— 9.14 (MS) — MS PT, LMC (S IX)

Obs.: Fie $\mathcal{A}=(A,\leq)$ şi $\mathcal{B}=(B,\sqsubseteq)$ poseturi, $\mathcal{L}=(L,\vee,\wedge,\leq)$ şi $\mathcal{M}=(M,\sqcup,\sqcap,\sqsubseteq)$ latici, iar $\mathcal{N}=(N,\vee,\wedge,\leq,0,1)$ şi $\mathcal{P}=(P,\sqcup,\sqcap,\sqsubseteq,\perp,\top)$ latici mărginite. Fie $f:A\rightarrow B$, $g:L\rightarrow M$ şi $h:N\rightarrow P$. Atunci au loc echivalenţele:

- f este morfism de poseturi între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ f este morfism de poseturi între dualele $(A,\geq)$ şi $(B,\sqsupseteq)$ ale lui $\mathcal{A}$ şi, respectiv, $\mathcal{B}$;

prin urmare, dacă f este bijectivă, atunci aceeaşi echivalenţă este valabilă pentru inversa $f^{-1}:B\rightarrow A$ a lui f, aşadar are loc şi:

- f este izomorfism de poseturi între $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ $\Leftrightarrow$ f este izomorfism de poseturi între dualele $(A,\geq)$ şi $(B,\sqsupseteq)$ ale lui $\mathcal{A}$ şi, respectiv, $\mathcal{B}$;
- g este morfism de latici între $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{M}$ $\Leftrightarrow$ g este morfism de latici între dualele $(L,\wedge,\vee,\geq)$ şi $(M,\sqcap,\sqcup,\sqsupseteq)$ ale

lui $\mathcal{L}$ şi, respectiv, $\mathcal{M}$;

prin urmare, aceeaşi echivalenţă are loc şi pentru izomorfismele de latici, întrucât izomorfismele de latici coincid cu morfismele bijective de latici;

- h este morfism de latici mărginite între $\mathcal{N}$ şi $\mathcal{P}$ $\Leftrightarrow$ h este morfism de latici mărginite între dualele $(N, \wedge, \vee, \geq, 1, 0)$ şi $(P, \sqcap, \sqcup, \sqsupseteq, \top, \bot)$ ale lui $\mathcal{N}$ şi, respectiv, $\mathcal{P}$;

prin urmare, aceeaşi echivalenţă este satisfăcută şi de izomorfismele de latici mărginite, întrucât acestea coincid cu morfismele bijective de latici mărginite.

Vom vedea că aceeaşi echivalenţă este valabilă şi pentru algebre Boole şi morfisme de algebre Boole.

Toate echivalenţele de mai sus rezultă direct din definiţiile acestor tipuri de morfisme.

Aceste echivalenţe ne permit ca, în exerciţiile următoare, să aplicăm <u>Principiul dualităţii</u> pentru posetluri, respectiv posetluri mărginite, unor proprietăți în care apar morfisme sau izomorfisme de poseturi, pentru că echivalențele de mai sus arată că, în dualul unui enunț în care apare un morfism sau izomorfism f de poseturi, f rămâne neschimbat. În același mod pot fi aplicate Principiul dualității pentru latici, respectiv latici mărginite, precum și Principiul dualității pentru algebre Boole, pe care îl vom vedea în unul dintre cursurile următoare.

Exerc.: Să se arate că orice funcție izotonă păstrează minimele și maximele arbitrare. Mai precis, să se demonstreze că: dacă $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt poseturi, iar $f : A \to B$ este o funcție izotonă (i.e. un morfism de poseturi) (între aceste poseturi), și $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$, astfel încât există în posetul $(A, \leq)$ $\min(X)$ și $\max(Y)$ atunci există în posetul $(B, \sqsubseteq)$:

$$\min(f(X)) = f(\min(X))$$

și

$$\max(f(Y)) = f(\max(Y)).$$

REZOLVARE:

$$\min(X) \in X \Rightarrow \begin{cases} X \neq \emptyset \left(\xRightarrow{X \subseteq A} A \neq \emptyset \right) \\ \text{și} \\ f(\min(X)) \in f(X) \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow f(X) \neq \emptyset$ ($\Rightarrow B \neq \emptyset$, fapt care rezultă și din $A \neq \emptyset$ și faptul că există $f : A \to B$).

(Axioma alegerii ne permite, acum, să alegem un element (arbitrar) al lui $f(X)$.)

Fie $b \in f(X)$. $\Leftrightarrow (\exists\, a \in X)(b = f(a))$.

$a \in X \Rightarrow \min(X) \leq a \xRightarrow[\text{izotonă}]{(f \text{ e}} f(\min(X)) \sqsubseteq f(a)$.

$\Rightarrow f(\min(X)) \sqsubseteq b$.

b este un element arbitrar al lui $f(X)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\min(X))$ este un minorant pentru $f(X)$.

dar $f(\min(X)) \in f(X)$.

$\Rightarrow f(\min(X)) = \min(f(X))$.

Prin dualitate $\Rightarrow f(\max(Y)) = \max(f(Y))$.

subpunctele (1,2) și (2,2)

Obs.: Izomorfismele de poseturi păstrează infimumurile și supremumurile arbitrare, după cum arată exercițiul următor. Dar, în general, infimumurile și supremumurile arbitrare nu sunt păstrate de morfismele de poseturi, nici chiar de morfismele bijective de poseturi, nici de morfismele dintre poseturi (latici), și nici de morfismele de latici (morfismele de latici, prin definiție, păstrează infimumurile și supremumurile perechilor de elemente; de aici se demonstrează prin inducție după numărul de elemente al submulțimii domeniului morfismului, că morfismele de latici păstrează infimumurile și supremumurile

VI) mulțimilor finite și nevide; dar
II) nu și pe cele ale mulțimilor arbitrare), aceste lucruri rezultă din și exemplele date pentru exercițiul următor.

VI) <u>Exerc.</u>: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$
I) poseturi, $f: A \to B$ o funcție izotonă, iar $X \subseteq A$. Să se demonstreze că:

(1) dacă există $\inf(X)$ în $(A, \leq)$ și există $\inf(f(X))$ în $(B, \leq)$ atunci:

(1.1) $f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$;

(1.2) dacă f este izomorfism de poseturi, atunci $f(\inf(X)) = \inf(f(X))$;

(2) dacă există $\sup(X)$ în $(A, \leq)$ și există $\sup(f(X))$ în $(B, \leq)$ atunci:

(2.1) $f(\sup(X)) \geq \sup(f(X))$;

(2.2) dacă f este izomorfism de poseturi, atunci $f(\sup(X)) = \sup(f(X))$;

(3) dați exemple pentru inegalități stricte la (1.1) și (2.1);

(4) dacă f este izomorfism de posetrui, atunci au loc echivalențele:

(4,1) există $\inf(X)$ în $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ există $\inf(f(X))$ în $(B,\leq)$;

(4,2) există $\sup(X)$ în $(A,\leq)$ $\Leftrightarrow$ există $\sup(f(X))$ în $(B,\leq)$;

(5) dați exemple de funcții izotone care nu satisfac echivalențele (4,1) și (4,2).

REZOLVARE: (1) $\exists \inf(X) \in A \Rightarrow A \neq \emptyset \underset{\exists f: A \to B}{\Rightarrow} B \neq \emptyset$.

(1,1) Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$\exists \inf(f(X))$ în $(B,\leq)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \inf(\emptyset)$ în $(B,\leq) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \max(B)$ și $\inf(f(X)) = \inf(\emptyset) = \max(B)$.

$\inf(X) \in A \Rightarrow f(\inf(X)) \in B$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \max(B) = \inf(f(X)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$.

Caz 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $b \in f(X)$. $\Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b)$.

$a \in X \Rightarrow \inf(X) \leq a \xRightarrow{(f \text{ e izotonă})}$
$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq f(a) = b, \Rightarrow f(\inf(X))$
e minorant pt. $f(X)$ $\xRightarrow{(\text{def. inf})}$
$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)).$

(1,2) f e izomorfism de poseturi
$\overset{(\text{def})}{\Leftrightarrow}$ $\begin{cases} f \text{ e izotonă} \xRightarrow{(1,1)} f(\inf(X)) \leq \inf(f(X)) \ (*) \\ \text{și} \\ f \text{ e bijectivă iar } f^{-1} \text{ e izotonă.} \end{cases}$

Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset,$
$\exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$
$\exists \inf(f(X))$ în $(B, \leq),$

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X) \\ \text{și} \\ \exists \max(B) = \inf(\emptyset) = \inf(f(X)), \end{cases}$

f e izotonă $\xRightarrow[\text{anter.})]{(\text{exerc.},}$ f păstrează maximele arbitrare $\Rightarrow f(\max(A)) =$
$= \max(f(A)) \xlongequal{(f \text{ e surj.})} \max(B),$

$\Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X)).$

Caz 2: $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset.$

 MS PT. LMC(SIX)

Fie $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X) \Rightarrow \inf(f(X)) \leq f(a) \xrightarrow[\text{izotonă}]{f^{-1}\text{ e}} f^{-1}(\inf(f(X))) \leq$
$\leq f^{-1}(f(a)) = a, \Rightarrow f^{-1}(\inf(f(X)))$
e minorant pt. $X \xrightarrow{\text{(def. inf)}} f^{-1}(\inf(f(X)))$
$\leq \inf(X) \xrightarrow[\text{izotonă}]{f\text{ e}} \inf(f(X)) \overset{f}{=}$
$= f(f^{-1}(\inf(f(X)))) \leq f(\inf(X)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf(f(X)) \leq f(\inf(X))$. $(**)$
$(*), (**) \Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X))$.

(2) Prin dualitate, din (1).

(3) V. exemplele din materialul pt. studenți.

(4) f e izomorfism de poseturi $\overset{\text{(def.)}}{\Leftrightarrow}$ f e izotonă și bijectivă iar f^{-1} e izotonă.

(4.1) "$\Rightarrow$": $\exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$. $(***)$

$(***) \Rightarrow A \neq \emptyset \xrightarrow{(\exists f: A \to B)} B \neq \emptyset$.

Caz 1: $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset$.

$(***) \Rightarrow \exists \max(A) = \inf(\emptyset) = \inf(X)$. $(****)$

f e izotonă $\xrightarrow[\text{anter.)}]{\text{(exerc.}}$ f păstrează maximele arbitrare $\xRightarrow{(****)}$

$\Rightarrow \exists \max(f(A)) = f(\max(A)) =$
$= f(\inf(X))$.

f e surjectivă $\Leftrightarrow f(A) = B$.

$\Rightarrow \exists \max(B) = f(\inf(X)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ în $(B, \leq)$ $\inf(\emptyset) = \max(B)$.
$f(X) = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists \inf(f(X)) = \max(B) = f(\inf(X))$.

<u>Caz 2:</u> $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists a \in X)(f(a) = b)$.

$a \in X \xRightarrow{(***)} \inf(X) \leq a \xRightarrow[\text{crescătoare}]{f \text{ e}} f(\inf(X)) \leq f(a)$.

$\Rightarrow f(\inf(X)) \leq b \Rightarrow f(\inf(X))$ este minorant pt. $f(X)$. $(*****)$

Fie $m \in B$, a.î. m este minorant pt. $f(X)$. $(******)$

Fie $a \in X \Rightarrow f(a) \in f(X)$.

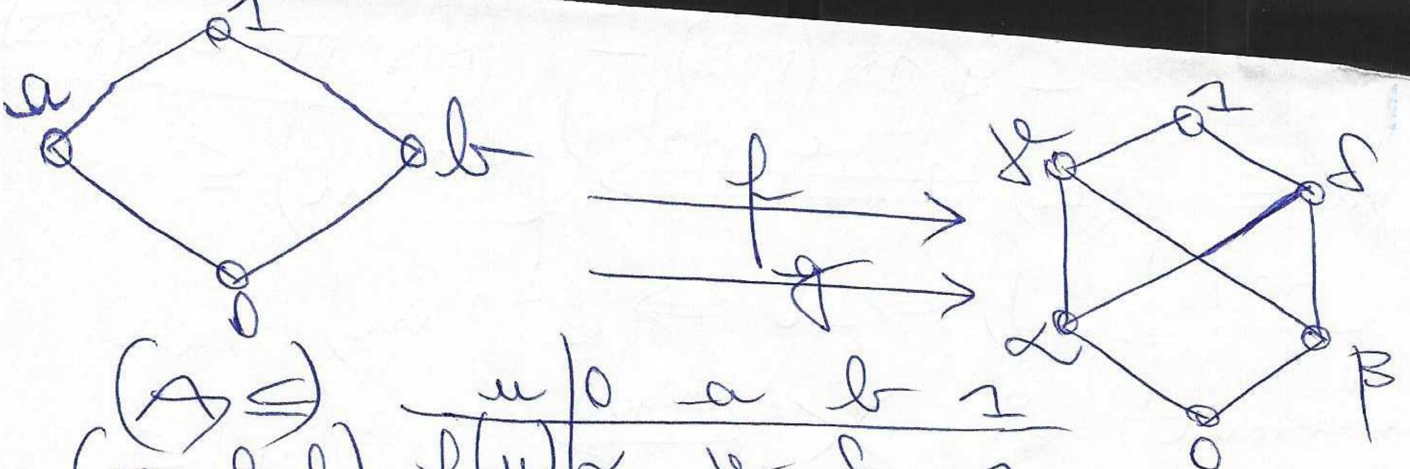
$\Rightarrow m \leq f(a) \xrightarrow{(f^{-1} \text{ e izoton})} f^{-1}(m) \leq$
$\leq f^{-1}(f(a)) = a \Rightarrow f^{-1}(m)$ este minorant pt. $X \xrightarrow{(**)} f^{-1}(m) \leq$
$\leq \inf(X) \xrightarrow[\text{izoton}]{f \text{ e}} m = f(f^{-1}(m)) \leq$
$\leq f(\inf(X)) \Rightarrow m \leq f(\inf(X)) \Rightarrow$
$\xrightarrow[(******)]{(*****)} \exists \inf(f(X)) = f(\inf(X))$.

$\xrightarrow[\text{"}]{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ $\exists \inf(f(X))$ în $(B, \leq)$.
f e izomorfism de poseturi $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f^{-1}$ e izomorfism de poseturi. $\Rightarrow$
$\xrightarrow{(\text{"}\Rightarrow\text{"})} \exists \inf(\underbrace{f^{-1}(f(X))}_{=X})$ în $(A, \leq) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \inf(X)$ în $(A, \leq)$.

(4.2) Prin dualitate, din (4.1).

(5) Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ poseturile date de următoarele diagrame Hasse, iar $f : A \to B$ dată de tabelul de mai jos:



$(A, \leq)$ (rombul)

u	0	a	b	1
$f(u)$	α	γ	δ	1

$(B, \leq)$

f e izotonă.

Fie $X = \{a, b\} \subset A$, $\Rightarrow \begin{cases} \inf(X) = 0, \\ f(X) = \{\gamma, \delta\} \end{cases}$

care nu are infimum în $(B, \leq)$.

Dacă $g : A \to B$ este dată de tabelul:

u	0	a	b	1
$g(u)$	0	α	β	δ

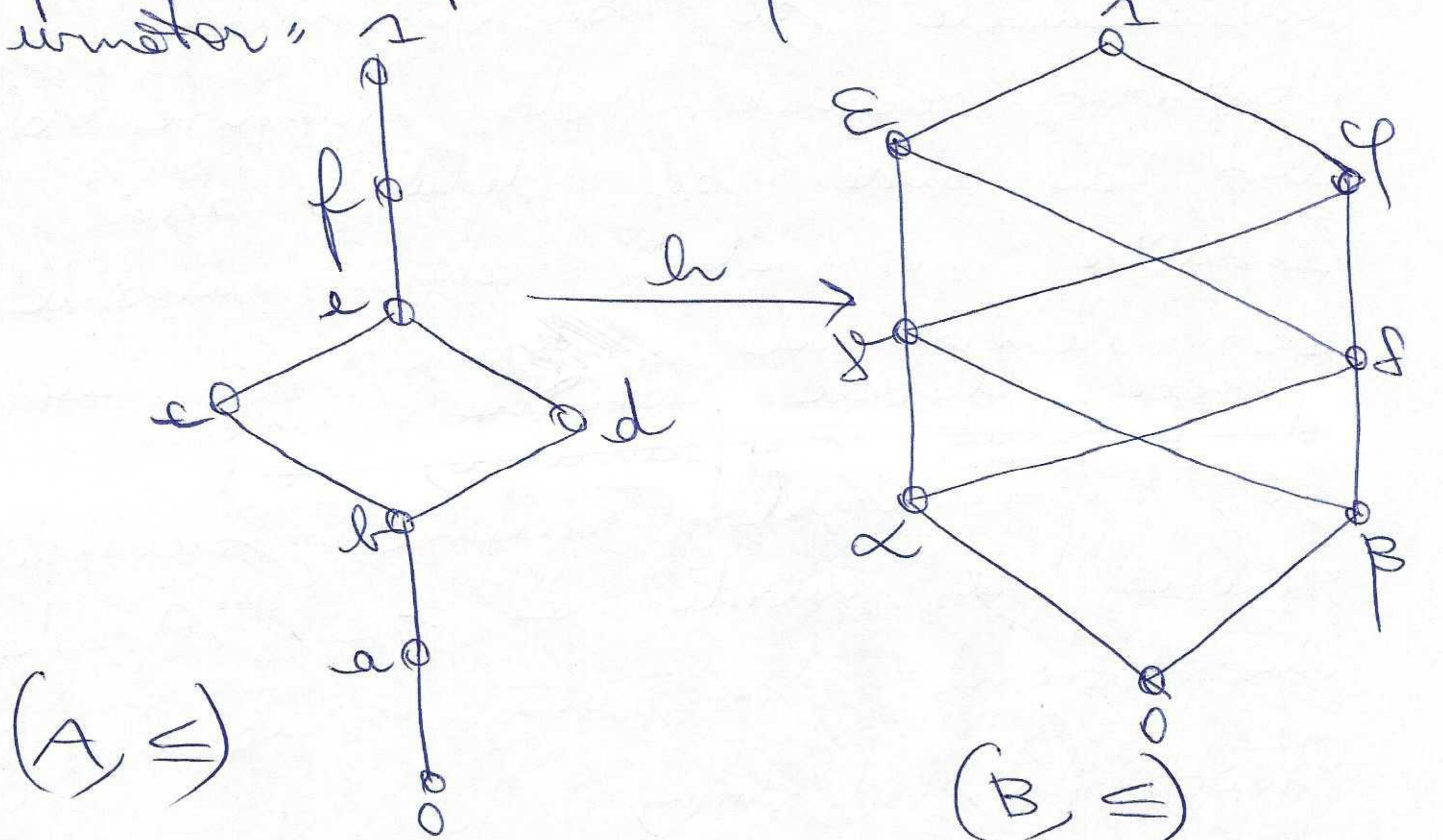
$) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} g \text{ e izotonă}, \\ g(X) = \{\alpha, \beta\}, \text{ care nu are supremum în } (B, \leq), \end{cases}$

$\sup(X) = 1$.

Să dăm și un exemplu de morfism bijectiv de poseturi care nu satisface niciuna dintre echivalențele (4, 1) și (4, 2): fie următoarele $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$

poseturi, iar $h : A \to B$ funcție definită prin tabelul următor:



u	0	a	b	c	d	e	f	1
$h(u)$	0	α	β	γ	δ	ε	φ	1

h este izotonă și bijectivă.

Fie $X = \{c, d\} \subset A$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \inf(X) = b \text{ și } \sup(X) = e, \\ f(X) = \{\gamma, \delta\}, \end{cases}$ care nu are nici infimum, nici supremum în $(B, \leq)$.

Și acum să dăm un exemplu de morfism de latici care nu satisface echivalențele (4.1) și (4.2). Laticile conțin, prin definiție, infimumurile și supremumurile tuturor perechilor de elemente ale lor, de unde se deduce, prin inducție matematică după numărul de elemente al mulțimii, că orice latice conține infimumul și supremumul oricărei submulțimi finite și nevide a sa. Așadar nu putem găsi un exemplu finit, și, desigur, nu putem găsi un exemplu în care morfismul de latici să fie bijectiv, pentru că un morfism bijectiv de latici este izomorfism de latici, deci izomorfism de poseturi.

Considerăm lanțul $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, unde: $\begin{cases} \mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap [0,\infty), \text{ iar} \\ \leq \text{ este ordinea naturală.} \end{cases}$

Fie $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, $(\forall x \in \mathbb{Q}_+)(f(x) = x^2)$.

f este izotonă.

$(\mathbb{Q}_+, \leq)$ este lanț. $\Rightarrow (\mathbb{Q}_+, \max, \min, \leq)$ este latice.

— 9.21 (MS) —

MS PT. LMC (S IX)

(exercițiul exterior) (deși proprietatea este imediată aici) $\Longrightarrow (\forall x, y \in \mathbb{Q}_+) \left(f(\max\{x, y\}) = \max\{f(x), f(y)\} \right.$

și $\left. f(\min\{x, y\}) = \min\{f(x), f(y)\} \right).$

$\Rightarrow$ f este morfism de latici.

Fie $X = \mathbb{Q}_+ \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}) =$
$= \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3}). \Rightarrow f(X) =$
$= \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \sqrt{3})\}.$

$\nexists \inf(X)$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, dar $\exists$
$\inf(f(X)) = 2$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$;
$\nexists \sup(X)$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, dar $\exists$
$\sup(f(X)) = 3$ în $(\mathbb{Q}_+, \leq)$.

De reținut și faptul că în acest exemplu, f este definită între două lanțuri (este endomorfism (de posete, și chiar de latici) al lanțului $(\mathbb{Q}_+, \leq)$).

ALTĂ FORMULARE ȘI REZOLVARE PENTRU O PARTE DIN

EXERCIȚIUL ANTERIOR:

Not. uzuale: $\geq := \leq^{-1}$

(A SE VEDEA EXEMPLE PT. INEGALITĂȚI STRICTE ÎN MATERIALUL PT. STUDENȚI)

Exerc.: Fie $(A, \leq)$ și $(B, \leq)$ poseturi, iar $f: A \to B$ o funcție izotonă între aceste poseturi. Fie $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$ a.î. există $\inf(X)$ și $\sup(Y)$ în $(A, \leq)$ și există $\inf(f(X))$ și $\sup(f(Y))$ în $(B, \leq)$. Dem. că:

(a) $f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$, cu egalitate dacă f e izomorfism de poseturi;

(b) $f(\sup(Y)) \geq \sup(f(Y))$, cu egalitate dacă f e izomorfism de poseturi.

REZOLVARE:

(a) Caz 1: Dc. $X = \emptyset \Rightarrow f(X) = f(\emptyset) = \emptyset. \Rightarrow \exists \inf(\emptyset)$ în $(B, \leq) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \max(B) = \inf(\emptyset) = \inf(f(X))$,

— 9.22 (MS) — $\boxed{\text{MS pt. LMC(SIX)}}$

$f(\inf(X)) \in B. \Rightarrow f(\inf(X)) \leq$

$\leq \max(B) = \inf(f(X))$.

Caz 2: Da, $X \neq \emptyset \Rightarrow f(X) \neq \emptyset$.

Fie $b \in f(X) \Leftrightarrow (\exists\, a \in X)(f(a) = b)$. $\xrightarrow{(f \text{ e izotonă}}$ $f(\inf(X)) \leq f(a) = b \Rightarrow$

$a \in X \Rightarrow \inf(X) \leq a)$.

$\Rightarrow f(\inf(X))$ este minorant pt. $f(X) \xrightarrow[\text{inf}]{\text{def.}} f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$.

Acum să pp. că f este izomorfism de poseturi. Din cele de mai sus rezultă că:

$f(\inf(X)) \leq \inf(f(X))$. $(*)$

De asemenea, $\Rightarrow \exists\, f^{-1}$ și f^{-1} e izotonă, $\xrightarrow[\substack{X \to f(X) \\ \text{în cele} \\ \text{de mai sus})}]{(f \to f^{-1}}$

$\Rightarrow f^{-1}(\inf(f(X))) \leq \inf(f^{-1}(f(X)))$. $\Rightarrow$

$f \to$ bij. $\Rightarrow f \to$ inj. $\xrightarrow[\text{precedent})]{(\text{un } S}$ $f^{-1}(f(X)) = X$

$$\Rightarrow f^{-1}(\inf(f(X))) \leq \inf(X) \xrightarrow[\text{monotonă}]{(f \text{ e}}$$

$$\Rightarrow \inf(f(X)) = f(f^{-1}(\inf(f(X)))) \leq$$

$$\leq f(\inf(X)) \Rightarrow f(\inf(X)) \geq \inf(f(X)), \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow f(\inf(X)) = \inf(f(X)).$$

(b) Prin dualitate, din (a).