Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a V-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Emailuri: c.muresan@yahoo.com, cmuresan11@gmail.com

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

În cele ce urmează vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

1 Mic mnemonic de definiţii şi rezultate din curs

Fie A o mulţime oarecare. Amintim că o *relaţie binară pe A* este o submulţime a produsului cartezian $A \times A$, produs notat şi A^2. Deci relaţiile binare sunt mulţimi, aşadar li se pot aplica operaţiile de reuniune şi intersecţie, precum şi relaţia de incluziune, cu aceleaşi semnificaţii ca pentru orice mulţimi. Desigur, A^2 este o relaţie binară pe A, anume cea mai mare relaţie binară pe A, în sensul incluziunii. De acum încolo, prin notaţia $(a, b) \in A^2$ vom înţelege: $a \in A$ şi $b \in A$.

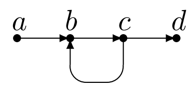
Dacă R şi S sunt două relaţii binare pe A, atunci, prin definiţie, *compunerea* lor este următoarea relaţie binară pe A: $R \circ S = \{(a, c) \in A^2 \mid (\exists\, b \in A)\, (a, b) \in S \text{ şi } (b, c) \in R\}$. De asemenea, pentru orice n natural, R^n este o relaţie binară pe A, definită prin: $R^0 = \Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ (*diagonala lui A*) şi, pentru orice n natural, $R^{n+1} = R^n \circ R$. Este evident că Δ_A este element neutru la compunerea de relaţii binare pe A (atât la stânga, cât şi la dreapta), şi deci $R^1 = R$.

O relaţie binară R pe A este *tranzitivă* ddacă, pentru orice elemente $a, b, c \in A$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, atunci $(a, c) \in R$. Este imediat că orice intersecţie nevidă de relaţii binare tranzitive pe A este o relaţie binară tranzitivă pe A şi că A^2 este o relaţie binară tranzitivă pe A (care include orice altă relaţie binară pe A), iar de aici deducem că, pentru orice relaţie binară S pe A, există o cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe S (cea mai mică în sensul incluziunii), şi anume intersecţia tuturor relaţiilor binare tranzitive pe A care includ pe S. Această cea mai mică relaţie binară tranzitivă pe A care include pe S se notează cu $T(S)$ şi se numeşte *închiderea tranzitivă a relaţiei* S. Se demonstrează că $T(S) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$. În cazul particular în care A este o mulţime finită cu n elemente, se arată că $T(S) = \bigcup_{k=1}^{n} S^k$.

2 Lista de subiecte

Exerciţiul 2.1. *Considerăm sistemul formal al calculului cu predicate. Fie signatura* $\tau = (1; 2; \emptyset)$ *şi structura de ordinul I de această signatură* $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}; R^{\mathcal{A}}; \emptyset)$, *unde* $A = \{a, b, c, d\}$ *este o mulţime cu* 4 *elemente, iar funcţia* $f^{\mathcal{A}} : A \to A$ *şi relaţia binară* $R^{\mathcal{A}}$ *pe* A *vor fi notate respectiv cu* f *şi* R, *şi sunt definite prin:* $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = d$, $f(d) = a$ *(vezi tabelul de mai jos) şi* $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\} \subset A^2$ *(vezi reprezentarea grafică de mai jos). Să se calculeze valorile de adevăr ale enunţurilor:* $\exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))$ *şi* $\exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))$.

x	a	b	c	d
$f(x)$	b	c	d	a

$R :$ 

Rezolvare: Amintim că, pentru orice $t, u \in A$:

$$||R(t, u)|| = \begin{cases} 1, & \text{dacă } (t, u) \in R, \\ 0, & \text{dacă } (t, u) \notin R. \end{cases}$$

Valoarea de adevăr a primului enunţ este:

$$||\exists\, x\, (R(x, f(x)) \wedge R(f(x), x))|| =$$

$$\bigvee_{t\in A} (||R(t, f(t))|| \wedge ||R(f(t), t)||) = 1,$$

pentru că:

$$||R(b, f(b))|| \wedge ||R(f(b), b)|| = ||R(b, c)|| \wedge ||R(c, b)|| = 1 \wedge 1 = 1.$$

Al doilea enunţ are valoarea de adevăr:

$$||\exists\, x\, \forall\, y\, (R(y, f(f(x))) \vee R(f(x), y))|| =$$

$$\bigvee_{t\in A} \bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(t)))|| \vee ||R(f(t), u)||) =$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), u)||)\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), u)||)\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), u)||)\right) \vee$$

$$\left(\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), u)||)\right) =$$

$$0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0,$$

pentru că:

$$||R(a, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), a)|| = ||R(a, c)|| \vee ||R(b, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(a)))|| \vee ||R(f(a), u)||) = 0$;

$$||R(a, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), a)|| = ||R(a, d)|| \vee ||R(c, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge_{u\in A} (||R(u, f(f(b)))|| \vee ||R(f(b), u)||) = 0$;

$$||R(a, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), a)|| = ||R(a, a)|| \vee ||R(d, a)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge\limits_{u \in A} (||R(u, f(f(c)))|| \vee ||R(f(c), u)||) = 0$;

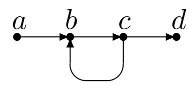
$$||R(d, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), d)|| = ||R(d, b)|| \vee ||R(a, d)|| = 0 \vee 0 = 0,$$

deci $\bigwedge\limits_{u \in A} (||R(u, f(f(d)))|| \vee ||R(f(d), u)||) = 0$.

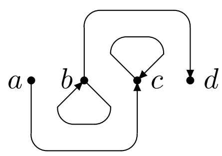
Exerciţiul 2.2. *Să se calculeze închiderea tranzitivă a relaţiei R din enunţul Exerciţiului 2.1.*

Rezolvare: Cum mulţimea A are 4 elemente, rezultă că închiderea tranzitivă a lui R este: $T(R) = \bigcup\limits_{k=1}^{4} R^k = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$.

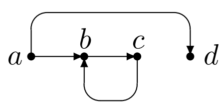
Să ne amintim că $R = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, d)\}$:

R :


$R^2 = R \circ R = \{(x, z) \in A^2 | (\exists\, y \in A)\, (x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R\} = \{(a, c), (b, b), (b, d), (c, c)\}$:

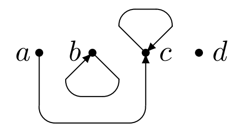
R^2 :


$R^3 = R^2 \circ R = \{(x, z) \in A^2 | (\exists\, y \in A)\, (x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R^2\} = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, b)\}$:

R^3 :


$R^4 = R^3 \circ R = \{(x, z) \in A^2 | (\exists\, y \in A)\, (x, y) \in R$ şi $(y, z) \in R^3\} = \{(a, c), (b, b), (c, c)\}$:

R^4 :



Prin urmare, $T(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),$ $(b,c),(b,d),(c,b),(c,c),(c,d)\}$:

$T(R)$: