Calcul Numeric – Tema #5

Ex. 1 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, să se calculeze în Matlab, apelând după caz procedurile create în temele precedente:

a) Normele matriciale $\| A \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Se va construi procedura $[normap] =$ **normap**(A, p) care returnează norma p a matricei A.

b) Raza spectrală $\rho(A)$. Cum este raza spectrală faţă de normele calculate la punctul a)?

c) Numărul de condiţionare $\kappa_p(A)$, $p = 1, 2, \infty$. Se va defini procedura $[condp] =$ **condp**(A, p) care returnează numărul de condiţionare în raport cu norma p.

d) Numerele $\| A \|_p$ şi $\kappa_p(A)$ folosind funcţiile predefinite în Matlab $norm(A, p)$ şi $cond(A, p)$, $p = 1, 2, \infty$.

Ex. 2 Fie sistemul $Ax = b$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \text{cu soluţia} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Aflaţi soluţia sistemului $Ax = b$, folosind procedura **GaussPivTot**.

b) Fie $b + \delta b = (32{,}1;\ 22{,}9;\ 33{,}1;\ 30{,}9)^T$ vectorul perturbat. Să se rezolve în sistemul $A(x + \delta x) = b + \delta b$. Ce observaţi în soluţia obţinută?

c) Să se calculeze în Matlab $\kappa_\infty(A)$. Să se calculeze şi să se compare mărimile $\dfrac{\| \delta x \|_\infty}{\| x \|_\infty}$ şi $\kappa_\infty(A)\dfrac{\| \delta b \|_\infty}{\| b \|_\infty}$. Ce observaţi?

d) Considerăm sistemul perturbat $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$ unde

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}89 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{pmatrix}$$

Să se rezolve acest sistem. Ce observaţi în soluţia sistemului perturbat?

Ex. 4 Să se construiască în Matlab procedurile

a) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobi**(A, a, ε)

b) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobiDDL**(A, a, ε)

c) $[x_{aprox}, N] =$ **MetJacobiR**(A, a, ε)

d) $[x_{aprox}, N] =$ **MetGaussSeidelR**$(A, a, \varepsilon, \sigma)$

conform metodelor: a) Metoda Jacobi, b) Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii, c) Metoda Jacobi relaxată, e) Metoda Gauss - Seidel relaxată.

Ex. 5 1) Să se studieze aplicabilitatea metodelor în cazul următoarelor matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,01 & 0 \\ 0 & 1 & 0,04 \\ 0 & 0,02 & 1 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi;

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ - Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante;

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ - Metodele Jacobi şi Gauss - Seidel relaxate.

2) În caz afirmativ să se afle soluţia aproximativă a sistemului $Ax = a$ pentru matricele de la a), b) şi c) apelând corespunzător procedurile de la Ex. 4, pentru $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $\varepsilon = 10^{-5}$. Parametrul de relaxare în cazul metodei Gauss-Seidel relaxată va fi ales aleator din intervalul $(0, 2)$.

3) În cazul metodei Gauss-Seidel relaxată să se construiască graficul funcţiei $N = N(\sigma)$ cu $\sigma \in (0, 2)$. N reprezintă numărul de iteraţii necesar pentru obţinerea soluţiei prin metoda Gauss - Seidel relaxată cu eroarea ε. Conform graficului, se va alege valoarea optimă a lui σ astfel încât numărul de iteraţii corespunzător valorii σ să fie minim.