Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a XI-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Unele dintre enunţurile de mai jos sunt extinse faţă de versiunile respectivelor exerciţii care au apărut la acest examen.

1 Preliminarii

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Amintim denumirile alternative:

- *algebră* $\equiv$ *structură algebrică;*
- *relaţie de ordine* $\equiv$ *relaţie de ordine parţială*;
- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată*;
- *relaţie de ordine totală* $\equiv$ *relaţie de ordine liniară*;
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată*;
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană;*
- *morfism boolean* $\equiv$ *morfism de algebre Boole;*

noţiunile generice:

- un *morfism de structuri algebrice* este o funcţie între mulţimile suport a două structuri algebrice de acelaşi tip care comută cu operaţiile acelor structuri algebrice;

- un *izomorfism de structuri algebrice* este un morfism inversabil între două algebre de acelaşi tip, i. e. un morfism care este o funcţie inversabilă (deci bijectivă) şi a cărei inversă este tot un morfism între acele algebre;

- o *subalgebră* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o submulţime S a mulţimii suport a lui $\mathcal{A}$ închisă la operaţiile algebrei $\mathcal{A}$; S devine astfel algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$ cu operaţiile induse pe S de operaţiile lui $\mathcal{A}$, i. e. restricţiile operaţiilor algebrei $\mathcal{A}$ la mulţimea S;

- o *congruenţă* a unei algebre $\mathcal{A}$ este o relaţie de echivalenţă (a se vedea mai jos) pe mulţimea suport a lui $\mathcal{A}$ compatibilă cu operaţiile algebrei $\mathcal{A}$, ceea ce permite ca mulţimea factor (a se vedea mai jos) a mulţimii subiacente lui $\mathcal{A}$ prin acea relaţie de echivalenţă să fie organizată în mod canonic ca algebră de acelaşi tip cu $\mathcal{A}$;

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- notăm cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale;

- pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a,b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$;

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;

- vom spune că o structură algebrică este *finită* ddacă mulţimea ei suport este finită;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A;

- pentru orice mulţimi A şi B, faptul că A este în bijecţie cu B se transcrie prin: $|A| = |B|$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;

- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează sub forma $a \,\rho\, b$ şi se citeşte *a este în relaţia ρ cu b;*

- dacă ρ este o relaţie binară pe o mulţime finită şi nevidă $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu n număr natural nenul şi elementele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ două câte două distincte, se defineşte *matricea caracteristică a lui ρ* ca fiind matricea $(a_{i,j})_{i,j \in \overline{1,n}}$ cu $a_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin \rho, \\ 1, & \text{dacă } x_i \,\rho\, x_j, \end{cases}$ oricare ar fi $i, j \in \overline{1,n}$;

- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;

- pentru orice mulţime A, se notează cu id_A *funcţia identică a lui A,* i. e. funcţia $id_A : A \to A$ definită prin: $id_A(a) = a$ pentru orice $a \in A$; ca relaţie binară pe A, id_A coincide cu Δ_A;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x\,\rho\,x$;
  (ii) *ireflexivă* ddacă nu există $x \in A$ cu proprietatea că $x\,\rho\,x$;
  (iii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$, atunci $y\,\rho\,x$;
  (iv) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,x$, atunci $x = y$;
  (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x\,\rho\,y$ şi $y\,\rho\,z$, atunci $x\,\rho\,z$;

- în mod evident, o relaţie binară ρ pe o mulţime A este:
  (i) reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  (ii) ireflexivă ddacă $\Delta_A \cap \rho = \emptyset$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x\,\rho\,y$ sau $y\,\rho\,x$;

- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui A* este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $Part(A)$;

- dacă $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe o mulţime A, atunci, oricare ar fi $x \in A$, se defineşte *clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$* ca fiind mulţimea elementelor lui A care sunt în relaţia $\sim$ cu x; pentru orice $x \in A$, să notăm cu $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$, i. e.: $\hat{x} = \{y \in A \mid y \sim x\} = \{y \in A \mid x \sim y\}$ ($\sim$ este relaţie de echivalenţă, în particular este simetrică); se notează cu $A/_\sim$ *mulţimea factor* (sau *cât*) *a lui A prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$: $A/_\sim = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ ($A/_\sim$ se obţine prin "împărţirea" lui A în clasele de echivalenţă ale lui $\sim$, care formează o partiţie a lui A – a se vedea mai jos); notăm cu $Echiv(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A;

- pentru orice mulţime nevidă A, $Echiv(A)$ este în bijecţie cu $Part(A)$, întrucât funcţia $\varphi : Echiv(A) \to Part(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/_\sim$ pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, este o bijecţie (oricare ar fi relaţia de echivalenţă $\sim$ pe A, mulţimea factor a lui A prin $\sim$ este o partiţie a lui A); inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$, adică: $x \sim y$ ddacă x şi y se află într–o aceeaşi mulţime din familia $(A_i)_{i \in I}$;

- un *poset* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine; un *lanţ* este o mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine totală;

- o *funcţie izotonă* între două poseturi este o funcţie între acele poseturi care păstrează ordinea; un *izomorfism de poseturi* este o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă între acele poseturi;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. între oricare două lanţuri cu n elemente există un izomorfism de poseturi;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- *duala unei latici* $(L, \vee, \wedge)$ este laticea $(L, \wedge, \vee)$;

- dacă $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ şi $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ sunt două latici, atunci o funcţie $f : L \to M$ este un *morfism de latici* între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ ddacă, pentru orice $x, y \in L$, au loc: $\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ şi} \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \end{cases}$

- izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, au loc următoarele:

  (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$;

  (ii) pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$;

  (iii) **legile lui de Morgan:** pentru orice $x, y \in B$, $\begin{cases} \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} \text{ şi} \\ \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}; \end{cases}$

- dacă $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ şi $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ sunt două algebre Boole, atunci o funcţie $f : A \to B$ este un *morfism de algebre Boole* între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ ddacă, pentru orice $x, y \in A$, au loc:
$$\begin{cases} f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ f(\overline{x}) = \overline{f(x)}, \\ f(0) = 0 \text{ şi } f(1) = 1; \end{cases}$$

- izomorfismele de algebre Boole coincid cu morfismele bijective de algebre Boole;

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$; în particular, orice algebră Boole finită are cardinalul egal cu o putere naturală a lui 2;

- se numeşte *congruenţă a unei algebre Boole* $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B care, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, satisface proprietăţile:

  (i) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea lui** $\sim$ **cu** $\vee$);

  (ii) dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea lui** $\sim$ **cu** $\wedge$);

  (iii) dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea lui** $\sim$ **cu** $\bar{\ }$);

- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;

- dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, iar $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci mulţimea factor a lui B prin $\sim$ se organizează ca algebră Boole astfel: dacă, oricare ar fi $a \in B$, notăm cu $\hat{a}$ clasa lui a în raport cu $\sim$, atunci, pentru orice $x, y \in B$, se definesc:

  (i) $\hat{x} \vee \hat{y} = \widehat{x \vee y}$,

  (ii) $\hat{x} \wedge \hat{y} = \widehat{x \wedge y}$,

  (iii) $\overline{\hat{x}} = \hat{\overline{x}}$,

  (iv) $0 = \hat{0}$ şi $1 = \hat{1}$;

  faptul că $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$ arată că operaţiile de mai sus sunt bine definite, i. e. nu depind de reprezentanţii claselor; $(B/_{\sim}, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, numită *algebra Boole factor* (sau *cât*) *a lui* $\mathcal{B}$ *prin* $\sim$;

- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;

- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;

- regula de deducţie **modus ponens** (notată MP) pentru logica propoziţională clasică este: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\dfrac{\vdash \varphi, \ \vdash \varphi \rightarrow \psi}{\vdash \psi}$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Fie A o mulţime având $|A| = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi ρ o relaţie binară pe A având $|\rho| = k \in \mathbb{N}$, k impar, $k < n$. Să se demonstreze că:*

(i) ρ nu este reflexivă;

(ii) dacă ρ este simetrică, atunci $|\rho \cap \Delta_A|$ este impar;

(iii) dacă ρ este ireflexivă, atunci ρ nu este simetrică.

Rezolvare: (i) Dacă ρ ar fi reflexivă, atunci ar avea loc $\Delta_A \subseteq \rho$, prin urmare $n = |A| = |\Delta_A| \leq |\rho| = k$, deci s–ar obţine o contradicţie cu ipoteza $k < n$. Rezultă că ρ nu este reflexivă.
(ii) $|A| = n = |\overline{1,n}|$, aşadar A este în bijecţie cu mulţimea $\overline{1,n}$, i. e. există o bijecţie $\varphi : \overline{1,n} \to A$. Pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$, notăm $x_i = \varphi(i) \in A$. Aşadar, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (conform surjectivităţii lui φ), cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ două câte două distincte (conform injectivităţii lui φ).

Considerăm următoarele mulţimi:

$$\begin{array}{ll} S = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1,n}, i < j\} & \text{şi} \\ D = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1,n}, i > j\}. & \end{array}$$

Desigur, $\Delta_A = \{(x_i, x_i) \mid i \in \overline{1,n}\}$.

Avem: $A^2 = \Delta_A \cup S \cup D$ şi, datorită faptului că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt două câte două distincte, rezultă că mulţimile Δ_A, S şi D sunt două câte două disjuncte. Aşadar, $\{\Delta_A, S, D\}$ este o partiţie a lui A^2.

Notăm:

$$\begin{array}{l} M = \rho \cap \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A, (a, a) \in \rho\} = \{(x_i, x_i) \mid i \in \overline{1,n}, (x_i, x_i) \in \rho\}, \\ N = \rho \cap S = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1,n}, i < j, (x_i, x_j) \in \rho\}, \\ P = \rho \cap D = \{(x_i, x_j) \mid i, j \in \overline{1,n}, i > j, (x_i, x_j) \in \rho\}. \end{array}$$

Ca observaţie, în matricea caracteristică a lui ρ, mulţimea M este reprezentată prin elementele nenule de pe diagonala principală, N este reprezentată de elementele nenule de sub diagonala principală, iar P este reprezentată prin elementele nenule de deasupra diagonalei principale.

Acum să considerăm ρ simetrică şi să notăm cu $f : N \to P$ funcţia definită astfel: oricare ar fi $a, b \in A$ astfel încât $(a, b) \in N$, $f(a, b) = (b, a)$. De asemenea, să definim $g : P \to N$ astfel: oricare ar fi $a, b \in A$ astfel încât $(a, b) \in P$, $g(a, b) = (b, a)$. Am eliminat convenţional câte o pereche de paranteze în scrierile: $f(a, b)$, $g(a, b)$; vom proceda la fel şi mai jos.

f este bine definită, în sensul că valorile ei se află, întradevăr, în P, deoarece, datorită simetriei lui ρ şi în conformitate cu definiţiile mulţimilor N şi P, pentru orice $a, b \in A$ cu $(a, b) \in N$, avem: $(a, b) \in \rho$ şi $a = x_i, b = x_j$, cu $i, j \in \overline{1,n}$ astfel încât $i < j$, aşadar $(b, a) \in \rho$ şi $b = x_j, a = x_i$, cu $j, i \in \overline{1,n}$ astfel încât $j > i$, deci $f(a, b) = (b, a) \in P$. Analog rezultă că g este bine definită.

Pentru orice $a, b \in A$ cu $(a, b) \in N$, avem: $g(f(a, b)) = g(b, a) = (a, b)$, aşadar $g \circ f = id_N$. Analog, $f \circ g = id_P$. Rezultă că $g = f^{-1}$, deci f este inversabilă, aşadar f este o bijecţie între N şi P, prin urmare $|N| = |P|$.

Am observat mai sus că $\{\Delta_A, S, D\}$ este o partiţie a lui A^2. Rezultă că avem:

$$\rho = \rho \cap A^2 = \rho \cap (\Delta_A \cup S \cup D) = (\rho \cap \Delta_A) \cup (\rho \cap S) \cup (\rho \cap D) = M \cup N \cup P, \text{ iar}$$

$$M \cap N = \rho \cap \Delta_A \cap \rho \cap S = \rho \cap \Delta_A \cap S = \rho \cap \emptyset = \emptyset$$

şi, analog, $M \cap P = \emptyset$ şi $N \cap P = \emptyset$. Aşadar, $\{M, N, P\}$ este o partiţie a lui ρ, prin urmare:

$$k = |\rho| = |M| + |N| + |P| = |\rho \cap \Delta_A| + |N| + |N| = |\rho \cap \Delta_A| + 2 \cdot |N|,$$

aşadar $|\rho \cap \Delta_A| = k - 2 \cdot |N|$, iar acesta este un număr impar, deoarece k este impar şi $2 \cdot |N|$ este par.
(iii) Considerăm ρ ireflexivă, i. e. $\rho \cap \Delta_A = \emptyset$, adică $|\rho \cap \Delta_A| = 0$. Dacă ρ ar fi simetrică, atunci, conform (ii), $|\rho \cap \Delta_A|$ ar fi impar. Dar 0 nu este impar, deci am obţine o contradicţie. Aşadar, ρ nu este simetrică.

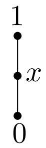
Exerciţiul 2.2. *Fie L o latice având $|L| = 3$. Să se demonstreze că:*

(i) L este o latice mărginită;

(ii) laticea mărginită L nu este complementată;

(iii) L are o singură sublatice mărginită care este algebră Boole cu operaţiile induse de cele de pe L, la care se adaugă operaţia de complementare.

Rezolvare: (i) L este o latice finită, prin urmare L este o latice mărginită.
(ii) L este o latice mărginită cu exact 3 elemente (distincte), aşadar $L = \{0, x, 1\}$, cu $0 \neq 1$ şi $x \notin \{0, 1\}$, deci $0 < x < 1$. Prin urmare, L este (izomorfă cu) lanţul cu 3 elemente, $\mathcal{L}_3$:



Dacă x ar avea un complement y în lanţul L, atunci, cu notaţiile uzuale pentru operaţiile unei latici, $1 = x \vee y = \max\{x, y\} \in \{x, y\}$, iar $x \neq 1$, aşadar $1 = \max\{x, y\} = y$, prin urmare $0 = x \wedge y = x \wedge 1 = x$. Dar $x \neq 0$, deci am obţinut o contradicţie, prin urmare L nu este complementată.
(iii) L are doar două sublatici mărginite, anume L şi $\{0, 1\}$. Conform punctului (ii), L nu este complementată, aşadar L nu este algebră Boole. Acest lucru putea fi argumentat şi prin faptul că $|L| = 3$, iar cardinalele algebrelor Boole finite sunt puteri naturale ale lui 2. În schimb, $\{0, 1\}$ este (izomorfă cu) lanţul cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, aşadar $\{0, 1\}$ este (izomorfă cu) algebra Boole standard.

Exerciţiul 2.3. *Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole, $\mathcal{L}_2 = (\{0, 1\}, \vee, \wedge, \bar{\ }, 0, 1)$ algebra Boole standard, iar $f : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2$ un morfism boolean. Notăm: $Z = \{x \in B \mid f(x) = 0\}$ şi $U = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$.*
Să se demonstreze că:

(i) $|B| \geq 2$;

(ii) mulţimile Z şi U sunt în bijecţie, şi să se pună în evidenţă o bijecţie între ele;

(iii) Z şi U sunt sublatici ale lui $\mathcal{B}$, astfel încât laticea Z este izomorfă cu duala laticii U, şi niciuna dintre mulţimile Z şi U nu este sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$;

(iv) mulţimile Z şi U formează o partiţie a mulţimii B, iar echivalenţa $\sim$ corespunzătoare acestei partiţii este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$;

(v) algebra Boole factor $B/\sim$ prin congruenţa $\sim$ de la punctul (iv) este izomorfă cu $\mathcal{L}_2$.

Rezolvare: (i) $0, 1 \in B$, aşadar $B \neq \emptyset$, adică $|B| \neq 0$. Presupunem prin absurd că $|B| = 1$, ceea ce este echivalent cu $0 = 1$ în $\mathcal{B}$. Atunci, în $\mathcal{L}_2$, $0 = f(0) = f(1) = 1$. Dar $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$, deci am obţinut o contradicţie. Aşadar, $|B| \geq 2$.
(ii) Fie $g : Z \to U$, definită prin: pentru fiecare $x \in Z$, $g(x) = \overline{x}$, iar $h : U \to Z$, definită prin: pentru fiecare $x \in U$, $h(x) = \overline{x}$. g este bine definită, în sensul că valorile ei se află, într–adevăr, în U, pentru că: dacă $x \in Z$, atunci $f(x) = 0$, aşadar $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{0} = 1$, deci $\overline{x} \in U$. Analog rezultă că h este bine definită.

Pentru orice $x \in Z$, $h(g(x)) = \overline{\overline{x}} = x$, aşadar $h \circ g = id_Z$. Analog, $g \circ h = id_U$. Aşadar, $h = g^{-1}$, prin urmare g este inversabilă, deci bijectivă.
(iii) Pentru orice $x, y \in Z$, avem $f(x) = f(y) = 0$, aşadar $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0 \vee 0 = 0$ şi $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = 0 \wedge 0 = 0$, deci $x \vee y, x \wedge y \in Z$, prin urmare Z este o sublatice a lui $\mathcal{B}$. $f(1) = 1 \neq 0$ în $\mathcal{L}_2$, deci $1 \notin Z$, aşadar Z nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$. În mod similar se arată că U este o sublatice a lui $\mathcal{B}$, dar nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$.

Bijecţia $g : Z \to U$ de la punctul (ii) este un izomorfism de latici între sublaticea $(Z, \vee, \wedge)$ a lui $\mathcal{B}$ şi duala $(U, \wedge, \vee)$ a sublaticii $(U, \vee, \wedge)$ a lui $\mathcal{B}$, pentru că, oricare ar fi $x, y \in Z$, $g(x \vee y) = \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y} = g(x) \wedge g(y)$ şi $g(x \wedge y) = \overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y} = g(x) \vee g(y)$.
(iv) $Z \cup U = \{x \in B \mid f(x) = 0\} \cup \{x \in B \mid f(x) = 1\} = \{x \in B \mid f(x) \in \{0, 1\}\} = B$. Dacă ar exista $x \in Z \cap U$, atunci am avea în $\mathcal{L}_2$: $0 = f(x) = 1$, deci am obţine o contradicţie cu $0 \neq 1$ în $\mathcal{L}_2$. Aşadar, $Z \cap U = \emptyset$. Prin urmare, $\{Z, U\}$ este o partiţie a lui B.

Fie $\sim$ echivalenţa corespunzătoare acestei partiţii, adică echivalenţa definită astfel: pentru orice $a, b \in B$, $a \sim b$ ddacă $a, b \in Z$ sau $a, b \in U$ ddacă $f(a) = f(b) = 0$ sau $f(a) = f(b) = 1$ ddacă $f(a) = f(b)$, întrucât mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_2$ este $\{0, 1\}$.

Rezultă că, pentru orice $x, y, x', y' \in B$ astfel încât $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, avem $f(x) = f(x')$ şi $f(y) = f(y')$, aşadar $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(x') \vee f(y') = f(x' \vee y')$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x') \wedge f(y') = f(x' \wedge y')$ şi $f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{f(x')} = f(\overline{x'})$, prin urmare $x \vee y \sim x' \vee y'$, $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ şi $\overline{x} \sim \overline{x'}$. Aşadar, $\sim$ este o congruenţă a algebrei Boole $\mathcal{B}$.
(v) Notăm, pentru fiecare $x \in B$, cu $\hat{x} = \{y \in B \mid x \sim y\}$ clasa de echivalenţă a lui x în raport cu $\sim$. Definim $\varphi : B \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in B$, $\varphi(\hat{x}) = f(x)$.

Să observăm că, pentru orice $x, y \in B$, au loc echivalenţele: $\hat{x} = \hat{y}$ ddacă $x \sim y$ ddacă $f(x) = f(y)$ ddacă $\varphi(\hat{x}) = \varphi(\hat{y})$. În acest şir de echivalenţe, implicaţiile directe (i. e. "de la stânga la dreapta") arată că φ este bine definită (în sensul că definiţia ei nu depinde de reprezentanţii claselor), iar implicaţiile contrare (i. e. "de la dreapta la stânga") arată că φ este injectivă.

$\varphi(\hat{0}) = f(0) = 0$ şi $\varphi(\hat{1}) = f(1) = 1$, aşadar imaginea $\varphi(B)$ a lui φ satisface: $\{0, 1\} = \varphi(\{\hat{0}, \hat{1}\}) \subseteq \varphi(B) \subseteq \{0, 1\}$, prin urmare $\varphi(B) = \{0, 1\}$, aşadar φ este surjectivă.

Am obţinut că φ este bijectivă.

Definiţiile canonice ale operaţiilor de algebră Boole pe $B/\sim$ şi faptul că f este un morfism boolean arată că, pentru orice $x, y \in B$, $\varphi(\hat{x} \vee \hat{y}) = \varphi(\widehat{x \vee y}) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \varphi(\hat{x}) \vee \varphi(\hat{y})$, $\varphi(\hat{x} \wedge \hat{y}) = \varphi(\widehat{x \wedge y}) = f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = \varphi(\hat{x}) \wedge \varphi(\hat{y})$ şi $\varphi(\overline{\hat{x}}) = \varphi(\hat{\overline{x}}) = f(\overline{x}) = \overline{f(x)} = \overline{\varphi(\hat{x})}$. De asemenea, $\varphi(\hat{0}) = f(0) = 0$ şi $\varphi(\hat{1}) = f(1) = 1$. Prin urmare, $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{L}_2$ este un morfism boolean.

Aşadar, φ este un izomorfism boolean între $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{L}_2$.

Exerciţiul 2.4. *Fie $\varphi, \psi, \chi \in E$, astfel încât:*

$$\vdash \varphi \to \psi, \quad \vdash \psi \to \chi, \quad \vdash \chi \to \varphi.$$

Să se demonstreze că au loc echivalenţele:

$$\vdash \varphi \;\; ddac\breve{a} \;\; \vdash \psi \;\; ddac\breve{a} \;\; \vdash \chi.$$

Rezolvare: Demonstrăm implicaţia: $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi$. Dacă $\vdash \varphi$, atunci, cum $\vdash \varphi \to \psi$ prin ipoteză, aplicând MP obţinem că $\vdash \psi$.

Implicaţiile $\vdash \psi \Rightarrow \vdash \chi$ şi $\vdash \chi \Rightarrow \vdash \varphi$ se demonstrează analog.

Rezultă că au loc echivalenţele:

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \psi \Leftrightarrow \vdash \chi.$$

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).