Logică Matematică şi Computaţională
Cursul III

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Să ne amintim aceste notații uzuale

Notație

Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, notăm cu $\overline{a, b}$ *segmentul din* $\mathbb{Z}$ *de capete* a *și* b:

$$\overline{a, b} := \{k \in \mathbb{Z} \mid a \leq k \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, a+2, \ldots, b-1, b\}, & \text{dacă } a \leq b \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$$

Notație

Pentru orice mulțime T, se notează cu $\mathcal{P}(T)$ *mulțimea părților lui* T, i. e. mulțimea submulțimilor lui T:

$$\mathcal{P}(T) := \{X \mid X \subseteq T\}.$$

Notație

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecție cu B.

Notație (putere a unei mulțimi)

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B: $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$.

Familii arbitrare de elemente, familii arbitrare de mulțimi

- Ce este un șir de numere reale indexat de $\mathbb{N}$? Un *șir* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ este o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, se notează $x_n := f(n) \in \mathbb{R}$.
- Ce este o familie arbitrară de numere reale? Fie I o mulțime arbitrară. Ce este o familie de numere reale indexată de I? O *familie* $(x_i)_{i\in I} \subseteq \mathbb{R}$ este o funcție $f : I \to \mathbb{R}$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in \mathbb{R}$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

Dată o mulțime arbitrară A:

- ce este un șir de elemente ale lui A indexat de $\mathbb{N}$?
- ce este o familie arbitrară de elemente ale lui A?

Înlocuind mai sus pe $\mathbb{R}$ cu A, se obțin definițiile acestor noțiuni.

- Ce este un șir de mulțimi indexat de $\mathbb{N}$?
- Ce este o familie arbitrară de mulțimi?

Egalitatea între familii de elemente

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulțimi arbitrare A, pentru că există o singură funcție de la $\emptyset$ la A (a se vedea și mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăși.

Fie I și A două mulțimi nevide, iar $(a_i)_{i\in I}$ și $(b_i)_{i\in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Conform celor menționate anterior, familiile de elemente din A indexate de I sunt, prin definiție, funcții de la I la A, iar notația lor ca mai sus se adoptă pentru comoditate:

- $(a_i)_{i\in I} = f : I \to A$, unde, pentru orice $i \in I$, $f(i) = a_i$
- $(b_i)_{i\in I} = g : I \to A$, unde, pentru orice $i \in I$, $g(i) = b_i$

Egalitatea între familii de elemente

Egalitatea de funcții semnifică egalitatea domeniilor și a codomeniilor (valabilă pentru f și g, pentru că au ambele domeniul I și codomeniul A) și *egalitatea punctuală*, adică egalitatea în fiecare punct: două funcții cu același domeniu și același codomeniu sunt egale ddacă sunt egale în fiecare punct al domeniului lor comun:

$$f = g \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \ f(i) = g(i).$$

Deci ce semnifică egalitatea a două familii de elemente din aceeași mulțime indexate de aceeași mulțime? *Egalitatea pe componente:* cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I} \quad \text{ddacă,} \quad \text{pentru orice } i \in I, \ a_i = b_i.$$

- **Caz particular:** cazul finit nevid: $I = \overline{1, n}$, cu n natural nenul:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad \text{ddacă} \quad \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ \quad \vdots \\ a_n = b_n. \end{cases}$$

Familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime arbitrară. Se numește *șir de submulțimi ale lui T indexat de $\mathbb{N}$* o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, se notează $A_n := f(n) \in \mathcal{P}(T)$, iar șirul de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Scriem $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{P}(T)$.

Definiție

Fie T și I două mulțimi arbitrare. Se numește *familie de submulțimi ale lui T indexată de I* o funcție $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulțimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificația că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulțimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Putem generaliza definițiile anterioare la șiruri de mulțimi oarecare și familii de mulțimi oarecare, nu neapărat părți ale unei mulțimi precizate, dar vom avea nevoie de acea definiție mai cuprinzătoare a noțiunii de funcție, care permite unei funcții f definite pe $\mathbb{N}$, respectiv pe I, să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulțime), anume clasa tuturor mulțimilor în acest caz.

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.
Se definesc următoarele operații:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcup_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ și } x \in A_i)\}$$

- *intersecția familiei* $(A_i)_{i \in I}$ este mulțimea notată $\bigcap_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Operații cu familii arbitrare de mulțimi

Definiție (continuare)

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit și *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulțimea notată $\prod\limits_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$

$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

sau, altfel scris (cu definiția unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Puterile unei mulțimi: caz particular al produsului direct

Notație

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod_{i \in \overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i \in \overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod_{i \in \overline{1,n}} A \overset{\text{notație}}{=} \prod_{i=1}^{n} A \overset{\text{notație}}{=} A^n$.

Remarcă

În definiția anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ și, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A = A$, așadar $\prod_{i \in I} A = \{f \mid f : I \to A, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} = A^{\overline{1,n}}$.

Produsul direct al unor familii arbitrare de mulțimi

Remarcă

Pentru orice mulțimi A, I și J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independența de reprezentanți a operației de exponențiere asupra numerelor cardinale.

Amintesc că am demonstrat la seminar (imediat, din definițiile acestora) asociativitatea reuniunii (pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$) și a intersecției (pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$) ca operații binare, adică operații definite între câte două mulțimi, cum au fost definite în primul curs, nu în cazul general al acestor operații pe familii arbitrare de mulțimi, caz tratat în acest curs.

Asociativitatea produsului direct, ca operație binară

Propoziție (asociativitatea produsului direct (între câte două mulțimi))

Fie A_1, A_2, A_3 mulțimi arbitrare. Atunci:

$A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, *întrucât următoarele funcții sunt bijecții:* $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ *și* $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.

În plus, fiecare dintre bijecțiile φ și ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenție egalitățile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ *pentru orice* $a_1 \in A_1$, *orice* $a_2 \in A_2$ *și orice* $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Demonstrație: Este evident că φ și ψ sunt bijecții, adică orice element din codomeniul fiecăreia dintre ele este imaginea unuia și numai unuia dintre elementele din domeniul său.

Produsul direct al unei familii finite nevide de mulțimi

Asociativitatea produsului direct semnifică faptul că, într-un șir de produse directe (ca operații binare notate *infixat*, i. e. cu operatorul binar produs direct **între** *argumentele* (*operanzii*, variabilele) sale; a se vedea mai jos), nu contează cum punem parantezele, i. e., indiferent care dintre produsele directe din acel șir sunt efectuate mai devreme și care mai târziu, rezultatul obținut este același.
De aceea, asociativitatea produsului direct face legitimă (i. e. corectă) notația următoare pentru un șir de produse directe notate **infixat** (i. e. cu operatorul binar produs direct între argumentele sale, ca mai jos) fără paranteze: pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, putem scrie $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$ în loc de $(\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n$, iar acest din urmă produs direct, conform asociativității produsului direct, este egal cu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = (\ldots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \ldots) \times A_n \stackrel{\text{notație}}{=} A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n.$$

În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice mulțime A, $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{de } n \text{ ori } A}$.

Produsul direct al unei familii nevide de mulțimi: convenții

Ca și la funcții aplicate unor perechi de elemente, folosim **licența de scriere (convenția):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcție $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ și orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenție**, și va fi clar la elementele căror mulțimi ne vom referi, prin notații de forma:

- $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i \in I} \in A^I$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînțelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînțelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînțelege: $a \in A$ și $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînțelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulțimi, I este o mulțime nevidă, iar $(A_i)_{i \in I}$ este o familie (nevidă) de mulțimi.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Definiție

Fie I o mulțime arbitrară și $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulțimi (părți ale unei mulțimi T sau mulțimi arbitrare) indexată de I.

Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i \in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i \in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} (A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Reuniunea disjunctă a unei familii arbitrare de mulțimi

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i \in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Exemplu

La fel ca în exemplul din cursul anterior pentru reuniunea disjunctă, fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$, aici privită ca reuniunea disjunctă a familiei cu două elemente $\{A, B\}$?
Putem considera că familia de mulțimi $\{A, B\}$ este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Și reuniunea disjunctă, ca operație binară, este asociativă

Notație

La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate:

$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecții cu identitatea, putem scrie:

$A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i$.

Operații de diferite arități

Am vorbit mai sus despre produsul direct și reuniunea disjunctă ca operații **binare**. *Aritatea* unei operații a unei structuri algebrice (cu o singură *mulțime suport*, o singură mulțime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operații**. Dacă structura algebrică are mulțimea suport A, iar f este o operație n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcție cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Exemplu

Într–un grup $(G, \circ, ^{-1}, e)$, avem trei operații:

- operația *binară* $\circ$ (**compunerea elementelor grupului, două câte două**) (operație de aritate 2, operație cu două argumente): $\circ : G \times G \to G$
- operația *unară* $^{-1}$ (**inversarea fiecărui element din grup**) (operație de aritate 1, operație cu un singur argument): $^{-1} : G \to G$
- operația *zeroară* (sau *nulară*) e (**elementul neutru al grupului**) (operație de aritate 0, operație fără argumente, i. e. **constantă** din G): $e \in G$

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

De ce operațiile zeroare sunt același lucru cu **elemente distinse, constante** din mulțimea suport a structurii algebrice?

Urmând regula de mai sus, elementul neutru e al grupului G trebuie să fie o funcție de la produsul direct al familiei vide la G.

Produsul direct al familiei vide nu este $\emptyset$, cum s–ar putea crede, ci este un *singleton*, adică o mulțime cu un singur element.

Într–adevăr, dacă recitim de mai sus definiția produsului direct al unei familii arbitrare de mulțimi, observăm că produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care satisfac o proprietate întotdeauna adevărată (anume $(\forall\, i)\,(i \in \emptyset \Rightarrow \ldots)$, iar $i \in \emptyset$ este fals pentru orice i, deci implicația anterioară este adevărată pentru orice i, deci această proprietate cu variabila i cuantificată universal este adevărată), adică produsul direct al familiei vide este mulțimea funcțiilor de la mulțimea vidă la reuniunea familiei vide, care are un singur element, pentru că de la $\emptyset$ la orice mulțime există o unică funcție, așa cum am văzut la începutul cursului.

Remarcă (reuniunea familiei vide este vidă)

Dacă recitim și definiția reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulțimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiție care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Operațiile zeroare sunt elemente distinse, i. e. constante

Remarcă (produsul direct al familiei vide este un singleton)

Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulțimea cu unicul element dat de unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Prin urmare, elementul neutru al grupului G este o funcție φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcție definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, și identificăm $\varphi = e$.

Remarcă (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă)

Definiția reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulțimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulțimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulțimi, care este $\emptyset$.

Notă

Despre intersecția familiei vide de mulțimi vom discuta în cursul următor. În cazul intersecției, lucrurile sunt un pic mai complicate.

Exemplu de structură algebrică având mai multe mulțimi suport, i. e. mai multe mulțimi (tipuri) de elemente

Ca o paranteză, o **structură algebrică cu două mulțimi suport** este **spațiul vectorial,** care are ca mulțimi suport **mulțimea scalarilor** (formând un corp, K), și **mulțimea vectorilor** (formând un grup abelian, V). Nu este același lucru cu o structură algebrică având ca unică mulțime suport pe $K \times V$, pentru că nu avem operații pe $K \times V$ (i. e. operații de la $K \times V \times K \times V \times \ldots \times K \times V$ la $K \times V$), ci avem operații de grup pe V, operații de corp pe K și operația de compunere (înmulțire) a scalarilor cu vectorii, de la $K \times V$ la V.

Operații binare asociative și recursii

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $(A_i)_{i \in \overline{1,n}} \stackrel{\text{notație}}{=} (A_i)_{i=1}^n$ o familie de mulțimi. Datorită asociativității reuniunii, intersecției, produsului direct și reuniunii disjuncte (ca operații binare), au loc următoarele recursii: pentru orice $m \in \overline{1,n}$:

- $$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m > 1; \end{cases}$$
- $$\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} A_1, & \text{dacă } m = 1, \\ \left(\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m > 1. \end{cases}$$

Operații binare asociative și recursii

Însă recursiile de mai sus pot porni și de la familia vidă $((A_i)_{i=1}^{0} = (A_i)_{i\in\overline{1,0}} = (A_i)_{i\in\emptyset})$:

- întrucât reuniunea familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0,n}$:
$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cup A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$
- vom vedea în cursul următor că intersecția familiei vide de mulțimi are sens numai în cazul în care familia vidă este considerată ca familie de părți ale unei mulțimi T, și, în acest caz, intersecția familiei vide este T; așadar, dacă T este o mulțime și $(A_i)_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}(T)$, atunci avem, pentru orice $m \in \overline{0,n}$:
$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} T, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i\right) \cap A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$

- întrucât, după cum am văzut mai sus, produsul direct al familiei vide este singletonul $\{*\}$, cu $* = (\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\prod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \{*\}, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\prod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \times A_m, & \text{dacă } m \geq 1; \end{cases}$$
nu este nimic diferit față de recursia anterioară pentru produsul direct, deoarece, oricare ar fi mulțimea A, $A \cong \{*\} \times A$, cu bijecția care duce fiecare $a \in A$ în perechea $(*, a)$, iar această bijecție se poate asimila cu identitatea (funcția identică, egalitatea); similar, vom întâlni izomorfisme (între unele structuri algebrice) care se asimilează cu identitatea (funcția identică, egalitatea);
- întrucât reuniunea disjunctă a familiei vide este $\emptyset$, avem, pentru orice $m \in \overline{0, n}$:
$$\coprod_{i=1}^{m} A_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{dacă } m = 0, \\ \left(\coprod_{i=1}^{m-1} A_i\right) \coprod A_m, & \text{dacă } m \geq 1. \end{cases}$$

Operații cu familii arbitrare de funcții

Daca A și B sunt mulțimi, iar $f : A \to B$ și $g : A \to B$, iar pe mulțimea B avem, de exemplu, o operație binară $+$ și o **relație binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operația $+$, respectiv relația $\leq$, între funcțiile f și g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f+g)(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiție, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Totalitatea funcțiilor nu formează o mulțime, ci o clasă, așadar definirea unei familii de funcții indexate de o mulțime I ca o funcție h de la I la totalitatea funcțiilor, care, desigur, și ea ar aparține clasei funcțiilor, pune câteva probleme conceptuale. Dacă, însă, restrângem codomeniul lui h la o mulțime de funcții, atunci lucrurile se simplifică.

Operații cu familii arbitrare de funcții

Definiție (familii de funcții între două mulțimi fixate A și B)

Fie I, A și B mulțimi arbitrare. O *familie de funcții de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulțimii B^A indexată de I, i. e. o funcție $h : I \rightarrow B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \overset{\text{notație}}{=} h(i) : A \rightarrow B$).

Se pot defini și operații cu familii arbitrare de funcții, tot **punctual**. De exemplu, dacă I, A și B sunt mulțimi nevide, $(f_i)_{i \in I}$ este o familie de funcții de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \rightarrow B$), B este o **mulțime ordonată** (vom vedea) și, pentru orice $x \in A$, submulțimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcția:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \rightarrow B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \overset{\text{definiție}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Imagini și preimagini de reuniuni și intersecții arbitrare de mulțimi printr–o funcție

Exercițiu (temă)

Fie A, B, I și J mulțimi nevide (de fapt, pot fi și vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ și $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

1. $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
2. $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;
3. $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;
4. $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;
5. f este injectivă ddacă, pentru orice $(M_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{i\in I} M_i) = \bigcap\limits_{i\in I} f(M_i)$.
6. Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (4).

Funcții caracteristice

Tehnica de demonstrație pentru incluziunea sau egalitatea de mulțimi, folosită până acum atât la curs cât și la seminar, poate fi adaptată la cazul particular al submulțimilor unei mulțimi date T, astfel:

- pentru stabilirea incluziunii între două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Rightarrow x \in B$, este suficient să se demonstreze că, pentru orice element $x \in T$, $x \in A \Rightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției incluziunii între mulțimi, înseamnă că $A \cap T \subseteq B \cap T$, dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem că $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, și rezultă că $A \subseteq B$;
- pentru a stabili egalitatea a două submulțimi A și B ale lui T, în loc de a se demonstra că, pentru orice element x, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, este suficient să se arate că: pentru orice $x \in T$, $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, ceea ce, conform definiției egalității de mulțimi, arată că: $A \cap T = B \cap T$; dar, întrucât $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc: $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$, de unde rezultă că $A = B$.

Desigur, avem "ddacă": în prezența egalităților $A \cap T = A$ și $B \cap T = B$:

$$(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap T \subseteq B \cap T \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B);$$

$$(\forall x)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow A \cap T = B \cap T \Leftrightarrow (\forall x \in T)\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Funcția caracteristică a unei submulțimi a unei mulțimi

Definiție

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcția caracteristică a lui A (raportat la T)*: $\chi_A : T \to \{0, 1\}$, pentru orice $x \in T$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$$

Observație

În definiția de mai sus pentru funcțiile caracteristice ale submulțimilor unei mulțimi T, am folosit notația (**consacrată**) χ_A pentru funcția caracteristică a unei submulțimi A a lui T, care sugerează faptul că această funcție ar depinde numai de A. Motivul pentru care nu se atașează la această notație și indicele T, pentru a arăta faptul evident că această funcție depinde și de T, este că, în mod uzual, se consideră mulțimea totală T ca fiind fixată atunci când lucrăm cu funcțiile caracteristice ale părților sale.

Funcții caracteristice

Remarcă

Probabil că funcțiile caracteristice au mai fost întâlnite până acum, cel puțin în cazul particular când mulțimea totală T este finită: $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. În acest caz, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcția caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \ldots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulțimea $\{0, 1\}$ se numește *vectorul caracteristic al lui A* și poate fi reprezentat printr-un număr scris în baza 2.

După cum se știe, vectorii caracteristici (generați, de exemplu, ca numere în binar, de la 0 la $11\ldots1$) pot fi folosiți la generarea submulțimilor mulțimii finite T: fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este egală cu mulțimea elementelor x_i cu proprietatea că, în vectorul caracteristic al lui A, pe poziția i apare 1.

Ca o anticipare a similarităților dintre calculul cardinalelor pentru mulțimi finite și expresiile funcțiilor caracteristice pe care le vom obține, este interesant de observat că, în cazul particular finit prezentat mai sus, fiecare $A \in \mathcal{P}(T)$ este, de asemenea, finită, și are cardinalul: $|A| = \sum_{x \in T} \chi_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_A(x_i)$. Acest fapt, împreună cu punctul (7) din a doua propoziție care urmează, arată că, pentru orice mulțimi finite A și B, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, de unde, prin **inducție matematică** după numărul de mulțimi, se obține **principiul includerii și al excluderii**.

Principiul includerii și al excluderii

Propoziție (principiul includerii și al excluderii)

Pentru orice n natural nenul și orice mulțimi finite $M_1, M_2, \ldots, M_n$, are loc egalitatea:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Și dual:

$$|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Funcții caracteristice

Observație

Există, în literatura matematică, numeroase demonstrații pentru **principiul includerii și al excluderii**. Una dintre aceste demonstrații se găsește, de exemplu, în cartea *Probleme de logică și teoria mulțimilor*, de Dumitru Bușneag și Dana Piciu, inclusă în bibliografia din primul curs. Această demonstrație se poate adapta, lucrând cu funcții caracteristice în locul operațiilor cu mulțimi.
Odată demonstrată prima egalitate din **principiul includerii și al excluderii**, care dă cardinalul unei reuniuni finite de mulțimi finite, a doua se demonstrează analog, dar interschimbând reuniunile cu intersecțiile.
Demonstrația principiului includerii și al excluderii nu face parte din materia pentru examen.

Remarcă

În cele ce urmează vom considera codomeniul funcțiilor caracteristice $\{0,1\} \subset \mathbb{N}$ (sau $\{0,1\} \subset \mathbb{Z}$, sau $\{0,1\} \subset \mathbb{R}$), iar operațiile aritmetice care vor fi efectuate vor fi operațiile uzuale de pe $\mathbb{N}$ (sau $\mathbb{Z}$, sau $\mathbb{R}$). În schimb, rezultatele operațiilor efectuate se vor afla în mulțimea $\{0,1\}$, așa cum trebuie, pentru că aceste rezultate vor fi valori ale unor funcții caracteristice.

Funcții caracteristice

Propoziție (proprietățile funcțiilor caracteristice)

Fie T o mulțime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcția caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcțiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ și $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ și $\mathbf{1}(x) = 1$.
Atunci au loc proprietățile:

1. $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *și* $\chi_T = \mathbf{1}$
2. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
3. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
4. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalența:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
5. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
6. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
7. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
8. *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
9. *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
10. $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Funcții caracteristice

Demonstrație: Pentru început, amintim că egalitatea a două funcții cu același domeniu și același codomeniu semnifică egalitatea punctuală, i. e. în fiecare punct, de exemplu, la punctul (4): $\chi_A = \chi_B$ ddacă (prin definiția egalității de funcții), pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ (întocmai ca la punctul (3), unde am explicitat inegalitatea $\leq$ între două funcții cu același domeniu și același codomeniu).

De asemenea, funcțiile de la punctele (5)–(10), date prin operații aplicate funcțiilor χ_A și χ_B, sunt definite punctual, ca orice operații asupra unor funcții cu același domeniu și același codomeniu, operații care se pot defini între elementele codomeniului respectiv: de exemplu, la punctul (8), funcția $\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B : T \rightarrow \{0, 1\}$ se definește prin: pentru orice $x \in T$, $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) := \chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$.

(1) Din faptul că orice $x \in T$ satisface: $x \notin \emptyset$ și $x \in T$.
(2) Fie $x \in T$. Avem: $x \in A$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \in \{1\}$ ddacă $x \in \chi_A^{-1}(\{1\})$. Așadar $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$.
(3) Are loc: $A \subseteq B$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(\chi_A(x) = 1 \Rightarrow \chi_B(x) = 1)$ ddacă $(\forall\, x \in T)\,(\chi_A(x) \leq \chi_B(x))$ ddacă $\chi_A \leq \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este $\{0, 1\}$).
(4) Putem folosi punctul (3): $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ și $B \subseteq A]$ ddacă $[\chi_A \leq \chi_B$ și $\chi_B \leq \chi_A]$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.
Sau putem folosi punctul (2): $A = B$ ddacă $\chi_A^{-1}(\{1\}) = \chi_B^{-1}(\{1\})$ ddacă $\chi_A = \chi_B$ (amintim că domeniul valorilor lui χ_A și χ_B este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$).
(5) Fie $x \in T$, arbitrar, fixat. Distingem patru cazuri:

- $x \notin A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \notin A$ și $x \in B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \notin B$ (deci $x \notin A \cap B$)
- $x \in A$ și $x \in B$ (deci $x \in A \cap B$)

În primul dintre aceste cazuri, $\chi_{A\cap B}(x) = 0 = 0 \cdot 0 = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$. La fel se analizează celelalte trei cazuri, și rezultă că $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ pentru orice $x \in T$, i. e. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(6) Aplicând (5) cazului particular $A = B$, obținem: $\chi_A = \chi_{A\cap A} = \chi_A \cdot \chi_A = \chi_A^2$. Sau putem aplica faptul că fiecare dintre elementele 0 și 1 este egal cu pătratul său, iar codomeniul lui χ_A este $\{0, 1\}$.
(7) Analog demonstrației pentru punctul (5).
(8) Analog demonstrației pentru fiecare dintre punctele (5) și (7).
(9) Conform punctelor (8) și (1), $\chi_{T\setminus A} = \chi_T - \chi_T \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \mathbf{1} \cdot \chi_A = \mathbf{1} - \chi_A$. (Este clar că $\mathbf{1} \cdot \chi_A = \chi_A$. Se putea folosi, ca alternativă, și punctul (5), pentru a deduce: $\chi_T \cdot \chi_A = \chi_{T\cap A} = \chi_A$.)
(10) Putem calcula, conform punctelor (7), (8), (5) și (1):
$\chi_{A\Delta B} = \chi_{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} = \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B} \cdot \chi_{B\setminus A} =$
$\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B - \chi_{(A\setminus B)\cap(B\setminus A)} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \chi_\emptyset =$
$\chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B - \mathbf{0} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$. Am aplicat faptul că orice element al intersecției $(A \setminus B) \cap (B \setminus A)$ simultan aparține lui A și nu aparține lui A (și simultan aparține lui B și nu aparține lui B); sigur că nu există un astfel de element, așadar acea intersecție este vidă.

Funcții caracteristice

Remarcă

- Punctul **(5)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile $\chi_{A\cap B}$ și $\chi_A \cdot \chi_B$ au drept codomeniu mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\cap B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \cap B$ ddacă $x \in A$ și $x \in B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 1$ ddacă $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$.
- De asemenea, punctul **(8)** al propoziției precedente poate fi demonstrat folosind faptul că funcțiile care intervin în acea egalitate au codomeniul $\{0,1\}$ și observând că orice $x \in T$ satisface: $\chi_{A\setminus B}(x) = 1$ ddacă $x \in A \setminus B$ ddacă $x \in A$ și $x \notin B$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) = 1$ și $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$ ddacă $\chi_A(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$ ddacă $(\chi_A - \chi_A \cdot \chi_B)(x) = 1$.

Remarcă

Punctele (3) și (4) ale propoziției precedente ne oferă posibilitatea de a demonstra incluziunea și egalitatea de mulțimi folosind funcția caracteristică a mulțimilor respective.

Funcții caracteristice

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (nu contează față de ce mulțime totală T; se poate lua orice mulțime nevidă T care include mulțimile care intră în discuție, de exemplu se poate lua T egală cu reuniunea acelor mulțimi, reunită cu o mulțime nevidă, de exemplu $\{0\}$, pentru a avea siguranța că T e nevidă), că, pentru orice mulțimi A, B, C:

- **asociativitatea diferenței simetrice:** $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ (**indicație:** prin calcul, folosind propoziția precedentă, se obține $\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_{(A\Delta B)\Delta C}$, ceea ce este echivalent cu egalitatea $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$ care trebuie demonstrată; la fel se poate proceda mai jos)
- **distributivitatea lui $\cup$ față de $\cap$:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea lui $\cap$ față de $\cup$:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$ ddacă $A \cup B = B$
- dacă $A \subseteq B$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup C$ și $A \cap C \subseteq B \cap C$
- dacă $A \subseteq B$ și $C \subseteq D$, atunci $A \cup C \subseteq B \cup D$ și $A \cap C \subseteq B \cap D$ (rezultă și prin aplicarea de câte două ori a implicațiilor de la punctul precedent)
- alte rezultate privind calculul cu mulțimi demonstrate la seminar

Funcții caracteristice

Exercițiu (vedeți rezolvarea pe slide–urile următoare)

Fie T o mulțime nevidă. Pentru orice $X \subseteq T$, vom nota cu $\overline{X} := T \setminus X$ (*complementara lui* X *față de* T). Să se demonstreze, folosind funcții caracteristice (raportat la T), că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- **operația de trecere la complementară este idempotentă (autoduală, autoinversă, propria ei inversă):** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui de Morgan pentru $\cup$ și $\cap$:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- **trecerea la complementară inversează sensul incluziunii:** $A \subseteq B$ ddacă $\overline{B} \subseteq \overline{A}$; eventual folosind acest fapt obținem și: $A = B$ ddacă $\overline{A} = \overline{B}$; prin urmare avem și: $A \subsetneq B$ ddacă $\overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \overline{B}$; $A \setminus \emptyset = A$; $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup B = T$ ddacă $\overline{B} \subseteq A$ ddacă $\overline{A} \subseteq B$
- când A și B sunt **părți complementare ale lui T:** $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$ ddacă $\begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$
- alte rezultate demonstrate la seminar implicând complementare de mulțimi

Funcții caracteristice

Remarcă

A se observa că, în propoziția anterioară, conform punctelor (5), (7) și (8), au loc, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
- $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B}$

De asemenea, pentru orice $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ (care este domeniul valorilor funcțiilor caracteristice), au loc:

- $\alpha \cdot \beta = \min\{\alpha, \beta\}$
- $\alpha + \beta - \alpha \cdot \beta = \alpha + \beta - \min\{\alpha, \beta\} = \max\{\alpha, \beta\}$

Aceste egalități pot fi demonstrate, de exemplu, prin înlocuirea fiecăruia dintre elementele α și β cu fiecare dintre valorile 0 și 1 în fiecare egalitate.
Din egalitățile de mai sus și punctele (5) și (7) ale propoziției precedente rezultă că, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, au loc:

- $\chi_{A \cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- $\chi_{A \cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$

Exemple de proprietăți pentru calculul cu mulțimi din exercițiile anterioare demonstrate folosind funcția caracteristică, din exercițiile anterioare

Fie T o mulțime nevidă și $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ și cu χ_X funcția caracteristică a lui X raportat la T. Să demonstrăm că:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \max\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_B \Leftrightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A \Leftrightarrow \chi_{A \cap B} = \chi_A \Leftrightarrow A \cap B = A$.

- $\overline{\overline{A}} = A$

Să ne amintim că $\chi_{\overline{A}} = \chi_{T \setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$. Avem, așadar:
$\chi_{\overline{\overline{A}}} = \mathbf{1} - \chi_{\overline{A}} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - \chi_A) = \chi_A$, prin urmare $\overline{\overline{A}} = A$.

- $A \cup \overline{A} = T$ și $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Întrucât $\chi_A(x) \in \{0, 1\}$ pentru orice $x \in T$, avem:
$\chi_{A \cup \overline{A}} = \max\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \max\{\chi_A, \mathbf{1} - \chi_A\} = \mathbf{1}$ și
$\chi_{A \cap \overline{A}} = \min\{\chi_A, \chi_{\overline{A}}\} = \min\{\chi_A, \mathbf{1} - \chi_A\} = \mathbf{0}$.

Alte exemple, din exercițiul precedent

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ și $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\chi_{\overline{A \cup B}} = \mathbf{1} - \chi_{A \cup B} = \mathbf{1} - \max\{\chi_A, \chi_B\} = \mathbf{1} + \min\{-\chi_A, -\chi_B\} = \min\{\mathbf{1} - \chi_A, \mathbf{1} - \chi_B\} = \min\{\chi_{\overline{A}}, \chi_{\overline{B}}\} = \chi_{\overline{A} \cap \overline{B}}$, așadar $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, prin urmare, folosind idempotența complementării, demonstrată mai sus:
$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}} = \overline{A \cap B}$.

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$ și $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$

$A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow -\chi_B \leq -\chi_A \Leftrightarrow \mathbf{1} - \chi_B \leq \mathbf{1} - \chi_A \Leftrightarrow \chi_{\overline{B}} \leq \chi_{\overline{A}} \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$, prin urmare:
$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$ și $\overline{A} \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$, așadar:
$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $A \neq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$ și $\overline{B} \neq \overline{A} \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$.

- $A \cap \overline{B} = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; $A \setminus \emptyset = A$

$\chi_{A \cap \overline{B}} = \chi_A \cdot \chi_{\overline{B}} = \chi_A \cdot (\mathbf{1} - \chi_B) = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B = \chi_{A \setminus B}$, iar, întrucât $\chi_A = \chi_A \cdot \chi_A$, $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_A \cdot \chi_B = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_{A \cap B} = \chi_{A \setminus (A \cap B)}$, prin urmare $A \cap \overline{B} = A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
$\chi_T = \mathbf{1} = \mathbf{1} - \mathbf{0} = \mathbf{1} - \chi_\emptyset = \chi_{\overline{\emptyset}}$, așadar $\overline{\emptyset} = T$.
Prin urmare, $A \setminus \emptyset = A \cap \overline{\emptyset} = A \cap T = A$.

Alte exemple, din exercițiul precedent

- $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow \chi_{A \setminus B} = \chi_\emptyset \Leftrightarrow \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B = \mathbf{0} \Leftrightarrow \chi_A = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\} \Leftrightarrow \chi_A \leq \chi_B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$

Conform unor proprietăți de mai sus: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow \emptyset = A \setminus \overline{B} = A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$.
Așadar: $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$.

- $A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$

Conform unor proprietăți de mai sus:
$A \cup B = T \Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{T} = \overline{\overline{\emptyset}} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}} = B$, așadar:
$\overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = T \Leftrightarrow B \cup A = T \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$.

- $A = \overline{B} \Leftrightarrow B = \overline{A} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = T \text{ și} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$

Din cele două proprietăți precedente, eventual aplicând, pentru rapiditatea calculului, și idempotența complementării și faptul că două părți ale lui T sunt egale ddacă au complementarele (față de T) egale, obținem:

$A \cup B = T$ și $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$ și $A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow A = \overline{B} \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{\overline{B}} = B$.

Funcții caracteristice

Remarcă (generalizare a ultimelor egalități din remarca anterioară)

Fie T și I două mulțimi nevide și $(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părți ale lui T indexată de I. Să demonstrăm următoarele egalități satisfăcute de funcțiile caracteristice raportat la T:

- $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Să notăm cu $F := \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\} : T \to \{0, 1\}$, definită, desigur, punctual: pentru orice $x \in T$, $F(x) = \max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\}$. Observăm că maximul unei familii de elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ este egal cu 1 ddacă există măcar un element egal cu 1 în acea familie. Pentru orice $x \in T$, avem: $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = 1$ ddacă $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)$ ddacă $(\exists\, i \in I)\,(\chi_{A_i}(x) = 1)$ ddacă $\max\{\chi_{A_i}(x) \mid i \in I\} = 1$ ddacă $F(x) = 1$. Rezultă că $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i} = F$, întrucât codomeniul acestor două funcții este mulțimea cu două elemente $\{0, 1\}$.
Aveți demonstrarea celei de–a doua egalități ca **temă**. **Indicație:** observați că minimul unei familii de elemente din mulțimea $\{0, 1\}$ este egal cu 1 ddacă toate elementele acelei familii sunt egale cu 1, și rescrieți demonstrația de mai sus înlocuind în ea maximul cu minimul, $\exists$ cu $\forall$ și reuniunea cu intersecția.

Funcții caracteristice

Remarcă (legile de distributivitate generalizată pentru ∪ și ∩ – temă)

Remarca anterioară poate fi folosită pentru a demonstra că, pentru orice mulțime nevidă I, orice mulțime A și orice familie de mulțimi $(A_i)_{i \in I}$, au loc egalitățile:

- **distributivitatea generalizată a ∪ față de ∩:** $A \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a ∩ față de ∪:** $A \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$

Fiecare dintre acestea poate fi folosită pentru a "sparge" simultan (de fapt, pe rând) două paranteze (de fapt, orice număr natural nenul de paranteze, după cum arată un raționament imediat prin inducție matematică): pentru orice mulțimi nevide I și J și orice familii de mulțimi $(B_j)_{j \in J}$ și $(A_i)_{i \in I}$:

- $(\bigcap_{j \in J} B_j) \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (B_j \cup A_i) = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} (B_j \cup A_i) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (B_j \cup A_i)$
- $(\bigcup_{j \in J} B_j) \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (B_j \cap A_i) = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} (B_j \cap A_i) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_j \cap A_i)$

Am dat câte trei scrieri echivalente pentru ultimii termeni din egalitățile precedente, dintre care prima corespunde "spargerii" mai întâi a celei de–a doua paranteze, a doua corespunde "spargerii" mai întâi a primei paranteze, iar ultima, cu un singur indice, sugerează ideea de "spargere" simultană a parantezelor.

Funcții caracteristice

Amintim că:

Definiție

Spunem că două mulțimi A și B sunt *cardinal echivalente*, și scriem $A \cong B$, ddacă există o bijecție $f : A \to B$.

Amintim că:

Notație

Pentru orice mulțimi A și B, se notează cu B^A mulțimea funcțiilor de la A la B: $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$.

Propoziție

Pentru orice mulțime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0, 1\}^T$.

Funcții caracteristice

Demonstrație: Considerăm aplicația $f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T = \{\varphi \mid \varphi : T \to \{0,1\}\}$, definită prin: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, $f(A) = \chi_A$ (funcția caracteristică a lui A raportat la T).
Conform punctului (4) al propoziției conținând proprietățile funcției caracteristice, pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$, avem:

- dacă $A = B$, atunci $\chi_A = \chi_B$, adică $f(A) = f(B)$, deci f e **bine definită** (i. e. este funcție, adică asociază unui element din domeniul ei, $\mathcal{P}(T)$, un **unic** element din codomeniul ei, $\{0,1\}^T$)
- și reciproc: dacă $f(A) = f(B)$, adică $\chi_A = \chi_B$, atunci $A = B$, deci f este injectivă.

Fie $\varphi \in \{0,1\}^T$, i. e. $\varphi : T \to \{0,1\}$. Fie $A = \varphi^{-1}(\{1\}) = \{a \in T \mid \varphi(a) = 1\}$. Atunci $\chi_A \in \{0,1\}^T$ are proprietatea că, pentru orice $x \in T$: $\chi_A(x) = 1$ ddacă $x \in A = \varphi^{-1}(\{1\})$ ddacă $\varphi(x) = 1$. Cum χ_A și φ au ca domeniu al valorilor mulțimea cu două elemente $\{0,1\}$, rezultă că $\varphi = \chi_A = f(A)$, deci f este și surjectivă.
Am demonstrat că $f : \mathcal{P}(T) \to \{0,1\}^T$ este o bijecție, deci $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.