

Tema 5

Exercițiul 1

Fie X_1, X_2, \dots un șir de variabile aleatoare independente și repartizate uniform pe intervalul $[0, \theta]$, cu $\theta > 0$. Să se arate că șirul de variabile aleatoare $Y_n = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$ converge în probabilitate la θ .

Exercițiul 2

Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un șir de variabile aleatoare pozitive și independente cu $\mathbb{E}[X_n] = c \in (0, 1)$ pentru orice n . Dacă $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ arătați că $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Exercițiul 3

Să presupunem că dispunem de 100 de becuri a căror durată de viață sunt variabile aleatoare independente și identic repartizate de lege exponențială de medie 5 ore. Dacă becurile sunt aprinse pe rând și o dată ce un bec se arde este înlocuit instantaneu de un altul nou, care este probabilitatea să mai avem un bec intact după 525 de ore ?

Exercițiul 4

O parcare supratrană este construită pentru un nou imobil care are 200 de apartamente. Să presupunem că numărul de mașini pe apartament este 0, 1 și respectiv 2 cu probabilitățile 0.1, 0.6 și respectiv 0.3. Care este numărul minim de locuri de parcare pe care inginerul constructor trebuie să le prevadă pentru a fi sigur în proporție de 95% că sunt locuri suficiente pentru toate mașinile din imobil ?

Exercițiul 5

- a) Fie X o variabilă aleatoare de medie 0 și varianță $\sigma^2 < \infty$. Arătați că pentru orice $a > 0$ are loc inegalitatea

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

- b) Un grup de 200 de persoane, din care jumătate sunt bărbați, este divizat într-o 100 de perechi de câte 2 persoane. Dați o margine superioară pentru probabilitatea ca cel mult 30 dintre acestea să fie perechi mixte.

Exercițiul 6

Fie X o variabilă aleatoare care ia valori în intervalul $[a, b]$. Arătați că $\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.