

# Generatori de numere aleatoare

## Curs 2

October 21, 2016

## Bibliografie suplimentară:

- ▶ Knuth, D. E.(1983) *Tratat de programare a calculatoarelor, Vol. 2 - Algoritmi seminumerici*, Editura Tehnică.
- ▶ Knuth D.E. (1974) *Tratat de programare a calculatoarelor, Vol 1 - Algoritmi fundamentali*, Editura Tehnică.
- ▶ Văduva, I (1977) *Modele de simulare cu calculatorul*, Ed. Tehnică.

# Recapitularea unor noțiuni probabiliste

## Spațiu de selecție și evenimente

- ▶ **Experiment aleator** = un experiment al cărui rezultat nu este cunoscut înainte.
- ▶ **Spațiu de selecție** al unui experiment ( $S$ ) = spațiul tuturor rezultatelor posibile.
  - ▶ De exemplu un experiment aleator poate fi o cursă de cai în care aceștia sunt numerotați de la 1 la 7. Atunci:
    - ▶  $S = \{\text{toate permutările șirului } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$
    - ▶ Ce înseamnă rezultatul  $(3, 4, 1, 7, 6, 5, 2)$ ?
- ▶ **Eveniment** ( $A$ ) = orice submulțime a spațiului de selecție. Dacă rezultatul unui experiment aparține lui  $A$ , atunci se spune că a avut loc  $A$ .
  - ▶ Exemplu pentru  $S$  de mai sus:  
 $A = \{\text{toate rezultatele din } S \text{ care încep cu } 5\}$

Pot fi definite:

- ▶ reuniune de doua evenimente  $A \cup B$ ;
- ▶ intersecție de două evenimente  $A \cap B$ ;
- ▶ reuniune de  $n$  evenimente  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ;
- ▶ intersecție de  $n$  evenimente  $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ;
- ▶ complementarul unui eveniment  $A$ :  $A^c$ .
  - ▶  $S^c = \phi$ ;
  - ▶ Daca  $A \cap B = \phi$ , evenimentele  $A$  și  $B$  se exclud reciproc.

# Axiomele probabilității

- ▶ **Probabilitate:** presupunem că pentru fiecare eveniment  $A$  asociat unui experiment cu spațiul de selecție  $S$ , există un număr, numit probabilitatea de apariție a evenimentului  $A$ ,  $P(A)$ , care verifică următoarele trei axiome:

- ▶  $0 \leq P(A) \leq 1$
- ▶  $P(S) = 1$
- ▶  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i), \forall n, A_i \cap A_j = \emptyset$

$$\Rightarrow 1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

# Probabilitate condiționată și Independență

- ▶ **Probabilitate condiționată** =  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P\{B\}}$
- ▶ **Evenimente independente** =  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

# Variabile aleatoare

- ▶ **Variabilă aleatoare**  $X : S \rightarrow \mathbb{R}$  (discrete și continue)
- ▶ **Funcție de repartiție**  $F(x) = P\{X \leq x\}$
- ▶ **Funcție și densitate de probabilitate**  $p(x) = P\{X = x\}$ ,  
 $f(x) = F'(x)$ ,  $P\{X \in C\} = \int_C f(x)dx$ ,  $F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$
- ▶ **Două variabile aleatoare**  $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$ ,  
 $p(x, y) = P\{X = x, Y = y\}$ ,  
 $P\{X \in C, Y \in D\} = \int \int_{x \in C, y \in D} f(x, y)dx dy$

# Numere aleatoare

- ▶ **Șir de numere aleatoare:** (definiție intuitivă) un sir de numere alese la întâmplare astfel încât se cunoaște probabilitatea de apariție a fiecărui număr într-o succesiune de valori dată.
- ▶ Șirurile de numere aleatoare au aplicații în: criptografie, simulare, etc.
- ▶ În general pentru șirurile de numere aleatoare probabilitatea de apariție a unei valori corespunde **repartiției uniforme**.
- ▶ **Repartiția uniformă:** (intuitiv) Toate valorile sunt egal probabile.
- ▶ În **simulare:** Șiruri de numere aleatoare  $\Rightarrow$  Valori ale variabilelor aleatoare  $\Rightarrow$  Model de simulare



- ▶ *Numere aleatoare*: Valori ale unor variabile aleatoare uniforme pe  $[0, 1]$ .
- ▶ Şirurile de numere aleatoare pot fi obţinute din:
  - ▶ tabele - greu de implementat;
  - ▶ fenomene fizice (cea mai buna sursă de aleator, de exemplu: intervalele de timp dintre apăsarea unei taste şi mişcarea mouse-ului) - nu se pot refolosi;
  - ▶ algoritmi.

# Algoritmi de numere aleatoare

- ▶ Se bazează pe utilizarea unei **valori inițiale (sămânță)** și a unei **relații de recurență** cu ajutorul căreia se obțin celelalte valori ale șirului.
- ▶ Numere **pseudo-aleatoare**: numerele obținute nu sunt chiar aleatoare pentru că se bazează pe o relație de recurență. Numerele produse trebuie să aibă două proprietăți statistice importante:
  - ▶ uniformitate;
  - ▶ independență.
- ▶ Majoritatea algoritmilor generează  $X_n$  numere întregi între 0 și  $m - 1$  (de obicei  $m - 1$  este valoarea maximă a tipului întreg memorat în calculator) și apoi se iau:

$$U_n = \frac{X_n}{m}$$

uniforme pe  $[0, 1]$ .

# Algoritmi de numere aleatoare

Trebuie să aibă următoarele **proprietăți**:

- ▶ Rapiditate;
- ▶ Portabilitate de diverse calculatoare;
- ▶ Șirul de numere produs
  - ▶ să aibă o perioadă mare;
  - ▶ să fie cât mai aproape de independență și uniformitate;
  - ▶ să fie reproductibil.

## Metoda părții din mijloc a pătratului

- ▶ Prima metodă propusă pentru a fi implementată pe calculatoare. A fost descrisă de John von Neumann în 1946.
- ▶ Are doar interes istoric.
- ▶ Presupunem că vrem să generăm numere aleatoare cu cel mult  $i$  cifre. Atunci:

$$X_{n+1} = \text{cele } i \text{ cifre din mijloc ale lui } X_n^2$$

# Algoritmi de numere aleatoare

- ▶ Șirul tinde să se stabilizeze în scurte cicluri de elemente.
- ▶ De exemplu: 43, 84, 05, 02, 00, 00,... (se pun 0-uri în fața numerelor care nu au patru sau două cifre).

## Metoda Fibonacci

- ▶ Doar interes istoric;
- ▶ Se bazează pe relația

$$X_{n+1} = (X_n + X_{n-1}) \mod m;$$

- ▶ numerele produse nu sunt destul de aleatoare.

## Alte metode:

- ▶ metoda regiștrilor de translație (shift register), metode combinate.

## Metoda congruențială liniară

- ▶ Este folosit cel mai frecvent.
- ▶ Se bazează pe relația:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m \quad (0.1)$$

unde

- ▶  $m > 0$  = modulul;
  - ▶  $a$  = multiplicatorul;
  - ▶  $c$  = incrementul;
  - ▶  $X_0$  = termenul inițial.
- ▶ Fie  $b = a - 1$ . Se presupune  $a \geq 2$  și  $b \geq 1$ , pentru că pentru  $a = 0$  și  $a = 1$  nu se obțin șiruri aleatoare.
  - ▶ Din (1), pentru  $k \geq 0$  și  $n \geq 0$ , rezultă că:

$$X_{n+k} = (aX_{n+k-1} + c) \mod m$$

și prin urmare relația dintre termenii șirului aflați la distanța  $k$  este:

$$\begin{aligned}
X_{n+k} &= [a(aX_{n+k-2} + c) \bmod m + c] \bmod m \\
&= [a^2X_{n+k-2} + (a+1)c] \bmod m \\
&= [a^3X_{n+k-3} + (a^2 + a + 1)c] \bmod m \\
&= \dots \\
&= [a^kX_n + (a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)c] \bmod m \\
&= \left[ a^kX_n + \frac{a^k - 1}{a - 1}c \right] \bmod m
\end{aligned}$$

relație utilă pentru alegerea valorilor care caracterizează șirul.

# Alegerea modului

- ▶  $m$ : trebuie să fie suficient de mare și să asigure o complexitate scăzută a calculului.
- ▶ o alegere convenabilă a lui  $m$  ar fi  $w =$  dimensiunea cuvântului calculatorului.
- ▶ alte alegeri:  $m = w \pm 1$  sau  $m =$  cel mai mare număr prim mai mic decât  $w$ .

# Alegerea multiplicatorului

Se alege  $a$  pentru un  $m$  oarecare astfel încât pentru orice valoare a lui  $X_0$  să rezulte un generator de perioadă maximă.

## Teoremă

*Șirul congruențial liniar definit de  $m$ ,  $a$ ,  $c$ , și  $X_0$  are perioada de lungime maximă  $m$  dacă și numai dacă:*

- 1.  $c$  și  $m$  sunt două numere întregi prime între ele;*
- 2.  $b = a - 1$  este un multiplu de  $p$ , pentru orice număr  $p$  care-l divide pe  $m$ .*
- 3.  $b$  este multiplu de 4 dacă  $m$  este multiplu de 4.*

Datorită următoarelor leme este suficientă demonstrarea teoremei pentru  $m$  putere a unui număr prim.



## Lemă

*Fie descompunerea lui  $m$  în factori primi:*

$$m = p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t} \quad (0.2)$$

*lungimea  $\lambda$  a perioadei șirului congruențial liniar definit de  $(X_0, a, c, m)$  este cel mai mic multiplu comun al lungimilor  $\lambda_j$  ale perioadelor șirurilor congruențiale liniare  $(X_0 \bmod p_j^{e_j}, a \bmod p_j^{e_j}, c \bmod p_j^{e_j}, p_j^{e_j})$ ,  $1 \leq j \leq t$ .*

De aici rezultă că:

$$p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t} = \lambda = \text{c.m.m.m.c}\{\lambda_1, \dots, \lambda_t\} \leq p_1^{e_1} \dots p_t^{e_t} \quad (0.3)$$

iar această relație poate avea loc dacă și numai dacă  $\lambda_j = p_j^{e_j}$  pentru  $\forall j, 1 \leq j \leq t$ . De aceea se poate presupune  $m = p^e$ , unde  $p$  este un număr prim iar  $e$  este un număr întreg pozitiv.

Perioada poate avea lungime  $m$  dacă și numai dacă orice număr întreg din  $[0, m)$  apare în cadrul perioadei o singură dată. Dacă luăm  $X_0 = 0$ , atunci:

$$X_n = \left( \frac{a^n - 1}{a - 1} \right) c \mod m$$

Dacă  $c$  și  $m$  nu sunt prime între ele, atunci în acest șir nu poate exista 1. Prin urmare condiția 1. din teoremă este necesară.

Demonstrarea teoremei se reduce la demonstrarea următoarei leme:

## Lemă

*Presupunem că  $1 < a < p^e$ , cu  $p$  număr prim. Dacă  $\lambda$  este cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care*

$$\frac{a^\lambda - 1}{a - 1} \equiv 0 \pmod{p^e}$$

*atunci*

$$\lambda = p^e$$

*dacă și numai dacă:*

- ▶ *pentru  $p = 2$   $a \equiv 1 \pmod{4}$ ;*
- ▶ *pentru  $p > 2$   $a \equiv 1 \pmod{p}$ .*

Această leamnă se demonstrează aplicând de mai multe ori următoarea leamnă:

## Lemă

*Fie  $p$  un număr prim și fie  $e$  un număr întreg pozitiv cu  $p^e > 2$ .*

*Dacă*

$$x \equiv 1 \pmod{p^e}, \quad x \not\equiv 1 \pmod{p^{e+1}} \quad (0.4)$$

*atunci*

$$x^p \equiv 1 \pmod{p^{e+1}}, \quad x \not\equiv 1 \pmod{p^{e+2}} \quad (0.5)$$

# Generatorul multiplicativ congruențial

Este un generator liniar congruențial cu  $c = 0$ :

$$X_{n+1} = aX_n \mod m \quad (0.6)$$

Observăm că  $X_n$  și  $m$  trebuie să fie prime între ele, pentru că altfel generatorul ar deveni un șir de 0. Prin urmare lungimea perioadei poate fi maxim  $\varphi(m)$ , numărul numerelor întregi cuprinse între 0 și  $m$ , prime cu  $m$ .

Putem să presupunem din nou că  $m = p^e$  cu  $p = \text{nr. prim}$  și  $e$  întreg pozitiv. Avem:

$$X_n = a^n X_0 \mod p^e$$

Dacă  $a$  este multiplu de  $p$ , atunci perioada are lungime 1  $\Rightarrow a$  trebuie să fie prim cu  $p$ .

Testarea șirurilor de numere aleatoare se face cu **teste statistice**:

- ▶ Teste de frecvență (testează repartiția uniformă pe care trebuie să o aibă numerele): testul  $\chi^2$ , testul Kolmogorov-Smirnov.
- ▶ Teste de independență.