Algoritmi aleatorii/ probabiliști

Cadru

- Probleme pentru care nu se cunosc algoritmi polinomiali
- Căutarea limitată (BT, BB) în spaţiul soluțiilor candidat – lentă

  ⇒ relaxăm restricțiile impuse soluțiilor

Relaxarea restricțiilor impuse soluțiilor

- Probleme de optim
  - se preferă o soluție suboptimală acceptabilă
  - marja de eroare poate fi controlată probabilistic

Relaxarea restricțiilor impuse soluțiilor

- Probleme de optim
  - se preferă o soluție suboptimală acceptabilă
  - marja de eroare poate fi controlată probabilistic

- Probleme cu soluție unică
  - se preferă o soluție care nu este exactă
  - se apropie cu o probabilitate mare de soluția exacta

Relaxarea restricțiilor impuse soluțiilor

- Algoritmi
  - genetici
  - probabiliști de tip Monte Carlo
  - probabiliști de tip Las Vegas
  - numerici
  - euristici - greedy

Algoritmi Genetici

Algoritmi Genetici

- Sunt utilizaţi în probleme de optim, pentru care
  - **spaţiul de căutare a soluţiilor posibile este mare**
  - **nu se cunosc algoritmi exacţi mai rapizi**
- Furnizează o **soluţie care nu este neapărat optimă.**
- Căutarea în spaţiul soluțiilor candidat – euristică, bazată pe principii ale evoluţiei în genetică

Algoritmi Genetici

- Denumirea lor se datorează preluării unor mecanisme din biologie: moştenirea genetică şi evoluţia naturală pentru populaţii de indivizi
- **Aplicaţii**
  - Robotică, bioinformatică, inginerie
    - Probleme de trafic, rutare, proiectare
  - Criptare, code-breaking
  - Teoria jocurilor
  - Clustering
  - etc

Algoritmi Genetici

- **Exemplu** – pentru ilustrarea conceptelor

Maximul unei funcţii pozitive

Fie $f:D \rightarrow R$. Să se calculeze

$$\max\{ f(x) \mid x \in D \}, \text{ unde } D = [a, b].$$

- Presupunem $f(x) > 0, \ \forall \ x \in D$.

Algoritmi Genetici – Noţiuni

- **Cromozom** = mulţime ordonată de elemente (**gene**) ale căror valoare (**alele**) determină caracteristicile unui individ

0	0	0	1	0	1	1	0

- **Populaţie** = mulţime de indivizi care trăiesc într-un mediu la care trebuie să se adapteze

Algoritmi Genetici – Noţiuni

- **Cromozom** = mulţime ordonată de elemente (**gene**) ale căror valoare (**alele**) determină caracteristicile unui individ

0	0	0	1	0	1	1	0

- **Populaţie** = mulţime de indivizi care trăiesc într-un mediu la care trebuie să se adapteze

- **Fitness (adecvare)** = măsură a gradului de adaptare la mediu pentru fiecare individ (funcţie de fitness)

Algoritmi Genetici – Noţiuni

- **Generație** = etapă în evoluția populației
- **Selecție** = proces prin care sunt promovați indivizii cu grad ridicat de adaptare la mediu
- **Operatori genetici ⇒ indivizi din noua generație:**
  - **încrucişare** (combinare, crossover) – moştenesc caracteristicile părinților
  - **mutaţie** – pot dobândi şi caracteristici noi

Structura unui algoritm genetic
(J. Holland, 1970)

Algoritm

- $t = 0$
- considerăm o **populaţie iniţială** P(0) - multiset al lui D

$t = t + 1$

Algoritm

- t = 0
- considerăm o **populaţie iniţială** P(0) - multiset al lui D
- cât timp nu este îndeplinită **condiţia de terminare**

    construim o populaţie nouă P(t+1) din P(t) astfel

    t = t + 1

Algoritm

- t = 0
- considerăm o **populaţie iniţială** P(0) - multiset al lui D
- cât timp nu este îndeplinită **condiţia de terminare**

    construim o populaţie nouă P(t+1) din P(t) astfel

        selecţie ⟶ populaţie intermediară P'(t)

    t = t + 1

Algoritm

- t = 0
- considerăm o **populaţie iniţială** P(0) - multiset al lui D
- cât timp nu este îndeplinită **condiţia de terminare**

    construim o populaţie nouă P(t+1) din P(t) astfel

        selecţie ⟹ populaţie intermediară P'(t)

        aplicăm **operatorul de încrucişare** pentru indivizii din P'(t) ⟹ o nouă populaţie intermediară P''(t)

    t = t + 1

Algoritm

- t = 0
- considerăm o **populaţie iniţială** P(0) - multiset al lui D
- cât timp nu este îndeplinită **condiţia de terminare**

construim o populaţie nouă P(t+1) din P(t) astfel

selecţie ⟶ populaţie intermediară P'(t)

aplicăm **operatorul de încrucişare** pentru indivizii din P'(t) ⟶ o nouă populaţie intermediară P''(t)

aplicăm **operatorul de mutaţie** ⟶ populaţia P(t+1)

t = t + 1

Condiție de oprire

- număr maxim de iterații / durată de execuție
- stabilizarea performanței medii /maxime
- am obținut o soluție *suficient de bună*

Exemplu – maximul unei funcţii pozitive

Date de intrare + parametri de control

- intervalul [a, b]
- precizia p (numărul de zecimale)
- dimensiunea populației n
- numărul de generații
- probabilitatea de încrucișare pc
- probabilitatea de mutație pm

Populația

- **Dimensiune (număr de cromozomi) :**
  - n – fixă, dată
  - constantă pe parcursul algoritmului

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom

Populația

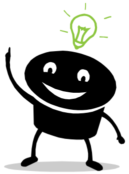
- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă

Cum calculăm lungimea pentru puncte din D = [a,b] ?

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă

Cum calculăm lungimea pentru puncte din D = [a,b] ?



depinde de precizie (număr de zecimale)

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă
  - Pentru D = [a,b] și o precizie p dată (ca număr de zecimale):
    - **discretizarea intervalului** ⇒ subintervale
    - **lungimea cromozomului l**
    - **valoarea codificată din D=[a,b]** – translație liniară

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă
  - Pentru D = [a,b] și o precizie p dată (ca număr de zecimale):
    - **discretizarea intervalului** $\Rightarrow$ $(b - a) * 10^p$ subintervale
    - **lungimea cromozomului l**
    - **valoarea codificată din D=[a,b]** – translație liniară

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă
  - Pentru D = [a,b] și o precizie p dată (ca număr de zecimale):
    - **discretizarea intervalului** $\Rightarrow$ (b – a)* 10^p subintervale
    - **lungimea cromozomului l**

$$2^{l-1} < (b-a)10^p \leq 2^l \quad \Rightarrow l = \left\lceil \log_2((b-a)10^p) \right\rceil$$

    - **valoarea codificată din D=[a,b]** – translație liniară

Populația

- **Codificare** = cum asociem unei configurații din spațiul de căutare un cromozom
  - În general: codificare binară, lungime fixă
  - Pentru D = [a,b] și o precizie p dată (ca număr de zecimale):
    - **discretizarea intervalului** ⇒ (b – a)* 10^p subintervale
    - **lungimea cromozomului l**

$$2^{l-1} < (b-a)10^p \leq 2^l \quad \Rightarrow l = \left\lceil \log_2((b-a)10^p) \right\rceil$$

    - **valoarea codificată din D=[a,b]** – translație liniară

$$X_{(2)} \to X_{(10)} \to \frac{b-a}{2^l - 1} X_{(10)} + a$$

Populația

- **Populaţia iniţială**
  - se generează aleator (cromozomii)

Populația

- **Populaţia iniţială**
  - se generează aleator (cromozomii)

Funcţia de fitness

- se pot folosi distanțe cunoscute (euclidiană, Hamming)
- pentru problema de maxim funcția este chiar f

Selecția

⇒ determinarea unei populații intermediare, ce conține indivizi care vor fi supuși operatorilor genetici

- **Selecție proporțională**
- **Selecție elitistă**
- **Selecție turneu**
- **Selecție bazată pe ordonare**

Selecția

- **Selecție proporțională**
  - Presupunem $P(t)=\{X_1,\ldots,X_n\}$
  - asociem fiecărui individ X_i o probabilitate p_i de a fi selectat, în funcție de performanța acestuia (dată de funcția de fitness f)
  - folosind **metoda ruletei** selectăm n indivizi (!copii), cu distribuția de probabilitate $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Selecția

- **Selecție proporțională**

  - Presupunem $P(t)=\{X_1,\ldots,X_n\}$
  - asociem fiecărui individ X_i o probabilitate p_i de a fi selectat, în funcție de performanța acestuia (dată de funcția de fitness f)

$$p_i = \frac{f(X_i)}{F}$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} f(X_j) = \textit{performanţa totală a populaţiei}$$

  - folosind **metoda ruletei** selectăm n indivizi (!**copii**), cu distribuția de probabilitate (p_1, p_2, …, p_n)

Selecția

- **Selecție proporțională**
  - folosind **metoda ruletei** selectăm n indivizi (!copii), cu distribuția de probabilitate (p_1, p_2, …, p_n)

Selecția

- **Selecție proporțională**
  - folosind **metoda ruletei** selectăm n indivizi (!copii), cu distribuția de probabilitate (p_1, p_2, …, p_n)

Etapa de selecție:

```
P’(t) ← ∅
for i = 1,n
     genereaza j cu probabilitatea (p1,p2,…,pn) folosind
     metoda ruletei:



     adauga la populația selectată P’(t) o copie a lui Xj
```

Selecția

- **Selecție proporțională**
  - folosind **metoda ruletei** selectăm n indivizi (!copii), cu distribuția de probabilitate $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

Etapa de selecție:

```
P'(t) ← ∅
for i = 1,n
     genereaza j cu probabilitatea (p1,p2,…,pn) folosind
     metoda ruletei:
          • genereaza u variabila uniformă pe [0,1)
          • determină indicele j astfel încât u este între
            q_{j-1}= p_1+…+p_{j-1} și q_j= p_1+…+p_j (cu convenția q_0=0)

     adauga la populația selectată P'(t) o copie a lui X_j
```

Selecția

- **Selecție elitistă** = trecerea explicită a celui mai bun individ în generația următoare
- **Selecție turneu** = se aleg aleatoriu k indivizi din populație şi se selectează cel mai performant dintre ei
- **Selecție bazată pe ordonare** = se ordonează indivizii după performanță şi li se asociază câte o probabilitate de selecție în funcție de locul lor după ordonare
- etc

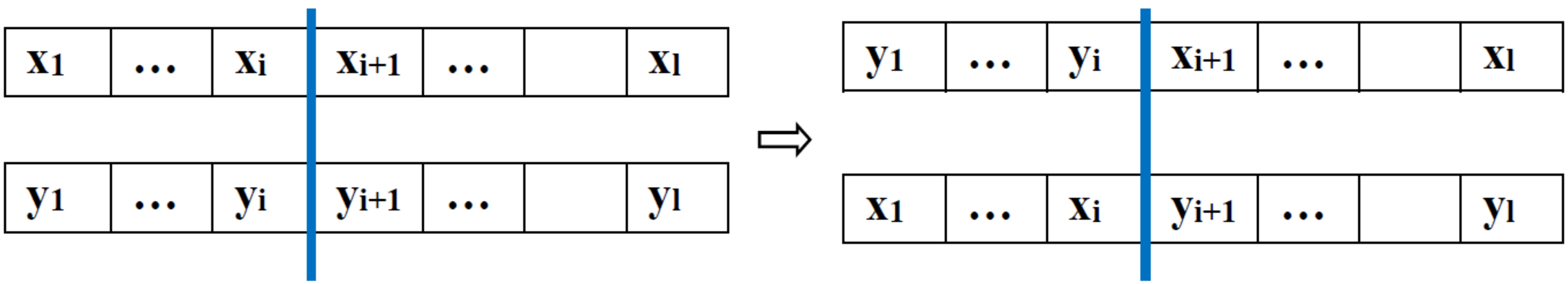
Încrucișarea

- Permite combinarea informațiilor de la părinți
- Doi părinți dau naștere la doi descendenți
  - **cu un punct de tăietură (de rupere)**
  - **cu mai multe puncte de rupere**
  - **uniformă**
  - etc

Încrucișarea

- **Cu un punct de tăietură (de rupere)**

  ➢ **2 părinți** $\Rightarrow$ **2 indivizi noi** care iau locul părinților în populație



i – punct de rupere generat aleator

Încrucișarea

- **Cu un punct de tăietură (de rupere)**

  - Nu toți cromozomii din P'(t) participă la încrucișare.

  - Un cromozom participă la încrucișare cu o probabilitate fixată **pc** (probabilitate de încrucișare – dată de intrare)

Încrucișarea

- **Cu un punct de tăietură (de rupere)**
  - Un cromozom participă la încrucișare cu o probabilitate fixată **pc** (probabilitate de încrucișare – dată de intrare)

<u>Etapa de încrucișare:</u>

```
Notăm P'(t) = {X'_1, ..., X'_n}
for i = 1,n
    genereaza u variabila uniformă pe [0,1]
     daca u<pc atunci marcheaza X'_i (va participa la incrucisare)
```

Notăm $P'(t) = \{X'_1, \ldots, X'_n\}$

Încrucișarea

- **Cu un punct de tăietură (de rupere)**
  - Un cromozom participă la încrucișare cu o probabilitate fixată **pc** (probabilitate de încrucișare – dată de intrare)

Etapa de încrucișare:

Notăm $P'(t) = \{X'_1, ..., X'_n\}$

```
for i = 1,n
    genereaza u variabila uniformă pe [0,1]
    daca u<pc atunci marcheaza X'i (va participa la incrucisare)
```

formeaza perechi disjuncte de cromozomi marcați și
aplică pentru fiecare pereche operatorul de încrucișare;

descendeții rezultați înlocuiesc părinții în populație

Mutația

- schimbarea valorilor unor gene din cromozom
- asigură diversitatea populației
- probabilitatea de mutație pm – dată de intrare

Mutația

Etapa de mutație - Varianta 1 (mutație rară):

Notăm $P''(t) = \{X''_1, \ldots, X''_n\}$ populația obținută **după încrucișare**

```
for i = 1,n
    genereaza u variabila uniformă pe [0,1)
    daca u<pm atunci generează o poziție aleatoare p și
   trece gena p din cromozomul X"i la complement 0 ↔ 1
```

Mutația

<u>**Etapa de mutație**</u> **– Varianta 2:**

Notăm P"(t) = {X"$_1$,…, X"$_n$} populația obținută **după încrucișare**

```
for i = 1,n
    for j = 1,l
          genereaza u variabila uniformă pe [0,1]
          daca u<pm atunci
             trece gena j din cromozomul X"i la complement 0 ↔ 1
```

Alte exemple

- Knapsack problem- Problema rucsacului

- **TSP** (Travelling salesman problem)

Teorema schemei (suplimentar)

- **Schema** = tipar care surprinde similarităţi dintre cromozomi
  - Formal = cuvânt de lungime l peste {0,1,*}

    * = “don’t care symbol”

1*01*00*

Teorema schemei (suplimentar)

- **Ordinul schemei** H
  - o(H) = numărul de poziţii fixe din schemă

    $\Rightarrow$ particularitatea schemei

- **Lungimea schemei** H
  - δ(H) = distanţa de la prima la ultima poziție fixă

    $\Rightarrow$ cât de compactă este informaţia

Teorema schemei (suplimentar)

- **Ordinul schemei** H $o(H)$
- **Lungimea schemei** H $\delta(H)$
- **m(H,t)** = numărul de exemplare ale schemei H în P(t)
- **f(H,t)** = fitness pentru schema H

  = media funcţiei de fitness pentru indivizi din P(t)

Teorema schemei (suplimentar)

- **Teorema schemei**: Algoritmul genetic bazat pe selecţie proporţională, încrucişare cu un punct de tăietură şi mutaţie rară **încurajează înmulţirea schemelor mai bine adaptate decât media**, de **lungime redusă şi de ordin mic**:

$$m(H,t+1) \geq m(H,t)\frac{f(H,t)\cdot n}{F(t)}\left(1-pc\cdot\frac{\delta(H)}{l-1}-pm\cdot o(H)\right)$$

Teorema schemei (suplimentar)

- **Teorema schemei:**

$$m(H,t+1) \geq m(H,t) \cdot \frac{f(H,t) \cdot n}{F(t)} \cdot \left(1 - pc \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} - pm \cdot o(H)\right)$$

- Probabilitatea de distrugere a schemei după încrucişare $\boldsymbol{\frac{\delta(H)}{l-1}}$
- O mutaţie poate distruge o schemă dacă modifică o poziţie fixă

Teorema schemei (suplimentar)

- **Teorema schemei:**

$$m(H,t+1) \geq m(H,t) \cdot \frac{f(H,t) \cdot n}{F(t)} \cdot \left(1 - pc \cdot \frac{\delta(H)}{l-1} - pm \cdot o(H)\right)$$

- **Ipoteza blocurilor constituente**: Un algoritm genetic **caută soluţia suboptimală** prin juxtapunerea schemelor scurte, de ordin mic şi performanţă mare, numite ***building blocks*** (blocuri constituente/constructive)

Bibliografie

Michalewicz, Zbigniew (1999),

Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs,

Springer-Verlag.