Euler (1744):

"Nothing in the world takes place without optimization, and there is no doubt that all aspects of the world that have a rational basis can be explained by optimization"

Notatii

In cadrul cursului vom utiliza urmatoarele notatii:

- Vectori (considerati intotdeauna vector coloana) cu litere mici, i.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
- Produs scalar in spatiul Euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
- Norma Euclidiana standard $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- Multimi cu litere mari: $S, Q, U \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n_+$ - orthantul nenegativ, S^n_+ - multimea matricelor pozitiv semidefinite)
- Matrice cu litere mari: $A, B, C, H \in \mathbb{R}^{n \times m}$
- Norma spectrala a unei matrici $\|A\| = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$
- Matrice pozitiv definita: $A \succ 0$, si pozitiv semidefinita $A \succeq 0$

Notatii

In cadrul cursului vom utiliza urmatoarele notatii:

- Functii cu litere mici: $f, g, h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- Gradientul, respectiv matricea Hessiana a functiei continuu diferentiabile $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n, \nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Hessiana este matrice simetrica (i.e. in S^n)!

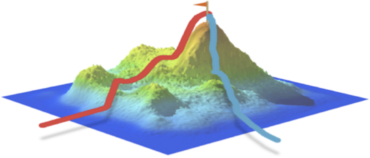
$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix},$$

Teorema de medie: fie functia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atunci exista $\theta \in [a,\ b]$ a.i. $g(b) - g(a) = g'(\theta)(b-a) = \int_a^b g'(\tau) d\tau \Longrightarrow$ pt. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x + \theta(y-x)), y - x \rangle \qquad \theta \in [0,\ 1]$$

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \langle \nabla f(x + \tau(y-x)), y - x \rangle d\tau$$

Optimizarea matematica



$$f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad f(x)$$

$$\text{s.l.:} \quad g_1(x) \leq 0, \ldots, g_m(x) \leq 0$$

$$h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0.$$

- x variabila de decizie
- functia obiectiv $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$
- constrangeri de inegalitate si egalitate $g_i, h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
  Multimea fezabila $X = \{x : \; g_i(x) \leq 0, \; h_j(x) = 0 \; \forall i, j\}$.

$$(NLP) : \quad \min_{x \in X} f(x)$$

In **solutia optima** x^* functia obiectiv ia valoarea cea mai mica (**valoarea optima** f^*) in raport cu toti vectorii ce satisfac constrangerile (restrictiile). Pentru probleme generale avem **minime locale si globale**!

Teorema: Daca functia obiectiv f este convexa si multimea fezabila X este convexa atunci avem numai minime globale!

Multimi convexe

Multime afina:

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ este afina daca $\forall x_1, x_2 \in S$ si $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ avem

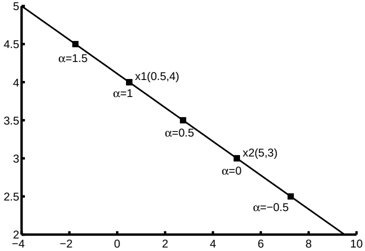
$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in S$$

Exemplu multime afina:

- Multimea solutiilor unui sistem de ecuatii liniare $\{x : Ax = b\}$

Interpretare:

- Orice punct pe dreapta definita de x_1 si x_2 se afla in multime.

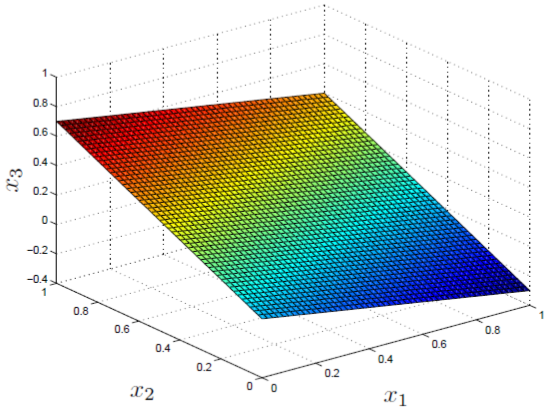


Exemplu multime afina

- Multimea solutiilor unui sistem de ecuatii liniare $\{x : \; Ax = b\}$

$$Ax = b, \quad Ay = b, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$A(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha Ax + (1-\alpha)Ay = \alpha b + (1-\alpha)b = b.$$



Multimi convexe

Multime convexa:
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ este convexa daca $\forall x_1, x_2 \in S$ si $\forall \alpha \in [0, 1]$ avem

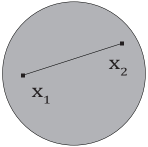
$$\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \in S$$

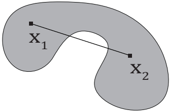
Interpretare:

- Orice punct pe segmentul de dreapta definit de x_1 si x_2 se afla in multime

Exemplu de multime convexa si neconvexa:

- Orice multime afina este multime convexa (orice combinatie convexa intre x_1 si x_2 se afla in multime)





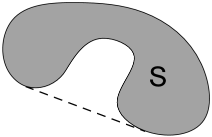
Multimi convexe

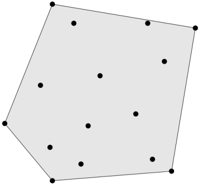
• **Acoperirea convexa**: multime formata din toate combinatiile convexe posibile de puncte ale unei multimi S

$$Conv(S) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}, \mathcal{I} \text{ finit}} \alpha_i x_i : x_i \in S, \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}$$

• Exemplu de acoperire convexa: pentru o multime formata din trei puncte $S = \{x, y, z\}$ avem

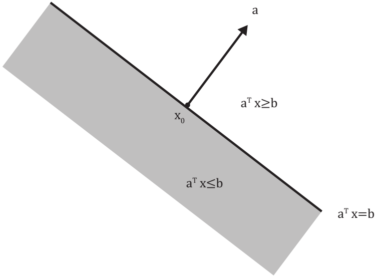
$$Conv(S) = \left\{ \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z : x, y, z \in S, \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1 \right\}$$





Multimi convexe

- **Hiperplan si semiplan**: multimi convexe definite astfel
  - hiperplan: $\left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\right\},\ a \neq 0, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$
  - semiplan: $\left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq b\right\}$ sau $\left\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\right\},\ a \neq 0, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$
- Exemplu de hiperplan si semiplanele aferente:



$$\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 + 2x_2 = 1\} \Rightarrow a = [1\ \ 2]^T \ \&\ b = 1$$

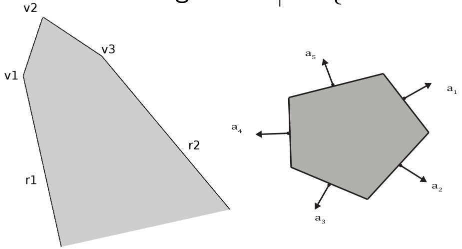
Multimi convexe

Poliedru:

• multime convexa definita de p hiperplane sau m semiplane $\left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i \ \forall i = 1, \dots, p, \ \ c_j^T x \le d_j \ \forall j = 1, \dots, m\right\}$ sau mai compact $\{x : Ax = b, \ Cx \le d\}$

• poate fi reprezentat si prin varfuri v_i si raze afine r_j: $\left\{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j r_j : \ \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \ge 0, \beta_j \ge 0 \ \ \forall i, j\right\}$

• exemplu de poliedru nemarginit: $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_1, x_2 \ge 0\}$



• **Politop**:
poliedru marginit, e.g simplex : $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x \ge 0\right\}$

Multimi convexe

Bila:

multime convexa definita de o norma $\|\cdot\|$, un centru x_c si o raza r:

$$B(x_c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_c\| \leq r\}$$

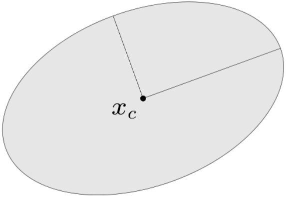
Exemplu, bila Euclidiana de centru zero si raza 1 in $\mathbb{R}^2$:

$$B_2(0,1) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1\right\}$$

Elipsoid:

multimea convexa definita de un centru x_c si o matrice $Q \succ 0$

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \ (x - x_c)^T Q^{-1} (x - x_c) \leq 1\right\}$$



Multimi convexe

Con:

K este con daca $\forall x \in K$ si $\forall \alpha \geq 0$ avem $\alpha x \in K$

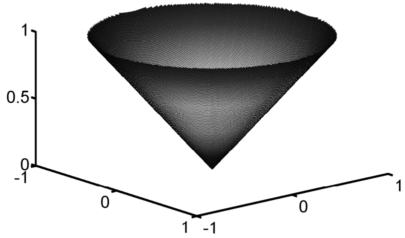
Con convex:

K este con si multime convexa

Exemplu *con Lorentz*: $\mathcal{L}^n = \left\{ [x^T \ t]^T \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq t \right\}$

Exemplu conul Lorentz pentru $n = 2$:

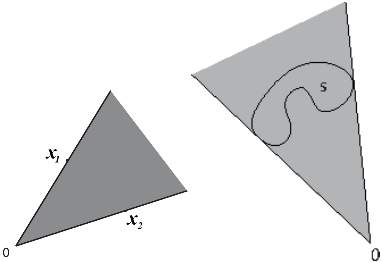
$$\mathcal{L}^2 = \left\{ [x_1 \ x_2 \ t]^T \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq t \right\}$$



Multimi convexe

Acoperire conica:

$Con(S) = \left\{ \sum_{i \in \mathcal{I}, \mathcal{I} \text{ finit}} \alpha_i x_i : x_i \in S, \alpha_i \geq 0 \right\}$



- **Conul dual**: $K^* = \{y : \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall x \in K\}$
- Daca $K = K^*$ atunci K este *con auto-dual*

Exemple conuri:

- Multimea $\mathbb{R}^n$ este un con, iar conul sau dual este $(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$.
- $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ se numeste *conul orthant* si este auto-dual in raport cu produsul scalar uzual $\langle x, y \rangle = x^T y$, i.e. $(\mathbb{R}^n_+)^* = \mathbb{R}^n_+$.

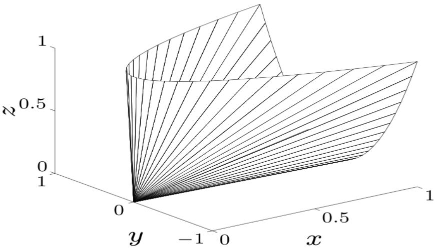
Multimi convexe

Con pozitiv semidefinit: multime formata din matrice pozitiv semidefinite, notatie $S_+^n = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \ X = X^T, \ X \succeq 0 \right\}$

$$X \in S_+^n \iff x^T X x \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$X, Y \in S_+^n, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow x^T(\alpha X + (1-\alpha) Y)x = \alpha x^T X x + (1-\alpha) x^T Y x \geq 0$

- Exemplu: $\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in S_+^2 \Leftrightarrow x, z \geq 0 \ \& \ xz - y^2 \geq 0$



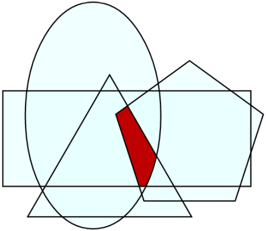
- Observatie: conul S_+^n este auto-dual, i.e. $S_+^n = (S_+^n)^*$ in raport cu produsul scalar $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Trace}(XY)$

Multimi convexe

Operatii ce conserva convexitatea:

- *intersectia*: fiind data o familie de multimi convexe $\{S_i\}_{i \in \mathcal{I}}$, atunci $\bigcap_{i \in I} S_i$ este o multime convexa
- *suma si scalarea*: fiind date doua multimi S_1, S_2, atunci $S_1 + S_2 = \{x + y : x \in S_1, y \in S_2\}$ este o multime convexa. Mai mult, $\alpha S = \{\alpha x : x \in S\}$ este convexa daca S este convexa si $\alpha \in \mathbb{R}$
- fie o functie afina $f(x) = Ax + b$ si S multime convexa, atunci $f(S) = \{f(x) : \ x \in S\}$, este convexa. Similar, preimaginea: $f^{-1}(S) = \{x : \ f(x) \in S\}$ este si ea convexa

Exemplu intersectie multimi convexe:



Multimi convexe

Inegalitate matriceala liniara (LMI): Consideram o functie $G : \mathbb{R}^m \to S^n_+, \; G(x) = A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i$, unde x_i sunt componentele unui vector $x \in \mathbb{R}^m$, iar matricele $A_0, \cdots, A_m \in S^n$ sunt simetrice.

Expresia $G(x) \succeq 0$ se numeste *inegalitate matriceala liniara*.

Multimea $\{x \in \mathbb{R}^m : G(x) \succeq 0\}$ este o multime convexa, fiind o preimagine a lui S^m_+ prin $G(x)$.

Exemplu: avem inegalitatea $\|A\| \leq \gamma$ cu $\gamma > 0$ si variabila A. Inegalitatea este echivalenta cu $\lambda_{\max}(A^T A) \leq \gamma^2$ sau:

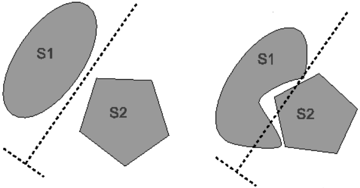
$$\gamma^2 I - A^T A \succeq 0$$

Prin complementul Schur, aceasta poate fi scrisa ca un LMI:

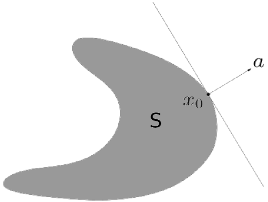
$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^T & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succeq 0$$

Multimi convexe

Teorema de separare prin hiperplane: Fie S_1 si S_2 convexe iar $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Atunci, exista un hiperplan $a^T x = b$, cu $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}^n$ si $b \in \mathbb{R}$ astfel incat $a^T x \geq b$ oricare ar fi $x \in S_1$ si $a^T x \leq b$ oricare ar fi $x \in S_2$.



Teorema de suport cu un hiperplan: Fie S convexa si $x_0 \in \mathrm{bd}(S) = \mathrm{cl}(S) - \mathrm{int}(S)$. Atunci, exista $a \neq 0, a \in \mathbb{R}^n$ astfel incât $a^T x \geq a^T x_0$ oricare ar fi $x \in S$.



Functii convexe

Domeniu efectiv: notam $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. O functie scalara $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ are *domeniul efectiv* descris de multimea:

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\}.$$

Functie convexa : O functie f este *convexa* daca dom$f$ *este o multime convexa* si are loc inegalitatea:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

pentru orice $x_1, x_2 \in \text{dom} f$ si $\alpha \in [0,\ 1]$

- Daca in plus

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2),$$

$\forall x_1 \neq x_2 \in \text{dom} f$ si $\alpha \in (0,\ 1)$, atunci f functie *strict convexa*

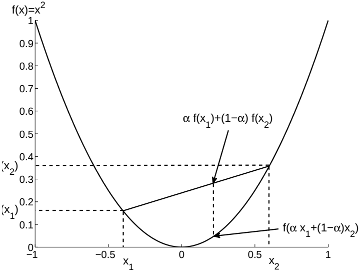
- Daca exista o constanta $\sigma > 0$ astfel incat

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2,$$

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$ si $\alpha \in [0,\ 1]$, atunci f functie *tare convexa*

Functii convexe

- Exemplu de functie convexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$



- Alte exemple de functii convexe
  - Functia definita de orice norma este convexa, i.e. $f(x) = \|x\|$ este convexa pe $\mathbb{R}^n$ (folositi definitia).
  - Functia $f(x) = -\log(x)$ este convexa pe $\mathbb{R}_{++}$.
  - Functia $f(x) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ este convexa pe $\mathbb{R}^n$.
  - Functia $f(X) = -\log\det(X)$ este convexa pe spatiul matricelor pozitiv definite S^n_{++} (dificil de aratat!).

• **Ineg alitatea lui Jensen** este o generalizare a convexitatii: f este convexa daca si numai daca dom$f$ este convexa si

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i)$$

pentru orice $x_i \in \text{dom} f$ si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ cu $\alpha_i \in [0,\ 1]$

• **Functie concava**: o functie $f(x)$ este *concava* daca $-f(x)$ este convexa (e.g. functia $f(x) = \log(x)$ este concava pe $\mathbb{R}_{++}$)

• **Remarca:** o functie $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ este convexa daca si numai daca restrictia domeniului sau la o dreapta (care intersecteaza domeniul) este, de asemenea, convexa. Cu alte cuvinte, f este convexa daca si numai daca oricare ar fi $x \in \text{dom} f$ si o directie $d \in \mathbb{R}^n$, functia scalara $g(t) = f(x + td)$ este convexa pe domeniul $\{t \in \mathbb{R} : x + td \in \text{dom} f\}$.

Functii convexe

- Exemplu restrictie domeniu la o dreapta: fie functia

$$f(X) = -log\ detX$$

avand domeniul de definitie dom$f = S^n_{++}$

Avem pentru orice $X \in S^n_{++}$ si $D \in S^n$:

$$g(t) = -log\ det(X + tD) = -log\ det\ X - log\ det\left(I + tX^{-\frac{1}{2}}DX^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -log\ det\ X - \sum_{i=1}^{n} log(1 + t\lambda_i),$$

unde λ_i sunt valorile proprii ale lui $X^{-\frac{1}{2}}DX^{-\frac{1}{2}}$. Din moment ce $-\log(t)$ este functie convexa, rezulta ca $g(t)$ este functie convexa si implicit $f(X)$ este convexa.

- Reamintim ca pentru o matrice $X \in S^n$ din DVS avem: $X = U\Sigma U^T$, unde U ortogonala, i.e. $U^T U = I_n$. Atunci definim $\Sigma^{1/2} = \mathrm{diag}(\sigma_i^{1/2})$ si

$$X^{1/2} = U\Sigma^{1/2}U^T$$

Functii convexe

Multimi subnivel si epigraful functiei.

• **Convexitate multimii subnivel**

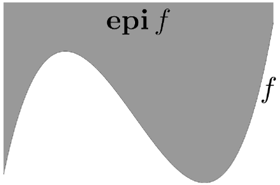
Pentru un scalar $c \in \mathbb{R}$, multimea subnivel $\{x \in \mathrm{dom} f : \ f(x) \leq c\}$ a unei functii convexe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este convexa.

• **Epigraful functiei**

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, atunci *epigraful* (numit si supragrafic) functiei este definit ca fiind urmatoarea multime:

$$\mathrm{epi} f = \left\{ [x^T \ t]^T \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in \mathrm{dom} f, \ \ f(x) \leq t \right\}.$$

• **Rezultat**: o functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este convexa daca si numai daca epigraful sau este o multime convexa.

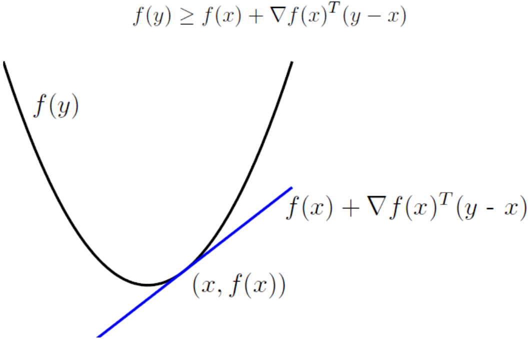


Functii convexe

Conditii de convexitate pentru functii continuu diferentiabile.

Conditii de ordinul I: daca $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ este continuu diferentiabila si dom$f$ este o multime convexa. Atunci, f este convexa daca si numai daca:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \nabla f(x_1)^T (x_2 - x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f.$$



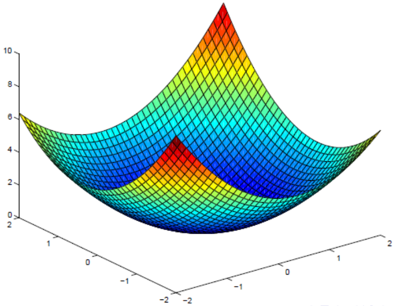
Functii convexe

Conditii de convexitate pentru functii continuu diferentiabile.

Conditii de ordinul II: daca $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ este de doua ori continuu diferentiabila si dom$f$ este multime convexa. Atunci f este convexa daca si numai daca pentru orice $x \in \text{dom} f$ matricea Hessiana este pozitiv semidefinita, adica:

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0 \quad \forall x \in \text{dom} f.$$

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0.$$



Functii convexe

Exemplu conditii de ordin I si II:

- Functia $f(x) = -\log(x)$ este convexa pe $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$ deoarece $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ oricare ar fi $x > 0$.
- Functia patratica $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + r$ este convexa pe $\mathbb{R}^n$ daca si numai daca $Q \succeq 0$, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ Hessiana $\nabla^2 f(x) = Q$ (daca Q este simetrica).
- Se observa ca orice functie afina este convexa si, de asemenea, concava.
- Conditia $\mathrm{dom} f$ multime convexa impusa in toate teoremele precedente este necesara. De exemplu, consideram functia $f(x) = 1/x^2$ avand $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multime neconvexa. Observam ca Hessiana $\nabla^2 f(x) = \frac{6}{x^4} \succeq 0$, dar functia nu este convexa.

Functii convexe

Operatii ce conserva convexitatea functiilor:

- Daca f_1 si f_2 sunt functii convexe si $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ atunci $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ este de asemenea convexa.
- Daca f este convexa atunci $g(x) = f(Ax + b)$ (adica compunerea unei functii convexe cu o functie afina) este de asemenea convexa:

$$\frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 = \frac{1}{2}x^T A^T Ax - b^T Ax - \frac{1}{2}b^T b$$

- Fie $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ astfel incât functia $f(\cdot, y)$ este convexa pentru orice $y \in S \subseteq R^m$. Atunci urmatoarea functie este convexa:

$$g(x) = \sup_{y \in S} f(x, y).$$

- Compunerea cu o functie convexa monotona unidimensionala: daca $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este convexa si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este convexa si monoton crescatoare, atunci functia $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de asemenea convexa.

Functii tari convexe

- Daca dom$f$ convex si exista o constanta $\sigma > 0$ a.i.

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) - \frac{\sigma}{2}\alpha(1-\alpha)\|x_1 - x_2\|^2,$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$ si $\alpha \in [0,\ 1]$, atunci f functie *tare convexa*

Lema 1: Fie o functie continuu differentiabila f (i.e. $f \in \mathcal{C}^1$), atunci relatia de convexitate tare este echivalenta cu:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\sigma}{2}\|x - y\|^2 \quad \forall x, y$$

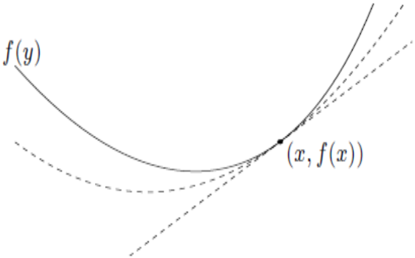
Lema 2: In cazul functiilor de doua ori diferentiabile (i.e. $f \in \mathcal{C}^2$), relatia de convexitate tare este echivalenta cu:

$$\nabla^2 f(x) \succeq \sigma I_n \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$$

Convexitate tare

- Daca f este tare convexa atunci:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{\sigma}{2}\|y-x\|^2$$



- Daca $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}^n$, atunci f are un punct de minim global unic:

$$\frac{\sigma}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f^* \leq \frac{1}{2\sigma}\|\nabla f(x)\|^2$$

- Mai mult functia

$$f(x) - \frac{\sigma}{2}\|x\|^2 \quad \text{este convexa}$$

Convexitate tare - exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o functie patratica, i.e.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + \langle q, x\rangle.$$

Observam expresia Hessianei $\nabla^2 f(x) = Q$

In concluzie, pentru functiile patratice, cu $Q \succ 0$, constanta de convexitate tare este:

$$\sigma = \lambda_{\min}(Q)$$

Exemplu: daca $Q = \mathrm{diag}([q_1 \ \ q_2])$, cu $q_1 > q_2 > 0$, atunci constanta de convexitate tare este $\sigma = q_2$.

Functii conjugate

Fie functia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, atunci functia *conjugata*, notata cu f^*, se defineste prin

$$f^*(y) = \max_{x \in dom\ f} \underbrace{y^T x - f(x)}_{F(x,y)}.$$

Functia f^* este convexa indiferent de proprietatile lui f.

Exemple:

- Pentru functia patratica convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x$, unde $Q \succ 0$, functia conjugata are expresia:

$$f^*(y) = \frac{1}{2} y^T Q^{-1} y.$$

- Pentru functia $f(x) = -\log x$, conjugata sa este data de expresia:

$$f^*(y) = \sup_{x>0}(xy + \log x) = \begin{cases} -1 - \log(-y) & \text{daca } y < 0 \\ \infty & \text{altfel.} \end{cases}$$