Leopea Cătălina, grupa 243

Tema 2

Exercițiul 1

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ unde $(-1)^2=1$ cu $p=0.3$
$1^2=1$ cu $p=0.5$
și
$0^2=0$ cu $p=0.2$

$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$

$X+X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ unde $-1+(-1)^2=0$ cu $p=0.3$
$0+0^2=0$ cu $p=0.2$
și
$1+1^2=2$ cu $p=0.5$

$P(X > -\frac{1}{3}) = P(X=0) + P(X=1) = 0.2 + 0.5 = 0.7$

Pentru toți ceilalți $x > -\frac{1}{3}$, $P(x)=0$

$P(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}) = P(X > -\infty) = 1$, respectiv toate variabilele din $\mathbb{R}$

Exercițiul 2

$p_n = P(X=n) > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, X variabilă aleatoare cu valori în $\mathbb{N}$

a) $\lambda > 0 \iff X$ este variabilă Poisson de parametru λ

$p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}, \forall n \geq 1$

Funcția de probabilitate este $p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, & x \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

deci $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{P(X=n)}{P(X=n-1)} = \frac{P(x)}{P(n-1)} = \frac{\lambda^n}{n!} \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1} \cdot \cancel{e^{-\lambda}}}$

$= \frac{\lambda^n}{n \cdot \lambda^n \cdot \lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{n}$

reciproc presupunem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n} \iff p_n = p_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{n}$

X are valori în $\mathbb{N} \Rightarrow p_0 + p_1 + \ldots + p_n + \ldots = 1$

$p_1 = \frac{\lambda}{1} \cdot p_0$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2} p_1 = \frac{\lambda^2}{2!} p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{3} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!} p_0$$

$$\vdots$$

$$p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1} = \frac{\lambda^n}{n!} p_0$$

$$1 = p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} + \ldots\right) \quad \text{serie Taylor}$$

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}, \text{ dar } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda} \Rightarrow 1 = p_0 e^{\lambda} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{e^{\lambda}} = e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \cdot 1, & x = 0 \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!}, & x = 1 \\ \vdots \\ e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, & x = n \end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, & x \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ X e variabilă Poisson de parametru λ

b) $X \sim P(\lambda)$

i) $k = ?$ a.î. $P(X=k)$ maxim, $P(X=k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda}{k}$ Valoarea maximă este în k cu număr minim de factori subunitari, respectiv în k' cu $k' \leq k$, $k' \in \mathbb{N} \Rightarrow k' = [k]$

ii) $\lambda = ?$ a.î. maximizează $P(X=k)$ pt k fixat

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{e^{\lambda}} \cdot \frac{1}{k!}$$

Fie $f(k) = \frac{\lambda^k}{e^{\lambda}} \cdot \frac{1}{k!}$ probabilitatea pt k fixat, determinăm maximul lui f și punctul în care ia valoarea respectivă.

$$f' = \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{\lambda^k}{e^{\lambda}}\right)' = \frac{1}{k!} \left((\lambda^k)' e^{-\lambda} + \lambda^k (e^{-\lambda})' \right)$$

$$= \frac{1}{k!} \left(k \cdot \lambda^{k-1} e^{-\lambda} - \lambda^k \cdot e^{-\lambda} (-\lambda)' \right) = \frac{1}{k!} \left(k \cdot \lambda^{k-1} e^{-\lambda} + (-1) \lambda^k \cdot e^{-\lambda} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{k!}}_{\geq 0} \underbrace{e^{-\lambda}}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\lambda^{k-1}}_{\geq 0} (k - \lambda)$$

λ	0 k ∞
$f'(\lambda)$	+ + + 0 - - -
$f(\lambda)$	$\nearrow$ $\searrow$

$\Rightarrow$ maximul e în $\lambda = k$

Exercițiul 3

Notăm probabilitatea câștigului lui Fischer $p(F) = 0.4$, a lui Spasky cu $p(S) = 0.3$ și remizei cu $p(R) = 0.3$.

a) Probabilitatea ca Fischer să câștige meciul
poate câștiga o partidă, sau să fie remiză și să câștige după

$PC(F) = p(F) + p(R)p(F) + \ldots + p(R)^9 p(F)$

$= p(F) \cdot (1 + p(R) + \ldots + p(R)^9)$

$= p(F) \cdot 1 \cdot \frac{1-p(R)^{10}}{1-p(R)} = 0.4 \cdot \frac{1-(0.3)^{10}}{1-0.3} = 0.4 \frac{1-(0.3)^{10}}{0.7}$

$\simeq \frac{4}{7} = 0.57$

b) Funcția de masă a duratei meciului

Fie $X = \begin{cases} \text{câștigă } F \text{ sau } S & , p = 0.7 \\ \text{remiză} & , p = 0.3 \end{cases}$, X var Bernoulli (0.3)

Durata meciului ~ Geometrică (0.7) pt primele 9 runde iar pt 10 avem $p(10) = 1 -$ suma p rundelor anterioare.

Nr de runde	1	2	3	4	5	6	7	8
p	0.7 (p)	0.21 $(1-p)^1 p$	0.063 $(1-p)^2 \cdot p$	0.0189	0.0056	0.0017	0.00051	0.00015

9	10
0.000045	$1-\sum_{i=1}^{9} p(i) \simeq 0.17$

$\sum_{i=1}^{9} p(i) = 1.17$

Exercițiul 4

$P(X=k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)}$, $k \geq 1$, $P(X=0)=0$, $0<p<1$

- $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p(k) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \frac{(1-p)^k}{-\cancel{k}\log(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{-\log p}$

$= \frac{1}{-\log p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{-\log p} \left[(1-p) + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^n + \ldots\right]$

$= \frac{1}{-\log p} \lim_{n\to\infty} (1-p) \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1}{-\log p} (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{-\log p} (1-p) \frac{1}{p}$

$E[X] = \frac{p-1}{p\log p}$

- $E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(k) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{\cancel{2}} \frac{(1-p)^k}{-\cancel{k}\log p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(1-p)^k}{-\log p}$

$$= -\frac{1}{\log p}\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k$$

$$\lim \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1-p)^{k+1}}{k(1-p)^k} = (1-p) < 1$$ serie convergenta

Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\, r^k$, $r S_n = \sum_{k=1}^{n} k\cdot r^{k+1}$

$$\Rightarrow S_n - r S_n = r + 2r^2 + \ldots + n r^n - r^2 - 2r^3 - (n-1)r^n - n r^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n(1-r) = r + r^2 + \ldots + r^n - n r^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n = \left(r\frac{1-r^n}{1-r} - n\cdot r^{n+1}\right)\frac{1}{1-r} = \frac{r(1-r^n) - (1-r)n r^{n+1}}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{r(1-r^n) - n r^{n+1} + n\cdot r^{n+2}}{(1-r)^2} = \frac{r - r^{n+1} - n r^{n+1} + n r^{n+2}}{(1-r)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{r}{(1-r)^2}$$

$$E[X^2] = -\frac{1}{\log p}\frac{r}{(1-r)^2}, \quad r = (1-p)$$

$$E[X^2] = \frac{-1}{\log p}\cdot\frac{1-p}{p^2}$$

- $Var[X] = E[X^2] - E(X)^2$

$$= \frac{-1}{\log p}\frac{(1-p)}{p^2} - \frac{1}{\log^2 p}\frac{(1-p)^2}{p^2}$$

$$= \frac{-\log p(1-p) - (1-p)^2}{p^2\log^2 p} = \frac{(p-1)(\log p - p + 1)}{p^2\log^2 p} > 0, \forall p$$

Exercitiul 5

$a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, X var aleatoare, ia valori în $[2^a, 2^b]$ cu aceeași prob.

X	2^a	2^{a+1}	$\ldots$	2^{b-1}	2^b
$p(x)$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{1}{b-a+1}$		$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{1}{b-a+1}$

- $$E(X) = \sum_{x=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}\cdot 2^x = \frac{1}{b-a+1}\sum_{x=a}^{b} 2^x = \frac{1}{b-a+1}(2^a + 2^{a+1} + \ldots + 2^{b-1} + 2^b)$$

$$= \frac{1}{b-a+1}2^a\frac{1-2^{b-a+1}}{1-2}$$

$\bullet\ V[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$$E[X^2] = \sum_{x=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} 2^{2x} = \frac{1}{b-a+1} (2^{2a} + 2^{2a+2} + \dots + 2^{2b})$$

$$= \frac{1}{b-a+1} 2^{2a} \frac{1-4^{b-a+1}}{1-4}$$

$$V[X] = \frac{1}{b-a+1} 2^{2a} \frac{1-4^{b-a+1}}{1-4} - \frac{1}{(b-a+1)^2} 2^{2a} \frac{(1-2^{b-a+1})^2}{(1-2)^2}$$

$$= \frac{2^{2a}(1-4^{b-a+1})}{(b-a+1)(-3)} - \frac{2^{2a}(1-2^{b-a+1})^2}{(b-a+1)^2}$$

$$= -\frac{2^{2a}}{3(b-a+1)^2} \left(2 - \cancel{4^{b-a+1}} + 1 + \cancel{4^{b-a+1}} - 2^{b-a+2}\right)$$

$$= -\frac{2^{2a+1}}{3(b-a+1)^2} \left(1 - 2^{b-a+1}\right)$$

$$\bullet\ E[X^3] = \sum_{x=a}^{b} \frac{1}{b-a+1} 2^{3x} = \frac{1}{b-a+1} 2^{3a} \frac{1-8^{b-a+1}}{1-4}$$

$$= \frac{-2^{3a}(1-8^{b-a+1})}{3(b-a+1)}$$

Exercițiul 6

Fie X e nr de mașini care se pot vinde, X cuprins între 0 și $m \geq N$,

$p = \frac{1}{m+1}$, a profit, b pierdere, i nr de mașini vândute, N mașini în total

Profit = a · mașini vândute − b · mașini rămase

Profit = $a \cdot \min(i, N) - b \max(N-i, 0)$

$$E[X] = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m+1} \text{Profit}(X_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{m+1} (a \min(i, N) - b \max(N-i, 0))$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(a \sum_{i=0}^{m} \min(i, N) - b \sum_{i=0}^{N} \max(N-i, 0)\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(a \sum_{i=0}^{m} i + a \sum_{i=0}^{m} N - b \sum_{i=0}^{m} (N-i)\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(a \frac{N(N+1)}{2} + aN(m-N) - b(N + (N+1) + \dots + 1)\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(a \frac{N(N+1)}{2} - b \frac{N(N+1)}{2} + aN(m-N)\right)$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(\frac{(a-b)}{2} N(N+1) + aN(m-N)\right)$$

Pt valoarea maximă în funcție de N

$f(N) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{a-b}{2}N(N+1) + aN(n-N)\right)$

$f'(N) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{a-b}{2}(2N+1) + a(n-2N)\right)$

$f''(N) = \frac{1}{n+1}(a-b-2a) = \frac{-b-a}{n+1} \le 0$

N			
$f''(N)$	$-\ -$	$-\ -$	$-\ -$
$f'(N)$	$+\ +$	$\frac{\frac{a-b}{2}+an}{a+b}$	$-\ -$
$f(N)$	$\nearrow$		$\searrow$

Valoarea maximă a profitului este în $N=p$ unde p este punctul cu valoarea funcției maximă $\left[\frac{\frac{1}{2}(a-b)+an}{a+b}\right]$ sau $\left[\frac{\frac{a-b}{2}+an}{a+b}\right]+1$, sau unul din capetele 0 sau n.

Exercițiul 7

X	1	2	3	4	5	6
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$y = X(7-X)$	6	10	12	12	10	6

y	6	10	12
$p(y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$y-E(y)$	$\left(-\frac{10}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{8}{3}\right)^2$

$E(y) = \frac{6}{3} + \frac{10}{3} + \frac{12}{3} = \frac{28}{3}$

$V(y) = E((y-E(y))^2) = \frac{100}{9}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{64}{27} = \frac{168}{27} = 6.22$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ valorile obținute ale zarului cu 6 fețe

M_n - val maximă a acestora

C_1 - $1, 1, \dots, 1$ doar un caz

C_2 - combinațiile pt care v max e 2 un 2 pe o poz aleasă în C_n^i și pe restul $n-1$ poz punem $n-1$ val mai mici, posibilități (cardinal din mulțimea valorilor mai mici decât max).

$C_n^1 \cdot 1^{n-1}$

2 de 2, în $C_n^2 \cdot 1^{n-2}$

$\vdots$

n de 2, în $C_n^n \cdot 1^0$

$C_2 = C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$

C_3 - val maximă e 3

1 de 3 : $\underbrace{C_n^1}_{\text{alegem poz pt 3}} \cdot \underbrace{2^{n-1}}_{\text{pe restul le completam cu val mai mici (1 sau 2)}}$

2 de 3 : $C_n^2 \cdot 2^{n-2}$

n de 3 : $C_n^n \cdot 2^0$ - toți de 3

$\Rightarrow C_3 = C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + C_n^n$

C_4 :

1 de 4 $\quad C_n^1 \cdot 3^{n-1}$

2 de 4 $\quad C_n^2 \cdot 3^{n-2}$

$\vdots$

n de 4 $\quad C_n^n \cdot 3^0$

C_5 : X de 5 $\quad C_n^X \cdot 4^{n-X}$

C_6 : X de 6 $\quad C_n^X \cdot 5^{n-X}$

X	P(X)
1	$1/6^n$
2	$(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n)/6^n$
3	$(C_n^1 \cdot 2^{n-1} + C_n^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 2 + C_n^n)/6^n$
4	$(C_n^1 \cdot 3^{n-1} + C_n^2 \cdot 3^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 3 + C_n^n)/6^n$
5	$(C_n^1 \cdot 4^{n-1} + C_n^2 \cdot 4^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 4 + C_n^n)/6^n$
6	$(C_n^1 \cdot 5^{n-1} + C_n^2 \cdot 5^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot 5 + C_n^n)/6^n$