CONȚINUTUL CURSULUI #6:

Fie $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcție de clasă $C^1(D)$, $F = F(x)$, cu $F = (F_1, F_2, ..., F_n)^T$ și $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D$. Considerăm sistemul de ecuații neliniare

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

sau scris pe componente

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Metoda punctului fix. Fie ecuația

$$G(x) = x \quad \text{cu} \quad G = (G_1, G_2, ..., G_n)^T \tag{3}$$

o formă echivalentă a ecuației (1).

Definiția (III.1.)

Spunem că funcția $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ admite punct fix dacă $\exists x^* \in D$ astfel încât $G(x^*) = x^*$.

Teorema (III.1. Teorema de medie)

Presupunem că $G : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clasă $C^1(D)$, D o mulțime convexă. Atunci pentru $\forall x, y \in D$ avem

$$\| G(x) - G(y) \| \le \sup_{0 \le t \le 1} \| G'((1-t)x + ty) \| \| x - y \| \tag{4}$$

Teorema (III.2.)

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime convexă și $G : D \to \mathbb{R}^n$ o funcție vectorială astfel încât $G(x) \in D, \forall x \in D$. Mai mult, dacă $\| G'(x) \| \le q, q \in (0,1), \forall x \in \mathring{D}$, atunci G admite un unic punct fix $x^* \in D$, iar șirul definit prin

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}), \; k \ge 1, x^{(0)} \in D \text{ arbitrar} \tag{5}$$

este convergent la x^* și are loc următoarea estimare

$$\| x^{(k)} - x^* \| \le \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \tag{6}$$

Demonstrație: Observăm că D este o mulțime convexă, aceasta înseamnă că odată cu două puncte x, y din D și segmentul $[x, y]$ se conține în D. Segmentul $[x, y]$ este descris de punctele de forma $(1-t)x + ty$, $t \in [0, 1]$. Atunci când t parcurge intervalul $[0, 1]$ punctul curent $c := (1-t)x + ty$ parcurge segmentul $[x, y]$. Fie

$$x^{(k)} = G(x^{k-1}), k \ge 1, \; x^{(0)} \in D \text{ arbitrar} \tag{7}$$

Conform ipotezei că $G(x) \in D \Rightarrow x^{(k)} \in D, \forall k \ge 0$. Mai mult

$$\begin{aligned} \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| &= \| G(x^{(k)}) - G(x^{(k-1)}) \| \\ &\le \sup_{0 \le t \le 1} \| G'((1-t)x + ty) \| \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \\ &\le q \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|, q \in (0, 1) \end{aligned} \tag{8}$$

S-a ținut cont de formula (4) și de ipoteza teoremei, $\| G'(x) \| \le q$, $\forall x \in \mathring{D}, q \in (0, 1)$. Se obține iterativ următoarea estimare

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \le q^k \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

Vom demonstra în continuare că șirul $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ este șir Cauchy, i.e. $\| x^{(m)} - x^{(n)} \| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0, m \geq n$. Se observă că

$$\begin{aligned} \| x^{(m)} - x^{(n)} \| & \leq \| x^{(m)} - x^{(m-1)} \| + \| x^{(m-1)} - x^{(m-2)} \| + ... + \\ & + \| x^{(n+1)} - x^{(n)} \| \leq (q^{m-1} + q^{m-2} + ... + q^n) \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \end{aligned} \tag{9}$$

dar

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{m-1} q^k & = \sum_{k=0}^{m-1} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ & = \frac{q^m - 1}{q-1} - \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^n - q^m}{1-q} \leq \frac{q^n}{1-q} \end{aligned} \tag{10}$$

rezultă

$$\| x^{(m)} - x^{(n)} \| \leq \frac{q^n}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \tag{11}$$

Cum $q^n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ rezultă $\| x^{(m)} - x^{(n)} \| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$. În spațiul $\mathbb{R}^n$ orice șir Cauchy este convergent. Fie $z = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$, cum D este o mulțime închisă rezultă $z \in D$. Mai mult, ținând cont de faptul că G este continuă rezultă

$$\lim_{k\to\infty} G(x^{(k)}) = G(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}) \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = G(\lim_{k\to\infty} x^{(k)}) \tag{12}$$

Deci $z = G(z)$, astfel că z este punct fix pentru G. Presupunem că $\exists y^* \in D$ un alt punct fix pentru G. Atunci

$$\| x^* - y^* \| = \| G(x^*) - G(y^*) \| \leq q \| x^* - y^* \| < \| x^* - y^* \|$$

Am obținut o contradicție, deci x^* este unic. Estimarea din (6) rezultă imediat dacă în (11) considerăm $m \to \infty$. □

Exemplu 1 Fie sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 - cos(x_2x_3) - \dfrac{1}{2} = 0 & (E_1) \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + sin(x_3) + 1.06 = 0 & (E_2) \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \dfrac{10\pi - 3}{3} = 0 & (E_3) \end{cases} \tag{13}$$

1. Să se aducă sistemul la forma punctului fix $G(x) = x$.
2. Să se verifice ipotezele teoremei III.1., unde $D = \{(x_1, x_2, x_3) / -1 \leq x_i \leq 1, \forall i = \overline{1,3}, \}$ $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^T$.
3. Să se calculeze soluția aproximativă a sistemului $F(x) = 0$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-5}$.

1. Extragem componenta x_i din ecuația $(E_i), i = \overline{1,3}$:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{cos(x_2x_3)}{3} + \dfrac{1}{6} =: G_1(x_1, x_2, x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06} - 0.1 =: G_2(x_1, x_2, x_3) \\ x_3 = \dfrac{1}{20}\left(-e^{-x_1x_2} - \dfrac{10\pi - 3}{3}\right) =: G_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{14}$$

Funcția G are forma:

$$G(x) = \left(\frac{cos(x_2x_3)}{3} + \frac{1}{6}, \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06} - 0.1, \frac{1}{20}\left(-e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{3}\right)\right)$$

2. Vom considera $\| \cdot \|_\infty$. Să demonstrăm că $G(x) \in D, \forall x \in D$, i.e. $|G_i(x_1, x_2, x_3)| \leq 1, i = \overline{1,3}$.

$$|G_1(x_1, x_2, x_3)| = \left|\frac{1}{3}cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}\right| \leq \frac{1}{3}cos(0) + \frac{1}{6} = 0.5 \leq 1$$

$$\begin{aligned} |G_2(x_1, x_2, x_3)| & = \left|\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06} - 0.1\right| \\ & \leq \frac{1}{9}\sqrt{1 + sin1 + 1.06} - 0.1 = 0.089 \leq 1 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} |G_3(x_1, x_2, x_3)| = \left|\frac{1}{20}\left(-e^{-x_1x_2} - \frac{10\pi - 3}{3}\right)\right| = \frac{1}{20}\left(e^{-x_1x_2} + \frac{10\pi - 3}{3}\right) \\ \leq \frac{1}{20}\left(e + \frac{10\pi - 3}{3}\right) \approx 0.61 \leq 1 \end{aligned}$$

Calculăm derivatele parțiale $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}(x), i, j = \overline{1,3}$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x) = 0 & & \frac{\partial G_1}{\partial x_2}(x) = -x_3\frac{sin(x_2x_3)}{3} \\ & \frac{\partial G_1}{\partial x_3}(x) = -x_2\frac{sin(x_2x_3)}{3} & & \frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x) = \frac{x_1}{9\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06}} \\ & \frac{\partial G_2}{\partial x_2}(x) = 0 & & \frac{\partial G_2}{\partial x_3}(x) = \frac{cos(x_3)}{18\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06}} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1}(x) = \frac{1}{20}x_2 e^{-x_1x_2} \quad \frac{\partial G_3}{\partial x_2}(x) = \frac{1}{20}x_1 e^{-x_1x_2} \quad \frac{\partial G_3}{\partial x_3}(x) = 0 \qquad (17)$$

Evaluam norma $\parallel G'(x) \parallel_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} \sum_{j=1}^{3} \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right|$.

$$\left|\frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_1}{\partial x_2}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_1}{\partial x_3}(x)\right| =$$
$$= 0 + \left|-x_3\frac{sin(x_2x_3)}{3}\right| + \left|-x_2\frac{sin(x_2x_3)}{3}\right| \leq \frac{1}{3}|x_3| + \frac{1}{3}|x_2| \leq \frac{2}{3}$$

$$\left|\frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial x_2}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_2}{\partial x_1}(x)\right| =$$
$$= \left|\frac{x_1}{9\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06}}\right| + \left|\frac{cos(x_3)}{18\sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06}}\right|$$
$$\leq \frac{1}{9\sqrt{0 - sin1 + 1.06}} + \frac{cos0}{18\sqrt{0 - sin1 + 1.06}} \approx 0.2377 + 0.1188 < 0.357$$

$$\left|\frac{\partial G_3}{\partial x_1}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_3}{\partial x_2}(x)\right| + \left|\frac{\partial G_3}{\partial x_1}(x)\right| =$$
$$\left|\frac{1}{20}x_2 e^{-x_1x_2}\right| + \left|\frac{1}{20}x_1 e^{-x_1x_2}\right| \leq \frac{e}{20} + \frac{e}{20} \approx 0.1359 + 0.1359 < 0.272$$

Rezultă

$$\parallel G'(x) \parallel_\infty < max\{0.667, 0.357, 0.272\} = 0.667$$

Alegem $q = 0.667 < 1$.

3. Conform teoremei III.2. funcția G admite un unic punct fix, iar șirul construit conform metodei de punct fix este convergent. Datorită faptului că șirul $(x^{(k)})_{k>\geq 0}$ este șir Cauchy, distanța dintre două elemente consecutive va tinde la zero. Astfel că pentru evaluarea erorii vom alege drept criteriu de oprire condiția $\parallel x^{(k)} - x^{(k-1)} \parallel_\infty < \varepsilon$. Cum se va vedea și din exemplu eroarea furnizată de relația (6) nu reflectă eroarea reală. Soluția exactă a sistemului este $x^* = (0.5, 0, -\frac{\pi}{6})^T$.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\frac{q^k}{1-q} \parallel x^{(1)} - x^{(0)} \parallel_\infty$	$\parallel x^{(k)} - x^{(k-1)} \parallel_\infty$	$\parallel x^* - x^{(k)} \parallel_\infty$
0	0.1	0.1	-0.1	-	-	0.4235
1	0.5	0.094	-0.5231	0.8474	0.4231	0.0094
2	0.5	2.56e-05	-0.5233	0.5652	0.0094	0.0002
3	0.5	1.23e-05	-0.5236	0.3770	0.0002	1.24e-05
x^*	0.5	0	-0.5236	-	-	-