Diverse rezultate privind algebrele Boole

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Academiei 14, RO 010014, Bucureşti, România
Email: cmuresan11@yahoo.com

Abstract

Acest referat conţine câteva rezultate despre latici şi algebre Boole, utile studenţilor care urmează cursul de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti.

Peste tot în acest text, prescurtarea ddacă va semnifica "dacă şi numai dacă". De asemenea, peste tot vom nota operaţiile unei latici sau algebre Boole astfel: o algebră Boole de mulţime suport B va fi notată $(B, \vee, \wedge, ^{-}, 0, 1)$ (şi la fel vom nota şi laticile, desigur, cu operaţiile corespunzătoare) şi va fi referită prin mulţimea sa suport (adică vom spune *algebra Boole* B), la fel cum vom face pentru fiecare structură algebrică pe care o vom folosi.

Relaţia de ordine parţială dintr-o latice (în particular dintr-o algebră Boole) va fi notată $\leq$. Amintim definiţia ei: pentru oricare două elemente x, y ale laticii, $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ (a se vedea demonstraţia echivalenţei celor două definiţii ale laticii).

Amintim definiţiile operaţiilor derivate ale unei algebre Boole B, anume implicaţia ($\rightarrow$) şi echivalenţa ($\leftrightarrow$): pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$ şi $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

1 Rezultate preliminare

Lema 1.1. *Fie L o latice şi $a, b, x \in L$ astfel încât $a \leq b$. Atunci: $a \vee x \leq b \vee x$ şi $a \wedge x \leq b \wedge x$.*

Demonstraţie: Din definiţia relaţiei de ordine într-o latice, avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \vee b = b$. Rezultă că $(a \vee x) \vee (b \vee x) = a \vee x \vee b \vee x =$

$a \vee b \vee x \vee x = a \vee b \vee x = (a \vee b) \vee x = b \vee x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\vee$, precum şi egalitatea $a \vee b = b$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \vee x) \vee (b \vee x) = b \vee x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \vee x \leq b \vee x$.

Tot din definiţia relaţiei de ordine într-o latice, avem echivalenţa: $a \leq b$ ddacă $a \wedge b = a$. Rezultă că $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x \wedge b \wedge x = a \wedge b \wedge x \wedge x = a \wedge b \wedge x = (a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$. Am folosit asociativitatea, comutativitatea şi idempotenţa operaţiei $\wedge$, precum şi egalitatea $a \wedge b = a$ de mai sus. Aşadar, am obţinut egalitatea $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = a \wedge x$, care, în conformitate cu definiţia relaţiei de ordine într-o latice, este echivalentă cu inegalitatea $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Observaţia 1.2 (Legea de reziduaţie). *Fie B o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalenţa: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$ ddacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.*

Demonstraţie: Vom demonstra echivalenţa din enunţ prin dublă implicaţie.
“$\Leftarrow$“: Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform Lemei 1.1, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi $\overline{\beta}$, obţinem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole şi definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, şi obţinem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ şi aplicând tranzitivitatea unei relaţii de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.
“$\Rightarrow$“: Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiţia implicaţiei într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform Lemei 1.1, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalităţi şi β, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ şi tranzitivitatea unei relaţii de ordine, obţinem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

În continuare, vom prezenta o altă demonstraţie pentru legea de reziduaţie (Observaţia 1.2).

Lema 1.3. *Fie B o algebră Boole şi $x, y, z \in B$. Atunci:*

(i) $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$;

(ii) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$ *şi* $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$ *(*legile lui de Morgan*);*

(iii) $x \leq y$ *ddacă* $x \to y = 1$ *(de unde rezultă imediat că:* $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$*);*

(iv) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z = y \to (x \to z)$.

Demonstraţie: Punctul (i) este imediat, echivalenţa fiind demonstrată prin dublă implicaţie astfel: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$. Am folosit unicitatea complementului şi idempotenţa operaţiei de complementare, care rezultă tot din unicitatea complementului într-o algebră Boole (chiar în orice latice distributivă cu 0 şi 1, unde nu este asigurată existenţa complementului, însă).

Legile lui de Morgan (punctul (ii)) se demonstrează imediat aplicând definiţia complementului şi unicitatea lui pentru orice element al unei algebre Boole. Mai precis, prima relaţie se demonstrează arătând că elementul $\overline{x} \wedge \overline{y}$ satisface cele două relaţii care definesc complementul lui $x \vee y$ (anume disjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 1 şi conjuncţia lui cu $x \vee y$ este egală cu 0). Se procedează la fel pentru cealaltă relaţie.
(iii) Aplicând Lema 1.1, obţinem: dacă $x \leq y$, atunci $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$, prin urmare $x \wedge \overline{y} = 0$; reciproc, folosind distributivitatea unei algebre Boole, obţinem: dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, aşadar $y = y \vee x$, adică $x \leq y$, conform definiţiei lui $\leq$. Am obţinut: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$. Acum aplicăm punctele (i) şi (ii) (legile lui de Morgan) şi obţinem: $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \to y = 1$, conform definiţiei implicaţiei.
(iv) Aplicăm definiţia implicaţiei şi punctul (ii) (legile lui de Morgan): $x \to (y \to z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee z = \overline{x \wedge y} \vee z = (x \wedge y) \to z$, iar ultima egalitate din enunţ rezultă din comutativitatea lui $\wedge$ şi prima egalitate din enunţ.

Demonstraţia a doua pentru legea de reziduaţie (Observaţia 1.2): Fie $\alpha, \beta, \gamma \in B$. Conform Lemei 1.3, punctele (iii) şi (iv), avem: $\alpha \leq \beta \to \gamma$ ddacă $\alpha \to (\beta \to \gamma) = 1$ ddacă $(\alpha \wedge \beta) \to \gamma = 1$ ddacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Amintim:

Definiţia 1.4. Fie B o algebră Boole. O submulţime nevidă F a lui B se numeşte *filtru al lui B* ddacă, pentru orice $x, y \in B$:

(i) dacă $x, y \in F$, atunci $x \wedge y \in F$;

(ii) dacă $x \in F$ şi $x \leq y$, atunci $y \in F$.

Prima condiţie din definiţia anterioară spune că F conţine conjuncţiile oricăror două elemente din el (adică infimumurile mulţimilor formate din acele perechi de elemente). Din această condiţie, folosindu-ne de asociativitatea conjuncţiei şi procedând prin inducţie matematică sau pur şi simplu raţionând din aproape în aproape, rezultă că F conţine infimumul oricărei submulţimi finite nevide a sa. Într-adevăr, pentru orice n natural nenul şi orice submulţime $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq F$, avem că:

- dacă $n = 1$, atunci $\inf(M) = \inf\{x_1\} = x_1 \in F$;
- dacă $n > 1$, atunci:

$$\inf(M) = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n = (\ldots((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \wedge \ldots \wedge x_n) \in F.$$

Presupunem cunoscut faptul că, dată o algebră Boole B şi o submulţime oarecare $M \subseteq B$, există cel mai mic filtru al lui B care include pe M (cel mai mic în raport cu incluziunea), anume intersecţia tuturor filtrelor lui B care includ pe M, şi acest filtru se numeşte *filtrul generat de M* şi se notează cu $< M >$ sau cu $[M)$. Filtrul generat de o mulţime cu un singur element, de exemplu $M = \{x\}$, cu $x \in B$, se numeşte *filtrul principal generat de x* şi se notează cu $< x >$ sau cu $[x)$. Amintim forma unui filtru principal:

Observaţia 1.5. *Dacă B este o algebră Boole şi $x \in B$, atunci: $< x >= \{y \in B | x \leq y\}$ (filtrul principal generat de x este egal cu mulţimea majoranţilor lui x din B).*

Ştim că o relaţie de echivalenţă pe o mulţime este o relaţie binară reflexivă, simetrică şi tranzitivă (adică o preordine simetrică) pe acea mulţime. Presupunem cunoscute aceste noţiuni. Amintim definiţia unei congruenţe pe o algebră Boole şi propoziţia de mai jos:

Definiţia 1.6. Fie B o algebră Boole şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe B. Atunci $\sim$ este o *congruenţă pe B* ddacă este compatibilă cu operaţiile lui B, adică, pentru orice $x, y, x', y' \in B$, avem:

(i) dacă $x \sim y$ şi $x' \sim y'$, atunci $x \vee x' \sim y \vee y'$;

(ii) dacă $x \sim y$ şi $x' \sim y'$, atunci $x \wedge x' \sim y \wedge y'$;

(iii) dacă $x \sim y$, atunci $\overline{x} \sim \overline{y}$.

Dacă, în definiţia anterioară, veţi generaliza cele trei relaţii dând compatibilitatea lui $\sim$ cu operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi operaţia unară $^{-}$, pentru a obţine relaţia care dă compatibilitatea cu o operaţie de aritate oarecare, atunci veţi observa că: compatibilitatea cu operaţiile zeroare ale lui B, adică, constantele 0 şi 1, semnifică faptul că $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, deci este satisfăcută de orice relaţie binară reflexivă pe B. De aceea, compatibilitatea cu 0 şi 1 nu a apărut ca cerinţă în definiţia de mai sus.

Propoziţia 1.7. *Mulţimea congruenţelor unei algebre Boole este în bijecţie cu mulţimea filtrelor sale.*

Existenţa unei bijecţii se demonstrează construind două funcţii între cele două mulţimi, în sensuri opuse, şi arătând că sunt inverse una celeilalte, aşadar sunt inversabile, deci sunt bijecţii. Amintim doar definiţiile celor două funcţii pentru o algebră Boole oarecare B:

- funcţia de la mulţimea filtrelor la mulţimea congruenţelor: oricărui filtru F îi asociem congruenţa $\sim_F$, definită prin: pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ ddacă $x \leftrightarrow y \in F$;
- funcţia de la mulţimea congruenţelor la mulţimea filtrelor: oricărei congruenţe $\sim$ îi asociem filtrul $F^{\sim}$, definit prin: $F^{\sim} = \{x \in B | x \sim 1\}$.

2 Rezultatele principale

Observaţia 2.1. *Orice filtru finit al unei algebre Boole oarecare este principal.*

Demonstraţie: Argumentul este similar celui care arată că orice algebră Boole finită are toate filtrele principale. Anume: fie B o algebră Boole şi F un filtru al său având cardinalul finit, adică $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq B$, cu $n \in \mathbb{N}^*$ ($n \neq 0$ pentru că F este nevid, conform definiţiei unui filtru). După cum am vazut mai sus, pentru orice mulţime finită M astfel încât $\emptyset \neq M \subseteq F$, avem $\inf(M) \in F$. În particular, pentru $M = F$, obţinem $\inf(F) \in F$. Dar F este un filtru şi conţine pe $\inf(F)$, prin urmare este minorat de cel mai mic filtru care conţine pe $\inf(F)$, anume filtrul generat de $\inf(F)$, adică $< \inf(F) >= \{y \in B | \inf(F) \leq y\} \subseteq F$ (a se vedea Observaţia 1.5, privind forma unui filtru principal). Dar $\inf(F)$ minorează orice element al lui F, ceea ce înseamnă că $F \subseteq < \inf(F) >$ (am folosit din nou Observaţia 1.5). Dubla incluziune este echivalentă cu $F =< \inf(F) >$, deci, într-adevăr, F este un filtru principal, anume filtrul generat de propriul său infimum.

Observaţia 2.2. *Fie B o algebră Boole, $a, b, x \in B$ şi F un filtru al lui B. Atunci, cu notaţiile din textul ce succede Propoziţia 1.7, au loc echivalenţele:*

(i) $a \sim_{<x>} b$ *ddacă* $a \wedge x = b \wedge x$;

(ii) $a \sim_F b$ *ddacă există un element* $f \in F$ *astfel încât* $a \wedge f = b \wedge f$.

Demonstraţie: A se vedea corespondenţa dintre filtre şi congruenţe, amintită imediat după Propoziţia 1.7, Observaţia 1.5 privind forma unui filtru principal, şi Observaţia 1.2 (legea de reziduaţie).
(i) $a \sim_{<x>} b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in < x >$ ddacă $x \leq a \leftrightarrow b$ ddacă $x \leq (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ ddacă $\begin{cases} x \leq a \rightarrow b \text{ şi} \\ x \leq b \rightarrow a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} x \wedge a \leq b \text{ şi} \\ x \wedge b \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \text{ şi} \\ b \wedge x \leq a \end{cases}$ ddacă $\begin{cases} a \wedge x \leq b \wedge x \text{ şi} \\ b \wedge x \leq a \wedge x \end{cases}$ ddacă $a \wedge x = b \wedge x$.
(ii) "$\Rightarrow$": $a \sim_F b$ ddacă $a \leftrightarrow b \in F$ ddacă există un $f \in F$ astfel încât $a \leftrightarrow b = f$, ceea ce implică $f \leq a \leftrightarrow b$, adică $a \leftrightarrow b \in < f >$, ceea ce este echivalent cu $a \sim_{<f>} b$, ceea ce este echivalent cu $a \wedge f = b \wedge f$, conform lui (i).

"$\Leftarrow$": Conform punctului (i), dacă există $f \in F$ astfel încât $a \wedge f = b \wedge f$, atunci $a \sim_{<f>} b$, adică $a \leftrightarrow b \in < f >$. Dar $f \in F$, deci $< f > \subseteq F$ (pentru că F este filtru, deci faptul că îl conţine pe f implică faptul că include cel mai mic filtru care îl conţine pe f, adică filtrul generat de f), aşadar $a \leftrightarrow b \in F$, adică $a \sim_F b$.