

Algoritmica Grafurilor

Ștefan Popescu

PopescuStefanBDV@gmail.com

Despre ce e vorba?

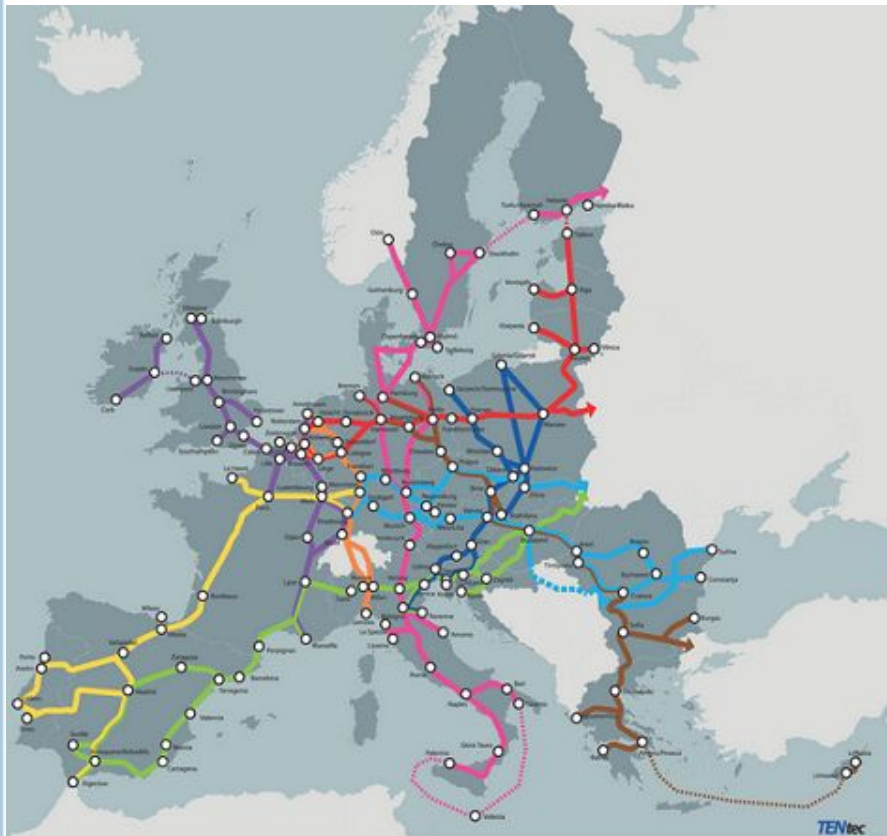
- Noțiuni fundamentale de teoria grafurilor
- Însușirea și familiarizarea cu algoritmi fundamentali din teoria grafurilor
- Însușirea deprinderii de a modela problemele folosind grafuri
- Aplicații

Obiective specifice:

- Cunoașterea principalelor noțiuni și rezultate din teoria grafurilor și a utilității acestora
- **Modelarea problemelor** cu ajutorul grafurilor și **elaborarea de algoritmi** de grafuri pentru rezolvarea acestora
- Abilități de **justificare a corectitudinii** algoritmilor propuși și de a estima eficiența acestora
- **Implementarea eficientă** a algoritmilor

Aplicații

- Transport, căi de comunicare, etc



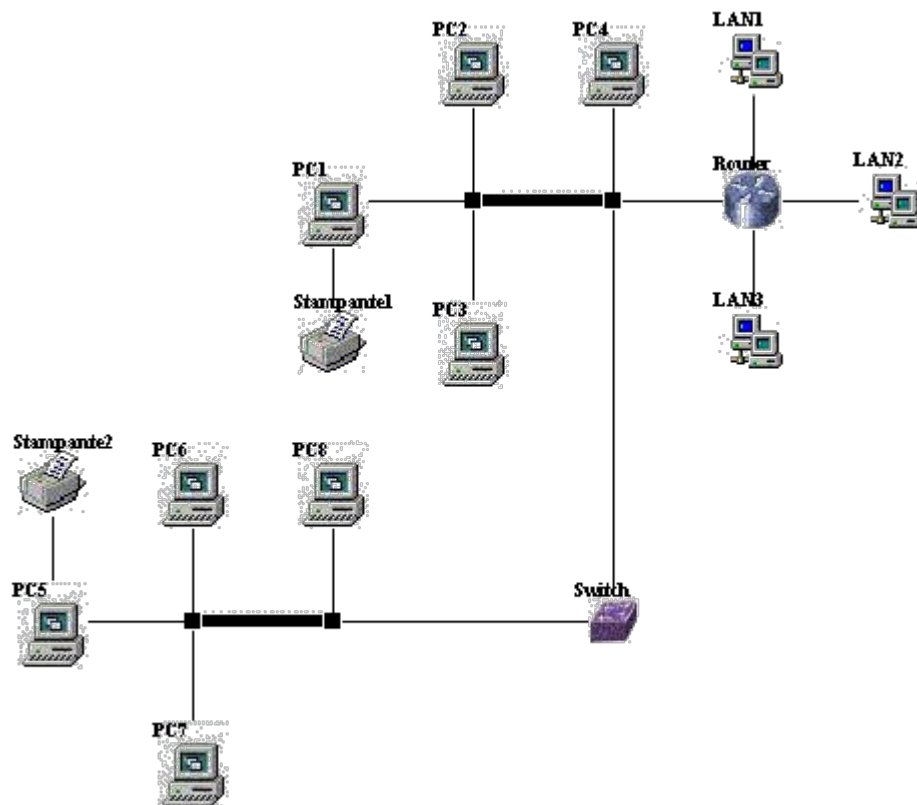
Aplicații

- Rețele sociale, sociologie



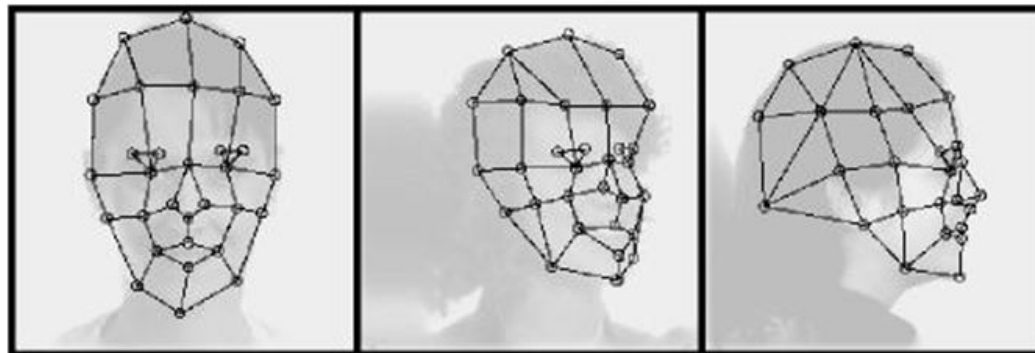
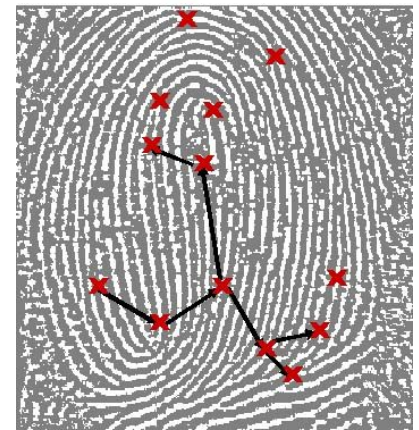
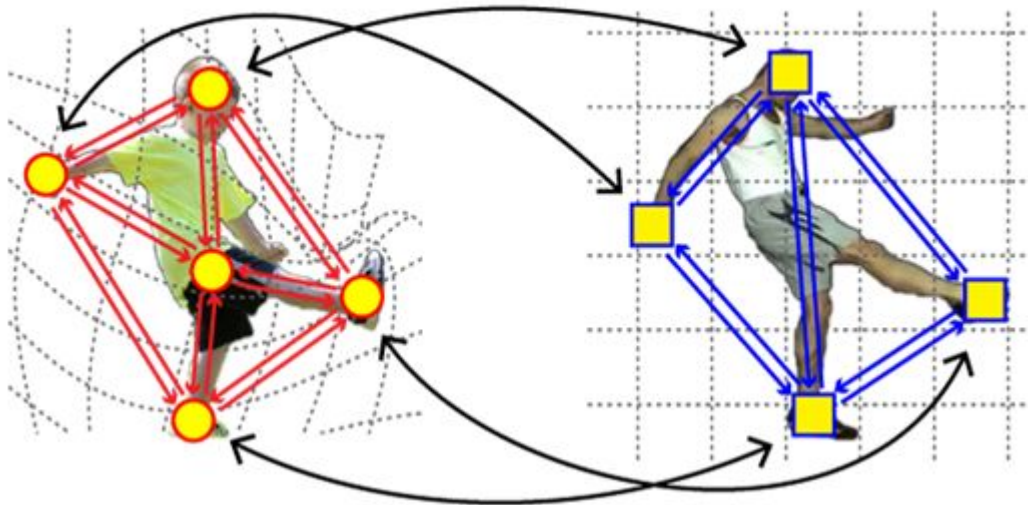
Aplicații

- Rețele de calculatoare



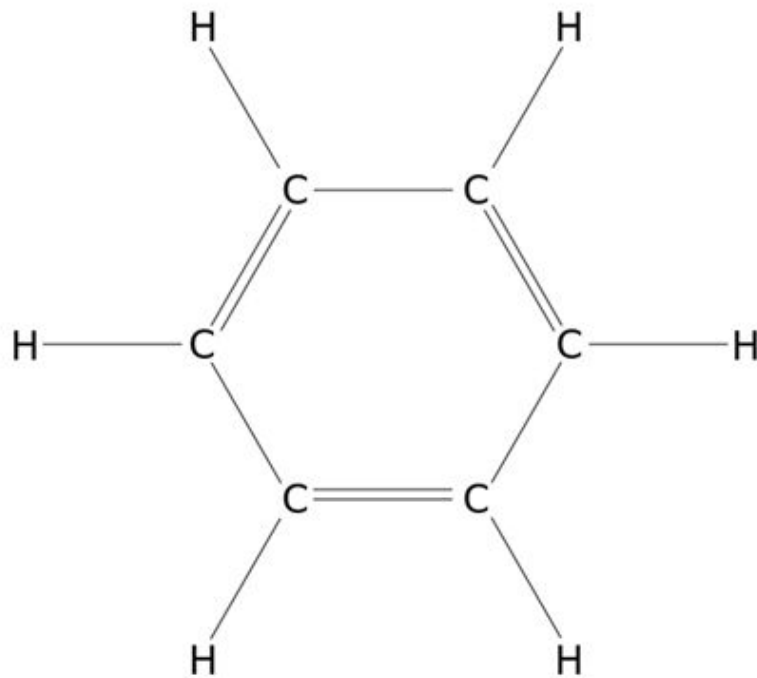
Aplicații

- Computer Vision



Aplicații

- Chimie



Aplicații

- Limbaje Formale, Tehnici de Compilare
- Optimizare
- Bioinformatică
- Baze de date
- Diverse jocuri (șah, Catan, StarCraft,...)

Motivație

- Domeniu fundamental
- Bază pentru alte cursuri
- Examen de licență
- Interviuri

Bibliografie



Bibliografie

- Dragoș-Radu Popescu, **Combinatorică și teoria grafurilor**, Editura Societatea de Științe Matematice din România, București, 2005.
- Dragoș-Radu Popescu, R. Marinescu-Ghemeci, **Combinatorică și teoria grafurilor prin exerciții și probleme**, Editura Matrixrom, 2014

Bibliografie

- Jon Kleinberg, Éva Tardos, **Algorithm Design**, Addison-Wesley 2005
<http://www.cs.princeton.edu/~wayne/kleinberg-tardos/>
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.R. Rivest – **Introducere in algoritmi**, MIT Press, trad. Computer Libris Agora

Bibliografie

- Douglas B. West, **Introduction to Graph Theory**, Prentice Hall 1996, 2001
- J.A. Bondy, U.S.R Murty – **Graph theory with applications**, The Macmillan Press 1976 / Springer 2008

Evaluare și Examen



Evaluare și Examen

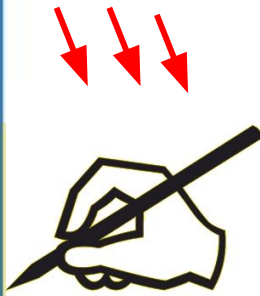
- Laborator - 2 puncte:
 - Teme (aproximativ 4) și evaluare pe parcurs (lucru în timpul laboratoarelor)
 - Se va lucra în C/C++. Lucrul OOP și cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.

Evaluare și Examen

- Laborator - 2 puncte:
 - Teme (aproximativ 4) și evaluare pe parcurs (lucru în timpul laboratoarelor)
 - Se va lucra în C/C++. Lucrul OOP și cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.
- Examen scris - 8 puncte:
 - Teorie + Exerciții + Algoritmică

Evaluare și Examen

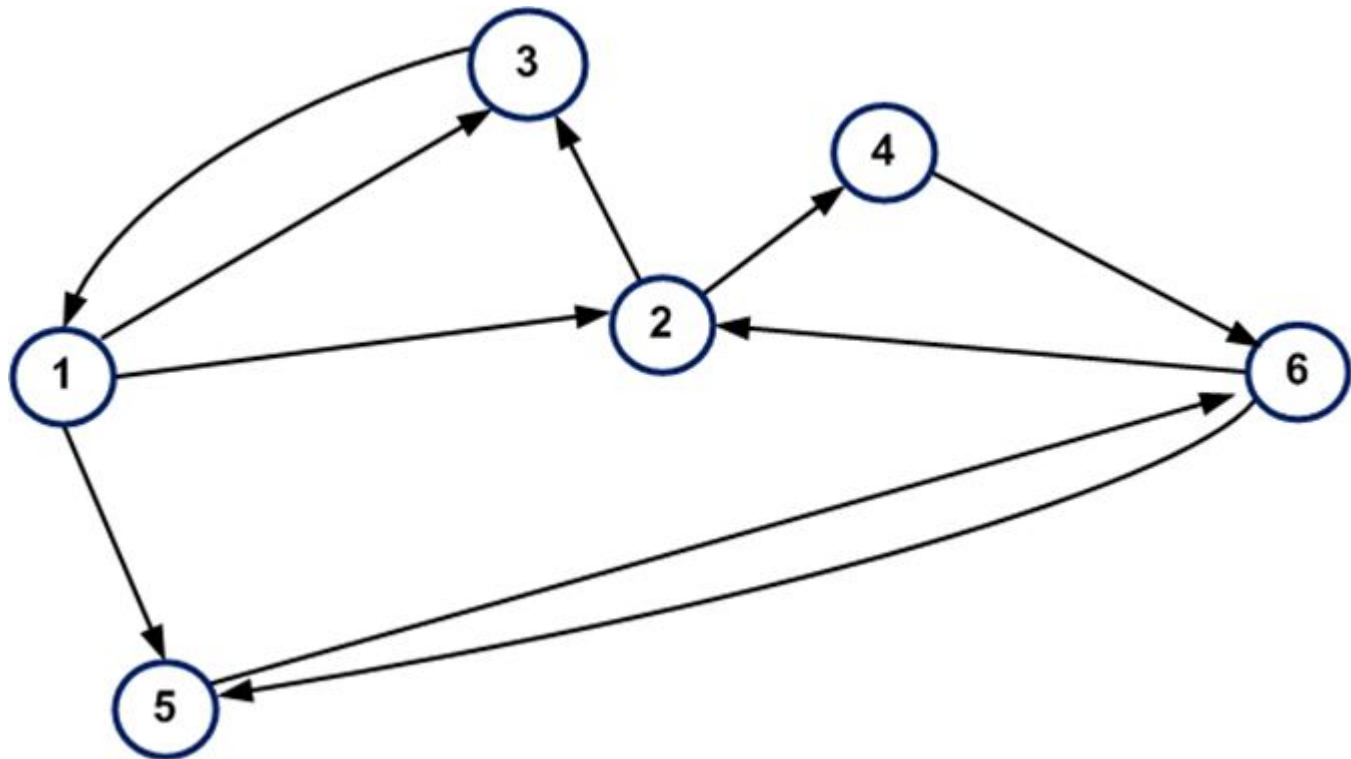
- Laborator - 2 puncte:
 - Teme (aproximativ 4) și evaluare pe parcurs (lucru în timpul laboratoarelor)
 - Se va lucra în C/C++. Lucrul OOP și cu folosirea elementelor din STL nu este obligatorie dar este încurajată.
- Examen scris - 8 puncte:
 - Teorie + Exerciții + Algoritmă
- Seminar:
 - Înțelegerea mai bună a noțiunilor prezentate la curs; Exerciții;
 - BONUSURI!!!



Definiții & Noțiuni de bază

Graf orientat

Graf orientat



Graf orientat - definiții



Graf orientat - definiții



Graf orientat "G" - pereche de mulțimi $G = (V, E)$;

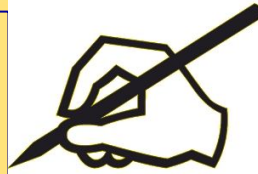
- **V** - mulțimea vârfurilor (de obicei notate cu numere)
- **$E \subseteq V \times V$** - mulțimea arcelor - mulțime de perechi ordonate (n.e. $(2,5) \neq (5,2)$)

$v \in V$ - **vârf**; $e = (u, v) \in E$; uv - **arc**

$u = e^-$ - **vârf inițial** / origine / extremitate inițială

$v = e^+$ - **vârf final** / terminus / extremitate finală

Graf orientat - Exemplu



$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

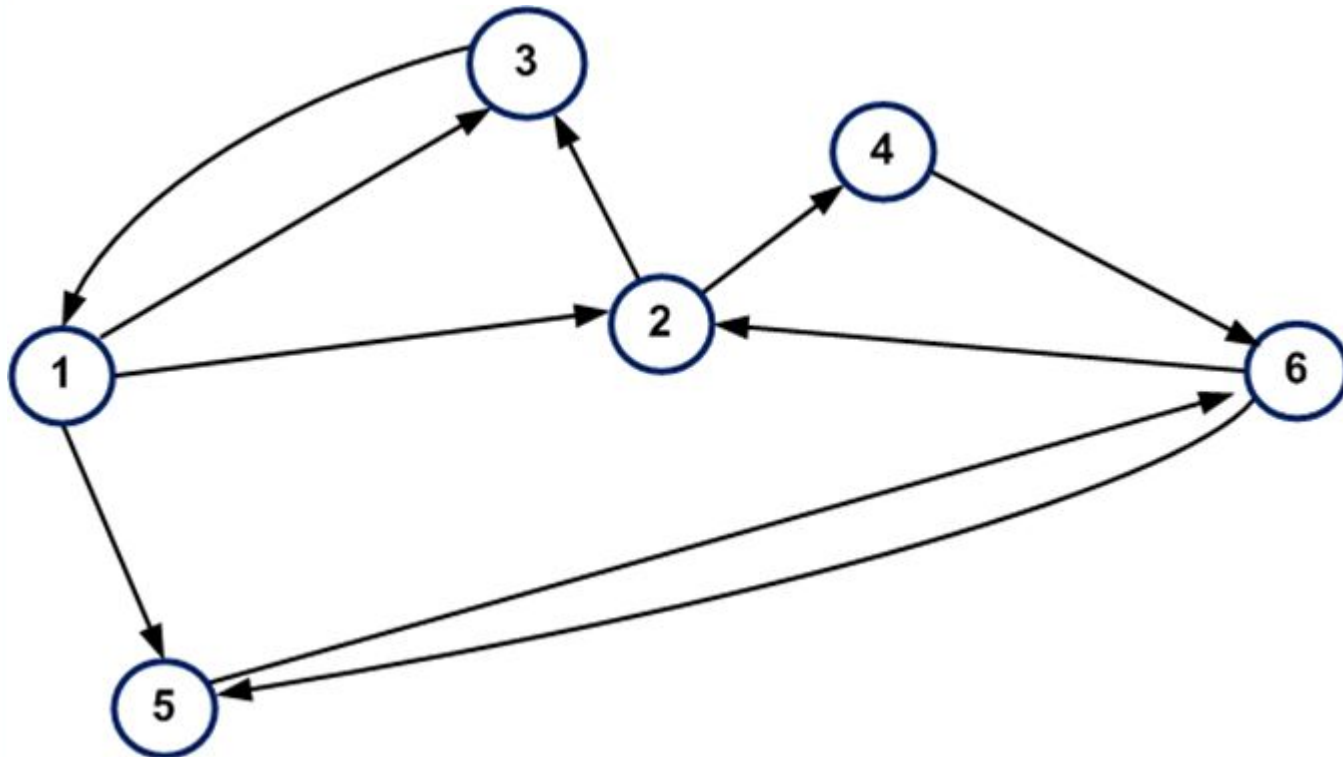
$$E = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (4, 6); (5, 6); (6, 5)\}$$

Graf orientat - Exemplu



$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

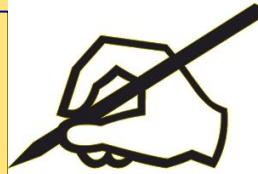
$E = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (4, 6); (5, 6); (6, 5)\}$



Multiset



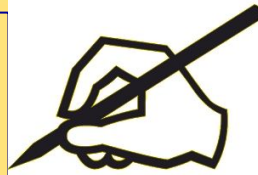
Multiset



Definiție:

- Fie S o mulțime (finită) nevidă
- **Multiset**
 - Intuitiv: “mulțime” în care se pot repeta elementele

Multiset



Definiție:



- Fie S o mulțime (finită) nevidă
- **Formal:**
 - Mai exact, un multiset este format dintr-o mulțime S căreia i se atașează un ordin de multiplicitate pentru fiecare element al lui S
 - Multitestul $M=(S,r)$, unde $r : S \rightarrow \mathbb{N}$ este funcția de multiplicitate

Multiset



Definiție:



- Fie S o mulțime (finită) nevidă
- **Formal:**
 - Mai exact, un multiset este format dintr-o mulțime S căreia i se atașează un ordin de multiplicitate pentru fiecare element al lui S
 -  ○ Multitestul $M=(S,r)$, unde $r : S \rightarrow \mathbb{N}$ este funcția de multiplicitate
 -  ○ Notăție: $R=(x^{r(x)} \mid x \in S)$

Multiset



- **Exemplu**

- $S = \{2, 3, 5, 7\}$
- $R = \{2^3, 3, 5^2, 7^4\}$
- $|R| = 10$ (suma multiplicităților)

Graf orientat (revenire)



$G=(V,E)$

- $d_G^-(u)$ - gradul interior

$$d_G^-(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate finala pentru } e\}|$$

- $d_G^+(u)$ - gradul exterior

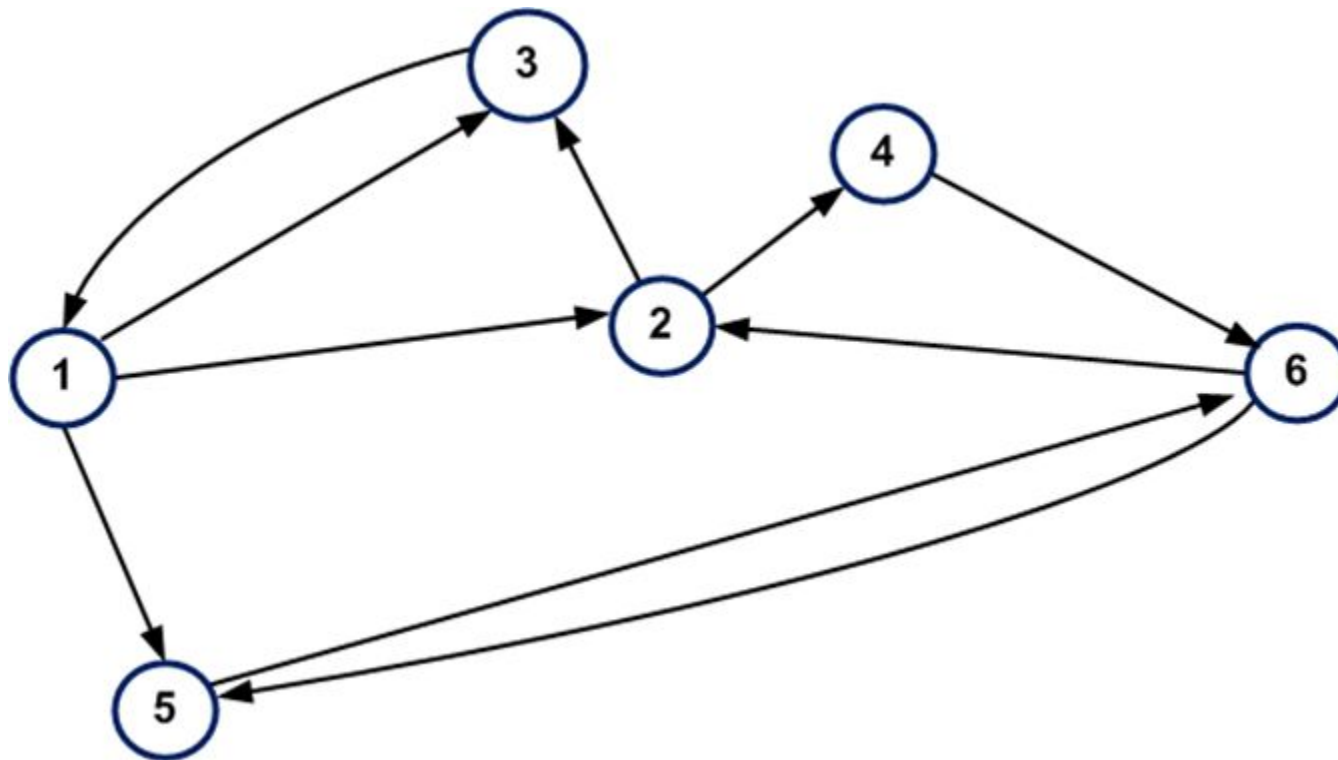
$$d_G^+(u) = |\{e \in E \mid u \text{ extremitate initiala pentru } e\}|$$

- $d_G(u)$ - grad

$$d_G(u) = d_G^+(u) + d_G^-(u)$$

Graf orientat - grade

Exemplu



Graf orientat - grade



Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) =$$

Graf orientat - grade



Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) =$$

Graf orientat - grade



Are loc relația:

$$\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d_G^+(u) = |E|$$

Graf orientat - grade



Fie $G=(V,E)$; $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

- Multisetul gradelor interioare:

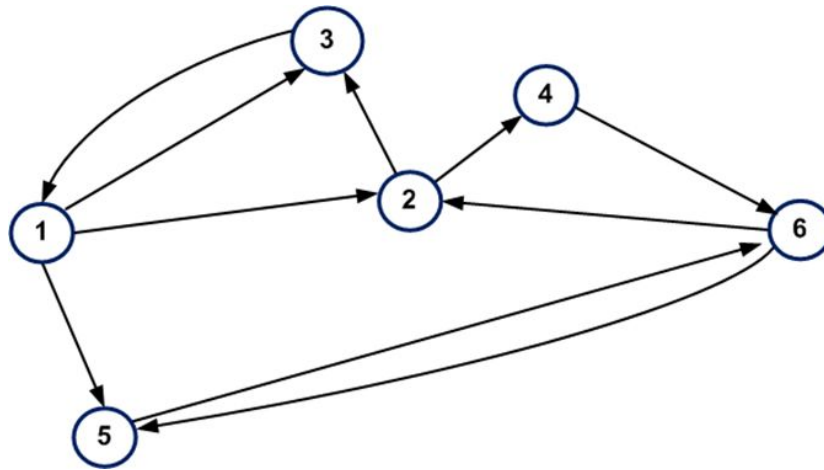
$$s^-(G) = \{d_G^-(v_1), \dots, d_G^-(v_n)\}$$

- Multisetul gradelor exterioare:

$$s^+(G) = \{d_G^+(v_1), \dots, d_G^+(v_n)\}$$

Graf orientat - grade

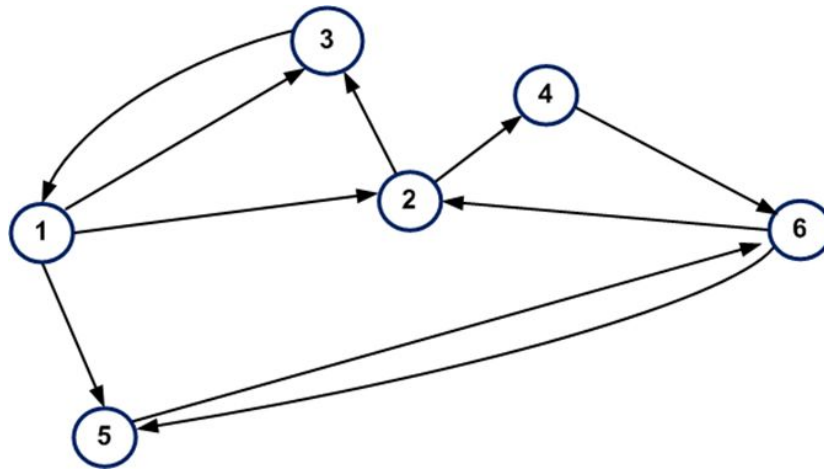
Exemplu



$s^-(G) =$

Graf orientat - grade

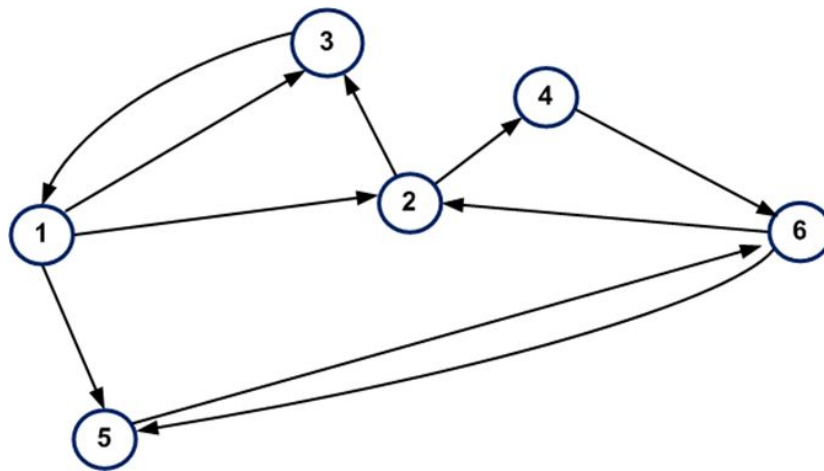
Exemplu



$$s^-(G) = \{1,$$

Graf orientat - grade

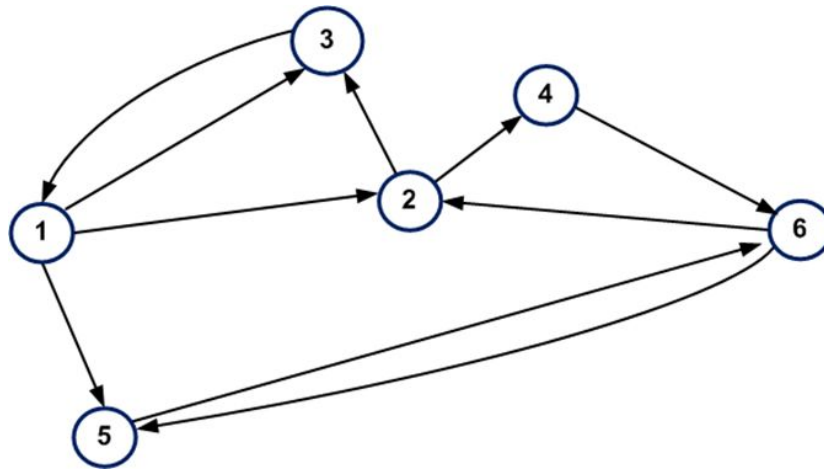
Exemplu



$$s^-(G) = \{1, 2\}$$

Graf orientat - grade

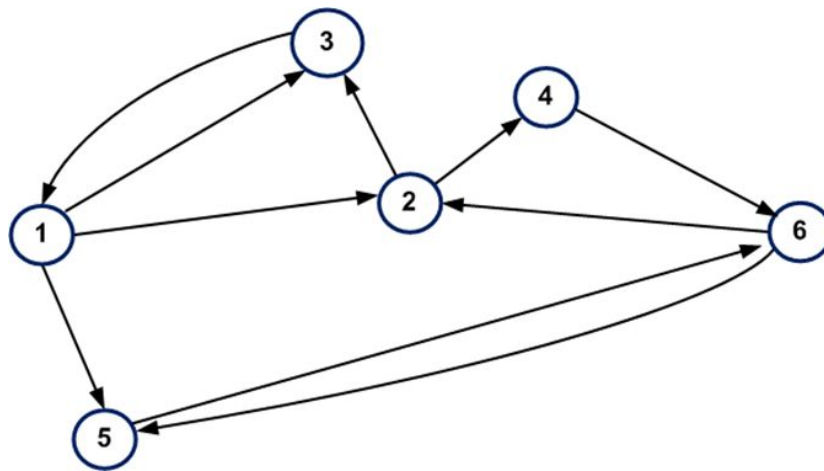
Exemplu



$$s^-(G) = \{1, 2, 2, 1, 2, 2\} =$$

Graf orientat - grade

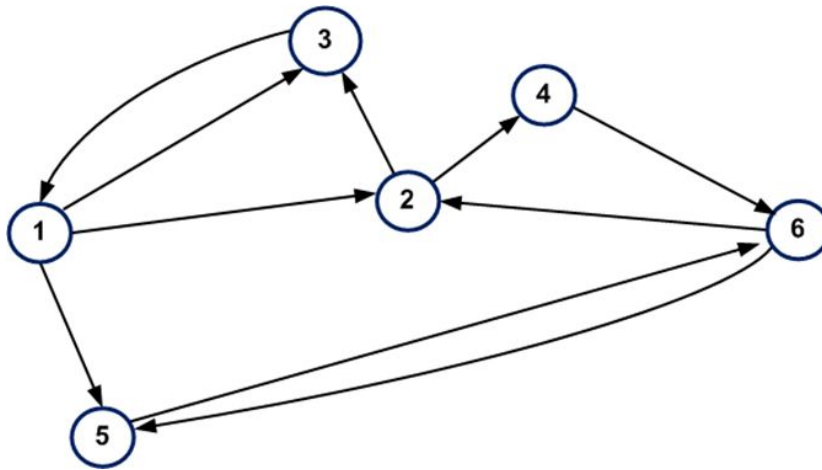
Exemplu



$$s^-(G) = \{1, 2, 2, 1, 2, 2\} = \{1^2, 2^4\};$$

Graf orientat - grade

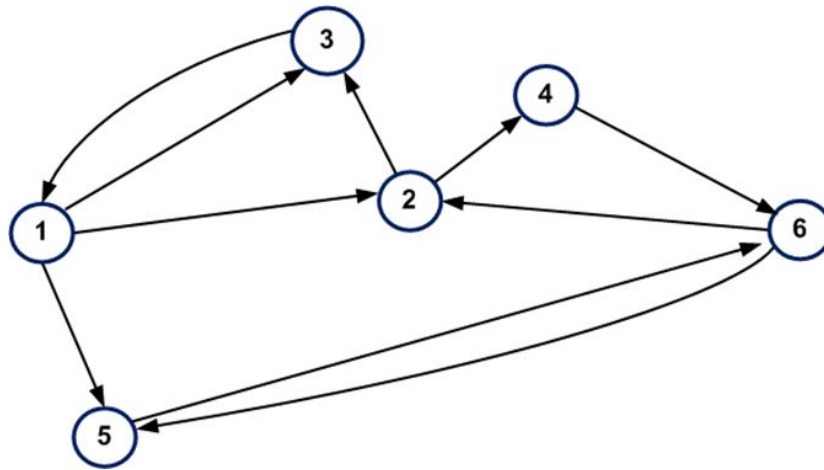
Exemplu



$$s^+(G)=$$

Graf orientat - grade

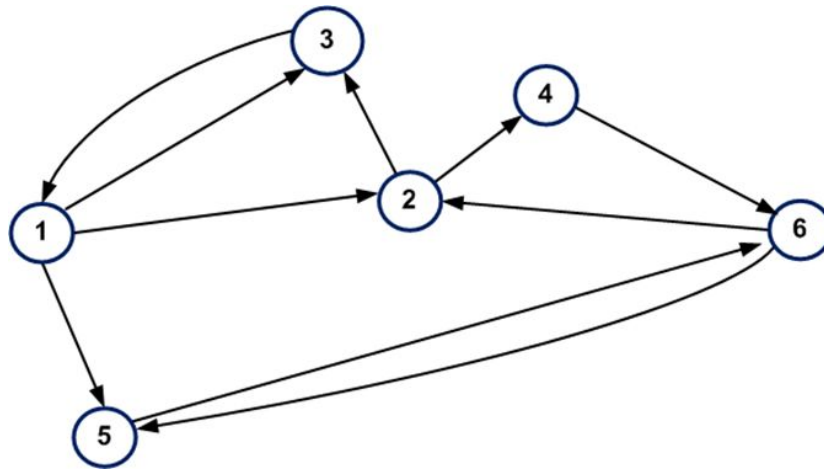
Exemplu



$$s^+(G) = \{3\}$$

Graf orientat - grade

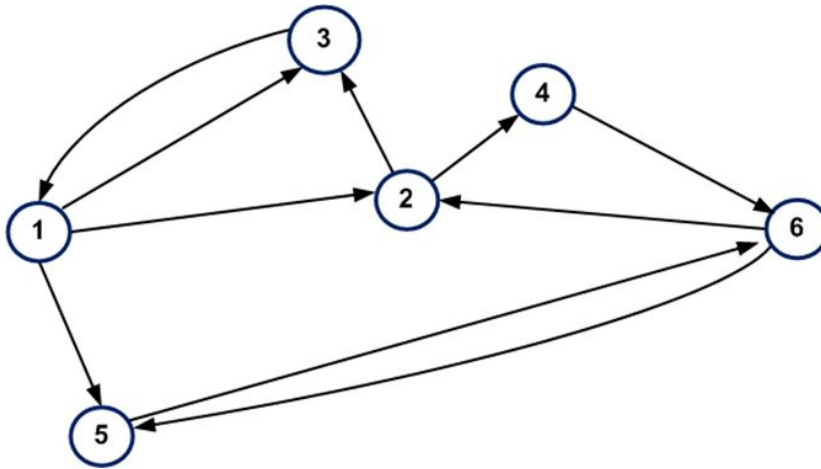
Exemplu



$$s^+(G) = \{3, 2, \dots\}$$

Graf orientat - grade

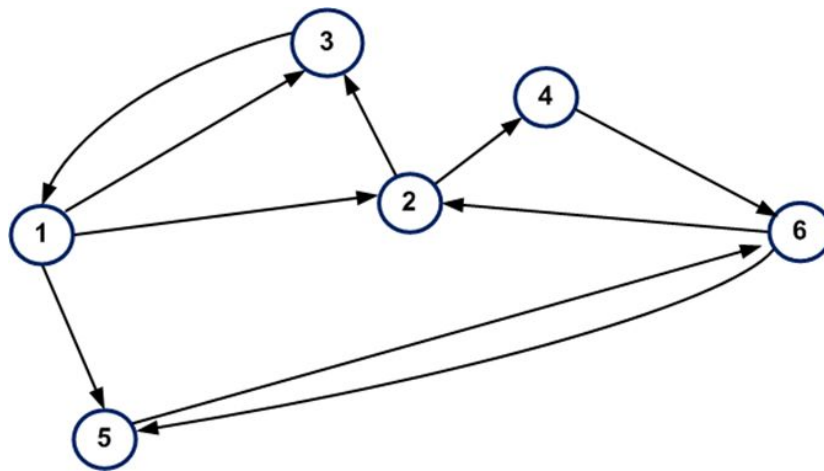
Exemplu



$$s^+(G) = \{3, 2, 1, 1, 1, 2\} = \dots$$

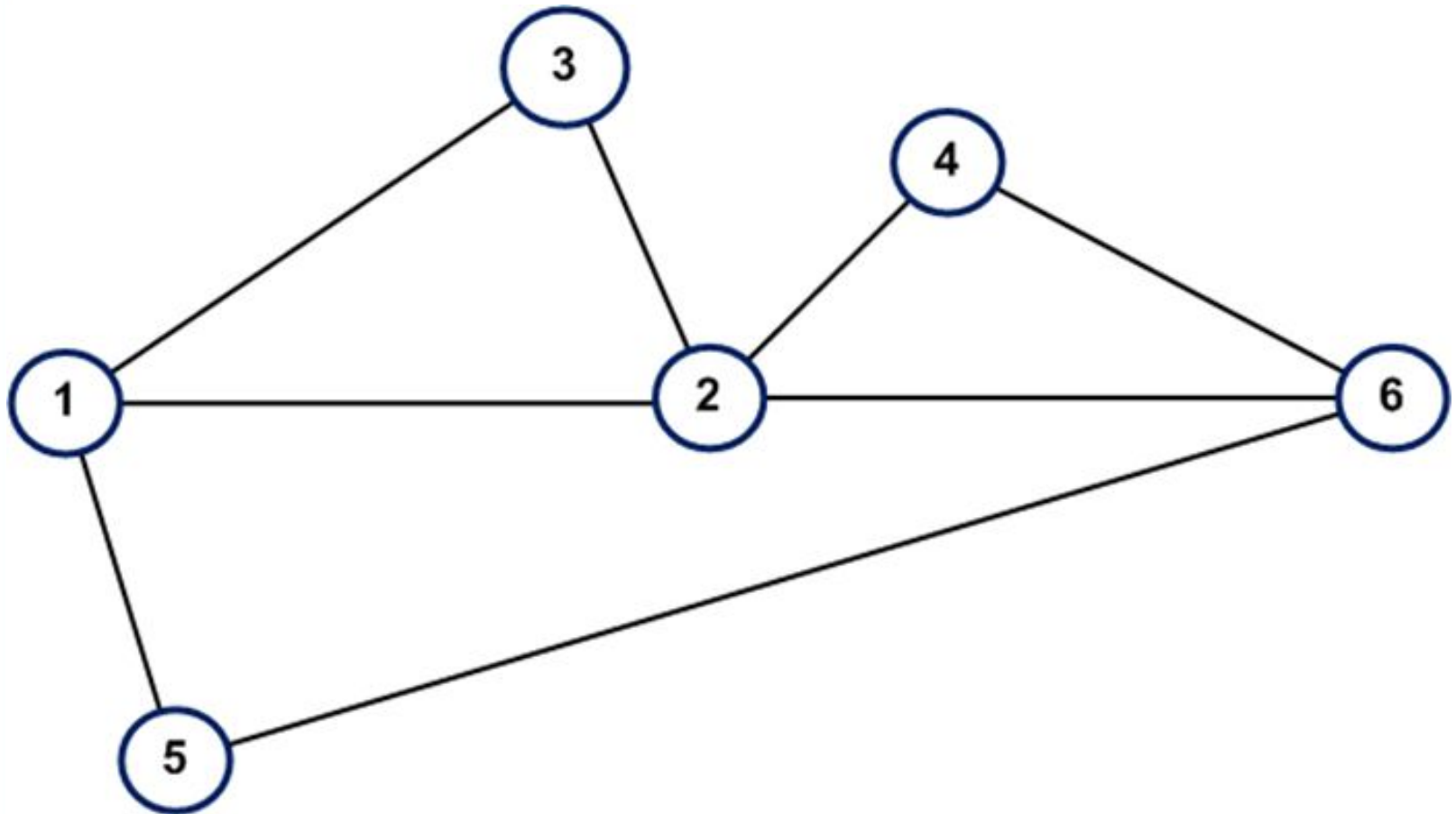
Graf orientat - grade

Exemplu

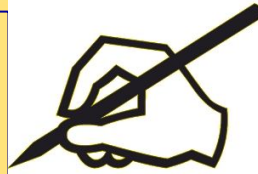


$$s^+(G) = \{3, 2, 1, 1, 1, 2\} = \{1^3, 2^2, 3\};$$

Graf neorientat



Graf neorientat - definiții



Graf orientat "G" - pereche de mulțimi $G = (V, E)$;

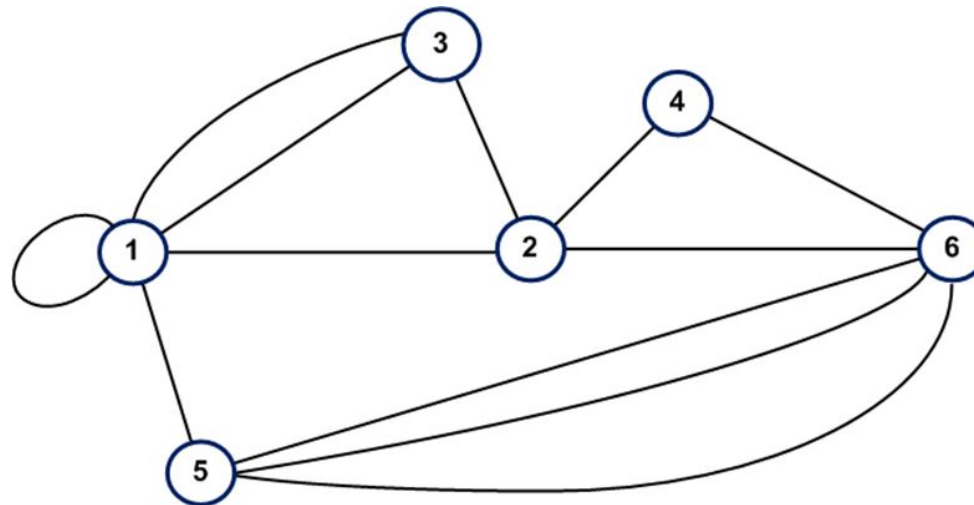
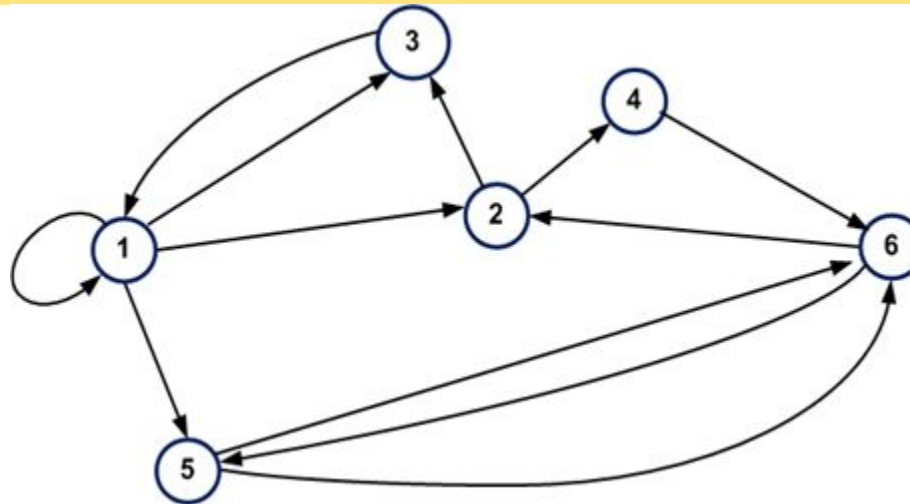
- V - mulțimea *nodurilor*
- $E \subseteq V \times V$ - mulțimea muchiilor- mulțime de perechi neordonate (*n.e.* $(2,5)=(5,2)$)

$v \in V$ - **nod**; $e=(u,v) \in E$; uv - **muchie**

u, v - **capete / extremități**

$d_G(u)=|\{e \in E \mid u \text{ este unul dintre capetele lui } e\}|$

Multigraf orientat/neorientat



Multigraf - definiții

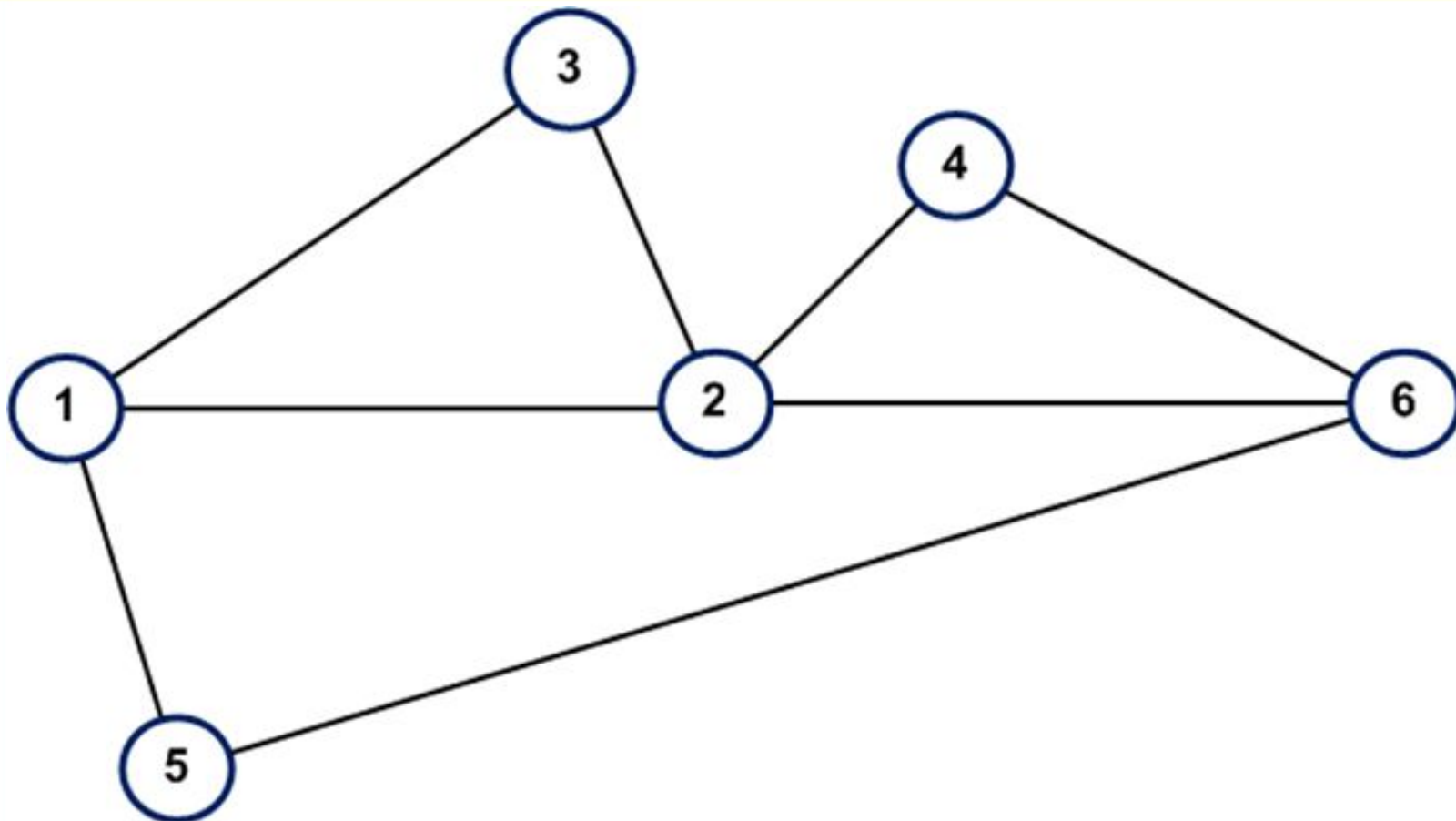


Graf orientat "G" - pereche de mulțimi $G = (V, E, r)$;

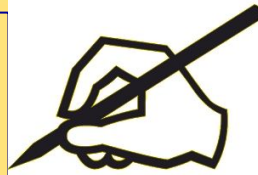
- **$r(e)$ - multiplicitatea muchiei e**
 - dacă $e=(v,v)$ - **buclă**
 - dacă $r(e)>1$ - **muchie multiplă**

$$d_G(u) = |\{e \in E \mid e \text{ nu este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| + 2 \cdot |\{e \in E \mid e \text{ este buclă, } u \text{ extremitate a lui } e\}| +$$

Adiacență, incidență



Adiacență, incidență



Graf neorientat - $G=(V,E)$

- $u,v \in V$ sunt noduri adiacente, dacă $(u,v) \in E$
- Altfel spus, u este vecin al lui v

Notatie:

$N_G(u)$ - mulțimea vecinilor lui u

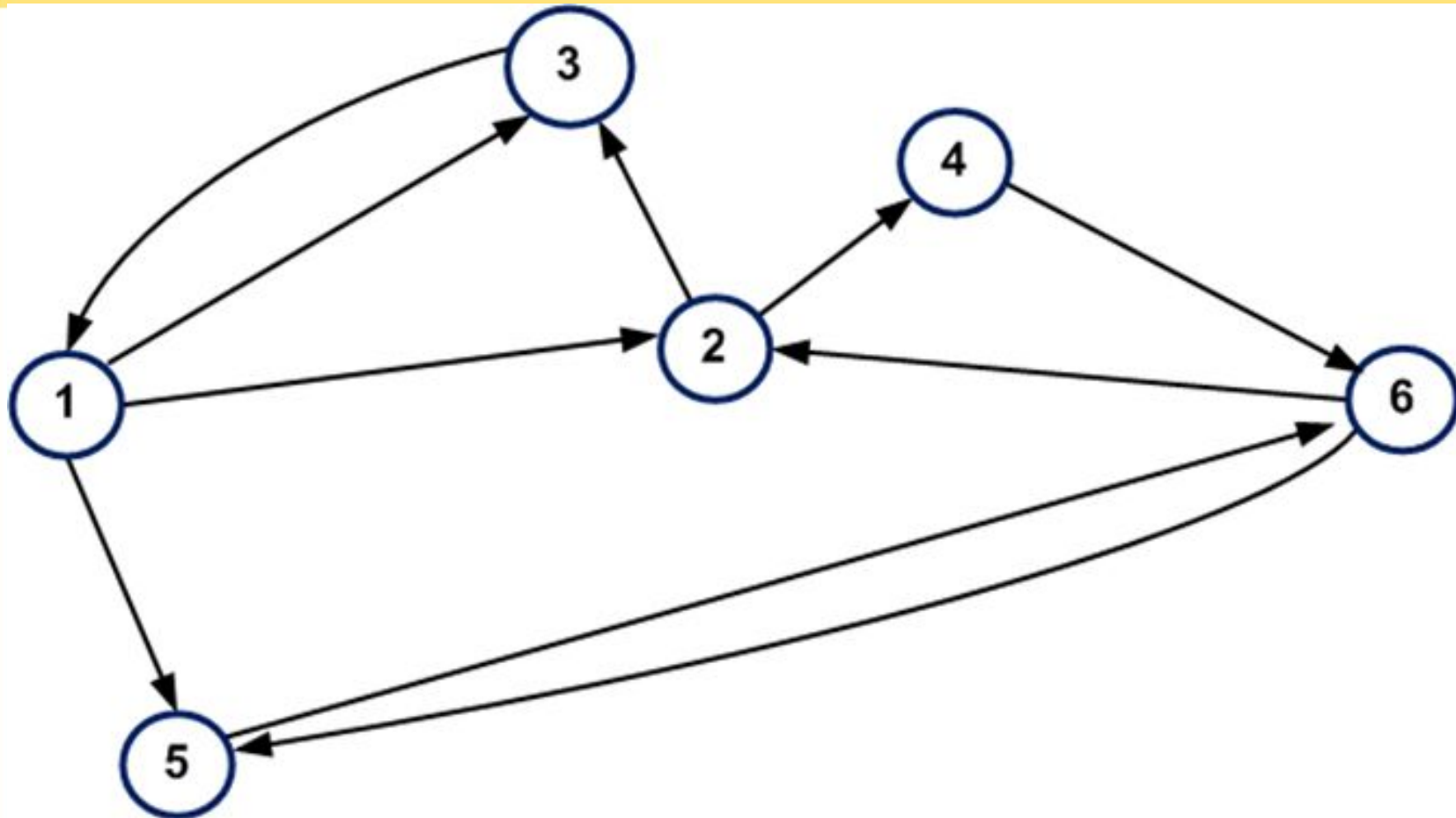
Adiacență, incidență



Graf neorientat - $G=(V,E)$

- O muchie e este incidentă cu un nod u , dacă acesta este o extremitate de a sa
- Două muchii, e și f sunt adiacente dacă există un nod v care este extremitate pentru ambele muchii.

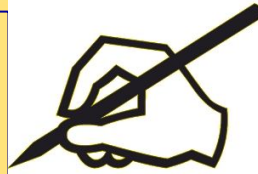
Drumuri, circuite



Drumuri, circuite

- **Drum**
- **Drum simplu**
- **Drum elementar**
- **Circuit + simplu/elementar**
- **Lungimea unui drum**
- **Distanță între două vârfuri**

Drumuri, circuite



Graf orientat- $G=(V,E)$

- Un drum P este o secvență de vârfuri $P=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ unde

- $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
- $(v_i, v_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$

Drumuri, circuite



Graf orientat- $G=(V,E)$

- Un **drum** P este o secvență de vârfuri $P=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ unde
 - $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$
- Un **lant** L este o secvență de vârfuri $L=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ unde
 - $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ sau $(v_{i+1}, v_i) \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$

Drumuri, circuite



Graf orientat- $G=(V,E)$

- Un **drum** P este o secvență de vârfuri $P=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ unde
 - $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$
- Un **lant** L este o secvență de vârfuri $L=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ unde
 - $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$
 - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ sau $(v_{i+1}, v_i) \in E, \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$

OBS: In cazul grafurilor neorientate cele două noțiuni sunt echivalente

Drumuri, circuite



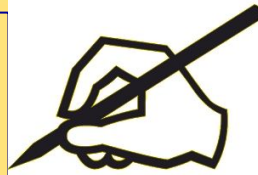
Graf orientat- $G=(V,E)$ și $P=[v_1, v_2, \dots, v_k]$ un drum în G

- P este **drum simplu** dacă nu conține un arc de mai multe ori $((v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}) \quad \forall i \neq j)$
- P este **drum elementar** dacă nu conține un vârf de mai multe ori $(v_i \neq v_j, \quad \forall i \neq j)$

Lungimea lui P este $k-1$ și este numărul de arce din alcătuirea lanțului

Un lanț (drum) cu extremitățile v_1, v_k se numește **v_1-v_k lanț** (drum)

Drumuri, circuite



Distanța dintre două vârfuri u și v este definită astfel:

$$d_G(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{daca } u = v \\ \infty, & \text{daca nu exista } u - v \text{ drum in } G \\ \min\{l(P) \mid P \text{ este } u - v \text{ drum in } G\}, & \text{altfel} \end{cases}$$

Drumuri, circuite



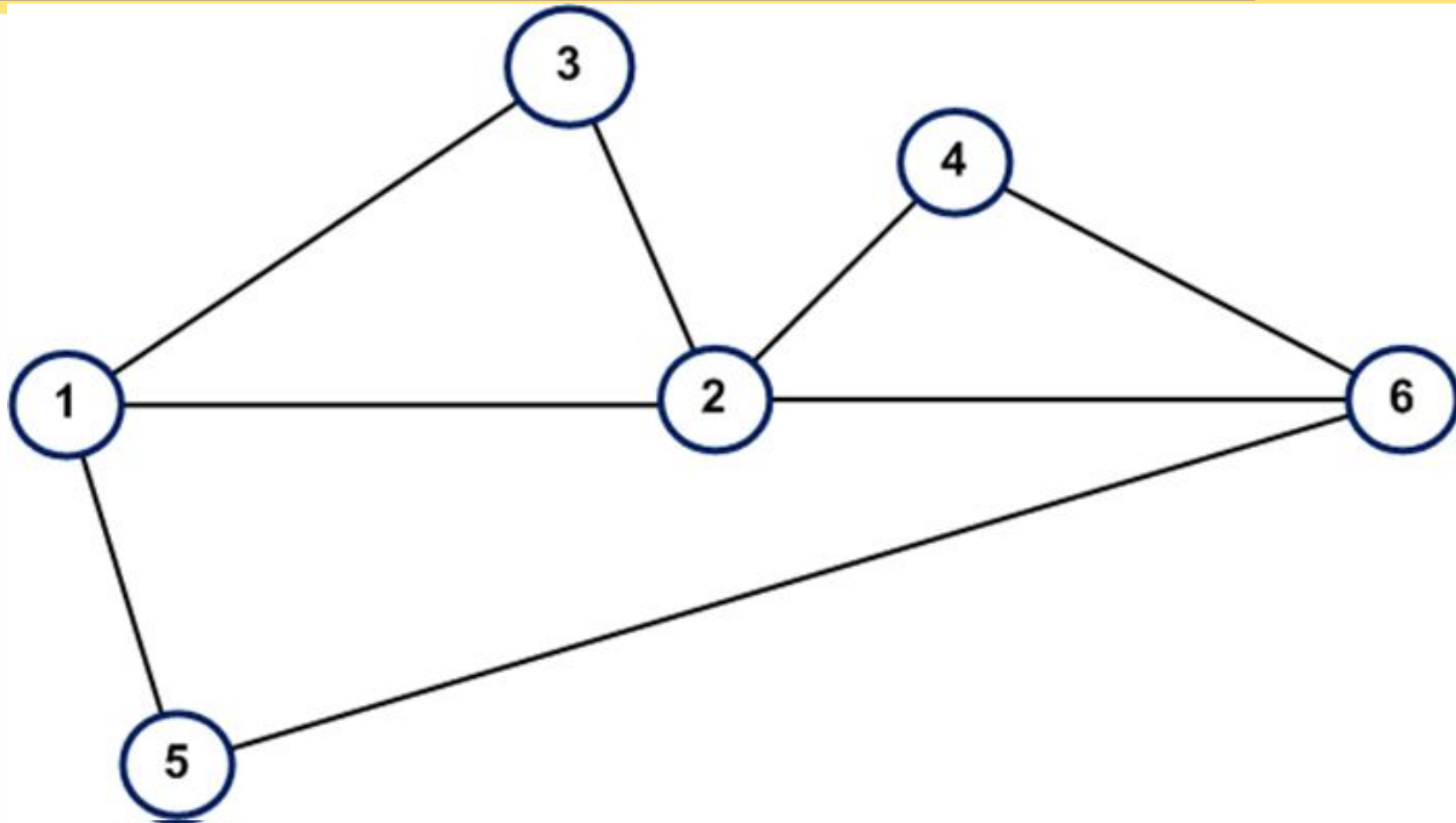
Graf orientat- $G=(V,E)$

Un circuit este un drum cu capetele identice

$C=[v_1, v_2, \dots, v_k, v_1]$ un drum în G

- **Circuit elementar** - un ciclu in care nu se repetă vârfurile

Lanțuri, cicluri



Lanțuri, cicluri

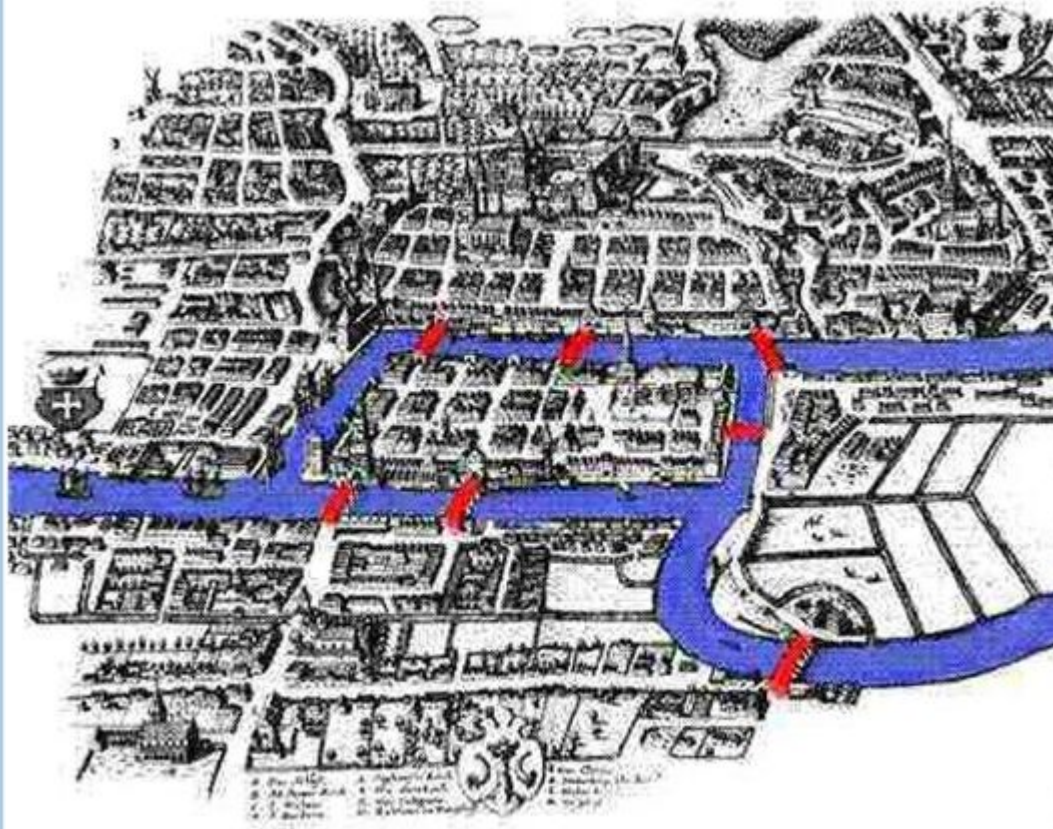


Graf neorientat- $G=(V,E)$ - noțiuni similare

- Un **lanț** este o secvență P de vârfuri cu proprietatea că oricare două vârfuri consecutive sunt adiacente
- $P = [v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k]$
- **lanț simplu / lanț elementar / lungime**
- **ciclu / ciclu elementar**
- **distanță / lanț minim**

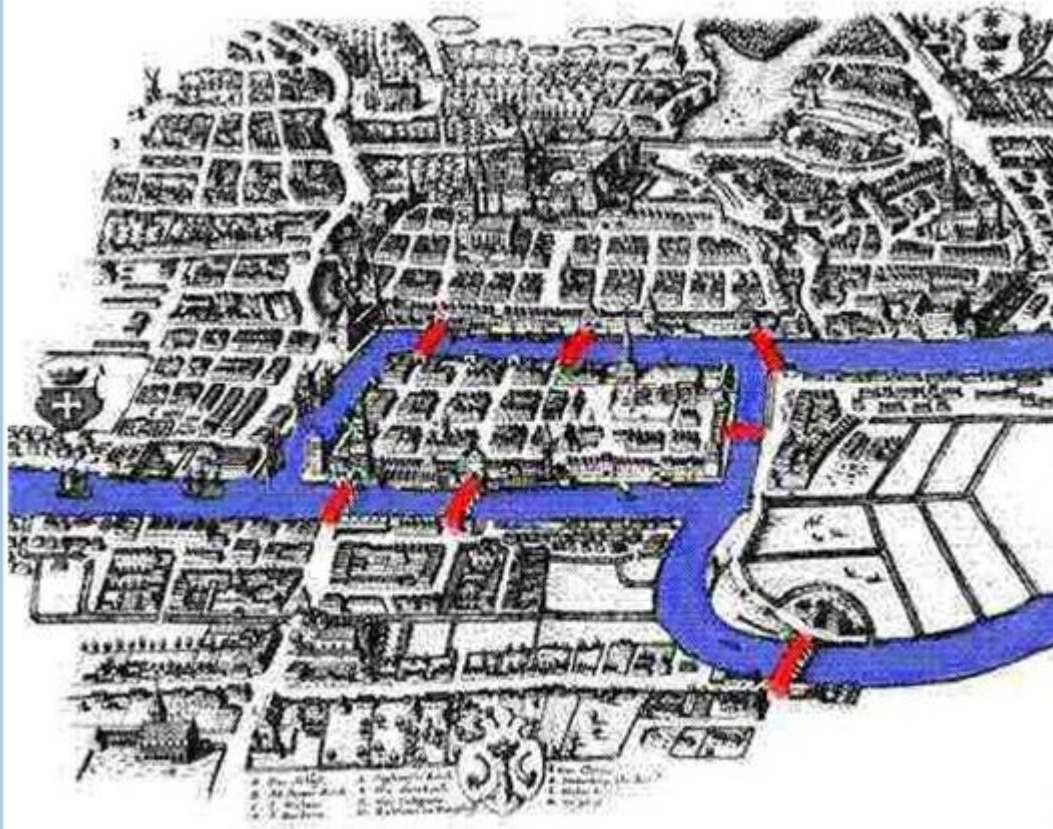
Istoric, Aplicații

Cele 7 poduri din Königsberg



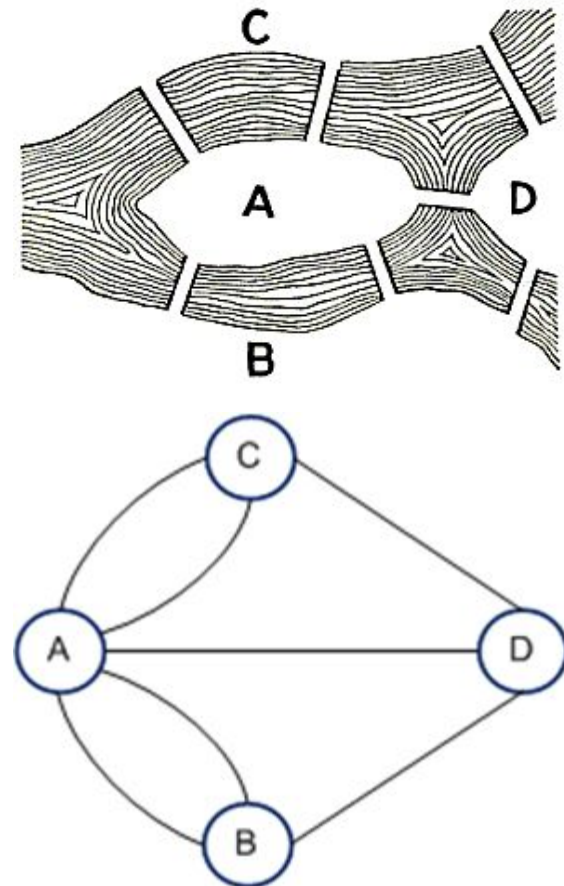
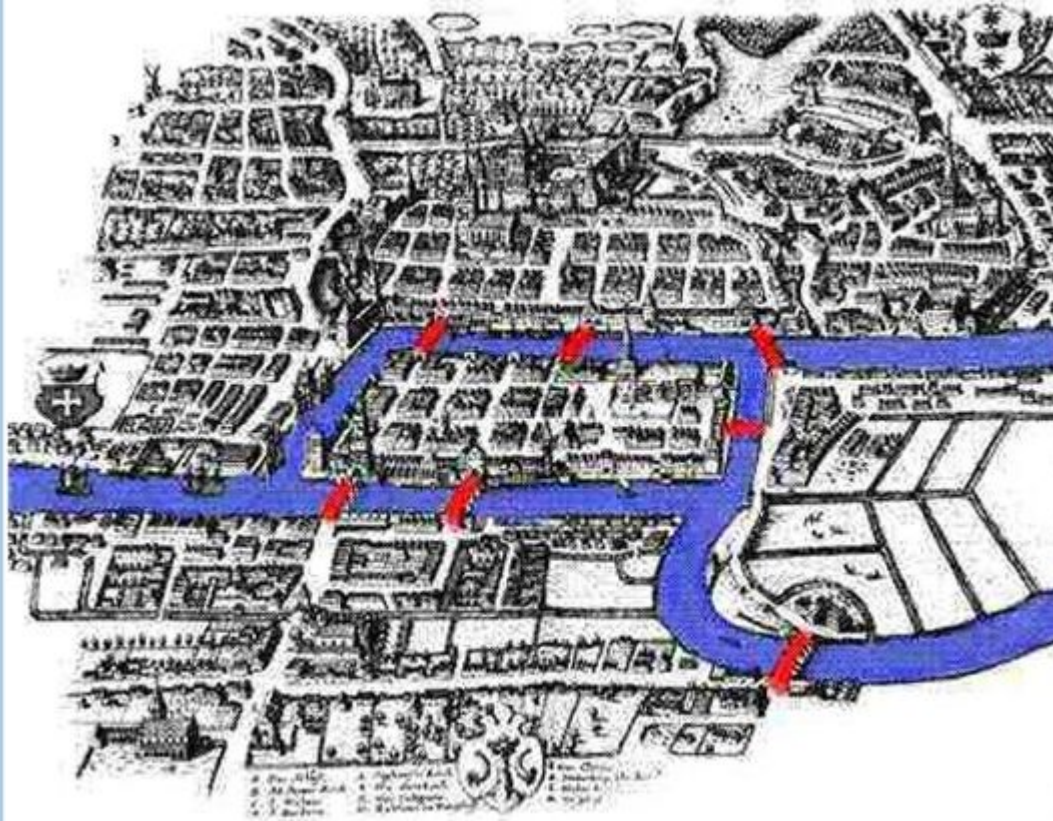
Orașul Königsberg,
aflat pe râul Prigel

Cele 7 poduri din Königsberg

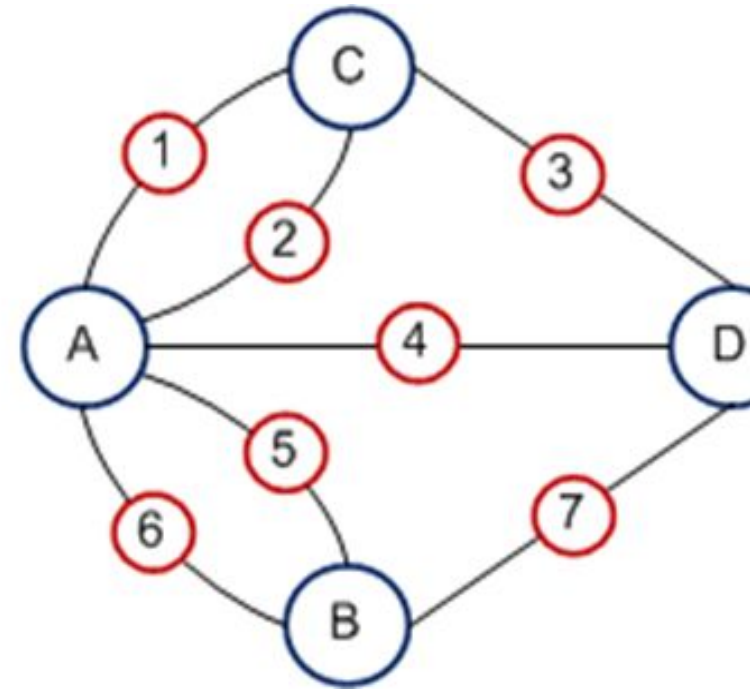
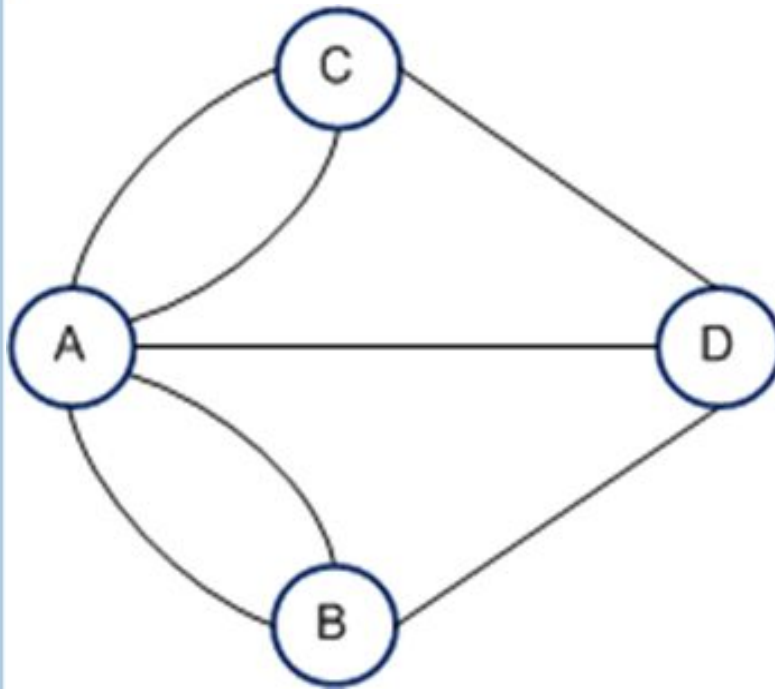


Este posibil ca
un om să facă o
plimbare în care
să treacă pe toate
cele 7 poduri o
singură dată?

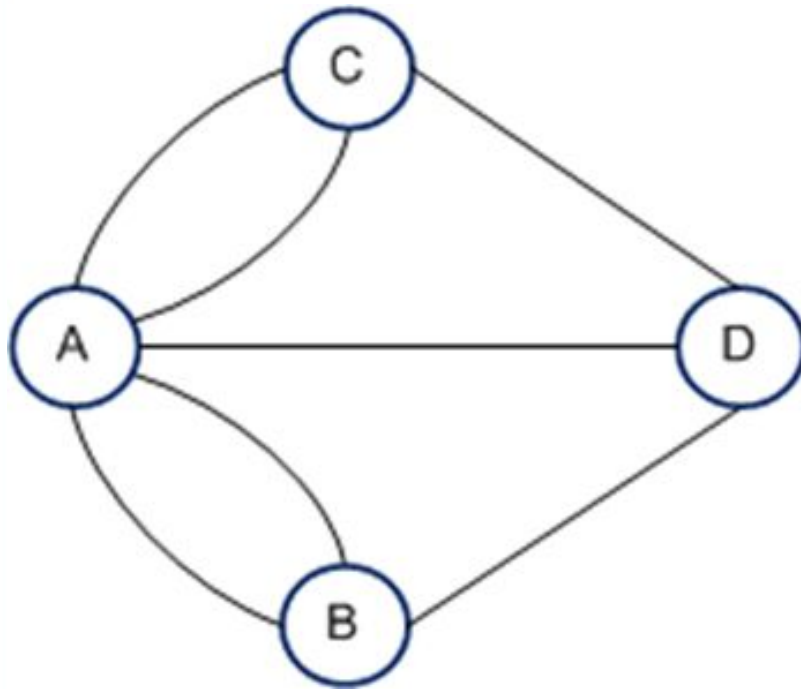
Cele 7 poduri din Königsberg



Cele 7 poduri din Königsberg



Cele 7 poduri din Königsberg

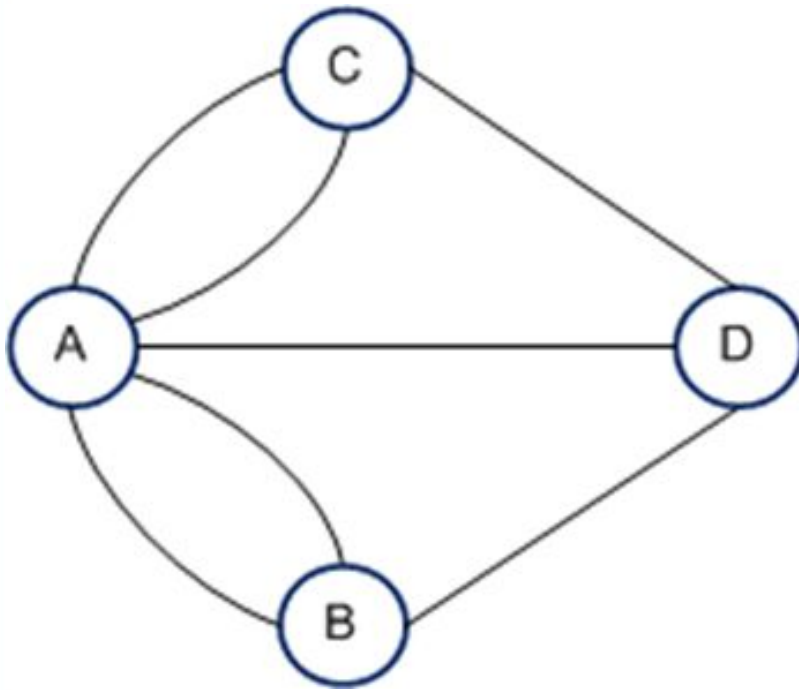


1736 - Leonhard Euler

*Solutio problematis ad
geometriam situs pertinentis*



Cele 7 poduri din Königsberg



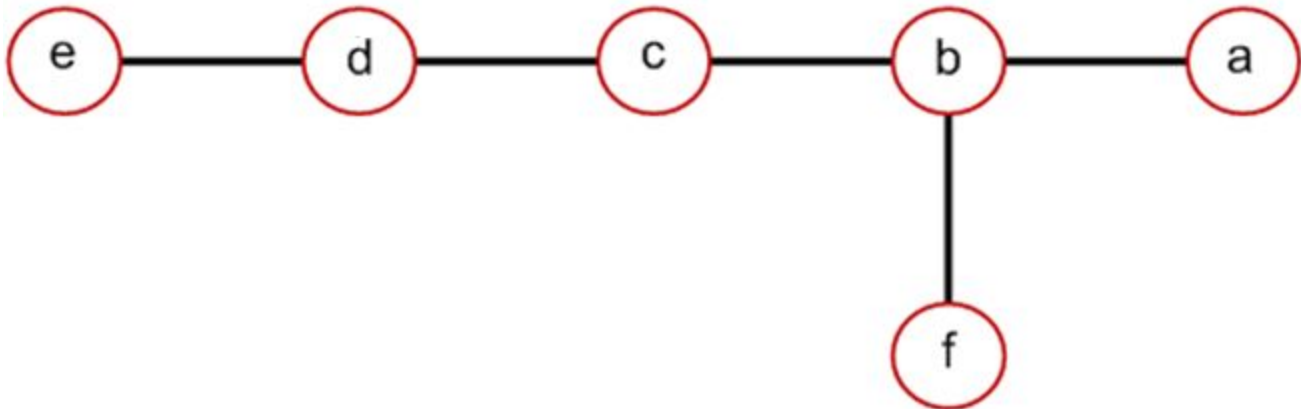
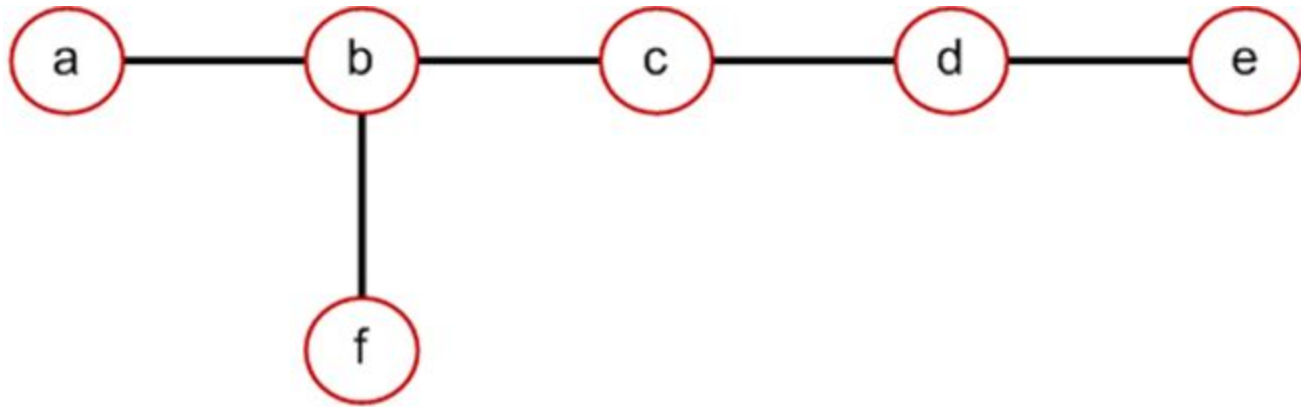
Lanț Eulerian / Ciclu Eulerian



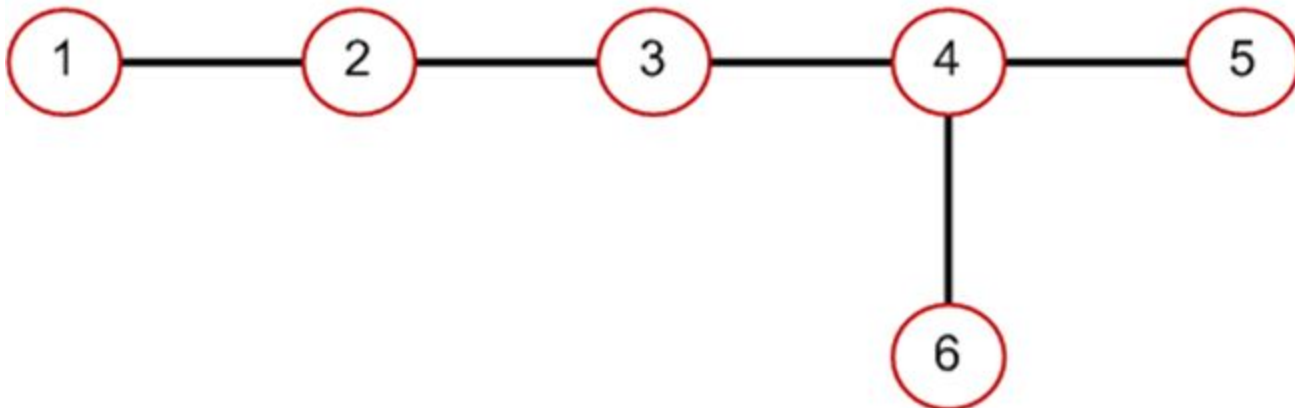
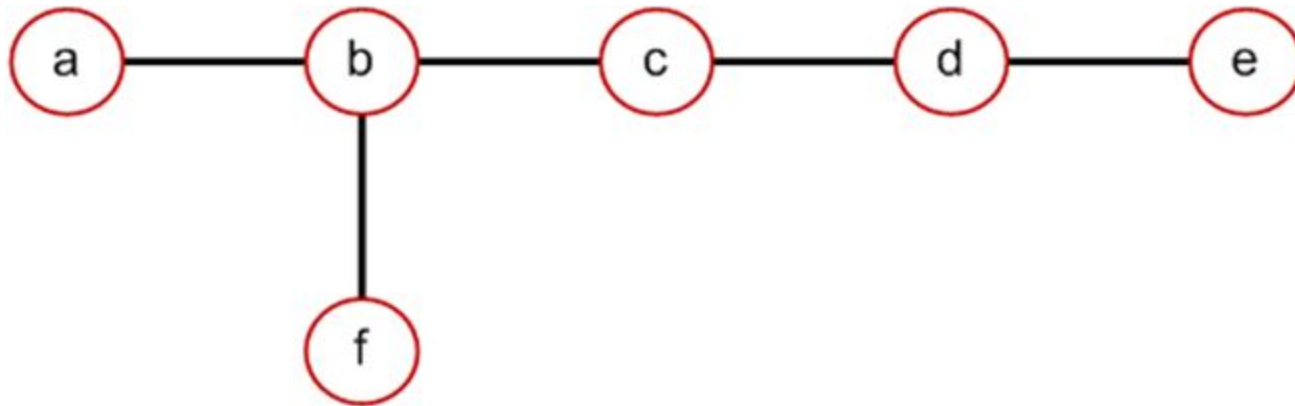
Egalitate, Izomorfism



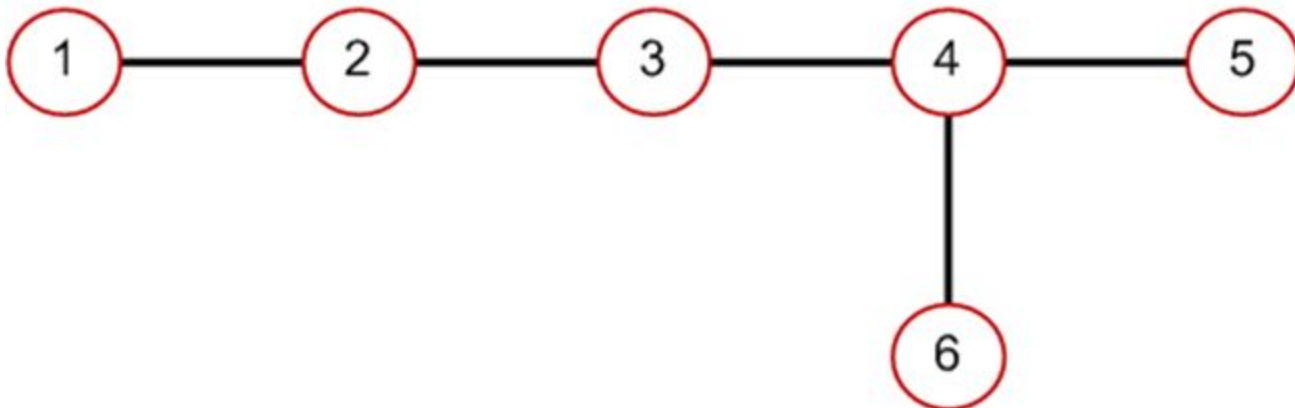
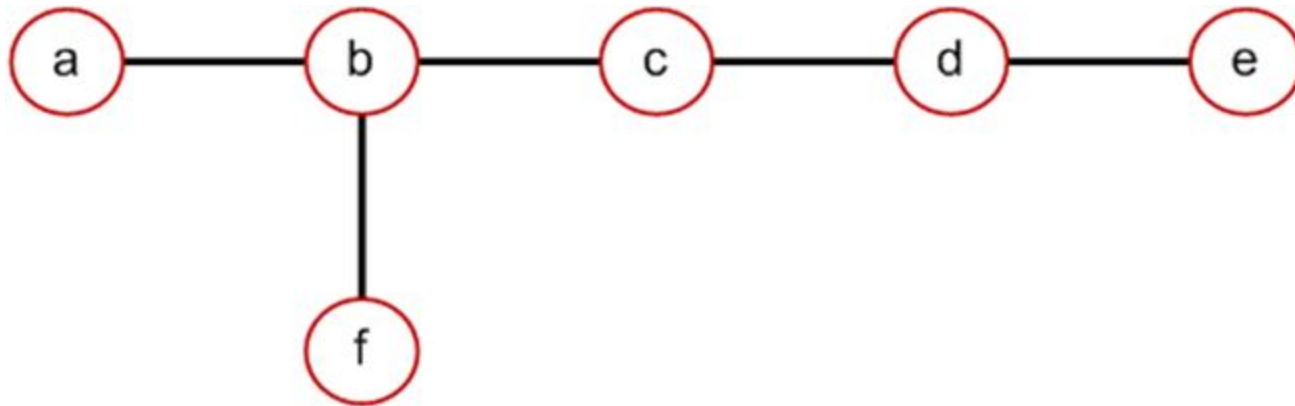
Egalitate



Egalitate?



Izomorfe!



Izomorfism



Fie G_1, G_2 două grafuri

- $G_1 = (V_1, E_1)$,
- $G_2 = (V_2, E_2)$

Grafurile G_1 și G_2 sunt **izomorfe** ($G_1 \sim G_2$) \Leftrightarrow

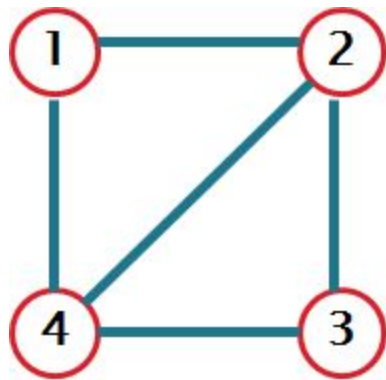
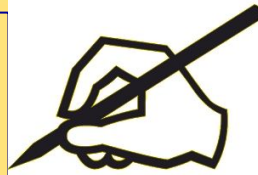
există $f : V_1 \rightarrow V_2$ bijectivă cu

$$uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$$

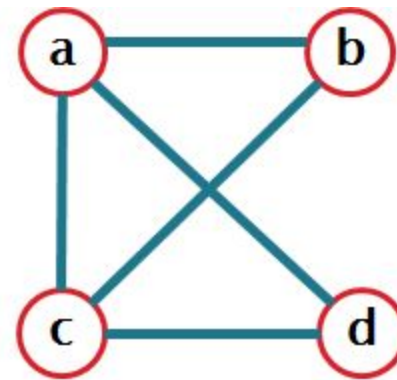
pentru orice $u, v \in V_1$

(f conservă adiacența și neadiacența)

Izomorfism



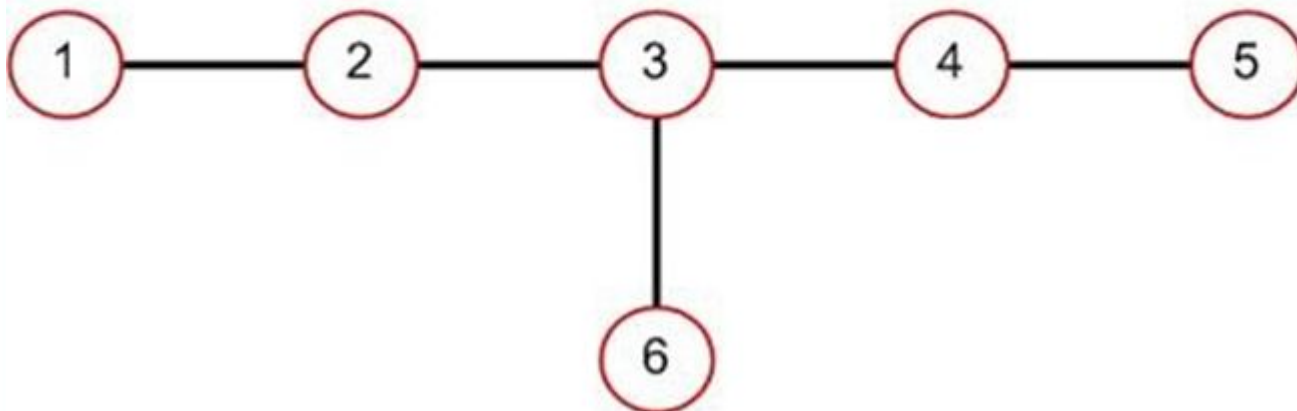
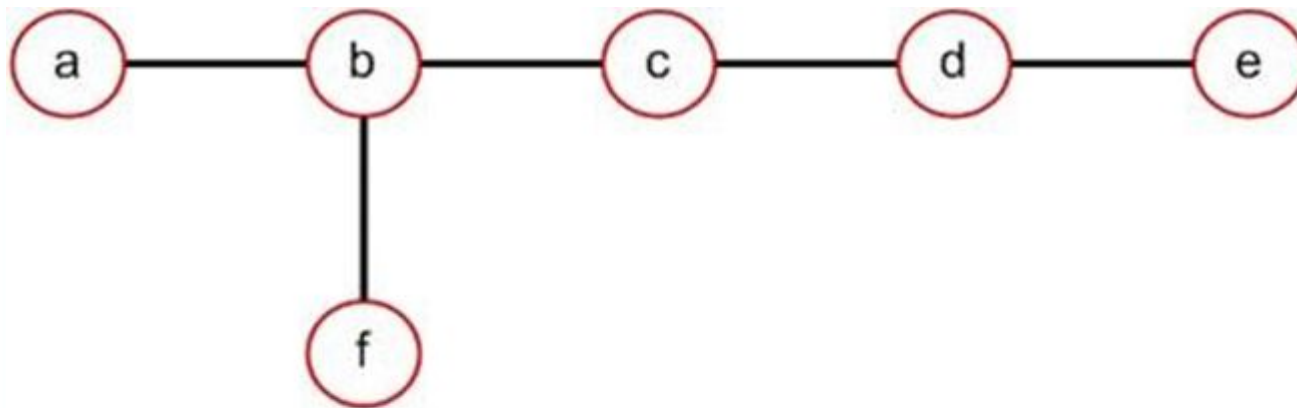
\sim



$$G_1 \sim G_2 \Rightarrow s(G_1) = s(G_2)$$

$$s(G_1) = s(G_2) \Rightarrow G_1 \sim G_2 ?$$

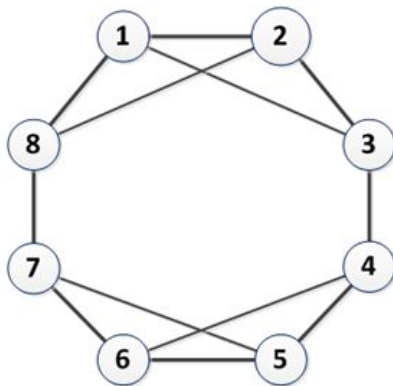
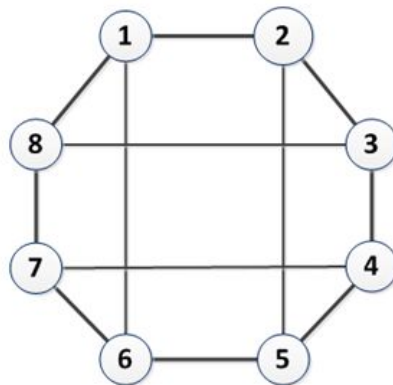
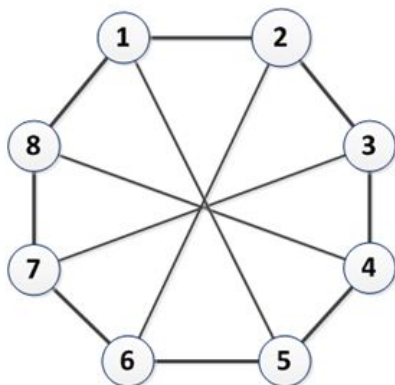
Izomorfism



Izomorfism



Care dintre aceste grafuri sunt izomorfe?



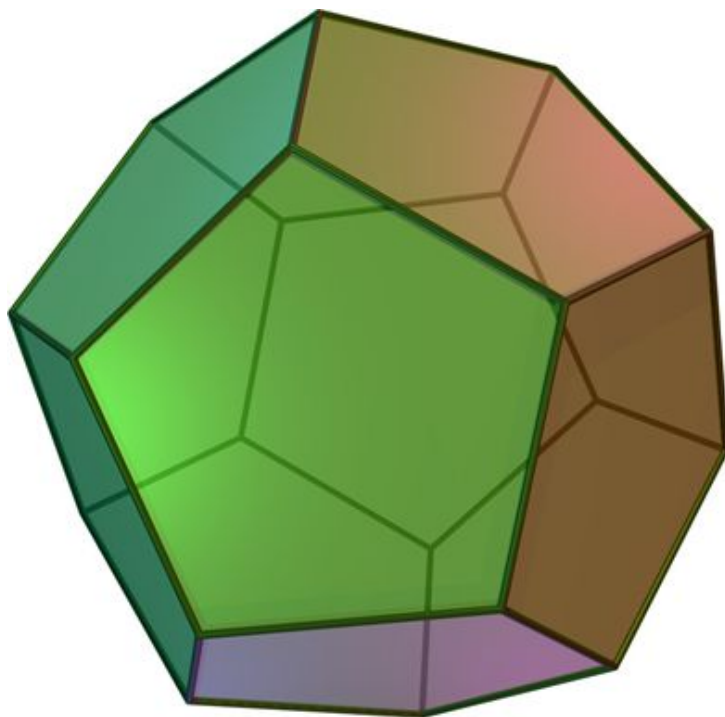
Istoric, Aplicații

Jocul Icosian

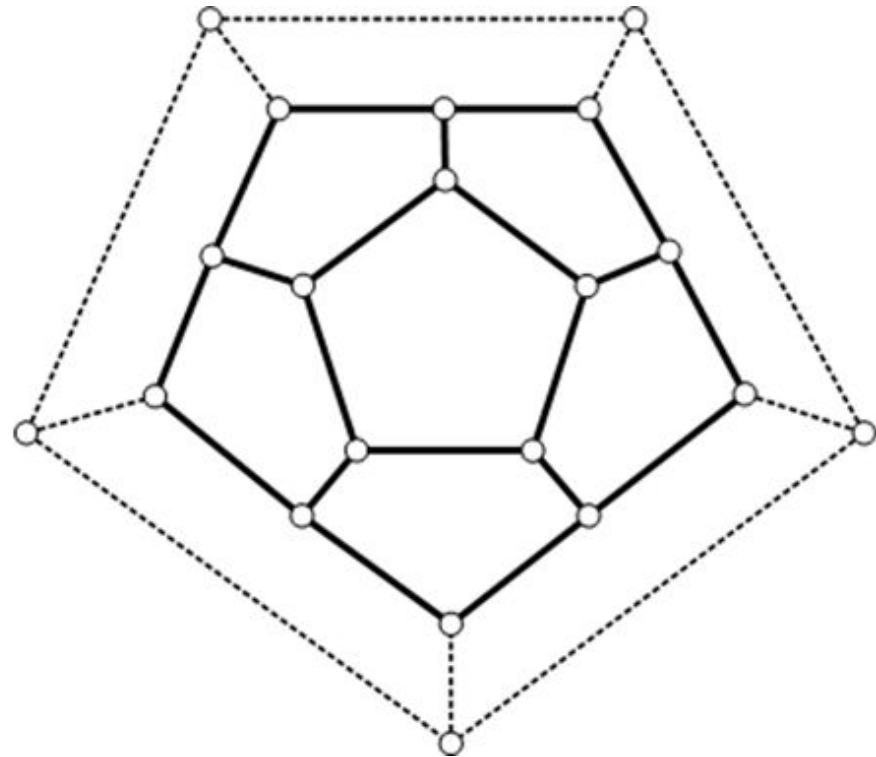
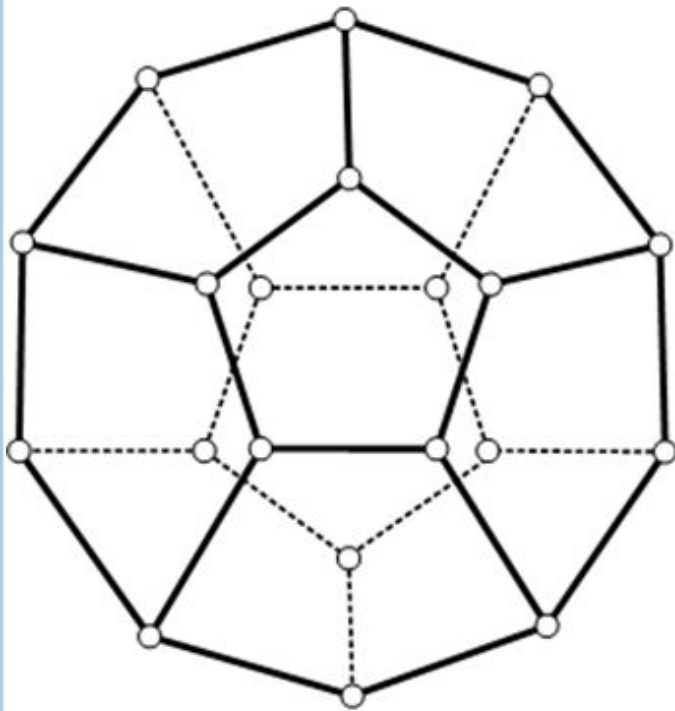


◦1856 – **Hamilton** – “*voiaj în jurul lumii*” :

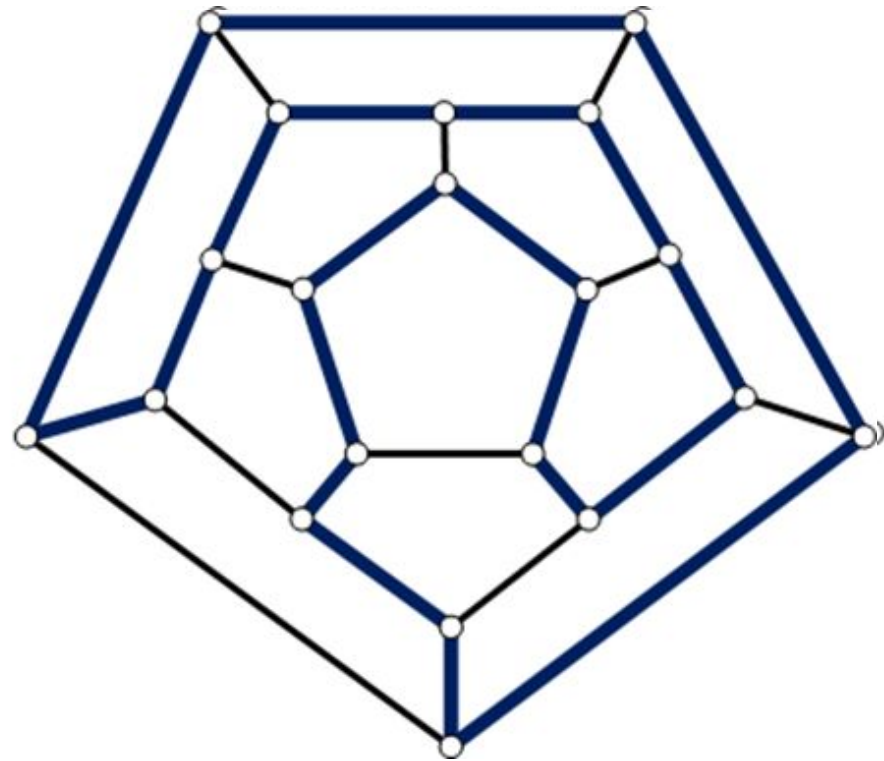
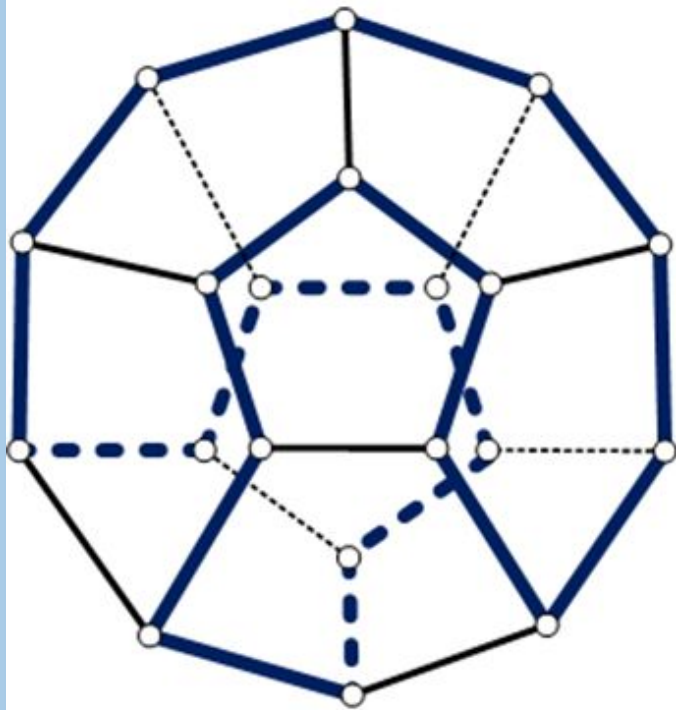
Există un traseu închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vârf o singură dată?



Jocul Icosian



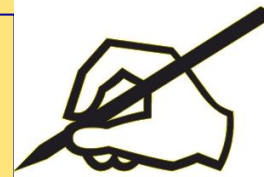
Jocul Icosian



Jocul Icosian

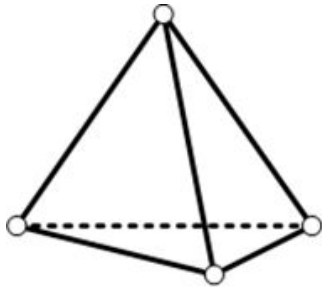
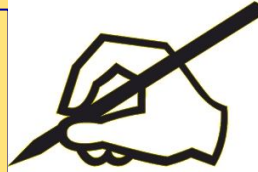
- **Ciclu hamiltonian** - trece o singură dată prin toate vârfurile
- **Graf hamiltonian**

Jocul Icosian

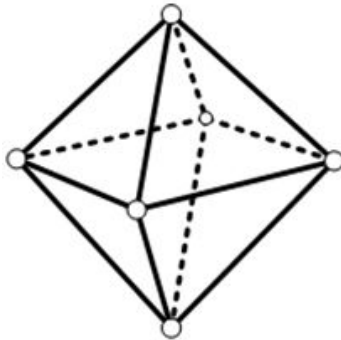
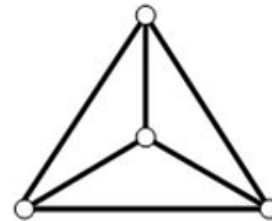


- **Poliedru – corp** mărginit de suprafețe plane
- **Poliedru convex** – segmentul care unește două puncte oarecare din el conține numai puncte din interior
- **Poliedru regulat convex** – fețele sunt poligoane regulate **congruente**
- **Graf planar** – se poate reprezenta în plan fără ca muchiile să se intersecteze în interior

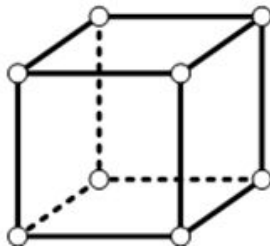
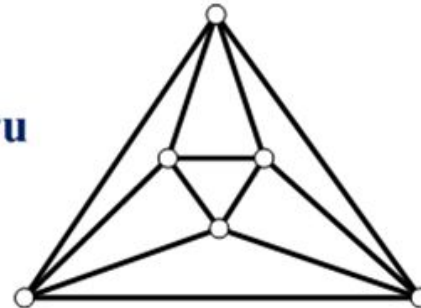
Corpuri platonice



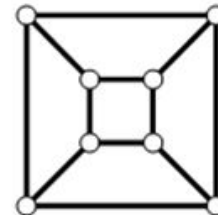
Tetraedru



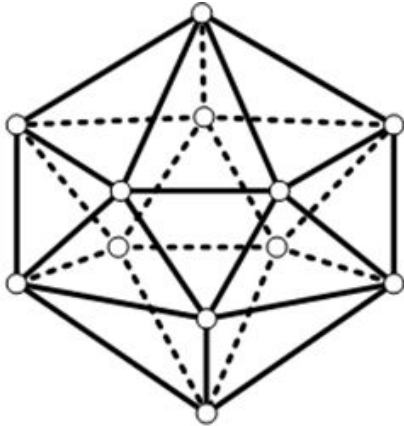
Octaedru



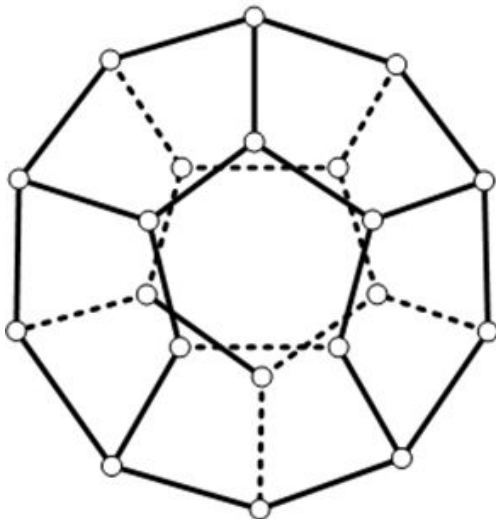
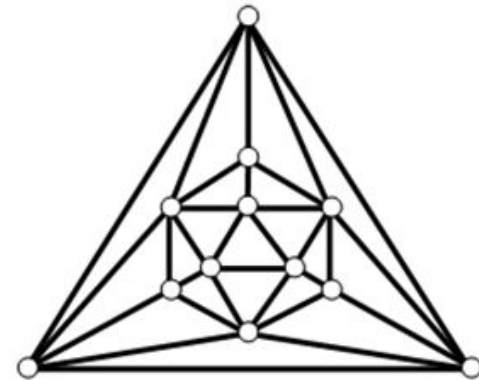
Cub



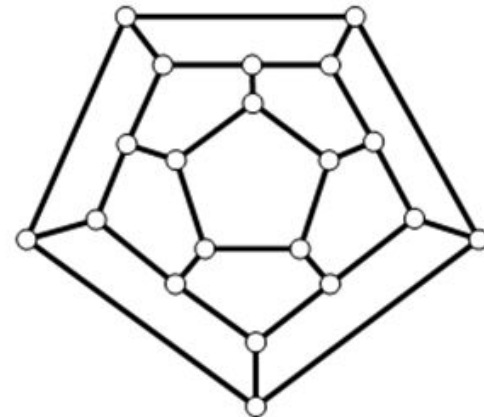
Corpuri platonice



Icosaedru



Dodecaedru



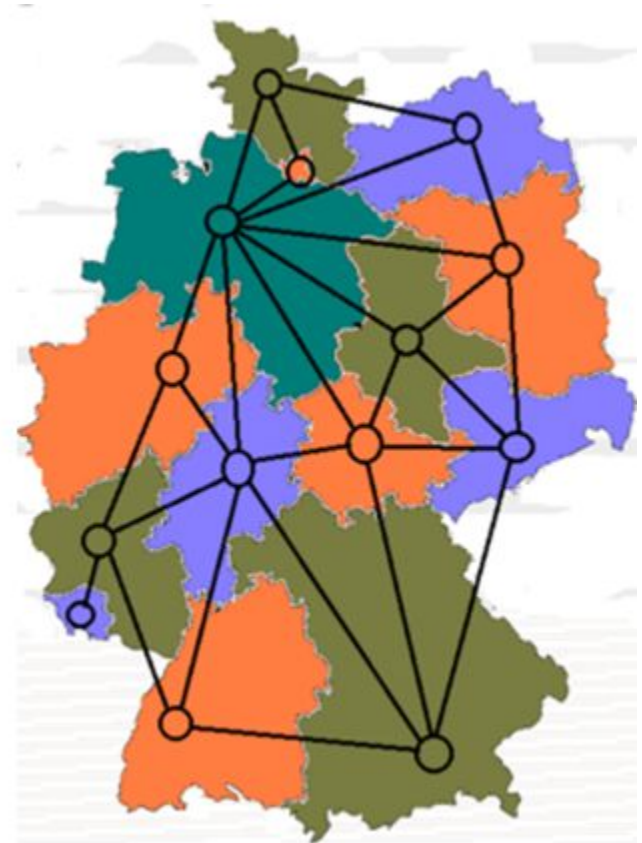
Problema celor 4 culori



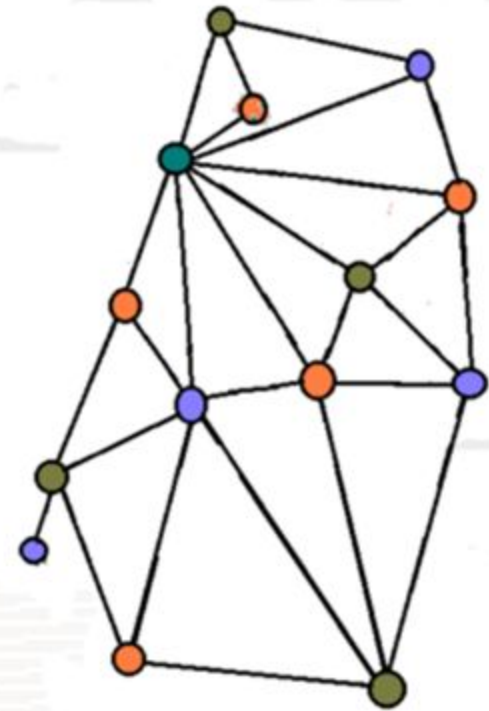
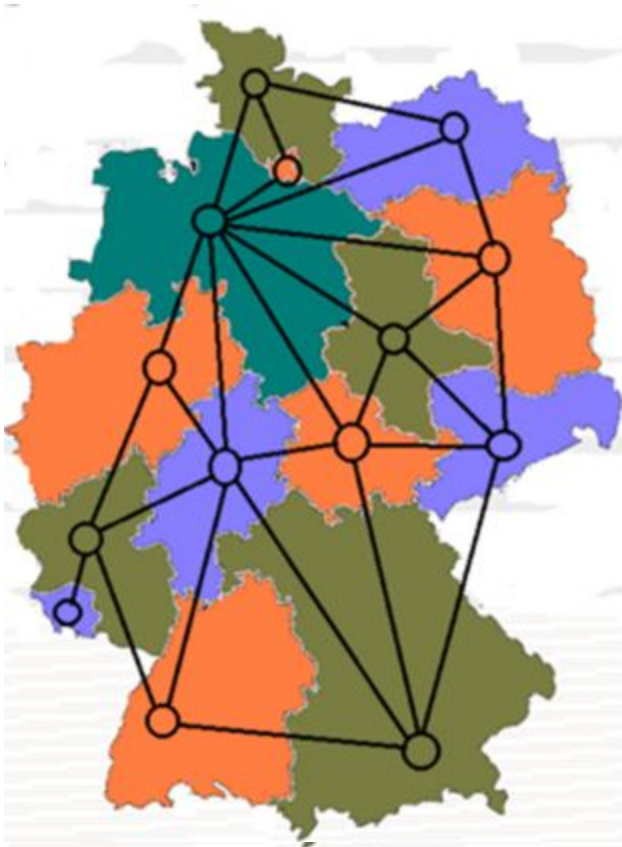
Se poate colora o hartă cu patru culori astfel încât orice două țări, care au frontieră comună și care **nu se reduce la un punct**, să aibă culori diferite?

- **DeMorgan 1852**

Problema celor 4 culori



Problema celor 4 culori

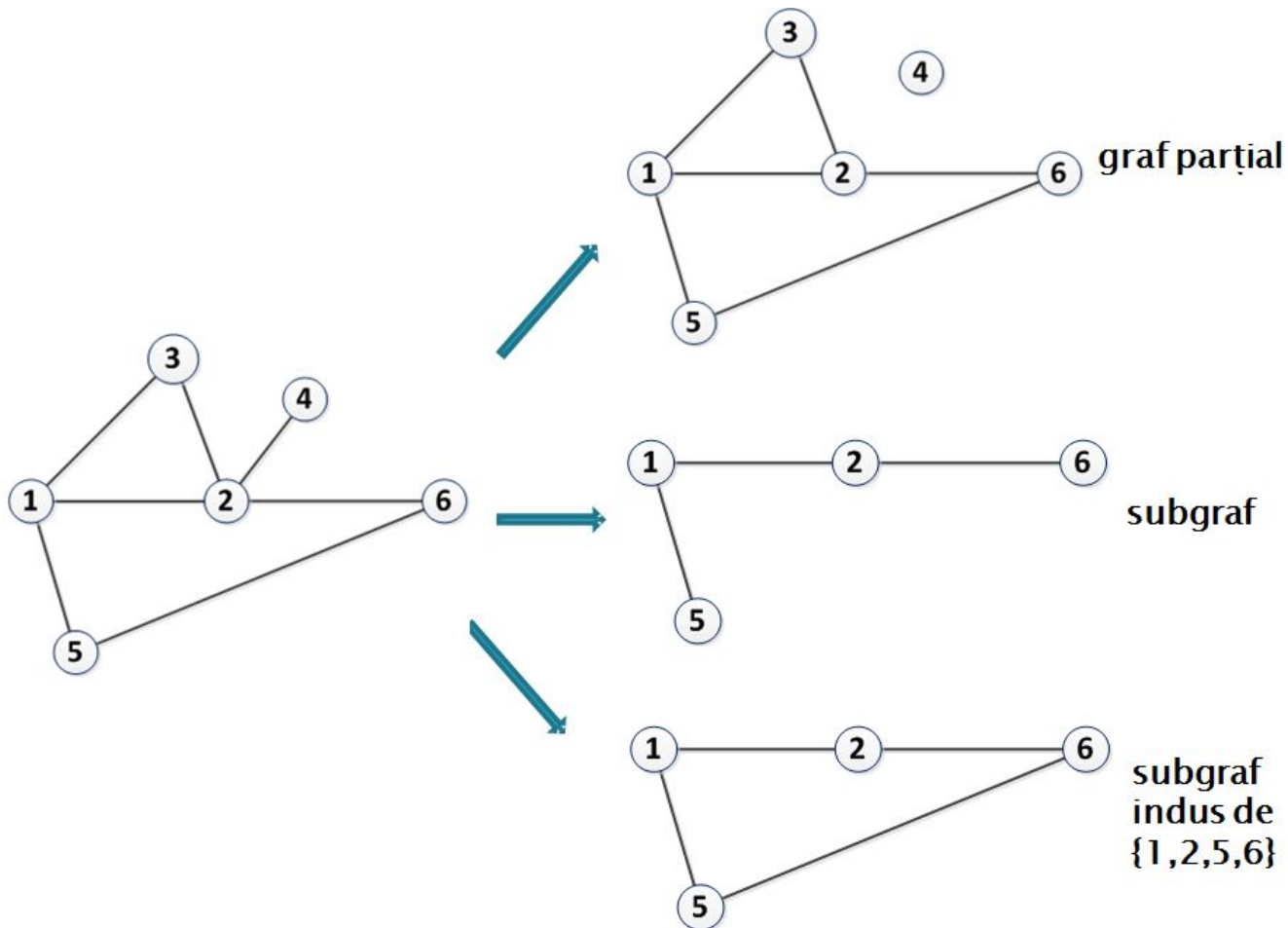


Problema celor 4 culori

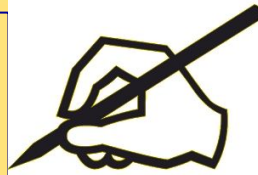


Problema celor 4 culori - Appel și Haken răspuns afirmativ în 1976 cu ajutorul calculatorului

Graf parțial, subgraf, conexitate



Graf parțial, subgraf



Fie $G = (V, E)$ și $G_1 = (V_1, E_1)$ două grafuri

- ▶ G_1 este **graf parțial** al lui G (vom nota $G_1 \leq G$) dacă

$$V_1 = V, \quad E_1 \subseteq E$$

- ▶ G_1 este **subgraf** al lui G (vom nota $G_1 < G$) dacă

$$V_1 \subseteq V, \quad E_1 \subseteq E$$

- ▶ G_1 este **subgraf indus de V_1 în G** (vom nota $G_1 = G[V_1]$) dacă

$$V_1 \subseteq V,$$

$$E_1 = \{e \mid e \in E(G), e \text{ are ambele extremități în } V_1\}$$

(toate arcele/muchiile cu extremități în V_1)

Conexitate



Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat

- ▶ G este **graf conex** dacă între orice două vârfuri distincte există un lanț
- ▶ O **componentă conexă** a lui G este un subgraf indus conex maximal (care nu este inclus în alt subgraf conex)
- ▶ Pentru cazul orientat – **tare-conexitate**

Conexitate

