**CONȚINUTUL CURSULUI #10:**





### Definiția (VII.2.)

*Funcția $S : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline pătratică pentru funcția $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă:*

(a) *$S$ este pătratică pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x)\,, \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1, n} \tag{1}$$

*unde*

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

$$S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j\,(x - x_j)^2\,, j = \overline{1, n} \tag{2}$$

*cu $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$, ce trebuie determinate.*

(b) *$S$ interpolează $f$ în $x_j$, $j = \overline{1, n+1}$:*

$$S(x_j) = f(x_j)\,, \quad j = \overline{1, n+1} \tag{3}$$



### Definiția (VII.2. (continuare))

(c) *$S$ este continuă în nodurile interioare $x_{j+1}$, $j = \overline{1, n-1}$:*

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{4}$$

(d) *$S'$ este continuă în nodurile interioare $x_{j+1}$, $j = \overline{1, n-1}$:*

$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{5}$$

(e) *Una din următoarele condiții este satisfăcută*

$(e)_1$: $S'(x_1) = f'(x_1)$
$(e)_2$: $S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1})$

Conform condiției $(b)$ rezultă

$$a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \tag{6}$$

$$a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 = f(x_{n+1}) \tag{7}$$

Conform condiției $(c)$ rezultă



$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = a_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{8}$$

sau

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 = f(x_{j+1}), \quad j = \overline{1, n-1} \tag{9}$$

Relațiile (7) și (9) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.

Cum $S'_j(x) = b_j + 2c_j(x - x_j)$, atunci conform condiției $(d)$ rezultă

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{10}$$

Conform condiției $(e)$ rezultă

$$S'_1(x_1) = f'(x_1) \Rightarrow b_1 = f'(x_1) \tag{11}$$

sau

$$S'_n(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}) \Rightarrow b_n + 2c_n(x_{n+1} - x_n) = f'(x_{n+1}) \tag{12}$$

Dacă în (12) considerăm $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$ atunci relațiile (12) și (10) pot fi cuplate și rescrise ca o singură relație pentru $j = \overline{1, n}$.

Fie $h_j = x_{j+1} - x_j, j = \overline{1,n}$ lungimea fiecărei subinterval $[x_j, x_{j+1}]$.
Obținem astfel, sistemele complete de ecuații necesare pentru determinarea coeficienților $b_j, c_j$:

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), \quad j = \overline{1,n} \\ b_1 = f'(x_1) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, \quad j = \overline{1,n-1} \end{cases} \tag{13}$$

sau

$$\begin{cases} a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = f(x_{j+1}), \quad j = \overline{1,n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j + 2c_j h_j = b_{j+1}, \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{14}$$

Din $(13)_1$ rezultă

$$c_j = \frac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), \quad j = \overline{1,n} \tag{15}$$

Introducând (15) în $(13)_3$ obținem

$$b_{j+1} + b_j = \frac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right), \quad j = \overline{1,n-1} \tag{16}$$



Rezultă schemele numerice de calcul a coeficienților $b_j, c_j, j = \overline{1,n}$

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j+1} = \dfrac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_j, \quad j = \overline{1,n-1} \\ c_j = \dfrac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{17}$$

sau

$$\begin{cases} b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ b_j = \dfrac{2}{h_j}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j)\right) - b_{j+1}, \quad j = \overline{n,1} \\ c_j = \dfrac{1}{h_j^2}\left(f(x_{j+1}) - f(x_j) - h_j b_j\right), \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{18}$$



**Exemplu 1:** Să se afle funcția spline pătratică pentru funcția $f(x) = e^{2x}$ relativ la diviziunea $(x_1,\ x_2,\ x_3) = (-1,\ 0,\ 1)$.
**Rezolvare:**

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x \in [x_1, x_2) \\ S_2(x), & x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$

unde

$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2$$

și

$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2$$

Se obține astfel

$$S(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2, & x \in [-1, 0) \\ a_2 + b_2 x + c_2 x^2, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Deoarece $S$ interpolează $f$ în cele trei noduri rezultă

$$S(x_1) = S_1(x_1) = f(x_1), S(x_2) = S_2(x_2) = f(x_2), S(x_2) = S_2(x_3) = f(x_3)$$



echivalent

$$S_1(-1) = e^{-2},\ S_2(0) = 1,\ S_2(1) = e^2$$

de unde $a_1 = e^{-2},\ a_2 = 1,\ a_2 + b_2 + c_2 = e^2$, deci

$$b_2 + c_2 = e^2 - 1. \tag{19}$$

Pe de altă parte, S este continuă în nodul $x_2 \in (-1, 1)$, i.e.
$S_1(x_2) = S_2(x_2)$ sau $S_1(0) = S_2(0)$, deci $a_1 + b_1 + c_1 = a_2$, de unde rezultă

$$b_1 + c_1 = 1 - e^{-2}. \tag{20}$$

Derivatele funcțiilor $S_1$ și $S_2$ sunt:
$S_1'(x) = b_1 + 2c_1(x - x_1), S_2'(x) = b_2 + 2c_2(x - x_2)$. Funcția $S'$ se exprimă prin formula

$$S'(x) = \begin{cases} b_1 + 2c_1(x+1), & x \in [-1, 0) \\ b_2 + 2c_2 x, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Derivata $S'$ a funcției spline pătratice este continuă în nodul interior $x_2$, i.e. $S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$ sau $S_1'(0) = S_2'(0)$ de unde rezultă

$$b_1 + 2c_1 = b_2 \tag{21}$$

Considerăm în plus satisfăcută condiția $S'(x_1) = f'(x_1)$ sau $S_1'(-1) = f'(-1)$, de unde $b_1 = 2e^{-2}$. Din relația (20) rezultă $c_1 = 1 - 3e^{-2}$, iar din (21) rezultă $b_2 = 2 - 4e^{-2}$. În final, din relația (19) rezultă $c_2 = e^2 + 4e^{-2} - 3$. Obținem astfel, următoarea reprezentare a funcției spline pătratice $S$ :

$$S(x) = \begin{cases} e^{-2} + 2e^{-2}(x+1) + (1-3e^{-2})(x+1)^2, & x \in [-1,0) \\ 1 + (2-4e^{-2})x + (e^2 + 4e^{-2} - 3)x^2, & x \in [0,1] \end{cases}$$



## VII.3. Interpolare cu funcții spline cubice.

**Definiția (VII.3.)**

*Funcția $S : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ s.n. funcție spline cubică pentru funcția $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dacă:*

(a) *$S$ este cubică pe porțiuni:*

$$S(x) = S_j(x)\,, \quad \forall\, x \in I_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{22}$$

*unde*

$$S_j : \bar{I}_j \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

$$S_j(x) = a_j + b_j\,(x - x_j) + c_j\,(x - x_j)^2 + d_j\,(x - x_j)^3, j = \overline{1,n} \tag{23}$$

*cu $a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, ce trebuie determinate.*

(b) *$S$ interpolează $f$ în $x_j$, $j = \overline{1,n+1}$:*

$$S(x_j) = f(x_j)\,, \quad j = \overline{1,n+1} \tag{24}$$



**Definiția (VII.3. (continuare))**

(c) *$S$ este continuă în $x_{j+1}$, $j = \overline{1,n-1}$:*

$$S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{25}$$

(d) *$S'$ este continuă în $x_{j+1}$, $j = \overline{1,n-1}$:*

$$S_j'(x_{j+1}) = S_{j+1}'(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{26}$$

(e) *$S''$ este continuă în $x_{j+1}$, $j = \overline{1,n-1}$:*

$$S_j''(x_{j+1}) = S_{j+1}''(x_{j+1})\,, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{27}$$

(f) *Unul dintre următoarele seturi de condiții este îndeplinit*

$$(f)_1 : \quad S'(x_1) = f'(x_1), \quad S'(x_{n+1}) = f'(x_{n+1}) \tag{28}$$

$$(f)_2 : \quad S''(x_1) = f''(x_1), \quad S''(x_{n+1}) = f''(x_{n+1}) \tag{29}$$



Vom trata doar cazul $(f)_1$, cazul $(f)_2$ se abordează după același raționament. Conform condiției $(b)$ rezultă

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1,n} \\ a_n + b_n(x_{n+1} - x_n) + c_n(x_{n+1} - x_n)^2 + d_n(x_{n+1} - x_n)^3 = f(x_{n+1}) \end{cases} \tag{30}$$

Din $(c)$ rezultă

$$a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3 = a_{j+1}, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{31}$$

Relațiile (30) și (31) se rescriu

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1,n} \\ b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = f(x_{j+1}) - f(x_j), \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{32}$$

Deoarece $S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$ din $(d)$ rezultă

$$b_j + 2c_j(x_{j+1} - x_j) + 3d_j(x_{j+1} - x_j)^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{33}$$

sau

$$b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1,n-1} \tag{34}$$

Deoarece $S_j''(x) = 2c_j + 6d_j(x - x_j)$, atunci conform $(e)$ rezultă

$$c_j + 3d_j h_j = c_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1} \tag{35}$$

Din condițiile $(f)_1$ și ținând cont că $S'(x_1) = S_1'(x_1)$, $S'(x_{n+1}) = S_n(x_{n+1})$ rezultă

$$b_1 = f'(x_1) \tag{36}$$

$$b_n + 2c_n + 3d_n h_n^2 = f'(x_{n+1}) \tag{37}$$

Relația (37) poate fi înglobată în relațiile (34) dacă adoptăm notația $b_{n+1} = f'(x_{n+1})$. Se obține sistemul complet de determinare a coeficienților funcției spline cubice $S$

$$\begin{cases} a_j = f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 = f(x_{j+1}) - f(x_j), \quad j = \overline{1, n} \\ b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1}, \quad j = \overline{1, n} \\ b_1 = f'(x_1), \quad b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \\ c_{j-1} + 3d_{j-1}h_{j-1} = c_j, \quad j = \overline{2, n} \end{cases} \tag{38}$$

Obs.: Relațiile (38) formează un sistem de $4n + 1$ ecuații și $4n + 1$ necunoscute $a_j, c_j, d_j, j = \overline{1, n}$; $b_j, j = \overline{1, n+1}$.



Dacă cuplăm relațiile $(38)_2$ și $(38)_3$ obținem sistemul

$$\begin{cases} c_j h_j + d_j h_j^2 = \dfrac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} - b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ 2c_j h_j + 3d_j h_j^2 = b_{j+1} - b_j, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{39}$$

Combinațiile de forma: $(39)_1 \otimes 2 -$ $(39)_2$ și $(39)_1 \otimes 3 -$ $(39)_2$ furnizează expesii pentru coeficienții $d_j, c_j, j = \overline{1, n}$ exprimați în raport cu coeficienții $b_j, j = \overline{1, n+1}$. Astfel

$$\begin{cases} d_j = -\dfrac{2}{h_j^3}(f(x_{j+1}) - f(x_j)) + \dfrac{1}{h_j^2}(b_{j+1} + b_j), \quad j = \overline{1, n} \\ c_j = \dfrac{3}{h_j^2}(f(x_{j+1}) - f(x_j)) - \dfrac{b_{j+1} + 2b_j}{h_j}, j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{40}$$

Introducând coeficienții $c_j, d_j$ în relația $(38)_5$ se obține un sistem de $n + 1$ ecuații, având drept necunoscute coeficienții, $b_j$, $j = \overline{1, n+1}$



$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ \dfrac{1}{h_{j-1}} b_{j-1} + \left(\dfrac{2}{h_j} + \dfrac{2}{h_{j-1}}\right) b_j + \dfrac{1}{h_j} b_{j+1} \\ = -\dfrac{3}{h_{j-1}^2} f(x_{j-1}) + \left(\dfrac{3}{h_{j-1}^2} - \dfrac{3}{h_j^2}\right) f(x_j) + \dfrac{3}{h_j^2} f(x_{j+1}), \quad j = \overline{2, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \end{cases} \tag{41}$$

În cazul unei diviziuni $(x_j)_{j=\overline{1,n+1}}$ echidistante cu pasul $h$ sistemul de mai sus se rescrie sub forma

$$\begin{cases} b_1 = f'(x_1) \\ b_{j-1} + 4b_j + b_{j+1} = \dfrac{3}{h}(f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})), \quad j = \overline{2, n} \\ b_{n+1} = f'(x_{n+1}) \end{cases} \tag{42}$$



cu matricea asociată, $B$, diagonal dominantă

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{43}$$

și se poate rezolva, de exemplu, prin metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii.