

## CURSUL 8: GRUPURI DE PERMUTĂRI

G. MINCU

### 1. GRUPURI DE PERMUTĂRI

Reamintim din cursul 5 faptul că, dată fiind o mulțime nevidă  $A$ ,  $S_A = \{f \in A^A : f \text{ este bijectivă}\}$  este grup în raport cu operația de compunere.

Noi vom face în acest curs referire la grupurile  $S_n \stackrel{\text{not}}{=} S_{\{1,2,\dots,n\}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Observația 1.** Pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  avem  $|S_n| = n!$ .

**Observația 2.**  $S_n$  este ciclic pentru  $n \in \{1, 2\}$ .

$S_n$  este necomutativ pentru orice  $n \geq 3$ .

### 2. DESCOMPUNERI ALE PERMUTĂRILOR

**Definiția 3.** O permutare  $\sigma \in S_n$  se numește *ciclu* dacă există  $k \in \mathbb{N}^*$  și  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  astfel încât  $\sigma(i_r) = i_{r+1}$  pentru orice  $r \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ ,  $\sigma(i_k) = i_1$ , iar  $\sigma(j) = j$  pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Notăm un astfel de ciclu prin  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ , numărul  $k$  se numește *lungimea* ciclului, iar mulțimea  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  poartă numele de *orbita* ciclului.

**Observația 4.**  $(i_1, i_2, \dots, i_k)^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \dots, i_1)$ .

**Observația 5.** Permutarea inversă unui ciclu este tot un ciclu!

**Definiția 6.** Numim *transpoziție* orice ciclu de lungime doi.

**Observația 7.**  $(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k)$ , deci orice ciclu este produs de transpoziții.

**Definiția 8.** Două cicluri din  $S_n$  se numesc *disjuncte* dacă orbitele lor sunt disjuncte.

**Propoziția 9.** Orice două cicluri disjuncte comută.

*Demonstrație:* Fie  $c_1, c_2 \in S_n$  două cicluri disjuncte și  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Întrucât orbitele ciclurilor considerate sunt disjuncte,  $i$  nu poate aparține ambelor orbite.

Dacă  $c_1(i) = i$ , atunci  $(c_1 c_2)(i) = c_1(c_2(i)) = c_2(i) = c_2(c_1(i)) =$

$(c_2c_1)(i)$ .

Dacă  $c_2(i) = i$ , atunci  $(c_2c_1)(i) = c_2(c_1(i)) = c_1(i) = c_1(c_2(i)) = (c_1c_2)(i)$ .  $\square$

**Observația 10.** Calcule similare celor din demonstrația propoziției 9 conduc la concluzia că pentru orice cicluri disjuncte<sup>1</sup>  $c_1, c_2, \dots, c_r$  și pentru orice  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  există  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  astfel încât  $(c_1c_2 \dots c_r)(k) = c_j(k)$ .

**Teorema 11.** Orice permutare din  $S_n$  se poate scrie ca produs de cicluri disjuncte. Abstracție făcând de ordinea factorilor, această scriere este unică.

*Demonstrație:* Pentru  $\sigma \in S_n$  notăm  $\mathcal{M}_\sigma = \{k : \sigma(k) \neq k\}$ . Vom demonstra prin inducție după  $m = |\mathcal{M}_\sigma|$  că orice permutare  $\sigma$  se poate scrie în mod unic ca produs de cicluri disjuncte ale căror orbite sunt conținute în  $\mathcal{M}_\sigma$ .

Dacă  $e = c_1c_2 \dots c_r$  cu factorii din membrul drept cicluri disjuncte, atunci, conform observației 10,  $c_1 = c_2 = \dots = c_r = e$ . Acest lucru probează afirmația teoremei pentru  $m = 0$ .

Să considerăm acum o permutare  $\sigma \in S_n$  cu  $m = |\mathcal{M}_\sigma| > 0$ . Există atunci  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  cu  $\sigma(k) \neq k$ . Cum  $k_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma(k), \sigma^2(k), \dots\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $k_\sigma$  este finită, deci există  $i < j$  astfel încât  $\sigma^i(k) = \sigma^j(k)$ , de unde  $\sigma^{j-i}(k) = k$ . Prin urmare,  $\{t \in \mathbb{N}^* : \sigma^t(k) = k\} \neq \emptyset$ ; fie  $s$  cel mai mic element al acestei mulțimi. Este ușor de probat (temă!) relația  $k_\sigma = \{k, \sigma(k), \dots, \sigma^{s-1}(k)\}$ ; punând  $c \stackrel{\text{not}}{=} (k, \sigma(k), \dots, \sigma^{s-1}(k))$ , constatăm că avem  $\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma} \subset \mathcal{M}_\sigma \setminus \{k\}$ , deci  $|\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma}| < |\mathcal{M}_\sigma|$ . Conform ipotezei de inducție,  $c^{-1}\sigma$  se scrie ca un produs  $c_1c_2 \dots c_r$  de cicluri disjuncte cu orbitele conținute în  $\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma}$ ; drept urmare,  $cc_1c_2 \dots c_r$  este o descompunere a lui  $\sigma$  în produs de cicluri disjuncte cu orbitele incluse în  $\mathcal{M}_\sigma$ .

Pentru partea de unicitate, să considerăm și scrierea  $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_t$  ca produs de cicluri disjuncte. Având în vedere observația 10, există  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  pentru care  $\sigma(k) = \gamma_j(k)$ . După o eventuală renumerotare, putem considera că  $j = 1$ . Ciclurile  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$  fiind disjuncte,  $c^u(k) = \sigma^u(k) = \gamma_1^u(k)$  pentru orice  $u \in \mathbb{Z}$ , de unde  $\gamma_1 = c$ . Compunând acum relația  $cc_1c_2 \dots c_r = \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_t$  cu  $c^{-1}$ , obținem  $c_1c_2 \dots c_r = \gamma_2\gamma_3 \dots \gamma_t$ . În virtutea ipotezei de inducție,  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\} = \{\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_t\}$ . Ținând cont și de unicitatea deja probată a scrierii lui  $e$ , demonstrația se încheie.  $\square$

<sup>1</sup> sau chiar permutări arbitrare disjuncte, noțiunea definindu-se ca și în cazul ciclurilor

**Corolarul 12.** Orice permutare din  $S_n$  se poate scrie ca produs de transpoziții.

**Observația 13.** Spre deosebire de descompunerea în produs de cicluri disjuncte, descompunerea unei permutări în produs de transpoziții nu este unică.

**Observația 14.**  $S_n = \langle \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\} \rangle$ .

**Temă:** Demonstrați că:

- i)  $S_n = \langle (1, 2), (1, 3), \dots, (1, n) \rangle$ .
- ii)  $S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle$ .
- iii)  $S_n = \langle (1, 2), (1, 2, \dots, n) \rangle$ .

### 3. PERMUTĂRI PARE ȘI IMPARE. SIGNATURĂ

**Definiția 15.** Fie  $\sigma \in S_n$ ,  $n \geq 2$ . O pereche  $(i, j)$ , unde  $1 \leq i < j \leq n$  se numește *inversiune* a lui  $\sigma$  dacă  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Definiția 16.** Permutarea  $\sigma \in S_n$  se numește *pară* dacă are un număr par de inversiuni;  $\sigma$  se numește *impară* dacă are un număr impar de inversiuni.

**Propoziția 17.** Orice transpoziție este permutare impară.

*Demonstrație:* Inversiunile transpoziției  $(i, j)$ , unde  $1 \leq i < j \leq n$ , sunt  $(i, k)$ ,  $k \in \{i+1, i+2, \dots, j\}$  și  $(l, j)$ ,  $l \in \{i+1, i+2, \dots, j-1\}$ ; numărul acestora este  $(j-i) + (j-1-i) = 2(j-i) - 1$ , care este impar.  $\square$

**Definiția 18.** Prin *signatura* permutării  $\sigma \in S_n$ ,  $n \geq 2$ , înțelegem numărul

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

**Observația 19.** În produsul din definiția 18 se simplifică de fapt toți numitorii și toți numărătorii, la numărători rămânând câte un -1 de fiecare dată când  $\sigma(j) - \sigma(i) < 0$ . Prin urmare,

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Numărul inversiunilor lui } \sigma}$$

**Propoziția 20.** Pentru orice  $\sigma, \tau \in S_n$  are loc relația  $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$ .

**Corolarul 21.**  $\varepsilon$  este morfism de grupuri de la  $S_n$  la  $(\{-1, 1\}, \cdot)$ .

**Corolarul 22.** i)  $\varepsilon(e) = 1$ .

ii) Pentru orice  $\sigma \in S_n$  avem  $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$ .

**Observația 23.**  $\ker \varepsilon$  constă în permutările pare din  $S_n$ .

**Corolarul 24.** Permutările pare din  $S_n$  constituie un subgrup normal al lui  $S_n$ .

**Notăm** subgrupul permutărilor pare din  $S_n$  cu  $A_n$ .

**Definiția 25.**  $A_n$  se numește *grupul altern* de grad  $n$ .

**Corolarul 26.**  $\frac{S_n}{A_n} \simeq \{-1, 1\}$ .

*Demonstrație:* Aplicăm corolarul 21, observația 23 și teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri.  $\square$

**Corolarul 27.** Pentru orice  $n \geq 2$  avem  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ .

**Corolarul 28.** i) Orice ciclu de lungime pară este impar.  
ii) Orice ciclu de lungime impară este par.

*Demonstrație:* Aplicăm observația 7 și propozițiile 17 și 20.  $\square$

#### 4. ORDINUL UNEI PERMUTĂRI

**Observația 29.** Ordinul oricărui ciclu este egal cu lungimea sa.

*Demonstrație:* Considerând un ciclu  $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in S_n$ , constatăm că  $\sigma^j(i_1) = i_{j+1}$ , deci  $\sigma^j \neq e$ , pentru orice  $j < k$ . Demonstrația se încheie observând că  $\sigma^k = e$ .  $\square$

**Corolarul 30.** Orice transpoziție are ordinul 2.

**Propoziția 31.** Ordinul unei permutări  $\sigma \in S_n$  este egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor disjuncte din descompunerea sa standard.

*Demonstrație:* Fie  $\sigma \in S_n$  și  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_r$  descompunerea acesteia în produs de cicluri disjuncte. Notăm  $t_j = \text{ord } c_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ , și  $m = [t_1, t_2, \dots, t_r]$ . Conform propoziției 9, avem  $\sigma^t = c_1^t c_2^t \dots c_r^t$  pentru orice  $t \in \mathbb{Z}$ . Prin urmare,  $\sigma^m = e$ , iar  $\sigma^t = e$  dacă și numai dacă  $c_j^t = e$  pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  dacă și numai dacă  $\text{ord } c_j | t$  pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, r\}$  dacă și numai dacă  $m | t$ . Afirmatia este acum consecință a propoziției 4 din cursul 7.  $\square$

#### 5. ORICE GRUP SE SCUFUNDĂ ÎNTR-UN GRUP DE PERMUTĂRI

Așa cum arată și titlul paragrafului, orice grup poate fi regăsit ca subgrup al unui grup de permutări. Acest lucru este consecință a următoarei teoreme a lui Cayley:

**Teorema 32.** Orice grup  $G$  este izomorf cu un subgrup al lui  $S_G$ .

*Demonstrație:* Considerăm funcția  $\varphi : G \rightarrow S_G$ ,  $\varphi(g) = h_g$ , unde  $h_g : G \rightarrow G$ ,  $h_g(x) = gx$ . Întrucât  $h_{g^{-1}} = h_g^{-1}$ ,  $h_g$  este într-adevăr un element al lui  $S_G$ , deci  $\varphi$  este corect definită.

Pentru  $g, g', x \in G$  avem  $h_{gg'}(x) = (gg')x = g(g'x) = h_g(h_{g'}(x)) = (h_g h_{g'})(x)$ , de unde  $h_{gg'} = h_g \circ h_{g'}$ . De aici obținem faptul că  $\varphi$  este morfism de grupuri.

Dacă  $g, g' \in G$  sunt astfel încât  $h_g = h_{g'}$ , atunci  $g = h_g(e) = h_{g'}(e) = g'$ , deci morfismul  $\varphi$  este injectiv.  $\square$

**Corolarul 33.** Orice grup cu  $n$  elemente este izomorf cu un subgrup al lui  $S_n$ .

#### BIBLIOGRAFIE

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.