CURS #7

CONȚINUTUL CURSULUI #7:

IV. Interpolarea Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă și $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$, i.e. $a = x_1 < x_2 < ... < x_{n+1} = b$.
Fie $\mathcal{P}_n$ mulțimea polinoamelor cel mult de grad $n \geq 0$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n \;\middle|\; a_j \in \mathbb{R}, j = \overline{1, n+1} \right\}$$

Interpolarea Lagrange a funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ constă în determinarea unui polinom $P_n \in \mathcal{P}_n$, numit polinom de interpolare Lagrange, care satisface relațiile:

$$P_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{1, n+1} \tag{1}$$

Valorile $x_i, i = \overline{1, n+1}$ se numesc puncte sau noduri de interpolare.

IV.1. Metoda directă de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Fie $P_n(x) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + a_{n+1} x^n$ un polinom de interpolare al funcției f relativ la diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,N+1}}$. Din condițiile $P_n(x_i) = f(x_i)$, $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n+1}$ rezultă următorul sistem de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \ldots + a_{n+1} x_1^n = y_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \ldots + a_{n+1} x_2^n = y_2 \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_{n+1} x_3^n = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + a_2 x_{n+1} + a_3 x_{n+1}^2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}^n = y_{n+1} \end{cases} \tag{2}$$

sau scris la formă matriceală

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Cum $x_i \neq x_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$, rezultă

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_i - x_j) \neq 0,$$

deci sistemul de ecuații liniare (3) este un sistem compatibil determinat cu soluția

$$\mathbf{a} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\right]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

Din unicitatea soluției rezultă că polinomul Lagrange se determină în mod unic.
Soluția sistemului de ecuații liniare (3) se poate obține, de exemplu, aplicând metoda Gauss cu pivotare totală.
Exemplu 1: Să se afle, prin metoda directă, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ al funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Fie $P_2(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = e^0, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \cdot (-1) + a_3(-1)^2 = e^{-2} \\ a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 1 \\ a_1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} \\ a_3 = \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} \end{cases} \tag{4}$$

Astfel, $P_2(x) = 1 + \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} x + \dfrac{e^2 + e^{-2} - 2}{2} x^2$.

IV.2. Metoda Lagrange de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} L_{n,k}(x)\, y_k, \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

unde $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n ce urmează să fie determinate. Deoarece P_n interpolează funcția f în nodurile $\{x_i\}_{i=\overline{1,n+1}}$ atunci au loc relațiile, $P_n(x_i) = y_i$, de unde rezultă $L_{n,k}(x_i) = \delta_{ik}$. Deoarece $L_{n,k}$ sunt polinoame de gradul n și $L_{n,k}(x_i) = 0, i \neq k$ rezultă că $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$, $x_{k+1}, ..., x_{n+1}$ sunt n rădăcini, deci $L_{n,k}$ se reprezintă:

$$L_{n,k}(x) = C_k(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1}), \tag{6}$$

iar din condiția $L_{n,k}(x_k) = 1$, rezultă relația pentru C_k :

$$C_k = \frac{1}{(x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1})} \tag{7}$$

Se înlocuiesc C_k în (6) și se obțin expresiile

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_{n+1})}{(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_{n+1})}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, n+1} \tag{8}$$

Funcțiile $L_{n,k}$ se numesc funcții de bază pentru interpolarea Lagrange și se vor rescrie sub o formă compactă

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \tag{9}$$

Vom nota în continuare $E(f; x) = f(x) - P_n(x)$ eroarea în fiecare punct.

Teorema (IV.1. Estimarea erorii de interpolare)

Fie $n \geq 1$, funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ a.i. $f \in C^{n+1}[a, b]$ și diviziunea $(x_i)_{i=\overline{1,n+1}}$ a intervalului $[a, b]$. Atunci: $\forall\, x \in [a, b]$, $\exists\, \xi_x \in (a, b)$ astfel încât

$$E(f; x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x)$$

unde

$$\pi_{n+1}(x) := (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n+1}), \quad x \in [a, b]$$

Mai mult, are loc următoarea estimare a erorii de interpolare:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\pi_{n+1}(x)|, \quad \forall\, x \in [a, b]$$

unde $M_{n+1} := \max\limits_{\zeta \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\zeta)$.

Demonstrație: Considerăm funcția auxiliară

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{E(f;x)}{\pi_{n+1}(x)}\pi_{n+1}(t) \tag{10}$$

Se observă că g se anulează în $n+2$ puncte $x_1, \ldots, x_{n+1}, x$. Ca o consecință a teoremei lui Rolle rezultă că $\exists \xi_x \in (a,b)$ astfel încât $g^{(n+1)}(\xi_x) = 0$. Derivând funcția g de $n+1$ ori rezultă:

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{E(f;x)}{\pi_{n+1}(x)}(n+1)! \tag{11}$$

Dacă $t = \xi_x$ din relația de mai sus rezultă

$$E(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x). \tag{12}$$

Exemplu 2: Să se afle, prin metoda Lagrange, polinomul de interpolare Lagrange $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Lagrange este $P_2(x) = L_{2,1}(x)y_1 + L_{2,2}(x)y_2 + L_{2,3}(x)y_3$, unde

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2-x}{2}$$
$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1-x^2$$
$$L_{2,3}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2+x}{2}$$

Astfel,

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{x^2-x}{2}\cdot e^{-2} + (1-x^2) + \frac{x^2+x}{2}\cdot e^2 \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2 \end{aligned}$$

IV.3. Metoda Newton de determinare a polinomului Lagrange P_n.

Se consideră următoarea reprezentare a polinomului Lagrange

$$P_n(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + c_{n+1}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

sau

$$P_n(x) = c_1 + \sum_{i=2}^{n+1} c_i \prod_{j=1}^{i-1}(x-x_j) \tag{13}$$

Condițiile $P_n(x_i) = y_i, i = \overline{1, n+1}$ ne furnizează sistemul de ecuații liniare necesar pentru determinarea coeficienților $c_i, i = \overline{1, n+1}$

$$\begin{cases} c_1 & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_2-x_1) & = y_1 \\ c_1 + c_2(x_3-x_1) + c_3(x_3-x_1)(x_3-x_2) & = y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1 + c_2(x_{n+1}-x_1) + c_3(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) + \ldots + & \\ + \ldots + c_{n+1}(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n) & = y_{n+1} \end{cases} \tag{14}$$

Sistemul (14) este un sistem inferior triunghiular și se rezolva conform metodei substituții ascendente. Componentele matricei A asociată

sistemului sunt determinate conform relațiilor:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= 1, \quad i = \overline{1, n+1} \\ a_{ij} &= \prod_{k=1}^{j-1}(x_i - x_k), \quad i = \overline{2, n+1},\ j = \overline{2, i} \end{aligned} \tag{15}$$

Exemplu 3: Să se afle, prin metoda Newton, polinomul de interpolare Newton $P_2(x)$ a funcției $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(-1; 0; 1)$.
Rezolvare: Polinomul $P_2(x)$ conform metodei Newton se reprezintă sub forma: $P_2(x) = c_1 + c_2(x-x_1) + c_3(x-x_1)(x-x_2)$. Din condițiile $P_2(-1) = e^{-2}, P_2(0) = 1, P_2(1) = e^2$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 & = e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 & = e^{-2} \\ c_2 & = 1 - e^{-2} \\ c_3 & = \dfrac{e^{-2}+e^2-2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P_2(x) &= e^{-2} + (1-e^{-2})(x+1) + \frac{e^{-2}+e^2-2}{2}x(x+1) \\ &= 1 + \frac{e^2-e^{-2}}{2}x + \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}x^2. \end{aligned}$$