FMI, Info, Anul II, 2017-2018
Programare logică

Seminar 1
Recapitulare logica propoziţională

Teorie pentru S1.1: Amintim tabelele de adevăr pentru conectorii propoziţionali:

p	$\neg\mathbf{p}$
0	1
1	0

p	q	$\mathbf{p} \to \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Putem să arătăm că o formulă φ este tautologie (validă, universal adevărată) folosind **metoda tabelului de adevăr**. Dacă $v_1, \ldots, v_n$ sunt variabilele propoziţionale care apar în φ, atunci cele 2^n evaluări posibile (i.e, o evaluarea este o funcţie $e : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \{0, 1\}$) $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$f_{e_2}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{2^n}(\varphi)$

Dacă pe coloana lui φ obţinem doar valoarea 1, atunci φ este tautologie.

Teorie pentru S1.2: **Axiomele** calculului propoziţional sunt următoarele:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule. În plus, avem următoarea **regulă de deducţie**:

$$\text{MP } (\textit{modus ponens}) \ \frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

O Γ**-demonstraţie** este o secvenţă de formule φ_1, ..., φ_n astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

- φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$,
- φ_i se obţine din formulele anterioare prin MP.

O formulă φ este Γ-**teoremă** dacă există o Γ-demonstraţie φ_1, ..., φ_n astfel încât $\varphi_n = \varphi$. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este Γ-teoremă.

Teorema 1 (Teorema deducţiei). *$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Teorie pentru S1.3: Amintim următoarele definiţii:

- Un **literal** este o variabilă sau negaţia unei variabile.
- O **formă normală disjunctivă (FND)** este o disjuncţie de conjuncţii de literali
$$(l_1 \wedge \ldots \wedge l_n) \vee \ldots \vee (l'_1 \wedge \ldots \wedge l'_m).$$
- O **formă normală conjunctivă (FNC)** este o conjuncţie de disjuncţii de literali
$$(l_1 \vee \ldots \vee l_n) \wedge \ldots \wedge (l'_1 \vee \ldots \vee l'_m).$$

Pentru orice formulă φ există θ_1 în FND şi θ_2 în FNC echivalente cu φ.

Metoda transformărilor sintactice succesive. Putem aduce o formulă în FND şi/sau în FND folosind următoarele transformări:

- înlocuirea implicaţiilor şi echivalenţelor
$$\begin{array}{lcl} \varphi \to \psi & \sim & \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi & \sim & (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \end{array}$$
- regulile De Morgan
$$\begin{array}{lcl} \neg(\varphi \vee \psi) & \sim & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \sim & \neg\varphi \vee \neg\psi \end{array}$$
- principiului dublei negaţii
$$\neg\neg\psi \quad \sim \quad \psi$$
- distributivitatea
$$\begin{array}{lcl} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) & \sim & (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \\ (\psi \wedge \chi) \vee \varphi & \sim & (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi) \end{array}$$
- absorbţia
$$\begin{array}{lcl} \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) & \sim & \varphi \\ \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) & \sim & \varphi \end{array}$$

Metoda funcţiei booleene asociate unei formule. Fie φ o formulă, v_1, ..., v_n variabilele care apar în φ şi e_1, ..., e_{2^n} evaluările posibile. Tabelul asociat lui φ defineşte funcţia booleană $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	$\ldots$	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$F_\varphi(x_1,\ldots,x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	$\ldots$	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dacă luăm disjuncţia cazurilor în care avem 1 în tabelul de adevăr al funcţiei booleene obţinem o formulă în FND.

Teorie pentru S1.4: O **clauză** este o mulţime finită de literali, i.e $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ unde $L_1, \ldots, L_n$ sunt literali. O clauză $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ este satisfiabilă. **Clauza vidă** $\square = \{\}$ nu este satisfiabilă. O mulţime de clauze $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este satisfiabilă dacă există o evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ astfel încât $e(C_i) = 1$ oricare $i \in \{1, \ldots, m\}$.

$$\begin{array}{rcl} \text{clauză} & = & \text{disjuncţie de literali} \\ \text{mulţime de clauze} & = & \text{FNC} \end{array}$$

Regula rezoluţiei:

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ şi $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de clauze. O *derivare prin rezoluţie* din $\mathcal{S}$ este o secvenţă finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din $\mathcal{S}$ sau rezultă din clauze anterioare prin rezoluţie. Dacă există o derivare prin rezoluţie care se termină cu $\square$, atunci mulţimea iniţială de clauze este nesatisfiabilă.

(S1.1) Arătaţi că următoarea formulă în logica propoziţională este o tautologie:

$$(v_1 \vee v_2 \rightarrow v_3) \leftrightarrow (v_1 \rightarrow v_3) \wedge (v_2 \rightarrow v_3)$$

(S1.2) Fie φ şi ψ formule în logica propoziţională. Să se arate sintactic că

$$\vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi).$$

(S1.3) Fie $\varphi := (p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow p$ o formulă în logica propoziţională. Să se aducă φ la cele două forme normale, folosind, pe rând:

(i) metoda transformărilor sintactice succesive,

(ii) metoda funcţiei booleene corespunzătoare formulei φ.

(S1.4) Să se arate folosind rezoluţia că umătoarea formulă este nesatisfiabilă:

$$\varphi := (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge ((v_3 \rightarrow \neg v_2) \vee v_1) \wedge (v_1 \rightarrow v_2) \wedge (v_2 \wedge v_3)$$

(S1.5) [opţional] Fie L un limbaj pentru logica propoziţională, cu un vocabular alcătuit din următoarea mulţime de variabile propoziţionale $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$. Să se găsească mulţimea modelelor următoarei formule propoziţionale:

$$\Gamma := (\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (v_i \wedge v_j)) \leftrightarrow (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\bigvee_{j \neq i} v_j))$$