CURSUL 11: INELE ŞI CORPURI

G. MINCU

1. CORPURI

Definiţia 1. Inelul unitar R se numeşte **corp** dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $1 \neq 0$.
ii) orice element nenul al lui R este inversabil.

Observaţia 2. Orice corp este inel integru.

Exemplul 3. Conform proprietăţilor cunoscute de la şcoala generală sau de la liceu, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nu este corp, deoarece $2 \in \mathbb{Z}$ este nenul şi neinversabil.

Exemplul 4. Întrucât $U(\mathbb{Z}_n) = \{a \in \mathbb{Z}_n : (a, n) = 1\}$, deducem că inelul $\mathbb{Z}_n$ este corp dacă şi numai dacă n este număr prim.

Definiţia 5. Fie R un inel. O submulţime nevidă K a lui R se numeşte **subcorp** al lui R dacă K este corp în raport cu operaţiile induse de cele de pe R.

Propoziţia 6. Fie K un corp. O submulţime L a lui K cu cel puţin două elemente este subcorp al lui K dacă şi numai dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\forall x, y \in L \quad x - y \in L$ şi
ii) $\forall x, y \in L \setminus \{0\} \quad xy^{-1} \in L$.

Propoziţia 7. Fie K un corp şi L_α, $\alpha \in A$ subcorpuri ale acestuia. Atunci, $P_K = \bigcap\limits_{\alpha \in A} L_\alpha$ este subcorp al lui K.

Definiţia 8. Un corp care nu admite subcorpuri proprii se numeşte **corp prim**.

Observaţia 9. Dat fiind un corp K, subcorpul său P_K este corp prim. El se numeşte **subcorpul prim** al lui K.

Fie K un corp de caracteristică $n \in \mathbb{N}^*$ şi P_K subcorpul său prim. Atunci, $1 \in P_K$, deci $\mathcal{M} = \{1, 1+1, \ldots, \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n}\} \subset P_K$. Este uşor de văzut că

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{u}) - (\underbrace{1+1+\cdots+1}_{v}) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{u-v \pmod n} \quad \text{şi}$$

$$(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{u})(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{v}) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{uv \pmod n}.$$

De aici deducem că $\varphi : \mathbb{Z}_n \to P_K$, $\varphi(\widehat{a}) = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{a}$ este morfism de inele. Surjectivitatea acestuia fiind evidentă, din $|\mathbb{Z}_n| = |P_K|$ obţinem şi injectivitatea. Aşadar, inelele $\mathbb{Z}_n$ şi P_K sunt izomorfe. Rezultă că $\mathbb{Z}_n$ este inel integru, de unde deducem că n este număr prim. Am obţinut prin urmare:

Propoziţia 10. Caracteristica unui corp este fie zero, fie număr prim.

Propoziţia 11. Dacă K este un corp de caracteristică $p > 0$, atunci subcorpul său prim este izomorf cu $\mathbb{Z}_p$.

Avem un rezultat comparabil şi pentru corpurile de caracteristică zero:

Propoziţia 12. Dacă K este un corp de caracteristică zero, atunci subcorpul său prim este izomorf cu $\mathbb{Q}$.

Temă: Demonstraţi propoziţia 12!

Din cele de mai sus rezultă şi:

Propoziţia 13. Singurul tip de corp prim de caracteristică p este $\mathbb{Z}_p$. Singurul tip de corp prim de caracteristică zero este $\mathbb{Q}$.

Exemplul 14. Considerăm submulţimea $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$ a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Se constată că $\mathcal{H}$ este o parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu adunarea şi cu înmulţirea matricelor. În raport cu legile induse, $\mathcal{H}$ are o structură de corp.

Definiţia 15. Corpul (necomutativ!) din exemplul anterior se numeşte **corpul cuaternionilor**. El se notează de obicei cu $\mathbb{H}$.

Exemplul 16. Fie R un domeniu de integritate. Pe $R \times (R \setminus \{0\})$ introducem relaţia $\sim$ astfel: $(a, s) \sim (b, t)$ dacă şi numai dacă $at = bs$. Se constată că această relaţie este de echivalenţă.
Notăm cu $\dfrac{a}{s}$ clasa elementului $(a, s) \in R \times (R \setminus \{0\})$ în raport cu relaţia $\sim$ şi cu M mulţimea factor $R \times (R \setminus \{0\})/\sim$.
Pe M introducem operaţiile $\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} = \dfrac{at + bs}{st}$ şi $\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} = \dfrac{ab}{st}$.

Este uşor de văzut că aceste operaţii sunt corect definite şi că $(M, +, \cdot)$ este un corp comutativ.

Definiţia 17. Corpul construit în exemplul anterior se numeşte **corpul de fracţii al domeniului** R. O notaţie frecvent folosită pentru acest corp este $Q(R)$.

Exemplul 18. Corpul de fracţii al lui $\mathbb{Z}$ este $\mathbb{Q}$.

Definiţia 19. Dacă K este corp comutativ, corpul de fracţii al lui $K[X]$ se numeşte **corpul de fracţii raţionale în nedeterminata** X **cu coeficienţi în** K şi se notează $\mathbf{K(X)}$.

Observaţia 20. $K(X) = \left\{ \dfrac{f}{g} : f, g \in K[X],\ g \neq 0 \right\}$.

Observaţia 21. Dat fiind un domeniu de integritate R, funcţia $j_R : R \to Q(R)$, $j_R(a) = \dfrac{a}{1}$ este un morfism injectiv şi unitar de inele.

Propoziţia 22. (**Proprietatea de universalitate a corpului de fracţii al unui domeniu de integritate**) Fie R un domeniu de integritate. Pentru orice inel unitar S şi orice morfism unitar de inele $u : R \to S$ cu proprietatea că $\operatorname{Im} u \setminus \{0\} \subset U(S)$ există un unic morfism de inele unitare $v : Q(R) \to S$ cu proprietatea $v \circ j_R = u$.

Demonstraţie: Presupunând mai întâi că există un morfism v ca în concluzia propoziţiei, constatăm că, dat fiind $x = \dfrac{a}{s} \in Q(R)$, condiţiile din enunţ implică $v(f) = u(a)u(s)^{-1}$, de unde unicitatea lui v. Definind acum v prin formula anterioară, constatăm cu uşurinţă că el este corect definit şi morfism unitar de inele, ceea ce justifică şi afirmaţia de existenţă din enunţ. $\square$

Definiţia 23. Fie K şi L două corpuri. Funcţia $f : K \to L$ se numeşte **morfism de corpuri** dacă este morfism unitar de inele.

Exemplul 24. $i_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $i_1(x) = x$, $i_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{C}$, $i_2(x) = x$, $i_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $i_3(x) = x$, $i_4 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $i_4(x) = x$ şi $i_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i_5(z) = \overline{z}$ sunt câteva exemple imediate de morfisme de corpuri.

Exemplul 25. Pentru orice corp K, id_K este automorfism de corpuri.

Exemplul 26. $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $\alpha(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ este un morfism de corpuri.

Observaţia 27. Fie K un corp comutativ de caracteristică $p > 0$. Pentru orice $x \in K$ are loc relaţia

$$px = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{p} = x(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p}) = 0.$$

Mulţumită comutativităţii, pentru orice $x, y \in K$ are loc

$$(xy)^p = x^p y^p.$$

Numărul p fiind prim, avem $p \mid \binom{p}{k}$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Prin urmare, pentru orice $x, y \in K$ are loc relaţia

$$(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^{p-k} y^k = x^p + y^p.$$

Drept consecinţă a acestei observaţii, obţinem

Exemplul 28. Fie K un corp comutativ de caracteristică $p > 0$. Atunci, $\varphi : K \to K$, $\varphi(x) = x^p$ este un endomorfism de corpuri.

Definiţia 29. Endomorfismul din exemplul anterior se numeşte **endomorfismul lui Frobenius**.

Se constată cu uşurinţă că toate morfismele din exemplele prezentate sunt injective (temă!). Aceasta este consecinţa unui fapt mai general, şi anume:

Propoziţia 30. Orice morfism de corpuri este injectiv.

(Temă: demonstraţi această propoziţie!)

Încheiem paragraful referitor la corpuri cu enunţul unui rezultat foarte interesant, pentru a cărui demonstraţie cititorul interesat este invitat să consulte, de pildă, [2]:

Teorema lui Wedderburn. Orice corp finit este comutativ.

2. Ideale

Definiţia 31. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a lui R. Spunem că I este **ideal stâng** al lui R dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ ax \in I$.

Definiţia 32. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a lui R. Spunem că I este **ideal drept** al lui R dacă sunt îndeplinite condiţiile:
i) $\forall x, y \in I \ x - y \in I$.
ii) $\forall a \in R \ \forall x \in I \ xa \in I$.

Definiţia 33. Fie R un inel, iar I o submulţime nevidă a sa. I se numeşte **ideal bilateral** al lui R dacă este atât ideal stâng, cât şi ideal drept al lui R.

Observaţia 34. Orice ideal al unui inel R este subgrup aditiv al lui R.

Observaţia 35. Dacă inelul R este comutativ, orice ideal stâng al său este şi ideal drept, iar orice ideal drept al său este şi ideal stâng.

Exemplul 36. Orice inel are ca ideale bilaterale pe $\{0\}$ şi pe el însuşi.

Exemplul 37. Mulţimea idealelor lui $\mathbb{Z}$ este $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemplul 38. Mulţimea idealelor lui $\mathbb{Z}_n$ este $\{\widehat{d} \cdot \mathbb{Z}_n : d|n\}$.

Exemplul 39. Fie k un corp comutativ. Mulţimea idealelor lui $k[X]$ este $\{fk[X] : f \in k[X]\}$.

Demonstraţie: Fie k un corp comutativ şi I un ideal al lui $k[X]$. Dacă $I = \{0\}$, atunci $I = 0k[X]$. În caz contrar, mulţimea $I \setminus \{0\}$ este nevidă; fie $f \in I \setminus \{0\}$ un polinom de grad minim. Evident, $fk[X] \subset I$. Fie $g \in I$. Conform teoremei de împărţire cu rest, există $q, r \in k[X]$ astfel încât $g = fq + r$ şi grad $r <$ grad f. Din aceste relaţii rezultă mai întâi că $r \in I$, iar apoi, datorită alegerii lui f, că $r = 0$. Prin urmare, $g = fq$, deci $g \in fk[X]$. $\square$

Exemplul 40. i) Fie R şi S două inele, iar I şi J ideale de acelaşi tip ale lui R, respectiv S. Atunci, $I \times J$ este ideal de acelaşi tip al lui $R \times S$.
ii) Dacă R şi S sunt inele unitare, iar I este ideal în $R \times S$, atunci există idealele I_R şi I_S în R, respectiv în S, de acelaşi tip cu I, astfel încât $I = I_R \times I_S$.

Exerciţiul 41. i) Generalizaţi afirmaţiile din exemplul 40 la cazul a n inele ($n \in \mathbb{N}^*$).
ii) Demonstraţi afirmaţiile din exemplul 40.

Problemă suplimentară: Rămân adevărate afirmaţiile din exemplul 40 pentru o infinitate de inele?

Exemplul 42. Fie R un inel. Atunci, $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ este ideal stâng al lui $\mathcal{M}_2(R)$, dar nu este ideal drept al acestui inel.

Exerciţiul 43. Daţi exemplu de ideal drept al unui inel care să nu fie ideal stâng al acelui inel!

Propoziţia 44. Fie R un inel şi I un ideal stâng (respectiv, drept) al său. Dacă I conţine un element inversabil la stânga (respectiv, la dreapta), atunci $I = R$.

Demonstraţie: Fie I un ideal stâng al inelului R, iar $a \in I$ un element inversabil la stânga. Fie $r \in R$. Atunci, $r = (ra^{-1})a \in I$. Prin urmare, $I = R$. $\square$

Exerciţiul 45. Demonstraţi afirmaţia referitoare la ideale la dreapta din propoziţia anterioară!

Corollary 46. Dacă inelul R este corp, atunci singurele sale ideale sunt $\{0\}$ şi R.

Exerciţiul 47. Este adevărată reciproca afirmaţiei din corolarul 46?

Exemplul 48. Fie R un inel şi I, J ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R. Atunci $\{a + b : a \in I, b \in J\}$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.

Definiţia 49. Idealul definit în exemplul 48 se numeşte **suma** idealelor I şi J.

Exerciţiul 50. Definiţi suma mai multor ideale!

Propoziţia 51. Fie R un inel şi $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ o familie de ideale (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale sale. Atunci, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.

Exerciţiul 52. Demonstraţi propoziţia 51!

Definiţia 53. Fie R un inel şi $M \subset R$. Prin **idealul (stâng, drept, respectiv bilateral al) lui R generat de M** înţelegem intersecţia tuturor idealelor (stângi, drepte, respectiv bilaterale) ale lui R care conţin pe M.

Observaţia 54. Fie R un inel şi $M \subset R$. Idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de M este cel mai mic ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R care conţine M.

Notăm de obicei cu (M) idealul bilateral al lui R generat de M.

Propoziţia 55. Fie R un inel unitar şi $M \subset R$. Atunci:
i) Idealul stâng al lui R generat de M este

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M \right\}.$$

ii) Idealul drept al lui R generat de M este

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i a_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M\right\}.$$

iii) Idealul bilateral al lui R generat de M este

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in R, x_i \in M\right\}.$$

Demonstraţie: Notăm cu (M) idealul stâng generat de M şi cu I mulţimea $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in R, x_i \in M\right\}$. Este evident că $I \subset (M)$. Pe de altă parte, deoarece $I \leq^s R$ şi $M \subset I$, obţinem şi $(M) \subset I$. Celelalte două afirmaţii se probează analog. $\square$

Definiţia 56. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci idealul (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R generat de $\{a\}$ se numeşte **ideal** (stâng, drept, respectiv bilateral) **principal** ale lui R.

Observaţia 57. Dacă R este un inel, iar a un element al său, atunci:
Idealul stâng principal al lui R generat de a este egal cu Ra.
Idealul drept principal al lui R generat de a este egal cu aR.
Idealul bilateral principal al lui R generat de a este egal cu RaR. Pentru acest ideal se foloseşte de obicei notaţia (a).

3. Subinele, ideale şi morfisme

Propoziţia 58. Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci:
i) Dacă R' este subinel al lui R, atunci $f(R')$ este subinel al lui S.
ii) Dacă S' este subinel al lui S, atunci $f^{-1}(S')$ este subinel al lui R.
iii) Dacă J este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S, atunci $f^{-1}(J)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R.
iv) Dacă f este surjectiv, iar I este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui R, atunci $f(I)$ este ideal (stâng, drept, respectiv bilateral) al lui S.

Definiţia 59. Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Numim **nucleul** lui f, şi notăm $\ker f$, mulţimea $\{a \in R : f(a) = 0\}$.

Observaţia 60. Conform propoziţiei 58, dacă $f : R \to S$ este un morfism de inele, atunci $\ker f$ este ideal bilateral al lui R.

Propoziţia 61. Morfismul de inele $f : R \to S$ este injectiv dacă şi numai dacă $\ker f = \{0\}$.

Exerciţiul 62. Demonstraţi această propoziţie!

Exerciţiul 63. Folosind propoziţia 61, redemonstraţi faptul că orice morfism de corpuri este injectiv!

Teorema de corespondenţă pentru ideale. Fie $f : R \to S$ un morfism surjectiv de inele. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea idealelor lui R care conţin $\ker f$ şi cu $\mathcal{N}$ mulţimea idealelor lui S. Atunci aplicaţiile $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, $\Phi(I) = f(I)$ şi $\Psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, $\Psi(J) = f^{-1}(J)$ sunt inverse una celeilalte.

4. INEL FACTOR

4.1. **Construcţia inelului factor.** Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R. Cum I este subgrup normal al grupului $(R, +)$, putem construi grupul factor R/I. Dacă $\widehat{a} = \widehat{a'}$ şi $\widehat{b} = \widehat{b'}$ în acest grup, atunci $a - a' \in I$ şi $b - b' \in I$, de unde deducem că $ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b' \in I$, deci $\widehat{ab} = \widehat{a'b'}$ în R/I. Prin urmare, operaţia $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{ab}$ este corect definită pe R/I.

Exerciţiul 64. Arătaţi că $(R/I, +, \cdot)$ este inel.

Definiţia 65. Inelul $(R/I, +, \cdot)$ se numeşte inelul factor al lui R în raport cu idealul bilateral I.

Observaţia 66. Date fiind un inel R şi un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulţimea subiacentă $\{a + I : a \in R\}$,
- adunarea $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$, şi
- înmulţirea $(a + I)(b + I) = (ab) + I$.

Notaţie uzuală: Vom folosi frecvent atunci când lucrăm în inelul R/I notaţia $\widehat{a}$ în loc de $a + I$. Cu această notaţie, observaţia anterioară se rescrie astfel:

Observaţia 67. Date fiind un inel R şi un ideal bilateral I al acestuia, inelul factor R/I are:

- mulţimea subiacentă $\{\widehat{a} : a \in R\}$,
- adunarea $\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a + b}$, şi
- înmulţirea $\widehat{a}\widehat{b} = \widehat{ab}$.

Observaţia 68. *În inelul factor R/I avem:*

- $\widehat{a} = \widehat{b} \Leftrightarrow a - b \in I$
- $\widehat{a} = \widehat{0} \Leftrightarrow a \in I$.

Exemplul 69. Dat fiind $n \in \mathbb{N}$, inelul factor $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ este $\mathbb{Z}_n$.

Propoziţia 70. Fie R un inel, iar I un ideal bilateral al lui R. Atunci:
i) Dacă R este comutativ, atunci R/I este comutativ.
ii) Dacă R este unitar, atunci R/I este unitar (cu unitatea $1 + I$).

Exerciţiul 71. Demonstraţi propoziţia 70.

Propoziţia 72. Fie R un inel (unitar), iar I un ideal bilateral al lui R. Atunci, $\pi : R \to R/I$, $\pi(a) = a + I$ este morfism (unitar şi) surjectiv de inele. În plus, $\ker \pi = I$.

Exerciţiul 73. Demonstraţi propoziţia 72.

Definiţia 74. Morfismul π din propoziţia 72 se numeşte **proiecţia** (sau **surjecţia**) **canonică** a lui R pe R/I.

Proprietatea de universalitate a inelului factor. Fie R un inel, I un ideal bilateral în R, $\pi : R \to R/I$ proiecţia canonică, iar $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci:
i) Dacă $\ker \pi \subset \ker f$, atunci există un unic morfism de inele $u : R/I \to S$ cu proprietatea $f = u \circ \pi$.
ii) u este injectiv dacă şi numai dacă $\ker \pi = \ker f$.
iii) u este surjectiv dacă şi numai dacă f este surjectiv.

5. Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele

Teorema fundamentală de izomorfism pentru inele.
Fie $f : R \to S$ un morfism de inele. Atunci, $\widetilde{f} : \dfrac{R}{\ker f} \to \mathrm{Im}\ f$, $\widetilde{f}(\widehat{a}) = f(a)$ este un izomorfism. Deci, $\dfrac{R}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\ f$.

Demonstraţie: Dacă $\widehat{a} = \widehat{b}$, atunci $a - b \in \ker f$, deci $f(a - b) = 0$, de unde $f(a) = f(b)$. Prin urmare, $\widetilde{f}$ din enunţ este corect definită. $\widetilde{f}$ este în mod evident morfism surjectiv de inele. $\ker \widetilde{f} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : \widetilde{f}(\widehat{a}) = \widehat{0}\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : f(a) = 0\} = \{\widehat{a} \in R/\ker f : a \in \ker f\} = \{\widehat{0}\}$, deci $\widetilde{f}$ este şi injectivă. $\square$

Corollary 75. Fie $n, d \in \mathbb{N}$ cu $d|n$. Atunci, $\dfrac{\mathbb{Z}_n}{\widehat{d}\mathbb{Z}_n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_d$.

Exerciţiul 76. Demonstraţi corolarul 75.

Corollary 77. Fie R, S două inele, iar I şi J ideale bilaterale ale lui R, respectiv S. Atunci, $\dfrac{R \times S}{I \times J} \xrightarrow{\sim} \dfrac{R}{I} \times \dfrac{S}{J}$.

Exerciţiul 78. Demonstraţi corolarul 77.

Lema chineză a resturilor. Fie R un inel comutativ şi unitar şi I, J două ideale ale lui R cu proprietatea că $I+J=R$. Atunci, $\dfrac{R}{I\cap J} \overset{\sim}{\to} \dfrac{R}{I}\times\dfrac{R}{J}$.

Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebră*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.