

# Examen\*

8 Februarie 2017

## Exercițiul 1

La o sărbătoare participă 35 de bărbați, 40 de femei și 25 de copii. Pe o masă se află trei urne etichetate cu literele  $B$ ,  $F$  și  $C$  ce conțin bile colorate dintre care 10%, 40% și respectiv 80% sunt de culoare neagră. Un prezentator, legat la ochi, alege la întâmplare o persoană din mulțime și îi cere să extragă o bilă din urna corespunzătoare (dacă este bărbat din urna etichetată cu  $B$ , dacă este femeie din urna etichetată cu  $F$  iar dacă este copil din urna etichetată cu  $C$ ). Bila extrasă este de culoare neagră. Care este probabilitatea ca bila să fi fost extrasă de un bărbat ? dar de o femeie ? dar de un copil ? Prezentatorul nu este magician și încearcă să prezică genul persoanei alese la întâmplare: ce ar trebui să spună pentru a avea o eroare cât mai mică ?

## Exercițiul 2

Se consideră variabilele aleatoare independente  $X$  și  $Y$  având repartițiile:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}; Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Să se determine repartițiile variabilelor aleatoare  $X + Y$ ,  $X - Y$ ,  $XY$ ,  $\frac{X}{Y}$  și să se afle  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\mathbb{E}[Y]$ ,  $Var(X)$ ,  $Var(Y)$ ,  $Var(2X - 4Y)$  și  $Var(8XY)$ .

## Exercițiul 3

Fie  $X$  și  $Y$  două variabile aleatoare cu repartițiile date de

$$X \sim \begin{pmatrix} -1.5 & -1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix} \text{ și } Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \text{ cu } p_1, p_2 \in (0, 1).$$

- Aflați  $p_1$  și  $p_2$  știind că  $\mathbb{P}(X = -1.5, Y = 2) = 0.45$  și  $\mathbb{E}[Y|X = -1] = 3$ .
- Considerând valorile lui  $p_1$  și  $p_2$  aflate anterior, calculați coeficientul de corelație al lui  $X$  și  $Y$ .

## Exercițiul 4

Fie densitatea comună a variabilelor aleatoare  $(X, Y)$ :

$$f(x, y) = x(2y + 1)\mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y)$$

- Calculați media și varianța lui  $X$  și  $Y$
- Determinați repartițiile variabilelor aleatoare  $\mathbb{E}[Y|X]$  și  $Var(Y|X)$
- Verificați dacă are loc relația:

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X])$$

---

\*Timp de lucru 2h. Toate documentele și calculatoarele electronice de mână sunt autorizate. Computerele personale, telefoanele mobile/smartwatch-urile sunt **strict interzise**.