FMI, Info, Anul II, 2017-2018
Programare logică

Seminar 5
Rezoluţie

Teorie pentru S5.1:

Rezoluţia în calculul propoziţional

- În calculul propoziţional un literal este o variabilă sau negaţia unei variabile.

$$literal := \ p \mid \neg p \qquad \text{unde } p \text{ este variabilă propoziţională}$$

- O formulă este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă este o conjuncţie de disjuncţii de literali.
- Pentru orice formulă α din există o FNC α^{fc} astfel încât $\alpha \mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \alpha^{fc}$.
- O clauză este o disjuncţie de literali.
- Observăm că o FNC este o conjuncţie de clauze.
- Clauza vidă $\square$ nu este satisfiabilă.
- Mulţimea de clauze vidă $\{\}$ este satisfiabilă.
- Dacă φ este o formulă în calculul propoziţional, atunci

$$\varphi^{fc} = \bigwedge_{i=1}^{k} \bigvee_{j=1}^{n_i} L_{ij} \text{ unde } L_{ij} \text{ sunt literali}$$

- Ştim că:

$$\varphi \text{ este satisfiabilă dacă şi numai dacă}$$

$$\varphi^{fc} \text{ este satisfiabilă dacă şi numai dacă}$$

$$\{\{L_{11}, \ldots, L_{1n_1}\}, \ldots, \{L_{k1}, \ldots, L_{kn_k}\}\} \text{ este satisfiabilă}$$

- Regula Rezoluţiei păstrează satisfiabilitatea:

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde C_1, C_2 clauze, iar p este variabila propoziţională astfel încât $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ şi $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

- Algoritmul Davis-Putnam:

  Intrare: o mulţime $\mathcal{C}$ de clauze

  Se repetă următorii paşi:

  - se elimină clauzele triviale
  - se alege o variabilă p
  - se adaugă la mulţimea de clauze toţi rezolvenţii obţinuti prin aplicarea Rez pe variabila p
  - se şterg toate clauzele care conţin p sau $\neg p$

  Ieşire: dacă la un pas s-a obţinut $\square$, mulţimea $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă;
  altfel $\mathcal{C}$ este satisfiabil

(S5.1) Folosind algoritmul Davis-Putnam, cercetaţi dacă următoarea mulţime de clauze din calculul propoziţional este satisfiabilă:

$$\mathcal{C} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\}$$

Teorie pentru S5.2:

Rezoluţia pentru clauze închise în logica de ordinul I

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negaţia unei formule atomice.

$$literal := \ P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg P(t_1, \ldots, t_n)$$

  unde $P \in \mathbf{R}, ari(P) = n$, şi $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

- Pentru un literal L vom nota cu L^c literalul complement.

  De exemplu, dacă $L = \neg P(x)$ atunci $L^c = P(x)$ şi invers.

- O formulă φ este formă clauzală dacă

$$\varphi := \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi \text{ unde } \psi \text{ este FNC}$$

- Pentru orice formulă φ din logica de ordinul I există o formă clauzală φ^{fc} astfel încât

$$\varphi \text{ este satisfiabilă dacă şi numai dacă } \varphi^{fc} \text{ este satisfiabilă}$$

- Pentru o formulă φ, forma clauzală φ^{fc} se poate calcula astfel:
  (i) se determină forma rectificată
  (ii) se cuantifică universal variabilele libere
  (iii) se determină forma prenex
  (iv) se determină forma Skolem
  în acest moment am obţinut o formă Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$
  (v) se determină o FNC ψ' astfel încât $\psi \mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} \psi'$
  (vi) φ^{fc} este $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi'$

- Fie C o clauză. Spunem că C' este o instaţă a lui C dacă există o substituţie $\theta : V \to Trm_{\mathcal{L}}$ astfel încât $C' = \theta(C)$.

  Spunem că C' este o instanţă închisă a lui C dacă există o substituţie $\theta : V \to T_{\mathcal{L}}$ astfel încât $C' = \theta(C)$ (C' se obţine din C înlocuind variabilele cu termeni din universul Herbrand)

- Fie $\mathcal{C}$ o mulţime de clauze. Definim

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \{\theta(C) \mid C \in \mathcal{C}, \theta : V \to T_{\mathcal{L}}\}$$

  O mulţime de clauze $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă există o submulţime finită a lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ care este nesatisfiabilă.

  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ este mulţimea instanţelor închise ale clauzelor din $\mathcal{C}$.

- Rezoluţia pe clauze închise păstrează satisfiabilitaea

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

  unde C_1, C_2 clauze închise, iar L este o formulă atomică închisă astfel încât $\{L, \neg L\} \cap C_1 = \emptyset$ şi $\{L, \neg L\} \cap C_2 = \emptyset$

(S5.2) Considerăm următoarea mulţime de clauze în logica de ordinul I:

$$\mathcal{C} = \{\, \{\neg P(f(a)), Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg Q(b)\}\,\}$$

Arătaţi că $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă prin următoarele metode:

1) Găsiţi o submulţime finită nesatisfiabilă lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$.

2) Găsiţi o derivare pentru $\square$ folosind rezoluţia pe clauze închise.

Teorie pentru S5.3, S5.4:

Regula rezoluţiei pentru clauze arbitrare

- Regula rezoluţiei păstrează satisfiabilitatea:

$$Rez \ \frac{C_1, C_2}{(\sigma C_1 \setminus \sigma Lit_1) \cup (\sigma C_2 \setminus \sigma Lit_2)}$$

  dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

  (i) C_1, C_2 clauze care nu au variabile comune,

  (ii) $Lit_1 \subseteq C_1$ şi $Lit_2 \subseteq C_2$ sunt mulţimi de literali,

  (iii) σ este un cgu pentru Lit_1 şi Lit_2^c, adică
  σ unifică toţi literalii din Lit_1 şi Lit_2^c.

- O clauză C se numeşte rezolvent pentru C_1 şi C_2 dacă există o redenumire de variabile $\theta : V \to V$ astfel încât C_1 şi θC_2 nu au variabile comune şi C se obţine din C_1 şi θC_2 prin Rez.

- Fie $\mathcal{C}$ o mulţime de clauze. O derivare prin rezoluţie din mulţimea $\mathcal{C}$ pentru o clauză C este o secvenţă $C_1, \ldots, C_n$ astfel încât $C_n = C$ şi, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i \in \mathcal{C}$ sau C_i este un rezolvent pentru două cauze C_j, C_k cu $j, k < i$.

- O mulţime de clauze $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă există o derivare a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{C}$ prin Rez.

(S5.3) Găsiţi doi rezolvenţi pentru următoarele clauze:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{P(x), P(g(y)), Q(x)\} \\ C_2 &= \{\neg P(x), R(f(x), a)\} \end{aligned}$$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, a este o constantă, iar x, y sunt variabile.

(S5.4) Găsiţi o derivare prin rezoluţie a $\square$ pentru următoarea mulţime de clauze:

$C_1 = \{\, \neg P(x),\ R(x, f(x))\,\}$
$C_2 = \{\, \neg R(a, x), Q(x)\,\}$

$C_3 = \{P(a)\}$
$C_4 = \{\neg Q(f(x))\}$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, f este un simbol de funţie de ariatate 1, a este o constantă, iar x, y sunt variabile.

Teorie pentru S5.5, S5.6:

Deducţie şi satisfiabilitate

- Dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ sunt formule (în logica propoziţională sau calculul cu predicate) atunci:
  $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vDash \varphi$ este echivalent cu
  $\vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$ este echivalent cu
  $\vDash \neg\varphi_1 \vee \ldots \neg\varphi_n \vee \varphi$ este echivalent cu
  $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ este satisfiabilă.
- În particular, $\vDash \varphi$ dacă şi numai dacă există o derivare pentru $\square$ din forma clauzală a lui $\neg\varphi$.
- Pentru a cerceta satisfiabilitatea este suficient să studiem forme clauzale.

(S5.5) Folosind rezoluţia, arătaţi că următoarea formulă este validă în logica de ordinul I:

$$\varphi := (\forall x\,(P(x) \to Q(x))) \to ((\exists x\, P(x)) \to (\exists x\, Q(x)))$$

Indicaţie: se găseşte o derivare pentru $\square$ din forma clauzală a lui $\neg\varphi$.
$\mathcal{C} = \{\, \{\neg P(x), Q(x)\},\ \{P(c)\},\ \{\neg Q(x)\}\,\}$
Derivare prin rezoluţie pentru $\square$:
$C_1 = \{\neg P(x), Q(x)\}$
$C_2 = \{P(c)\}$
$C_3 = \{Q(c)\}$
$C_4 = \{\neg Q(x)\}$
$C_5 = \square\ Rez, C_3, C_4, \theta = \{x \leftarrow c\}$

(S5.6) Avem următorul raţionament:

”*Există elevi cărora le plac toate lecturile. Nici unui elev nu îi plac lucrurile plictisitoare. În consecinţă, nicio lectură nu este plictisitoare.*”

Definim predicatele
$E(x)$ ”x este elev”
$L(x)$ ”x este lectură”
$P(x)$ ”x este plictisitor”
$R(x, y)$ ”x place y”

1) Folosind predicatele E, L, P, R, exprimaţi fiecare afirmaţie în logica de ordinul I.

2) Demonstraţi prin rezoluţie că raţionamentul este corect.