A$.

(1) Fie $x \in A$ arbitrar, fixat,
$e = \inf(A)$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow e \leq x$,
$f \rightarrow$ monotonă, $\Rightarrow f(e) \leq f(x)$,
$x \in A$, $\Leftrightarrow f(x) \leq x$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(e) \leq x$, $\Rightarrow f(e)$ este minorant pt. A,
$e = \inf(A)$, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{f(e) \leq e}$, $\Rightarrow e \in A$,
$e = \inf(A)$ $\Rightarrow e = \min(A)$,
(f $\rightarrow$ monotonă)
$f(f(e)) \leq f(e)$, $\Leftrightarrow f(e) \in A$,
$e = \inf(A)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{e \leq f(e)}$ $\Rightarrow f(e) = e$,

(2) $(\forall\, b \in L)(f(b) = b \Rightarrow f(b) \leq b \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b \in A$,
$e = \inf(A)$, $\Rightarrow e \leq b$,