Rezolvari examen Tehnici de optimizare - 2018

Bogdan Macovei

Mai 2019

1 Numarul 1

1.1 Problema 1

Fie $f : R^+ \times R \to R$ cu $f(x) = \max(1 - \sqrt{x_1}, |x_2|)$.
a) Este f convexa?
b) Determinati punctele de optim ale lui f si natura lor.

Solutie a, Determinam convexitatea fiecarei functii care apare in definitia lui f:

$g(x) = 1 - \sqrt{x_1}$ este convexa daca si numai daca $g''(x) >= 0\ \forall x \in [0, \infty)$ (conform conditiilor de convexitate de ordinul II, sustinute de faptul ca $g \in C^2(R)$).

$$g''(x) = (g'(x))' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{4x\sqrt{x}} > 0\ \forall x \in (0, \infty)$$

deci functia este convexa.

Consideram acum functia modul, $|\cdot|$. Ea este convexa, conform definitiei, daca

$$\forall x, y \in R,\ |\alpha x + (1-\alpha)y| \leq \alpha|x| + (1-\alpha)|y|$$

egalitate care este adevarata tocmai din inegalitatea modulului, ceea ce inseamna ca functia modul este o functie convexa, rezultand astfel ca f este o functie convexa.

Solutie b. Pentru a determina punctele de optim, trebuie a determina, mai intai, punctele stationare, adica punctele astfel incat

$$\nabla f(x) = 0$$

Observam, insa, ca

$$\nabla f(x) = \begin{cases} [-\frac{1}{2\sqrt{x_1}};\ 0]^T & x_2 \in [1 - \sqrt{x_1}, \sqrt{x_1} - 1] \\ [0;\ \pm 1]^T & altfel \end{cases}$$

Adica $\nabla f(x) \neq 0\ \forall x$, deci f nu are puncte de optim.

1.2 Problema 2

Fie $f : R \times R \rightarrow R$ cu $f(x) = x_1^3 + (1 + x_2)^2$.

a) Aplicati Metoda Gradient cu pas ideal pentru punctul de inceput $z_0 = [1\ 1]^T$,

b) Aplicati Metoda Newton cu pasul $\alpha = 1$, pornind de la acelasi z_0 ca la punctul (a).

Solutie. Calculam gradientul si Hessiana functiei f:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 \\ 2(1 + x_2) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gradient Descent. Aplicam iteratia $z_1 = z_0 - \alpha_0 \nabla f(z_0)$ unde pasul ideal este specificat simbolic:

$$\alpha_0 = \arg \max_{\alpha \geq 0} f(z_0 + \alpha \nabla f(z_0))$$

Se obtine

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \alpha_0 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3\alpha_0 \\ 1 - 4\alpha_0 \end{bmatrix}$$

Metoda Newton. Aplicam iteratia $z_1 = z_0 - \alpha(\nabla^2 f(z_0))^{-1} \nabla f(z_0)$. Avem ca $\nabla^2 f(x) = (\nabla^2 f(x))^T$ si $(\nabla^2 f(x))^*$ dat de:

$$(\nabla^2 f(x))^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

astfel ca inversa Hessianei va fi

$$(\nabla^2 f(x))^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Pasul in metoda Newton:

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1.3 Problema 3

Fie $exp^* : R \to R$ cu $exp^*(x) = \min_{z\in R} xz - e^z$ si problema de optimizare

$$(P) : \min_{x\in R^2} \{exp^*(x_1) + exp^*(x_2) \mid x_1 + 2\cdot x_2 \leq 1\}$$

a) este P convexa?
b) Determinati punctele KKT si natura lor.

Solutie a. Analizam functia $exp^*(x)$. Fie $f(x, z) := xz - e^z$, atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x - e^z$$

Impunand conditia $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ (pentru a obtine punct de extrem) avem ca $x = e^z$, deci $z = ln(x)$, astfel ca $exp^*(x)$ are forma explicita:

$$exp^*(x) = xln(x) - x = x(ln(x) - 1)$$

care este o functie convexa, deoarece

$$exp^{*\prime}(x) = ln(x) \Rightarrow exp^{*\prime\prime}(x) = \frac{1}{x}$$

iar cum domeniul nu poate fi decat $(0, \infty)$ (din cauza logaritmului natural), inseamna ca

$$exp^{*\prime\prime}(x) \geq 0 \ \forall x \in (0, \infty)$$

deci functia exp^* este o functie convexa.

Daca $exp^*(x)$ convexa, atunci $exp^*(x_1) + exp^*(x_2)$ este convexa, $\forall x \in (0, \infty)$; relatia $x_1 + 2\cdot x_2 \leq 1$ defineste un semiplan (care este multime convexa), deci problema de optimizare P este o problema de optimizare convexa.

Solutie b. Pentru a determina punctele KKT, vom formula problema de optimizare constransa:

$$\min_{x\in R^2_+} exp^*(x_1) + exp^*(x_2)$$
$$s.l. \ x_1 + 2\cdot x_2 - 1 \leq 0$$

Notand $f(x) = exp^*(x_1) + exp^*(x_2)$ si $g(x) = x_1 + 2\cdot x_2 - 1$, avem ca Lagrangianul functiei este dat de formula:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x) = exp^*(x_1) + exp^*(x_2) + \lambda(x_1 + 2\cdot x_2 - 1)$$

adica, in forma explicita (inlocuind exp^* cu forma obtinuta la subpunctul anterior):

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1(ln(x_1) - 1) + x_2(ln(x_2) - 1) + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1)$$

Pentru a scrie sistemul KKT, mai avem nevoie de doua informatii: gradientul lui f si gradientul lui g:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} ln(x_1) \\ ln(x_2) \end{bmatrix}; \nabla g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Obtinem sistemul:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} ln(x_1) \\ ln(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \lambda = 0 \\ \lambda x_1 + 2\lambda x_2 - \lambda = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} ln(x_1) + \lambda = 0 \\ ln(x_2) + 2\lambda = 0 \\ \lambda(x_1 + 2_x 2 - 1) = 0 \\ \lambda \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Daca avem ca $\lambda = 0$, atunci $x_1 = x_2 = 1$, contradictie cu $x_1 + 2x_2 \leq 1$ $(3 \nleq 1)$, deci $\lambda > 0$. Daca $\lambda > 0$, atunci din a treia ecuatie a sistemului avem ca $x_1 + 2x_2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2$.

Din prima si din a doua ecuatie obtinem ca $x_1 = e^{-\lambda}$, respectiv $x_2 = e^{-2\lambda}$, si folosind informatia de mai sus, cum ca $x_1 = 1 - 2x_2$, avem:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2e^{-2\lambda} \Rightarrow 2e^{-2\lambda} + e^{-\lambda} - 1 = 0$$

Notam $e^{-\lambda} = y$ si obtinem ecuatia de gradul al doilea $2y^2 + y - 1 = 0$, cu solutiile $y_1 = -1$, $y_2 = 0.5$. Este evident ca $y_1 = -1 < 0$ nu poate fi solutia unei ecuatii exponentiale, deci

$$e^{-\lambda} = 0.5 \Rightarrow -\lambda = -ln(2) \Rightarrow \lambda = ln(2)$$

Se obtin, astfel, x_1 si x_2, iar punctul $x = [x_1 \; x_2]^T$ este punct de minim global.

2 Numarul 2

2.1 Problema 1

Fie $f : R^+ \to R$ cu $f(x) = \max_{z \in R} zx - e^z$.
a) Este multimea $X = \{x \in R^+ \times R^+ \mid f(x_1) + f(x_2) \leq 0\}$ convexa?
b) Care este solutia problemei de optimizare $(P) := \min_{x \in X}\{||x||_2^2\}$?

Solutiea. Functia este cea de la problema 3, Numarul 1, forma ei explicita fiind $f(x) = x(ln(x) - 1)$. (obs: la numarul 1 se cerea minimul functiei, dar este doar greseala de scriere, tot maximul era corect sa fie cerut, intrucat functia $zx - e^z$ este concava).
Multimea X este convexa deoarece $f(x)$ este convexa $\Rightarrow f(x_1) + f(x_2)$ convexa, iar constrangerea de ingalitate formeaza un semiplan, care este multime convexa conform teoriei.

Solutie b. Explicitam multimea X:

$$X = \{x \in R_+^2 \mid x_1(ln(x_1) - 1) + x_2(ln(x_2) - 1) \leq 0\}$$

Se cere $x^* := \min_{x \in X} ||x||_2^2$. Definitia normei este $||x||_2^2 = x_1^2 + x_2^2$, deci problema de optimizare se va scrie

$$\min_{x \in X} x_1^2 + x_2^2$$
$$s.l.\ x_1(ln(x_1) - 1) + x_2(ln(x_2) - 1) \leq 0$$

Notand $g(x) := x_1^2 + x_2^2$ avem ca $\nabla g(x) = [2x_1\ 2x_2]^T$, iar egaland cu 0 am fi obtinut punctul stationar $[0\ 0]^T$ care, insa, nu este definit in multimea X, deoarece $\nexists\ ln(0)$. Astfel, stiind ca P este convexa, vom determina minimul din multimea fezabila X, iar acel minim va fi solutia problemei de optimizare.

Fie $f(x) := x_1(ln(x_1) - 1) + x_2(ln(x_2) - 1)$ cu gradientul

$$\nabla h(x) = \begin{bmatrix} ln(x_1) \\ ln(x_2) \end{bmatrix}$$

Egaland cu 0, obtinem punctul stationar $x^* = [1\ 1]^T$ care este si punctul de minim cautat in problema. (este sigur punct de minim global, functia obiectiv fiind convexa)

2.2 Problema 2

Problema 2 este identica problemei 2 de la numarul 1.

2.3 Problema 3

Fie problema de optimizare

$$(P) := min_{x\in R^2}\{exp(x_2) \mid ||x||_2 - x_1 \le 0\}$$

a) Determinati problema duala.
b) Determinati punctele KKT si natura lor.

Solutie a. Vom rescrie problema de optimizare sub forma:

$$\min_{x\in R^2} e^{x_2}$$
$$s.l.\ \sqrt{x_1^2+x_2^2} - x_1 \le 0$$

Lagrangianul asociat este

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = e^{x_2} + \lambda\sqrt{x_1^2+x_2^2} - \lambda x_1$$

Problema duala se va formula

$$q^* = \max_{\lambda\ge 0}\left(\min_{x\in R^2} \mathcal{L}(x,\lambda)\right)$$

Avem ca

$$\nabla_{x_1}\mathcal{L}(x,\lambda) = -\lambda + \lambda\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}};\ \nabla_{x_2}\mathcal{L}(x,\lambda) = e^{x_2} + \lambda\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

Cum pentru $x_2 = 0$ se obtine contradictia $1 = 0$, inseamna ca avem constrangerea $\lambda = 0$, ceea ce implica $x_2 = -\infty \in \bar{R}$ (iar $x_1 \in R$). Problema duala va fi data de functia duala $q(\lambda) = -\infty$ daca $\lambda = 0$ si $x_2 = -\infty$.

Solutie b. Problema de optimizare se observa ca este una convexa (atat functia obiectiv, cat si functia care genereaza constrangerea de inegalitate sunt functii convexe). Sistemul $(KKT - CP)$ corespunzator va fi:

$$\begin{cases} \lambda\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - \lambda = 0 \\ e^{x_2} + \lambda\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = 0 \\ \lambda(\sqrt{x_1^2+x_2^2} - x_1) = 0 \\ \lambda \ge 0 \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2} - x_1 \le 0 \end{cases}$$

Daca impunem conditia $g(x) = 0$ sa fie activa, obtinem ca $x_2 = 0$ ceea ce conduce, in a doua ecuatie a sistemului, la contradictia $1 = 0$. Impunem, astfel, ca $g(x) \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$, ceea ce conduce la solutia $x_2 = -\infty$ in a doua ecuatie. Din constrangerea de inegalitate a problemei primale:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2$$

obtinem ca $x_2^2 \leq 0$, insa conduce la contradictia $\infty \leq 0$. Concluzia este ca problema nu admite puncte KKT.