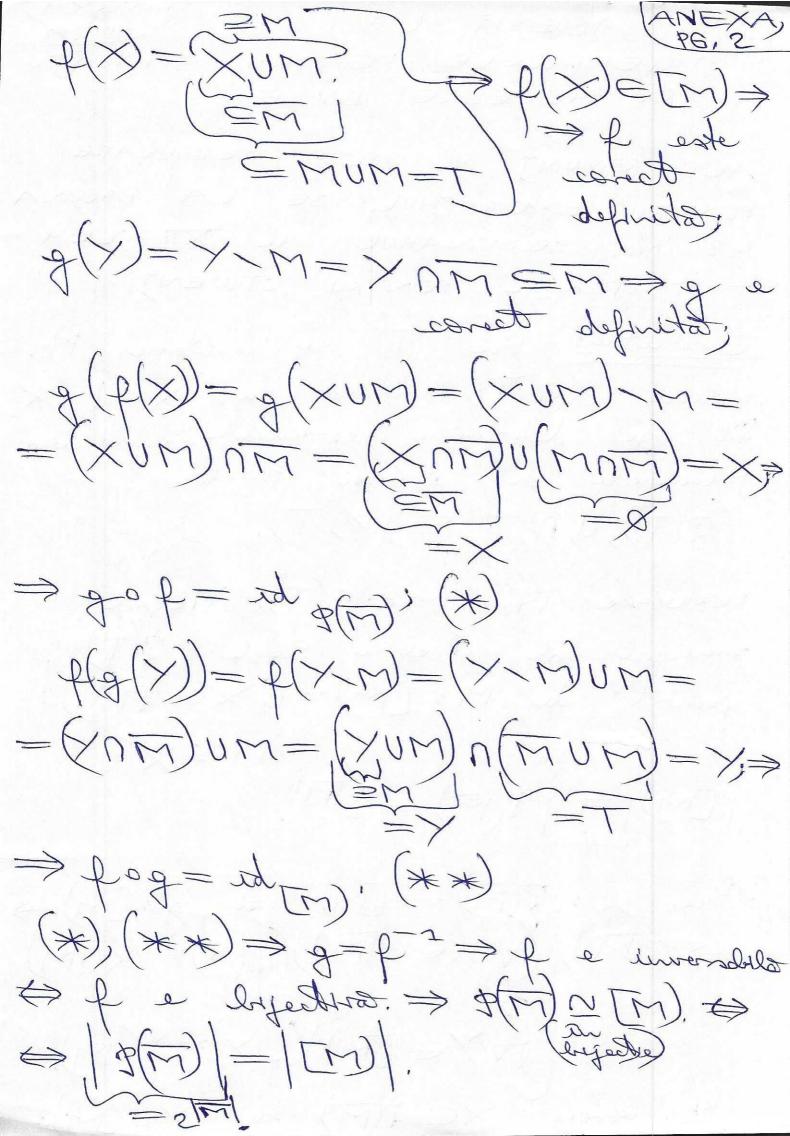ANEXĂ LA
MATERIALELE PENTRU STUDENȚI
CU ALGEBRE BOOLE

ALT ENUNȚ ȘI ALTĂ REZOLVARE
PENTRU EXERCIȚIUL DE LA PAGINA
43 DIN SEMINARUL AL XII-LEA -
- MATERIAL PENTRU STUDENȚI:

__Exercițiu:__ Fie T o mulțime. Să
fie fiecare $X \in T$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$.
Să se determine cardinalele filtrelor
principale de algebrei Boole
$(\mathscr{P}(T), \cup, \cap, \bar{\cdot}, \subseteq, \emptyset, T)$.

REZOLVARE: Fie $M \in \mathscr{P}(T)$. Filtrul
principal al algebrei Boole $\mathscr{P}(T)$
generat de M: $[M) = \{X \in \mathscr{P}(T) \mid M \subseteq X\}$.

$$|[M)| \underset{\#}{=} |\mathscr{P}(\overline{M})| = 2^{|\overline{M}|}.$$

Fie $f: \mathscr{P}(\overline{M}) \to [M)$ și $g: [M) \to$
$\to \mathscr{P}(\overline{M})$, $\left(\forall X \in \mathscr{P}(\overline{M})\right)\left(f(X) = X \cup M\right)$
și
$\left(\forall Y \in [M)\right)\left(g(Y) = Y \setminus M\right)$.

Să, orice $X \in \mathscr{P}(\overline{M})$ și $Y \in [M)$:

$$f(X) = \underset{\subseteq M}{\overset{\supseteq M}{(X \cup M)}} \subseteq M \cup M = T$$

$\Rightarrow f(X) \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow$ f este corect definită;

$$g(Y) = Y \setminus M = Y \cap \overline{M} \subseteq M \Rightarrow g \text{ e}$$

corect definită;

$$g(f(X)) = g(X \cup M) = (X \cup M) \setminus M =$$
$$= (X \cup M) \cap \overline{M} = \underset{\underset{= X}{\underbrace{(X \cap \overline{M})}_{\subseteq M}}}{} \cup \underset{= \emptyset}{\underbrace{(M \cap \overline{M})}} \Rightarrow X;$$

$$\Rightarrow g \circ f = id_{\mathcal{P}(M)}; \; (*)$$

$$f(g(Y)) = f(Y \setminus M) = (Y \setminus M) \cup M =$$
$$= (Y \cap \overline{M}) \cup M = \underset{\underset{= Y}{\underbrace{(Y \cup M)}_{\supseteq M}}}{} \cap \underset{= T}{\underbrace{(\overline{M} \cup M)}} \Rightarrow Y;$$

$$\Rightarrow f \circ g = id_{\mathcal{P}(M)}; \; (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow g = f^{-1} \Rightarrow f \text{ e inversabilă}$$
$$\Leftrightarrow f \text{ e bijectivă.} \Rightarrow \underset{\text{au bijectie}}{\mathcal{P}(M) \approx \mathcal{P}(M)}. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \underset{= 2^{|M|}}{\underbrace{|\mathcal{P}(M)|}} = |\mathcal{P}(M)|.$$

Exemplu: În cazul în care T este finită: $|T| = n \in \mathbb{N}$, avem: dacă $M \in \mathcal{P}(T) \Rightarrow |M| = k \in \overline{0,n} \Rightarrow |\overline{M}| = n - k \ (\in \overline{0,n}) \Rightarrow |[M)| = 2^{n-k}$ în algebra Boole $\mathcal{P}(T)$.

Exercițiu temă: Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind exemplul de mai sus și faptul că funcția $f: \mathcal{P}(\overline{1,n}) \to L_2^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid x_1,\ldots,x_n \in L = \{0,1\}\}$, definită prin:

$$\forall M \in \mathcal{P}(\overline{1,n}) \ (f(M) = (X_M(1),\ldots,X_M(n)))$$

$$\underbrace{\text{(vectorul caracteristic al lui } M\text{)}}$$

este izomorfism boolean de la $\mathcal{P}(\overline{1,n})$ la L_2^n, să se deducă faptul că, pt. orice $x_1,\ldots,x_n \in L_2 = \{0,1\}$, în algebra Boole L_2^n,

$$|[(x_1,\ldots,x_n))| = 2^{n-(x_1+\cdots+x_n)}.$$

Se va folosi observația următoare: pt. orice $x_1,\ldots,x_n \in L_2 = \{0,1\}$, dacă notăm cu $M = \{i \in \overline{1,n} \mid x_i = 1\}$, atunci $x_1 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} X_M(i) = |M|$, unde ca și mai sus, X_M e funcția caracteristică a lui M raportat la $\overline{1,n}$.

4./ Observație privind EXERCIȚIUL 10/PG. 27/SEMINARUL XII – MATERIAL PENTRU STUDENȚI:

Dacă A și B sunt algebre Boole, iar $f: A \to B$ este un morfism boolean, atunci congruența asociată filtrului $f^{-1}(\{1\})$ al lui A este:

$$\underset{f^{-1}(\{1\})}{\sim} = \{(x,y) \in A^2 \mid$$

$$x \leftrightarrow y \in f^{-1}(\{1\})\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x \leftrightarrow y) \in \{1\}\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x \leftrightarrow y) = 1\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x) \leftrightarrow f(y) = 1\} = \{(x,y) \in A^2 \mid f(x) = f(y)\} = \mathrm{Ker}(f) : \underline{\text{nucleul de}}$$

$$\underline{\text{săgeată dublă}} \text{ al lui } f - \text{ a se}$$

vedea proprietatea de universalitate a mulțimii factor, în capitolul/secțiunea cursului privind relațiile de echivalență și partițiile asociate lor.

P. orice funcție $h: X \to Y$, $\mathrm{Ker}(h) \in Eq(X)$. P. orice morfism boolean $f: A \to B$, $\mathrm{Ker}(f) \in Con(A)$. (A se revedea notațiile din curs.

Existența izomorfismului

boolean

$$\underbrace{\left(A \Big/ f^{-1}(\{1\}) \right)}_{= A \big/ \sim_{f^{-1}(\{1\})}} \cong f(A) \quad \text{este}$$

$$= A \Big/ \ker(f)$$

<u>teorema fundamentală de</u>
<u>izomorfism pentru algebre Boole</u>.
(A se vedea, de exemplu, <u>teorema</u>
<u>fundamentală de izomorfism pentru</u>
<u>grupuri</u>, în cursul de algebră.)

<u>Observație</u> privind EXERCIȚIUL 8/PG. 20/
SEMINARUL XII — MATERIAL PENTRU
STUDENȚI:

Avem o mulțime T și filtrul
F al algebrei Boole $\mathcal{P}(T)$ format
din părțile cofinite ale lui T.
Am demonstrat că, congruența lui
$\mathcal{P}(T)$ asociată acestui filtru este:

$$\sim_F = \left\{ (A,B) \in \left(\mathcal{P}(T) \right)^2 \,\Big|\, |A \triangle B| < \infty \right\}.$$

Au loc următoarele egalități,
pentru orice $A, B \in \mathcal{P}(T)$:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \xrightarrow{\overline{(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset}}$$

$$\Rightarrow |A \triangle B| = |A \setminus B| \cup |B \setminus A|,$$

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \subseteq A \subseteq T,$$

$$B \setminus A = B \setminus (A \cap B) \subseteq B \subseteq T,$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus (A \cap B)),$$

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B)).$$

Prin urmare: $\sim_F = \{ (A, B) \in (\wp(T))^2 \mid$

$$|A \setminus B| < \infty \quad \text{şi} \quad |B \setminus A| < \infty \} =$$

$$= \{ (A, B) \in (\wp(T))^2 \mid |A \setminus (A \cap B)| < \infty$$

şi $|B \setminus (A \cap B)| < \infty \} \subseteq \{ (A, B) \in (\wp(T))^2 \mid$

$$(\exists M, N \in \wp(T)) (|M| < \infty, |N| < \infty,$$

$$A = (A \cap B) \cup M, \quad B = (A \cap B) \cup N \} \overset{not.}{=} S$$

(am luat $M = A \setminus (A \cap B), N = B \setminus (A \cap B)$). (*)

dacă $A = (A \cap B) \cup M$, cu $M \in \wp(T)$

având $|M| < \infty$, atunci $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) =$

$$= A \cap \overline{(A \cap B)} = ((A \cap B) \cup M) \cap \overline{(A \cap B)} =$$

$$= ((A \cap B) \cap \overline{(A \cap B)}) \cup (M \cap \overline{(A \cap B)}) = M \cap \overline{(A \cap B)} \subseteq$$

$$\underset{= \emptyset}{}$$

$\subseteq M$, aşadar $|A \setminus B| \le |M| < \infty$. Analog,

dacă $B = (A \cap B) \cup N$, cu $N \in \wp(T)$,

având $|N| < \infty$, atunci $|B \setminus A| \le |N| < \infty, \Rightarrow$

$$\Rightarrow S \subseteq \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid$$

$$|A \setminus B| < \infty \quad \overset{*}{\text{și}} \quad |B \setminus A| < \infty\} \overset{**}{=} \underset{F}{\sim}_F$$

$$(*), (**) \Rightarrow \underset{F}{\sim} = S = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(T))^2 \mid$$

$$(\exists M, N \in \mathcal{P}(T)) \quad (|M| < \infty, |N| < \infty,$$

$$A = (A \cap B) \cup M, \ B = (A \cap B) \cup N\}. \quad (\sharp)$$

Să mai observăm următorul fapt, pentru demonstrarea căruia se poate folosi oricare dintre exprimările lui $\underset{F}{\sim}$ de mai sus: pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$:

(a) dacă $|A| < \infty \Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| < \infty\}$; #

(b) dacă $|A| \not< \infty \Rightarrow A/_F \subseteq \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |B| \not< \infty\}$. #

Într-adevăr, fie $A \in \mathcal{P}(T) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A/_F = A/_{\sim_F} = \{B \in \mathcal{P}(T) \mid |A \triangle B| <$$

$$< \infty\} \overset{(\sharp)}{=} \{B \in \mathcal{P}(T) \mid (\exists M, N \in \mathcal{P}(T))$$

$$(|M| < \infty, |N| < \infty, A = (A \cap B) \cup M,$$

$B = (A \cap B) \cup N)$? . (II)

(a) Presupunem că $|A| < \infty$. Fie

$B \in A/E \xrightarrow{(II)} (\exists N \in \mathscr{P}(T))(|N| < \infty$ și $B = (A \cap B) \cup N) \Rightarrow$

$\Rightarrow |B| \le \underbrace{|\overset{\subseteq A}{A \cap B}|}_{\le |A| < \infty} + \underbrace{|N|}_{< \infty} < \infty.$

(b) Presupunem că $|A| \nless \infty$. Fie

$B \in A/E. \xrightarrow{(II)} (\exists M \in \mathscr{P}(T))(|M| < \infty$ și $A = (A \cap B) \cup M) \Rightarrow$

$\Rightarrow |A| \le \underbrace{|\overset{\subseteq B}{A \cap B}|}_{\le |B|} + |M| \le |B| + \underbrace{|M|}_{< \infty}.$

Presupunem prin absurd că $|B| < \infty$

$\Rightarrow |A| < \infty, \text{abs}. \Rightarrow |B| \nless \infty.$

Așadar, pentru orice $A, B \in \mathscr{P}(T)$

dacă $\underbrace{(A \nu E B)}_{(II)} \Rightarrow \begin{cases} |A| < \infty \text{ și } |B| < \infty \\ \text{sau} \\ |A| \nless \infty \text{ și } |B| \nless \infty \end{cases}$

$A/E = B/E$