**CONȚINUTUL CURSULUI #3:**







## II.1.5. Sisteme liniare inferior triunghiulare

**Definiția (II.2.)**

a) *Matricea* $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *se numește inferior triunghiulară dacă și numai dacă elementele sub diagonala principală sunt nule, i.e.* $a_{ij} = 0, \forall i > j$;

b) *Un sistem liniar a cărui matrice asociată este inferior triunghiulară se numește sistem inferior triunghiular.*

Fie sistemul liniar $Ax = b$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inferior triunghiulară cu $a_{kk} \neq 0, k = \overline{1,n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Sistemul inferior triunghiular $Ax = b$ se scrie sub forma



$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (E_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k = b_k & (E_k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nk}x_k + \ldots + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases} \tag{1}$$

Din $(E_1)$ rezultă

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2}$$

Fie ecuația $(E_k)$: $a_{kk}x_k + \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j = b_k$. Dacă din primele $k-1$ ecuații sunt calculate componentele $x_j, j = \overline{1, k-1}$, atunci din $(E_k)$ rezultă

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right) \tag{3}$$



**ALGORITM** (Metoda substituției ascendente)

**Date de intrare:** $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
**Date de ieșire:** $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $x_1 = \dfrac{1}{a_{11}} b_1$;

STEP 2: `for` $2:n$ `do`

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj}x_j\right);$$

`endfor`

Definim în continuare conform Algoritmului (Metoda substituției ascendente) procedura **SubsAsc** având sintaxa $x =$**SubsAsc**$(A, b)$, procedură care returnează soluția $x$ a sistemului $Ax = b$.

## II.1.6. Metoda Gauss-Jordan. Inversa unei matrice

Metoda Gauss-Jordan transformă matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ într-o matrice diagonală. Metoda G-J se utilizează pentru calculul inversei unei matrice. Inversa $A^{-1}$ verifică relația

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Fie $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n, k = \overline{1,n}$ coloana $k$ a matricei $A^{-1}$, i.e.,

$$A^{-1} = (x^{(1)}, ..., x^{(k)}, ..., x^{(n)}).$$

Deasemenea, fie $e^{(k)} = (0, ..., 1, ..., 0)^T$, cu 1 pe poziția $k$, coloana $k$ din matricea $I_n$. Atunci

$$AA^{-1} = I_n \Longleftrightarrow Ax^{(k)} = e^{(k)}, k = \overline{1,n}$$

Pentru a calcula inversa matricei $A$ revine la a rezolva simultan $n$ sisteme liniare, iar fiecare sistem $Ax^{(k)} = e^{(k)}$ se rezolvă imediat, pentru că matricea finală obținută prin metoda G-J este matrice diagonală.



## II.1.7. Decompunerea $LU$.

Am văzut, în secțiunea precedentă, că mai multe sisteme cu aceeași matrice pot fi tratate simultan prin metoda Gauss-Jordan. În multe situații nu toți termenii din membrul drept sunt disponibili de la început. Putem dori, de exemplu, să rezolvăm sistemele de ecuații

$$Ax^{(1)} = b^{(1)}, Ax^{(1)} = b^{(1)},$$

unde $b^{(2)}$ este o funcție de $x^{(1)}$. Prin urmare, rezolvarea lor simultană numai este posibilă, urmând ca algoritmii Gauss sa fie aplicați pentru fiecare sistem în parte, mărindu-se considerabil numărul de iterații. În asemenea situații ne vin în ajutor metode de factorizare.

**Definiția (II.3.)**

*Se numește descompunere (sau factorizarea) LU a unei matrice $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, scrierea matricei $A$ ca produs de două matrice, una inferior triunghiulară, notată cu $L$ și alta superior triunghiulară, notată cu $U$, i.e.*

$$A = LU \tag{4}$$



**Teorema (II.1.)**

*Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu determinanții de colț nenuli, i.e. $detA_k \neq 0, k = \overline{1,n}$, unde $A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$. Atunci $A$ admite descompunere (sau factorizare) LU.*

**Propoziție (II.1.)**

*Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice care admite descompunerea LU cu $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inferior triunghiulară, $\ell_{kk} = 1,\ k = \overline{1,n}$ și $U = (u_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ superior triunghiulară. Atunci descompunerea este unică.*

Odată calculate matricele $L, U$, sistemul $Ax = b$ se rezolvă imediat și anume:

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ux =: y \\ Ly = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = SubsDesc(U, y) \\ y = SubsAsc(L, b) \end{cases} \tag{5}$$



**Teorema (II.2.)**

*Matricile se obțin prin metodele de eliminare Gauss și anume:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

*unde:*

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, i = \overline{2,n}, j = \overline{1, i-1}$$

$$u_{ij} = a_{ij}^{(i)}, i = \overline{1,n}, j = \overline{i,n}.$$

*Notăm că $a_{ij}^{(k)}$ reprezintă componenta cu indici $ij$ a matricei $A$ la etapa $k$, conform algoritmului de eliminare Gauss.*

Obs.: Formula de calcul a elementelor $a_{ij}^{(k)}$ provine din transformările elementare $L_\ell \leftarrow L_\ell - m_{\ell k} L_k$, deci

$$a_{\ell j}^{(k+1)} = a_{\ell j}^{(k)} - m_{\ell k} a_{kj}^{(k)}, k = \overline{1, n-1}, \ell, j = \overline{k+1, n}.$$

**Demonstratie:** Pentru a vizualiza elementul $(LU)_{ij}$ folosim formula:

$$(LU)_{ij} = [m_{i1}, \cdots, m_{i,i-1+}, 1, 0 \cdots 0] \cdot \begin{bmatrix} a_{1j}^{(1)} \\ a_{2j}^{(2)} \\ a_{j,j}^{(j)} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pentru $i \leq j$

$$\begin{aligned} (LU)_{ij} &= m_{i1} a_{1j}^{(1)} + m_{i2} a_{2j}^{(2)} + \cdots + m_{i,i-1} a_{i-1,j}^{(i-1)} + a_{ij}^{(i)} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik} a_{kj}^{(k)} + a_{ij}^{(i)} = \sum_{k=1}^{i-1} (a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)}) + a_{ij}^{(i)} \\ &= a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \end{aligned}$$



Pentru $i > j$

$$\begin{aligned} (LU)_{ij} &= m_{i1} a_{1j}^{(1)} + \cdots + m_{ij} a_{jj}^{(j)} \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} m_{ik} a_{kj}^{(k)} + m_{ij} a_{jj}^{(j)} = \sum_{k=1}^{j-1} (a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(k+1)}) + a_{ij}^{(j)} \qquad (7) \\ &= a_{ij}^{(1)} = a_{ij} \qquad \square \end{aligned}$$

Aplicând metoda Gauss cu sau fără pivotare, liniile vor fi permutate. Prin acest proces de schimbare a liniilor se obțin $L$ și $U$ astfel încât $A' = LU$, unde $A'$ va fi matricea $A$ cu liniile permutate. Astfel că este necesar să reținem într-un vector toate aceste permutări pentru a fi aplicate ulterior și vectorului $b$. Fie $w = (p_1, p_2, ..., p_{n-1})$, cu $p_i$ indicele pivotului la etapa $i$ conform Algoritmilor Gauss. Aplicăm schimbarea elementelor lui $b$ prin

$$b_k \leftrightarrow b_{p_k}, k = \overline{1, n-1}$$

care ne dă un vector $b'$. În final, rezolvăm două sisteme triunghiulare $Ly = b', Ux = y$.



Obs.: Cel mai bun mod de a determina determinantul unei matrice $A$ este aplicarea algoritmilor Gauss. În acest caz

$$det(A) = (-1)^s a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n)}, \qquad (8)$$

unde $a_{kk}^{(k)}, k = \overline{1, n}$ sunt pivoții la etapa $k$, iar $s$ este numărul total de schimbări.

Obs.: Teorema (II.1) este valabilă în cazul în care în procesul de eliminare Gauss nu are loc interschimbarea liniilor. În cazul în care survine permutarea liniilor condiția de existență a descompunerii $LU$ se va înlocui cu $detA_k \neq 0$, unde $A_k$ este submatricea formată din primele $k$ linii și $k$ coloane ale matricei curente $A$ la etapa $k$, i.e.,

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Se observă că $detA_k \neq 0 \Leftrightarrow a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{kk}^{(k)} \neq 0$.



**Exemplu 1:** Să se rezolve prin metoda $LU$ sistemul $Ax = b$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aplicăm metoda Gauss fără pivotare.

$k = 1$ : Se caută primul $p = \overline{1, 3}$ cu $|a_{p1}| \neq 0 \Rightarrow p = 2$. Reținem $p_1 = 2$. Interschimbăm $L_2 \leftrightarrow L_1$. Se obține o matrice echivalentă cu $A$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicatorii $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 0, m_{31} = \dfrac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 3$. În urma transformării elementare $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ se obține

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$k = 2$ : Se caută primul $p = \overline{2,3}$ cu $|a_{p2}| \neq 0 \Rightarrow p = 2$. Reținem $p_2 = 2$.

Multiplicatorii $m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Se aplică în final transformarea $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Obținem astfel matricele

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Obs.: Produsul matricelor $L, U$ este:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =: A'$$

Matricea $A'$ este matricea $A$ cu liniile permutate.



Pentru a afla soluția sistemului $Ax = b$ vom aplica schimbarea pozițiilor elementelor vectorului $b$ după cum urmează:

$$b_1 \leftrightarrow b_{p_1} \Leftrightarrow b_1 \leftrightarrow b_2 \Rightarrow b = (4\ 8\ 10)^T$$

Sistemul $Ly = b'$ se rescrie

$$\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 8 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 8 \\ y_3 = -18 \end{cases}$$

Din relația $Ux = y$ sau echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 8 \\ -6x_3 = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$



## II.1.8. Metoda Cholesky.

**Definiția (II.4.)**

*Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Numim descompunerea Cholesky a matricei $A$, descompunerea de forma*

$$A = LL^T \tag{9}$$

*unde $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice inferior triunghiulară.*

**Definiția (II.5.)**

*Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a) *$A$ se numește simetrică dacă și numai dacă $A^T = A$;*

b) *$A$ se numește semipozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v > \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n$;*

c) *$A$ se numește pozitiv definită dacă și numai dacă $< Av, v >> 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

*$< \cdot, \cdot >$ reprezintă produsul scalar pe $\mathbb{R}^n$ definit astfel: $< u, v >= \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \forall u, v \in \mathbb{R}^n$.*



**Teorema (II.3.)**

*Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică și pozitiv definită, atunci descompunerea Cholesky există.*

Obs.:Pentru a arăta că $A$ este pozitiv definită se va folosi criteriul lui Sylvester și anume: Matricea simetrică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este pozitiv definită dacă și numai dacă toți minorii principali, i.e. $detA_k > 0, A_k = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,k}}$.

**Propoziție (II.2.)**

*Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică și pozitiv definită. Dacă componentele $\ell_{kk}, k = \overline{1,n}$ de pe diagonala principală a matricei $L$ din descompunerea Cholesky sunt strict pozitive, atunci descompunerea este unică.*

**CALCULUL MATRICEI** $L$ : Relația $A = LL^T$ se va scrie astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{kk} \cdots a_{kj} & \\ \vdots & \\ a_{ik} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{kk} & 0 \\ \vdots \ddots & \\ \ell_{ik} \cdots \ell_{ii} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{kk} \cdots \ell_{ik} & \\ \ddots \vdots & \\ 0 \quad \ell_{ii} & \end{pmatrix} \tag{10}$$

Presupunem că printr-o anumită metodologie au fost calculate primele $k-1$ coloane din $L$, deci și primele linii $k-1$ din $L^T$.

**ETAPA 1:** Calculăm elementul $\ell_{kk}$ de pe diagonala principală, scriind expresia pentru $a_{kk}$ :

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{ks}^2 = \ell_{kk}^2 + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2$$

Cum $\ell_{kk} > 0$ va rezulta

$$\ell_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2} \tag{11}$$



**ETAPA 2:** Calculăm restul elementelor de pe coloana $k$, i.e. $\ell_{ik}, i > k$, scriind expresia pentru $a_{ik}$ :

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{n} \ell_{is}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{sk}^T = \sum_{s=1}^{k} \ell_{is}\ell_{ks} = \ell_{ik}\ell_{kk} + \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks} \Rightarrow$$

$$\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right) \tag{12}$$

**ALGORITM** (Metoda Cholesky)

**Date de intrare:** $A = (a_{ij})_{i,j} = \overline{1,n}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$;
**Date de ieșire:** $L = (\ell_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$

STEP 1: $\alpha = a_{11}$;
    if $\alpha \leq 0$ then
        OUTPUT('$A$ nu este pozitiv definită');
        STOP.
    endif



    $\ell_{11} = \sqrt{a_{11}}$;
    for $i = 2 : n$ do
        $\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{\ell_{11}}$;
    endfor

STEP 2: for $k = 2 : n$ do
        $\alpha = a_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2$;
        if $\alpha \leq 0$ then
            OUTPUT('$A$ nu este pozitiv definită');
            STOP.
        endif
        $\ell_{kk} = \sqrt{\alpha}$;



        for $i = k+1 : n$ do
            $\ell_{ik} = \frac{1}{\ell_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is}\ell_{ks}\right)$;
        endfor
    endfor

STEP 3: $y =$SubsAsc$(L, b)$;

STEP 4: $x =$SubsDesc$(L^T, y)$.

**Exemplu 2:** Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

a) Să se verifice dacă $A$ este simetrică și pozitiv definită;
b) În caz afirmativ, să se determine factorizarea Cholesky.
c) Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b = (12\ 30\ 10)^T$ prin metoda Cholesky.

a) $4 > 0, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 36 > 0, det(A) = 144 > 0 \Rightarrow$ conform criteriului Sylvester rezultă că matricea $A$ este pozitiv definită. Conform Th. (II.2.) matricea $A$ admite descompunere Cholesky. Astfel $\exists L$ inferior triunghiulară astfel încât $A = LL^T$.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{11}\ell_{31} \\ \ell_{21}\ell_{11} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 & \ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} \\ \ell_{31}\ell_{11} & \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} & \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Aflăm mai întâi elementul $\ell_{11} : \ell_{11}^2 = 4 \Rightarrow \ell_{11} = 2$ $(\ell_{11} > 0)$. Calculăm în continuare elementele de pe prima coloană din $L, (\ell_{21}, \ell_{31}) : \ell_{21}\ell_{11} = 2$ și $\ell_{31}\ell_{11} = 2$ de unde rezultă $\ell_{21} = 1$ și $\ell_{31} = 1$. Continuăm procesul calculând elementul $\ell_{22} : \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 10 \Rightarrow \ell_{22} = 3$ $(\ell_{22} > 0)$. Aflăm elementul rămas pe coloana a II-a, i.e., $\ell_{32} : \ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = 4 \Rightarrow \ell_{32} = 1$. În final calculăm elemntul $\ell_{33} : \ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 6 \Rightarrow \ell_{33} = 2$ $(\ell_{33} > 0)$.



Am obținut $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Rezolvăm sistemul $Ly = b$ :

$$\begin{cases} 2y_1 = 12 \\ y_1 + 3y_2 = 30 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 8 \\ y_3 = -2 \end{cases}$$

În final se rezolvă sistemul $L^T x = y$ :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$