① Aflați param α și β a.î. prob de optimizare să aibă sol optimă non optim infinit

$\inf (\alpha x_1 + \boxed{2x_2 + 5x_3})^{C_B^T}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$2x_1 + \boxed{x_2 + 2x_3} = \beta$

$3x_1 + \boxed{x_2 + x_3} = 5$ $\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\quad b=\begin{pmatrix}\beta\\ 5\end{pmatrix}$

$\bar{x}^B = B^{-1}b = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\beta+10\\ \beta-5\end{pmatrix}$

• ca să fie admisibilă

$\Rightarrow x^B \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-\beta+10\\ \beta-5\end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases}-\beta+10\geq 0\\ \beta-5\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta\leq 10\\ \beta\geq 5\end{cases} \Rightarrow \beta\in[5,10$

• testul de optim

$Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$C_B^T = (2, 5)$ și $C_B^T \cdot Y - c = ?$

$(2\ 5)\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix} - (\alpha\ 2\ 5) = (5\ 2\ 5) -$

$(\alpha\ 2\ 5) = (5-\alpha\ \ 0\ \ 0)$ sol optimă

$5-\alpha\leq 0 \Rightarrow \alpha\geq 5$ pt $\alpha\geq 5$, $\beta\in(5,10]$

$\bar{x} = (0, -\beta+10, \beta-5)^T$

② $\inf \alpha x_1 + x_2 + 5x_3$ $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{cases}2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\\ \beta x_1 + x_2 + x_3 = 5\end{cases}$ $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\quad Y = B^{-1}A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ \beta & 1 & 1\end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix}-2+2\beta & 1 & 0\\ 2-\beta & 0 & 1\end{pmatrix}$

$C_B^T \cdot Y - C = (1\ 5)\begin{pmatrix}-2+2\beta & 1 & 0\\ 2-\beta & 0 & 1\end{pmatrix} - (2\ 1\ 5) =$

$= (-2+2\beta+3-5\beta\ \ 1\ \ 5) - (2\ 1\ 5)$

$= (5-2\beta\ \ 0\ \ 0) \Rightarrow \begin{cases}5-2\beta>0\\ -2+2\beta\leq 0\\ 2-\beta\leq 0\end{cases}$ contradicție,

au sol optim infinit

elem de pe col 1 sunt neg

③ Farkas

Fie $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $b\in\mathbb{R}^m$. Atunci doar o soluție:

a) $\exists x\in\mathbb{R}^n$ a.î. $Ax=b$, $x\geq 0$

b) $\exists u\in\mathbb{R}^m$ a.î. $A^Tu\geq 0$, $b^Tu<0$

Ex: Folosind lema lui Farkas, arătați că sistemul $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$ nu are sol pt $x,y,z\geq 0$

Sol: a) nu are sol $\Rightarrow \begin{cases}A^Tu\geq 0\\ b^Tu<0\end{cases}$ are sol

$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}\geq 0$ $\Rightarrow \begin{cases}u_1+3u_2\geq 0\\ 2u_1+u_2\geq 0\\ 3u_1+5u_2\geq 0\\ 5u_1+2u_2<0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}u_1=-1\\ u_2=2\end{matrix}$ verifică sim

$(5\ 2)\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}<0$

① $x_1^*=1,2$ $\quad x_2^*=0,2$ $\quad \min z = 28$

$x^*\in P$ și $u^*\in P$ sunt sol optime pt pb 1)

(proprietatea 2) $\Leftrightarrow (x^*)^T(C-A^Tu^*)=0$,

$(u^*)^T(Ax^*-b)=0 \Leftrightarrow x_j^*(c_j - A^{jT}, u^*)=0$

$u_i^*(A_i^Tx^*-b_i)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x_j^* v_j^*=0\ \forall j=\overline{1,n}\\ u_i^* w_i^*=0\ \forall i=\overline{1,m}\end{cases}$ $\quad ,\forall j=\overline{1,n}$ $\quad ,\forall i=\overline{1,m}$

Ex 1

$\begin{cases}\text{Min } z = 20x_1+20x_2\\ x_1+2x_2\geq 1\ /u_1\\ 2x_1+x_2\geq 2\ /u_2\\ 2x_1+3x_2\geq 3\ /u_3\\ 3x_1+2x_2\geq 5\ /u_5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Min } z = 20x_1+20x_2\\ x_1+2x_2-w_1=1\\ 2x_1+x_2-w_2=2\\ 2x_1+3x_2-w_3=3\\ 3x_1+2x_2-w_5=5\end{cases}$

Duala

$\text{Max } u_1+2u_2+3u_3+5u_5$

$u_1+2u_2+2u_3+3u_5\leq 20 \Leftrightarrow$

$2u_1+u_2+3u_3+2u_5\leq 20$

$u_1,u_2,u_3,u_5\geq 0$

$\begin{cases}\text{Max } u_1+2u_2+3u_3+5u_5\\ u_1+2u_2+2u_3+3u_5+v_1=20\\ 2u_1+u_2+3u_3+2u_5+v_2=20\\ u_1,u_2,u_3,u_5\geq 0\\ v_1,v_2\geq 0\end{cases}$

Tabela a ec x^*, u^* sol optime

$\begin{cases}x_1^*\cdot v_1^*=0\\ x_2^*\ v_2^*=0\\ u_1^* w_1^*=0\end{cases}$ $\quad \begin{cases}u_2^* w_2^*=0\\ u_3^* w_3^*=0\\ u_5\ w_5^*=0\end{cases}$

$1,2\ v_1^*=0 \Rightarrow v_1^*=0$

$0,2\ v_2^*=0 \Rightarrow v_2^*=0$

$u_1^*\ 0,6=0 \Rightarrow u_1^*=0$

$u_2^*\ 0,6=0 \Rightarrow u_2^*=0$

$u_3^*\cdot 0=0$

$u_5^*\ 0=0$

$w_1^* = x_1^*+2x_2^*-1 = 0,6>0$

$w_2^* = 2x_1^*+x_2^*-2 = 0,6>0$

$w_3^* = 2x_1^*+3x_2^*-3 = 0$

$w_5^* = 3x_1^*+2x_2^*-5 = 0$

Pb 2 devine:

$\begin{cases}0+0+2u_3^*+3u_5^*+0=20\\ 0+0+3u_3+2u_5^*+0=20\end{cases}$

$\begin{cases}2u_3^*+3u_5^*=20\\ 3u_3^*+2u_5^*=20\end{cases}$

$u_3^*=u_5^*=5 \Rightarrow z = 0+0+3\cdot 5+5\cdot 5 = 28>0$

$u^*=(0,0,5,5)$ sol optimă pt 2

x^* sol admisibilă ...
: x^* sol optimală $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in P \\ \inf(\max) = f(x^*) \\ x \in P \end{cases}$

...entală a dualității
...formulată sub formă canonică
... $\inf C^T x$
... $Ax \geq b$
... $x \geq 0$
...ală pentru 1)
$= \{x \in R^n / Ax \geq b, x \geq 0\}$ mult. sol. admis. 1)
$= \{u \in R^m / A^T u \leq C, u \geq 0\}$ — " — 6)

în R^n $H = \{x \in R / a^T x = b\}$ – semiplan
$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$
în $R^n \Leftrightarrow S = \{x \in R^n / a^T x \leq b\}$
...edru în R^n intersecție de semispații
$^n / Ax \leq b\}, A \in R^{m \times n}, b \in R^m$
$R^n / a_i^T x \leq b_i, i = \overline{1,m}\}$ a_i = linia i din A

...unui poliedru
...un punct extremal al poliedrului P dacă
$x^*, x_2 \neq x^*, x_1 + x_2 \in P, \lambda \in [0,1]$ a.î. $x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$
$\in R^n$ s.n. vârf al poliedrului P dacă $\exists\ C \in R^m$
$\leq C^T x, \forall x \in P$

...al/dual admisibilă
$Ax = b, x \geq 0$, x este sol de bază $\Leftrightarrow$
...ice formată cu coloanele liniar indep.
A în B a.î. $x^B = (B^{-1} b, 0)$. Baza b s.n.
...admisibilă $\Leftrightarrow B^{-1} b \geq 0$. Unei baze B primal
... îi corespunde x^B sol. adm. de bază.
$Ax = b, x \geq 0$. x este o sol de bază $\Leftrightarrow$
...trice formată cu coloanele liniar indep.
... A în B a.î. $x^B = (B^{-1} b, 0)$. Baza b
...este dual admisibilă $\Leftrightarrow (C^B)^T B^{-1} A - C^T \leq 0$
...admisibilă de bază
... sol. adm. de bază a probl. de optimizare 1
...rang $\bar{A} = n$, unde $\bar{A}$ este format din liniile
... A cu indicii n_i.
$= \{i_1 \ldots i_k\} \to A^T = \begin{bmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_k}^T \end{bmatrix}$ $\begin{cases} C^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$

...ul de optim (testul de optim)
...bază primal admisibilă. Dacă $z_j^B - C_j \leq 0$,
...tunci probl. 1 (de minimizare) are sol optimă
$(B^{-1} b, 0)$ unde $z_j^B = C^T B y_j = C_B^T B^{-1} a_j, j \in R$

...optim infinit
... bază primal admisibilă a problemei 1.
$\exists k \in R$ a.î. $z_k^B - C_k > 0$ și $y^k = B^{-1} a^k \leq 0$.
...re, probl. 1 are optim infinit.

și $y_k^B \not\leq 0$. Înlocuim col. r a lui B cu col a^k, unde $r \in B$ este det. astfel:

$\min \frac{x_i^B}{y_{ik}^B} = \frac{x_r^B}{y_{rk}^B}$. $i : y_{ik}^B > 0$

Fie $\tilde{B}$ matricea obținută după înlocuirea col. r în B, atunci: a) $\tilde{B}$ este inv și primal admisibilă
b) Sol de bază coresp bazei $\tilde{B}$ este „mai bună" decât sol de bază coresp. B
$f(\tilde{x}^B, 0) \leq f(\bar{x}^B, 0)$, unde
$f(x) = C^T x$.

(10) Lema substituției

Fie $B = (A^1, A^2 \ldots A^m)$ o matrice inv de dim. m și B^{-1}. Fie $\tilde{B}$ matricea obținută prin înlocuirea col. r a lui B cu vectorul A și $y = B^{-1} A$, atunci: a) $\tilde{B}$ este inv $\Leftrightarrow y_r \neq 0$
b) $\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) B^{-1}$, unde $E_r(\eta)$ este matricea unitate de ord m în care col r este înlocuită cu
$\eta = \left(-\frac{y_1}{y_2}, \ldots, -\frac{y_{r-1}}{y_r}, \frac{1}{y_r}, \frac{-y_{r+1}}{y_r} \ldots \frac{y_m}{y_r}\right) \Rightarrow E_r(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \eta_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \eta_m & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(11) Dualitate în optimizare liniară

1) $\inf C^T x$ — 2) $\sup b^T u$
$Ax \geq b$ — $A^T u \leq C$
$x \geq 0$ — $u \geq 0$
$A \in R^{m \times n}, C, x \in R^n, b, u \in R^m$
1, 2) pb. duale sub formă canonică
$P = \{x \in R^n / Ax \geq b, x \geq 0\}$
$D = \{u \in R^m / A^T u \leq C, u \geq 0\}$
1) $\inf C^T x$ — 2) $\sup b^T u$
$x \in P$ — $u \in D$

(12) Th slabă a ecarturilor complementare

Fie pb de optimizare 1 și 2 din 11. Cond. necesară și suficientă ca $x^* \in P$ și $u^* \in D$ să fie sol opt pt. pb. 1, 2 este ca:
$(x^*)^T (C - A^T u^*) = 0$
$(u^*)^T (Ax^* - b) = 0$

(13) Lema lui Farkas

Fie $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $C \in R^m$
Atunci una dintre relațiile:
a) $\exists x \in R^n$ a.î. $Ax = b, x \geq 0$
b) $\exists u \in R$ a.î. $A^T u \geq 0$, $b^T u < 0$

$= \begin{pmatrix} \beta & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ 5 \end{pmatrix} = (\beta - 5)$

• admisibilă $\Leftrightarrow$
$x^{-\beta} \geq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -\beta + 10 \\ \beta - 5 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} -\beta + 10 \geq 0 \\ \beta - 5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \leq 10 \\ \beta \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \beta \in [5, 10]$

• testul de optim
$Y = B^{-1} A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C_B^T = (2, 5)$ și $C_B^T \cdot Y - C = ?$
$(2\ 5) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (\alpha\ 2\ 5) =$
$(\cancel{5}\ 2\ 5) - (\alpha\ 2\ 5) = (5 - \alpha\ 0\ 0)$

sol optimă
$5 - \alpha \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 5$ pt $\alpha \geq 5$,
$\beta \in [5, 10]$, $\bar{x} = (0, -\beta + 10, \beta - 5)^T$

(F2) Farkas

Folosind lema lui Farkas, arătați că $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ nu are sol.

a) nu are sol $\Rightarrow \begin{cases} A^T u \geq 0 \\ b^T u < 0 \end{cases}$ are sol.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 3u_2 \geq 0 \\ 2u_1 + u_2 \geq 0 \\ 3u_1 + 5u_2 \geq 0 \\ 5u_1 + 2u_2 < 0 \end{cases}$ $-1 = u_1$, $1 = u_2$
$(5\ 2)(u_1\ u_2) < 0$

(L1) Fie $x \in P, u \in D \Rightarrow C^T x \geq b^T u$

Dem: $\left.\begin{matrix} Ax \geq b \\ u \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u^T A x \geq u^T b = b^T u$ (1)

$\left.\begin{matrix} A^T u \leq C \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^T A^T u \leq x^T C = C^T x$ (2)

1, 2 $\Rightarrow b^T u = C^T x$

(L2) Dacă $x^* \in P$, $u^* \in D$ a.î.
$C^T x^* = b^T u^* \Rightarrow$
x^* este sol optimă pt 5)
u^* este sol optimă pt 6

Dem: RA pp. că x^* nu e sol opt
$\exists x \in P$ a.î. $C^T x < C^T x^*$
Dar $C^T x^* \leq b^T u^*$ ...

5) $x, C \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$: $\inf C^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$
6) duala lui 5: $\sup b^T u$, $A^T u \leq C$