Listă subiecte (TO)

→ Definiții + enunțuri de teoreme
- poliedru 3
- vârf al unui poliedru 4
- th. fundamentală a dualității 2
- soluție admisibilă / optimă 1
- bază primală admisibilă / bază duală admisibilă 5
- criteriu de optim (test de optim) 7
- test de optim infinit 8
- soluție admisibilă de bază 6
- lema substituției 10
- th. de schimbare a bazei 9
- dualitate în optimizarea liniară 11
- th. slabă a ecart. complementare 12
- lema lui Farkas 13

→ Demonstrație de la dualitate ×

→ O problemă cu teorema ... (ans 8)

→ O problemă cu parametrii
- → condiții de optim și optim infinit
- → algoritmul simplex
- → Lema lui Farkas

① ~~[illegible]~~ Soluție admisibilă / optimă

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – funcție obiectiv

Fie $\sup_{x\in D}(\inf) f(x)$ – problema de optimizare

Dacă $f(x)$ este $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ (liniară)

atunci $x=(x_1,\dots,x_n)^T \in D$ – optimizarea liniară

Soluția admisibilă se numește soluția care verifică restricțiile.

$P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x$ soluție admisibilă $: Ax=b,\ x\ge 0\}$

↳ mulțimea soluțiilor admisibile / $x\in\mathbb{R}^n$ sol. adm $\to Ax=b,\ x\ge 0$ /

Soluție optimală: x^* – soluție optimală $\Leftrightarrow \begin{cases} x\in P \\ \inf_{x\in P}(\sup) = f(x^*) \end{cases}$

② Th. fundamentală a dualității

1) Problema primală sub formă canonică

$x, c\in\mathbb{R}^n$ $\qquad \inf c^T x$

$b\in\mathbb{R}^m$ $\qquad Ax\ge b \to u$

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $\qquad x\ge 0$

2) Problema duală pt 1)

$\sup b^T u$ unde $\begin{cases} P=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\ge b,\ x\ge 0\} \text{ mulțimea sol. admisibile 1)} \\ D=\{u\in\mathbb{R}^m \mid A^T\cdot u\le c,\ u\ge 0\} \text{ mulțimea sol. admisibile pt 2)} \end{cases}$

$A^T\cdot u \le c$

$u\ge 0$

Considerăm cuplul de probleme duale 1 și 2, putem avea una dintre situațiile:

→① Ambele probleme au sol. admisibile ⇒ Ambele probleme au soluții optime și val ~~[illegible]~~ funcției obiectiv în soluțiile optime sunt egale.

② Una dintre probleme are soluții admisibile și cealaltă nu are. Atunci problema care are sol. admisibile are optim infinit (∞)

③ Niciuna dintre probleme nu are soluții admisibile.

③ Poliedru în $\mathbb{R}^n$

Se numește hiperplan în $\mathbb{R}^n$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b\}$

$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$

Se numește semispațiu în $\mathbb{R}^n$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \le b\}$

Se numește poliedru în $\mathbb{R}^n$ o intersecție de semispații.

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^T x \le b_i, i = \overline{1,m}\}$ a_i linia i din matricea A.

Un poliedru este o mulțime convexă în $\mathbb{R}^n$.

④ Vârf al unui poliedru

Def: $x^* \in P$ s.n. punct extremal al poliedrului P dacă nu există $x_1 \ne x^*$, $x_2 \ne x^*$, $x_1, x_2 \in P$, $\lambda \in [0,1]$ a.î. $x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

Def: $x^* \in P \subset \mathbb{R}^n$ se num. vârf al poliedrului P dacă $\exists$ $c \in \mathbb{R}^n$, a.î. $c^T x^* \le c^T x$, $\forall x \in P$

⑤ Bază primal admisibilă / Bază dual admisibilă

a) Bază primal admisibilă

Fie $Ax = b$, $x \ge 0$

x este sol. de bază $\Leftrightarrow$ $\exists B$ o matrice formată cu coloanele liniar independente ale matricei A în B a.î. $x^B = (B^{-1}b, 0)$

Baza B se numește primal admisibilă $\Leftrightarrow$ $B^{-1}b \ge 0$.

Unei baze B primal admisibile îi corespunde x^B sol. adm. de bază

⑥

b) Ba

5) Bază dual admisibilă

Fie $Ax=b, x\geq 0$

x este sol. de bază $\Leftrightarrow \exists\, b$ o matrice formată cu coloanele liniar independente ale matricei A în B a.î. $x^B=(B^{-1}b, 0)$

Baza B se numește dual admisibilă $\Leftrightarrow (c_B)' B^{-1}A - c' \leq 0$

A.

6) Soluție admisibilă de bază

$x^* \in P$ s.n. soluție admisibilă de bază a problemei de optimizare 1

$\begin{cases} c^T x \\ Ax \leq b \end{cases}$ dacă rang $\bar{A} = n$, unde $\bar{A}$ este formată din liniile matricei A cu indicii în I

Ex.

(**) $I=\{i_1, \dots, i_k\} \to A^T = \begin{bmatrix} a_{i_1}^T \\ \vdots \\ a_{i_k}^T \end{bmatrix}$

7) Criteriul de optim (testul de optim)

Fie B o bază primal admisibilă. Dacă $z_j^B - c_j \leq 0, \forall j \in R$, atunci problema 1 (de minimizare) are sol. optimă $(\bar{x}^B, 0) = (B^{-1}b, 0)$ unde $z_j^B = c^T{}_B y^j = c_B^T B^{-1} a^j, j \in R$.

8) Test de optim infinit

Fie B o bază primal admisibilă a problemei 1.

Pp că $\exists\, k \in R$ a.î. $z_k^B - c_k > 0$ și $y^k = B^{-1}a^k \leq 0$. În acest caz problema 1 are optim infinit

Problema 1: $\inf c^T x$; $x, c \in \mathbb{R}^n$

$Ax = b$ $\quad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n$

$x \geq 0$ $\quad$ rang $A = m$.

⑨ Teorema de schimbare a bazei

Fie B o bază primal admisibilă pt problema 1. Fie $k \in R$ a.î. $z_k^B - c_k > 0$ și $y_k^B \not\leq 0$. Af. înlocuim col. r a lui B cu coloana a^k, unde $r \in B$ este det. astfel

$$\min_{i: y_{ik}^B > 0} \frac{x_i^B}{y_{ik}^B} = \frac{x_r^B}{y_{rk}^B}.$$

Fie $\tilde{B}$ matricea obținută după înlocuirea coloanei r în B, atunci

a) $\tilde{B}$ este inv. și primal admisibilă

b) Sol. de bază coresp bazei $\tilde{B}$ este „mai bună" decât cel de bază coresp bazei B

$$f(\tilde{x}^{\tilde{B}}, 0) \leq f(\bar{x}^B, 0) \text{ unde } f(x) = c^T x$$

⑩ Lema substituției

Fie $B = (A^1, A^2, \dots, A^m)$ o matrice inv. de dim. m și B^{-1}.

Fie $\tilde{B}$ matricea obținută prin înlocuirea col. r a lui B cu vectorul A și $Y = B^{-1}A$, atunci

a) $\tilde{B}$ este inv $\Rightarrow Y_r \neq 0$

b) $\tilde{B}^{-1} = E_r(\eta) B^{-1}$

unde $E_r(\eta)$ este matricea unitate de ord. m în care col. r este înlocuită cu $\eta = \left(-\frac{Y_1}{Y_r}, \dots, -\frac{Y_{r-1}}{Y_r}, \frac{1}{Y_r}, -\frac{Y_{r+1}}{Y_r}, \dots, -\frac{Y_m}{Y_r}\right)$

$$\Rightarrow E_r(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \eta_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \eta_m & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑪ Dualitate în optimizare liniară

① $\inf c^T x$
$Ax \geq b$
$x \geq 0$

② $\sup b^T u$
$A^T u \leq c$
$u \geq 0$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x \in \mathbb{R}^n$; $b, u \in \mathbb{R}^m$

①, ② pb. duale, sub formă canonică

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$

$\mathcal{D} = \{u \in \mathbb{R}^m \mid A^T u \leq c, u \geq 0\}$

① $\inf c^T x$
$x \in \mathcal{P}$

② $\sup b^T u$
$u \in \mathcal{D}$

⑫ Th. slabă a ecarturilor complementare

Fie pb de optimizare ① și ② din ⑪ Dualitate în opt. liniară.
Cond. necesară și suficientă ca $x^* \in \mathcal{P}$ și $u^* \in \mathcal{D}$ să fie sol. opt. pt. problema ① respectiv ② este ca

$$(x^*)^T (c - A^T u^*) = 0 \quad (A)$$
$$(u^*)^T (Ax^* - b) = 0 \quad (B)$$

⑬ Lema lui Farcaș

Fie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^m$

Atunci una și numai una dintre af. următoare are soluții

a) $\exists x \in \mathbb{R}^n$ a.î. $Ax = b$, $x \geq 0$

b) $\exists u \in \mathbb{R}$ a.î. $A^T u \geq 0$, $b^T u < 0$.