**FMI, Info, Anul II, 2017-2018**
**Programare logică**

# Seminar 2
# Deducţia naturală pentru calculul propoziţional

## Sistemul de reguli al deducţiei naturale

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2) \qquad\qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad\qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e)$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND} \qquad\qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

TND (*tertium non datur*) este regulă derivată.

**Atenţie!** La acest sistem se adaugă regula de copiere.

**(S2.1)** Demonstraţi că următorii secvenţi sunt valizi:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(2) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

(3) $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$

(4) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(5) $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

**(S2.2)** Demonstraţi că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducţiei naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \mathbf{MT} \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \mathbf{RAA}$$

MT =*modus tollens* RAA =*reductio ad absurdum*

**(S2.3)** Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi$ formule. Demonstraţi că

dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid, atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

**(S2.4)** Ştim că *echivalenţa logică* este definită astfel: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Găsiţi reguli de introducere şi eliminare pentru $\leftrightarrow$.

$\boxed{\textbf{Teorie pentru S2.5 şi S2.6:}}$

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. O formulă $\varphi$ este $\Gamma-$*tautologie (*consecinţă semantică a lui $\Gamma$) dacă orice model al lui $\Gamma$ este şi model pentru $\varphi$, i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$. Notăm prin $\Gamma \vDash \varphi$ faptul că $\varphi$ este o $\Gamma$-tautologie.

**(S2.5)** Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $\varphi$ formule. Demonstraţi că

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \varphi \text{ atunci } \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots )).$$

**(S2.6)**

(1) Arătaţi că regula $(\vee i_1)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ implică } \Gamma \vDash \varphi \vee \psi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

(2) Arătaţi că regula $(\neg i)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \to \perp \text{ implică } \Gamma \vDash \neg\varphi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$