Am notat cu (*) la început de rând acele probleme nefăcute în cadrul seminarului, sau metode de rezolvare diferite de cele făcute în clasă pentru anumite probleme.

Unde am pus comentariul "// TO DO…", voi completa dacă și când voi avea timp.

Pe măsură ce studiați acest fișier, vă rog să completați chestionarul de feedback de la adresa (http://bit.ly/feedback_pdf_CC_2015).

Vă mulțumesc!

MN

~ Seminar 1 ~

(recapitulare LFA)

~ Seminar 2 ~

(Mașini Turing)

$MT = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, F, \delta)$
Q mulțimea de stări
$\sum$ alfabetul de intrare
Γ alfabetul benzii
$\Sigma \subseteq (\Gamma \setminus \{B\})$
$B \in (\Gamma \setminus \Sigma)$ "*blank*"
$q_0 \in Q$ starea inițială
$F \subset Q$ mulțimea stărilor finale
$\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \rightarrow Q \times (\Gamma \setminus \{B\}) \times \{\leftarrow, \bullet, \rightarrow\}$ funcția de tranziție ("delta")
Obs: Pentru o mașină cu **n** benzi: $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma^n \rightarrow Q \times (\Gamma \setminus \{B\})^n \times (\{\leftarrow, \bullet, \rightarrow\})^n$

Funcția de tranziție are ca *parametri de intrare*:
- o stare de plecare, din mulțimea Q \ F (adică din stările finale nu mai pleacă tranziții) și
- un caracter citit de pe bandă, din mulțimea Γ.

Iar ca *parametri de ieșire*:
- o stare de sosire, din mulțimea Q,
- un caracter scris pe bandă, din mulțimea Γ\{B} (cu mențiunea că avem voie să scriem B doar peste B, adică la extremitățile din stânga și dreapta ale datelor, nu peste altă informație existentă) și
- o modalitate de deplasare pe bandă: un pas stânga, un pas dreapta sau staționare.

Problema 1

Se dă un număr natural x (în baza 1). Să se deplaseze cu patru poziții spre dreapta.

Fie x = 5 (reprezentat prin 6 de 1). Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Parcurgem tot numărul deplasându-ne dreapta până la B (blank).

(Adică cât timp citim 1 pe bandă, scriem 1 în loc și facem pas dreapta.)
$\delta(q_0,1) = (q_0,1,\rightarrow)$ // păstrăm aceeași stare pentru că vrem ca mașina să poată aplica această tranziție de oricâte ori (pentru toți 1 din număr).

Pas 2. Când ajungem la B, scriem 4 de 1, făcând de trei ori câte un pas dreapta, iar la final unul spre stânga.

(Avem nevoie de câte o stare diferită pentru fiecare din cei 4 de 1 pe care trebuie să-i scriem. De fiecare dată când ne deplasăm spre dreapta vom citi de pe bandă B pentru că suntem la finalul datelor de intrare și vom scrie 1 în loc.)
$\delta(q_0,B) = (q_1,1,\rightarrow)$
$\delta(q_1,B) = (q_2,1,\rightarrow)$
$\delta(q_2,B) = (q_3,1,\rightarrow)$
$\delta(q_3,B) = (q_4,1,\leftarrow)$

Pas 3. Parcurgem tot numărul (cei 4 de 1 adăugați și apoi numărul inițial) deplasându-ne stânga până la B.

(La fel ca la primul pas, trebuie să păstrăm aceeași stare pentru a putea parcurge toți de 1 de pe bandă.)
$\delta(q_4,1) = (q_4,1,\leftarrow)$

Pas 4. Când ajungem la B, facem un pas dreapta (pentru a ne poziționa pe primul 1), apoi transformăm primii 4 de 1 în 0 făcând de fiecare dată câte un pas dreapta.

(Vom folosi câte o stare nouă pentru fiecare din cele 4 transformări de 1 în 0.)

$\delta(q_4, B) = (q_5, B, \rightarrow)$
$\delta(q_5, 1) = (q_6, 0, \rightarrow)$
$\delta(q_6, 1) = (q_7, 0, \rightarrow)$
$\delta(q_7, 1) = (q_8, 0, \rightarrow)$
$\delta(q_8, 1) = (q_9, 0, \bullet)$

Pas 5. Opțional, mergem stânga până la B, apoi facem un pas dreapta și ne oprim în starea finală (astfel încât capul de citire să rămână poziționat pe primul caracter diferit de B de pe bandă, unde era inițial).

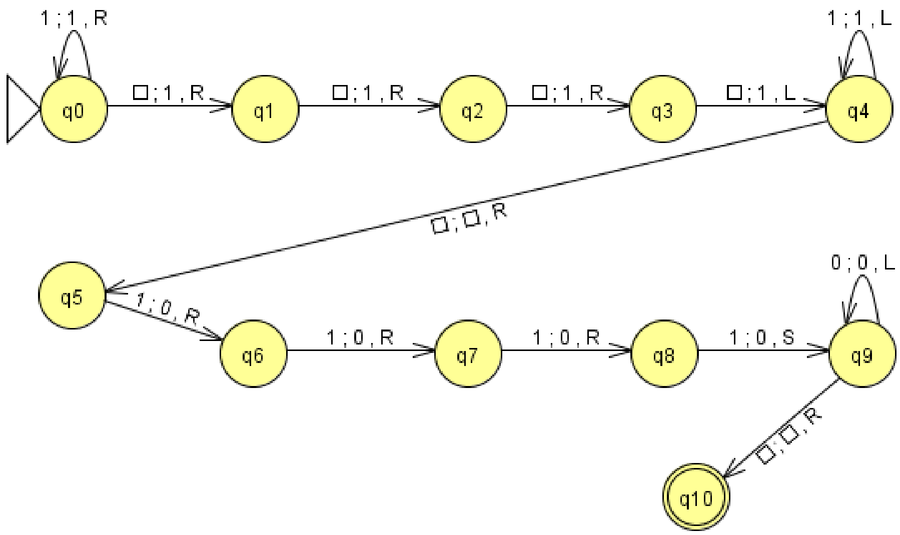
$\delta(q_9, 0) = (q_9, 0, \leftarrow)$
$\delta(q_9, B) = (q_{10}, B, \rightarrow),\ F = \{q_{10}\}$

OBS: *Am observat că în softul JFLAP trebuie să faceți asta pentru a vă afișa corect dacă testați cu opțiunea "Input → Multiple Run (Transducer)".*

Complexitatea spațiu:
În plus față de numărul dat adăugăm pe bandă (unde erau blank-uri) 4 caractere (la pasul 2). Rezultă **C.S. = x+4**.

Complexitatea timp:
Pas 1: Parcurgem tot numărul inițial, deci x pași pe bandă.
Pas 2: Scriem cei 4 de 1, deci 4 pași.
Pas 3: Parcurgem ce am scris plus numărul inițial, deci 4+x pași.
Pas 4: Scriem cei 4 de 0, deci 4 pași.
Pas 5: Parcurgem cei 4 de 0 spre stânga, deci 4 pași.
Total: x+4+4+x+4+4 = 2x+16, rezultă **C.T. = O(x)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 2

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze suma lor.

Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x, ne deplasăm dreapta până la 0 *(unde schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe y)*, marcăm primul 1 din y, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 2, pas dreapta, scriem 1, pas stânga.

$\delta(q_0,1) = (q_1,1',\rightarrow)$ // *marcam din x*

$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow)$ // *parcurgem tot x*

$\delta(q_1,0) = (q_2,0,\rightarrow)$

$\delta(q_2,1) = (q_3,1',\rightarrow)$ // *marcam din y*

$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\rightarrow)$ // *parcurgem tot y*

$\delta(q_3,B) = (q_4,2,\rightarrow)$

$\delta(q_4,B) = (q_5,1,\leftarrow)$

Pas 2. Ne deplasăm stânga până la 1’ din x, apoi pas dreapta.

(Inițial parcurgem în aceeași stare 2-ul și toți de 1 din y și 1’ din y, apoi pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi parcurgem toți 1 din x cu aceeași stare, iar pentru 1’ din x schimbăm starea și facem pas dreapta.)

$\delta(q_5,2) = (q_5,2,\leftarrow)$

$\delta(q_5,1) = (q_5,1,\leftarrow)$ // *parcurgem y*

$\delta(q_5,1') = (q_5,1',\leftarrow)$

$\delta(q_5,0) = (q_6,0,\leftarrow)$

$\delta(q_6,1) = (q_6,1,\leftarrow)$ // *parcurgem x*

$\delta(q_6,1') = (q_7,1',\rightarrow)$

Pas 3. Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1’ din x, pas dreapta și reluăm pasul 3.
Când întâlnim 0 (adică toți de 1 din x sunt marcați), facem doi pași dreapta pentru a sări 0-ul și 1’-ul din y.

$\delta(q_7,1) = (q_8,1',\rightarrow)$ // *marcam din x*

$\delta(q_8,a) = (q_8,a,\rightarrow), a \in \{1,0,1',2\}$ // *parcurgem tot pana la B*

$\delta(q_8,B) = (q_9,1,\leftarrow)$ // *scriem pt x*

$\delta(q_9, b) = (q_9, b, \leftarrow), b \in \{1,2,1'\}$ // *parcurgem tot pana la* 0

$\delta(q_9, 0) = (q_{10}, 0, \leftarrow)$

$\delta(q_{10}, 1) = (q_{10}, 1, \leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_{10}, 1') = (q_7, 1', \rightarrow)$ // *reluam pas* 3

$\delta(q_7, 0) = (q_{11}, 0, \rightarrow)$ // *x complet marcat*

$\delta(q_{11}, 1') = (q_{12}, 1', \rightarrow)$

Pas 4. Pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1' din y, pas dreapta și reluăm pasul 4.
Când întâlnim 2 (adică toți de 1 din y sunt marcați), facem un pas stânga și mergem la pasul următor.

$\delta(q_{12}, 1) = (q_{13}, 1', \rightarrow)$ // *marcam din y*

$\delta(q_{13}, c) = (q_{13}, c), c \in \{1,2\}$ // *parcurgem tot pana la B*

$\delta(q_{13}, B) = (q_{14}, 1, \leftarrow)$ // *scriem pt y*

$\delta(q_{14}, c) = (q_{14}, c, \leftarrow)$ // *parcurgem tot pana la* 1' *din y*

$\delta(q_{14}, 1') = (q_{12}, 1', \rightarrow)$ // *reluam pas* 4

$\delta(q_{12}, 2) = (q_{15}, 2, \leftarrow)$ // *y complet marcat*

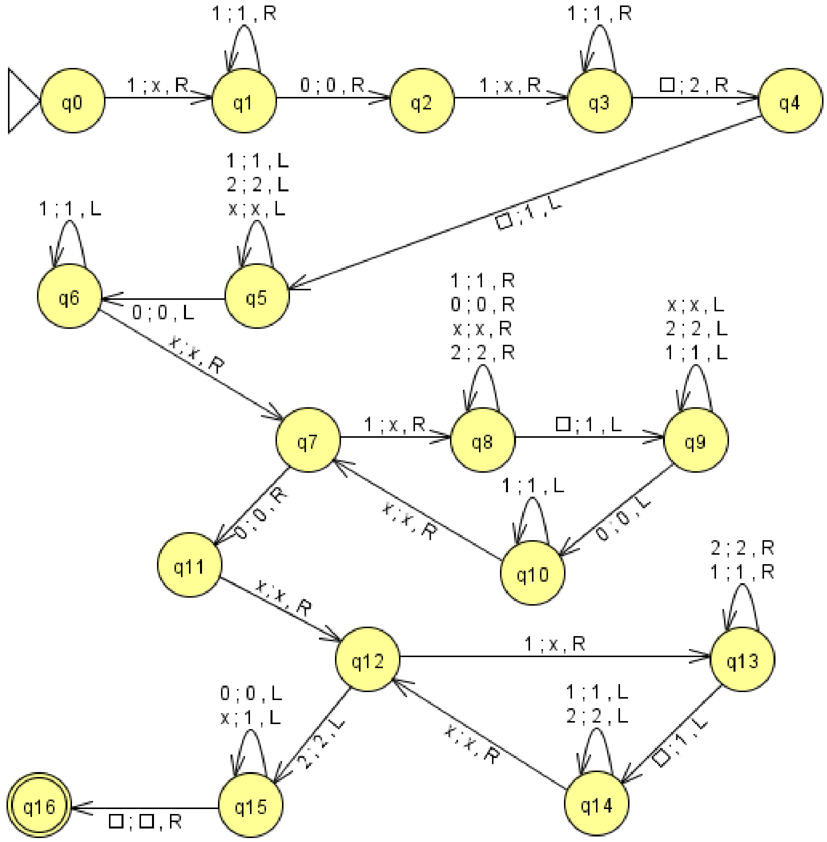
Pas 5. Opțional, parcurgem spre stânga toată banda: demarcăm tot y-ul, îl sărim pe 0, demarcăm tot x-ul, apoi când ajungem la B facem un pas dreapta și ne oprim în starea finală.

$\delta(q_{15}, 1') = (q_{15}, 1, \leftarrow)$
$\delta(q_{15}, 0) = (q_{15}, 0, \leftarrow)$
$\delta(q_{15}, B) = (q_{16}, B, \rightarrow), F = \{q_{16}\}$

Complexitatea spațiu:
Avem datele inițiale x și y, plus rezultatul pe care l-am scris, adică x+y.
Rezultă **C.S. = 2(x+y)** (+2 pt. delimitatori)

Complexitatea timp:
Pas 1: Parcurgem numerele inițiale plus scriem la final 2 caractere, rezultă x+1+y+2 pași.
Pas 2: Parcurgem banda înapoi spre stânga până la primul caracter, rezultă aproximativ y+x pași.
Pas 3: Se repetă de x ori (”pentru fiecare 1 din x”) și de fiecare dată parcurgem dus-întors o distanță egală cu aproximativ x+y, apoi doi pași la dreapta, rezultă x*2(x+y)+2 pași.
Pas 4: Se repetă de y ori (”pentru fiecare 1 din y”) și de fiecare dată parcurgem dus-întors o distanță egală cu aproximativ y+x (x-ul copiat la pasul 3), rezultă y*2(y+x) pași.
Pas 5: Parcurgem toată banda inițială, adică y+x pași.
Total: x+1+y+2+y+x+x*2(x+y)+2+y*2(y+x)+(y+x), rezultă **C.T. = O($(x+y)^2$)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcare am folosit x în loc de 1' pentru că softul permite doar introducerea unui singur caracter)



Obs.: Stările q9 și q10 fac exact ce fac și q5 respectiv q6, deci mai eficient ar fi fost ca tranziția din q8 să o ducem spre q5 și să nu avem stările q9 și q10. E posibil ca la unele grupe să fi făcut varianta mai eficientă și la altele pe aceasta, nu mai știu exact. Oricum, puteți să le testați pe amândouă.

(*) Problema 2 *[Rezolvare pe 2 benzi]*

Enunț: Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze suma lor.
Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial benzile arată așa:

x, y	…	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x, y	…	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	…
x+y	…	B	1	1	1	1	1	1	B	B	B	…

Pas 1. Sărim spre dreapta pentru primul 1 din x. Apoi cât timp citim 1 din x pe prima bandă și B pe banda a doua, scriem 1 pe banda a doua și facem un pas dreapta pe ambele benzi.
Pas 2. Când citim 0 pe prima bandă scriem 1 pe banda a doua (cel în plus de la scrierea specială în unar) și pas dreapta pe ambele benzi.
Pas 3. Sărim spre dreapta pe prima bandă pentru primul 1 din y. Apoi cât timp citim 1 din y pe prima bandă și B pe banda a doua, scriem 1 pe banda a doua și facem un pas dreapta pe ambele benzi.
Pas 4. Când citim B pe ambele benzi, facem un pas stânga pe amândouă.
Apoi parcurgem spre stânga ambele benzi cât timp citim 1 din y pe prima bandă.
Apoi, când dăm de 0 pe prima bandă și de 1 sau B pe a doua bandă, facem un pas stânga pe prima bandă și un pas dreapta pe a doua bandă.
Pentru că pe prima bandă sunt cu 2 căsuțe mai multe ocupate decât pe a doua, vom avea un număr egal de 1-uri de parcurs spre stânga pe ambele benzi.
Când ajungem la B pe ambele benzi, facem un pas dreapta și mergem în stare finală.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ B, & \bullet\end{matrix}\right) // \ pas\ 1$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1, & \rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}0 & \rightarrow\\ 1, & \rightarrow\end{matrix}\right) // \ pas\ 2$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ B, & \bullet\end{matrix}\right) // \ pas\ 3$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1, & \rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}b & \leftarrow\\ B, & \leftarrow\end{matrix}\right) // \ pas\ 4$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1 & \leftarrow\\ 1, & \leftarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}0 & \leftarrow\\ 1, & \rightarrow\end{matrix}\right)$$

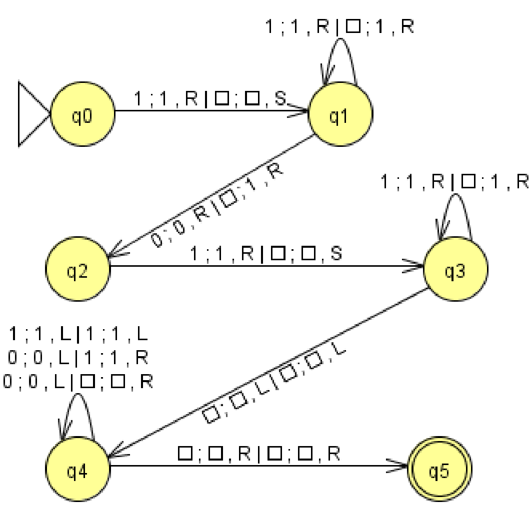
$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}0 & \leftarrow\\ B, & \rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B & \rightarrow\\ B, & \rightarrow\end{matrix}\right), F = \{q_5\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem datele inițiale x și y pe prima bandă, plus rezultatul pe care l-am scris pe banda a doua, adică x+y. Rezultă **C.S. = 2(x+y)**

<u>Complexitatea timp:</u>
(pas1) x + (pas2) 1 + (pas3) y + (pas4) (1+y+1+x+1) = 2*x + 2*y + 4.
Rezultă. **C.T. = O(x+y)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 3

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze modulul diferenței lor.

Fie x = 5, y = 2 (reprezentate prin 6, respectiv 3 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	B	...

Ideea de rezolvare:
Pas 1. Marcăm primul 1 din x, ne deplasăm dreapta până la 0 *(unde schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe y)*, marcăm primul 1 din y, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 2, pas dreapta, scriem 1, pas stânga.

Pas 2. Ne deplasăm stânga până la 1' din x, apoi pas dreapta.
(Inițial parcurgem în aceeași stare 2-ul și toți de 1 din y și 1' din y, apoi pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi parcurgem toți 1 din x cu aceeași stare, iar pentru 1' din x schimbăm starea și facem pas dreapta.)

$// \ pas\ 1$

$\delta(q_0,1) = (q_1,1',\rightarrow) // \ marcam\ din\ x$

$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow) // \ parcurgem\ tot\ x$

$\delta(q_1,0) = (q_2,0,\rightarrow)$

$\delta(q_2,1) = (q_3,1',\rightarrow) // \ marcam\ din\ y$

$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\rightarrow) // \ parcurgem\ tot\ y$

$\delta(q_3,B) = (q_4,2,\rightarrow)$

$\delta(q_4,B) = (q_5,1,\leftarrow)$

$// \ pas\ 2$

$\delta(q_5,2) = (q_5,2,\leftarrow)$

$\delta(q_5,1) = (q_5,1,\leftarrow) // \ parcurgem\ y$

$\delta(q_5,1') = (q_5,1',\leftarrow)$

$\delta(q_5,0) = (q_6,0,\leftarrow)$

$\delta(q_6,1) = (q_6,1,\leftarrow) // \ parcurgem\ x$

$\delta(q_6,1') = (q_7,1',\rightarrow)$

Pas 3. Marcăm alternativ câte un 1 din x și un 1 din y cât timp este posibil.
Dacă întâlnim 0 (adică toți de 1 din x sunt marcați), înseamnă că avem x≤y, deci mergem la pasul 4a.
Dacă întâlnim 2 (adică toți de 1 din y sunt marcați), înseamnă că avem y<x, deci mergem la pasul 4b.

$\delta(q_7,1) = (q_8,1',\rightarrow) // \ marcam\ din\ x$

$\delta(q_8,1) = (q_8,1,\rightarrow) // \ parcurgem\ x\ nemarcat$

$\delta(q_8,0) = (q_9,0,\rightarrow)$

$\delta(q_9,1') = (q_9,1',\rightarrow) // \ parcurgem\ y\ marcat$

$\delta(q_9,1) = (q_{10},1',\leftarrow) // \ marcam\ din\ y$

$\delta(q_{10},1') = (q_{10},1',\leftarrow) // \ parcurgem\ y\ marcat$

$\delta(q_{10},0) = (q_6,0,\leftarrow)$

(Am definit anterior în q6 parcurgerea lui x nemarcat, iar la citirea lui 1' mutarea in q7, deci reluarea pasului 3.)

Pas 4a. Capul de citire e poziționat pe 0 și trebuie să copiem rezultatul de la finalul lui y. Parcurgem spre dreapta toți de 1’ din y.
Apoi pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1’ din y, pas dreapta și reluăm copierea.

$\delta(q_7,0)=(q_{11},0,\rightarrow)\,//\,x\ complet\ marcat,\ x\le y$

$\delta(q_{11},1')=(q_{11},1',\rightarrow)\,//\,parcurgem\ y\ marcat$

$\delta(q_{11},1)=(q_{12},1',\rightarrow)\,//\,marcam\ din\ y-x$

$\delta(q_{12},a)=(q_{12},a,\rightarrow),a\in\{1,2\}\,//\,parcurgem\ tot\ \ pana\ la\ B$

$\delta(q_{12},B)=(q_{13},1,\leftarrow)$

$\delta(q_{13},a)=(q_{13},a,\leftarrow)\,//\,parcurgem\ tot\ \ pana\ la\ 1'\ din\ y$

$\delta(q_{13},1')=(q_{11},1',\rightarrow)\,//\,reluam\ copierea\ din\ y-x$

$\delta(q_{11},2)=(q_{14},2,\leftarrow)\,//\,si\ y\ complet\ marcat$

Pas 4b. Capul de citire e poziționat pe 2. Mergem la finalul benzii și scriem un 1 (pentru 1-ul din x pe care îl marcasem deja și pentru care nu am mai găsit corespondent în y) și trebuie să copiem rezultatul de la finalul lui x, deci ne deplasăm stânga până la 1’ din x și facem un pas dreapta.
Apoi pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm, ne deplasăm dreapta până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga până la 1’ din x, pas dreapta și reluăm copierea.

$\delta(q_9,2)=(q_{15},2,\rightarrow)\,//\,y\ complet\ marcat,\ y<x$

$\delta(q_{15},1)=(q_{15},1,\rightarrow)$

$\delta(q_{15},B)=(q_{16},1,\leftarrow)\,//\,pt\ ce\ marcasem\ deja\ in\ x$

$\delta(q_{16},b)=(q_{16},b),b\in\{1,2,1'\}\,//\,parcurgem\ tot\ \ pana\ la\ 0$

$\delta(q_{16},0)=(q_{17},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{17},1)=(q_{17},1,\leftarrow)\,//\,parcurgem\ x\ nemarcat$

$\delta(q_{17},1')=(q_{18},1',\rightarrow)$

$\delta(q_{18},1)=(q_{19},1',\rightarrow)\,//\,marcam\ din\ x-y$

$\delta(q_{19},c)=(q_{19},c,\rightarrow),c\in\{1,0,1',2\}\,//\,parcurgem\ tot\ \ pana\ la\ B$

$\delta(q_{19},B)=(q_{16},1,\leftarrow)\,//\,reluam\ copierea\ din\ x-y$

$\delta(q_{18},0)=(q_{20},0,\rightarrow)\,//\,si\ x\ complet\ marcat$

Pas 5. *(Opțional)* Dacă am aplicat pasul 4b, mergem dreapta până la 2, apoi un pas stânga (dacă am aplicat pasul 4a, suntem deja cu o poziție în stânga lui 2).
Apoi parcurgem toată banda spre stânga și demarcăm numerele y și x.

$\delta(q_{20},1')=(q_{20},1',\rightarrow)$

$\delta(q_{20},2)=(q_{14},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{14},1')=(q_{14},1,\leftarrow)\,//\,demarcam\ y\ si\ x$

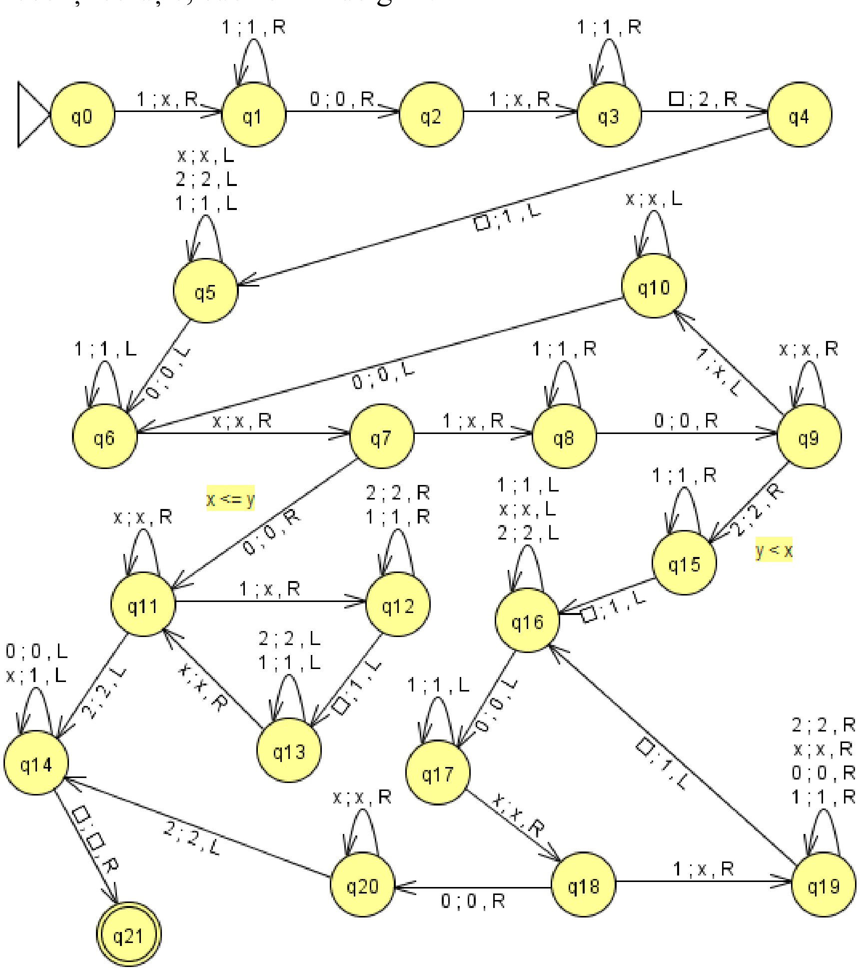
$\delta(q_{14},0)=(q_{14},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{14},B)=(q_{21},B,\rightarrow),\ F=\{q_{21}\}$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem datele inițiale x și y, plus rezultatul pe care l-am scris, adică $|x-y|$.
Rezultă **C.S.** $= x+y+|x-y| = 2 * \max\{x, y\}$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Parcurgem numerele inițiale plus scriem la final 2 caractere, rezultă $x+1+y+2$ pași.
Pas 2: Parcurgem banda înapoi spre stânga până la primul caracter, rezultă $y+x$ pași.
Pas 3: Se repetă de $\min\{x,y\}$ ori (până ce este complet marcat unul dintre numere, adică cel mai mic dintre ele) și de fiecare dată parcurgem dus-întors distanța x, rezultă aproximativ $\min\{x,y\} * x$ pași.
Pas 4a: Parcurgem $\min\{x,y\}$ (pentru ca suntem pe 0 și parcurgem toată partea marcată din y). Apoi de $|x-y|$ ori parcurgem dus-întors distanța de $|x-y|$ (pentru a copia diferența aflată la finalul lui y la finalul benzii). Rezultă $\min\{x,y\} + |x-y| * |x-y|$ pași.
Pas 4b: Parcurgem $y+|x-y|=\max\{x,y\}$ (de la finalul benzii până la 1' din x). Apoi de $|x-y|$ ori parcurgem dus-întors distanța $y+|x-y|=\max\{x,y\}$. Rezultă $\max\{x,y\} + |x-y| * \max\{x,y\}$ pași.
Pas 5: Parcurgem maxim $y+x$ pași.
Total: pas1+pas2+pas3+max{pas4a,pas4b}+pas5 $\leq (\max\{x,y\})^2$ => **C.T. =** $\mathbf{(\max\{x,y\})^2}$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



(*) Problema 3 *[Rezolvare pe 3 benzi]*

Enunț: Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze modulul diferenței lor.
Fie x = 5, y = 2 (reprezentate prin 6, respectiv 3 de 1). Inițial benzile arată așa:

x, y	…	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x, y	…	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	…
|x – y|	…	B	1	1	1	1	B	B	B	B	B	B	B	…
x	…	B	1	1	1	1	1	1	B	B	B	B	B	…

Pas 1. Copiem numărul x de pe prima bandă pe a treia (ne asigurăm că numărul x conține cel puțin un 1, de aceea schimbăm starea pentru primul 1; apoi cât timp citim 1 pe prima bandă scriem 1 pe a treia bandă și facem simultan un pas dreapta pe acele două benzi). Când ajungem pe 0, pe prima bandă facem un pas dreapta, iar pe a treia bandă facem un pas stânga (astfel ne vom poziționa pe primul 1 din y pe prima bandă și pe ultimul 1 din copia lui x pe a treia bandă).

Pas 2. Comparăm x și y (ne asigurăm că numărul y conține cel puțin un 1, de aceea schimbăm starea pentru primul 1; apoi cât timp citim 1 din y pe prima bandă facem un pas dreapta, în timp ce pe banda a treia citim 1 din copia lui x și facem un pas stânga).

$// \; Pas\, 1$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_0, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_1, B, \bullet \\ 1 \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_1, B, \bullet \\ 1 \rightarrow \end{pmatrix} \quad // \; copiem\ x$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \rightarrow \\ q_2, B, \bullet \\ B \leftarrow \end{pmatrix}$$

$// \; Pas\, 2$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_2, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_3, B, \bullet \\ 1 \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_3, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_3, B, \bullet \\ 1 \leftarrow \end{pmatrix} \quad // \; comparam\ y\ cu\ copia\ lui\ x$$

Pas 3. (a) Dacă x > y, pe prima bandă citim B și stăm pe loc, pe a treia bandă citim 1 și facem un pas stânga, iar pe banda a doua înlocuim un B cu 1 și facem un pas stânga. Apoi cât timp citim 1 pe banda a treia, scriem 1 pe banda a doua și facem un pas stânga pe aceste două benzi. Când ajungem la B pe a treia bandă stăm pe loc, iar pe banda a doua adăugăm un ultim 1 (pentru scrierea specială în unar) și facem un pas stânga.

Pas 3. (b) Dacă x = y, pe prima bandă citim B și facem un pas stânga, pe a treia bandă citim tot B și stăm pe loc, iar pe a doua bandă adăugăm un 1 (cel în plus de la scrierea în unar, reprezentând rezultatul zero) și facem un pas stânga.

Pas 3. (c) Dacă x < y, pe a treia bandă citim B și stăm pe loc, pe prima bandă citim 1 și facem un pas dreapta, iar pe banda a doua înlocuim B cu 1 și facem un pas stânga. Apoi cât timp citim 1 pe prima bandă mergem spre dreapta, iar pe a doua bandă adăugăm câte un 1 și mergem spre stânga. Când ajungem la B pe prima bandă facem un pas stânga, iar pe banda a doua adăugăm 1-ul în plus pentru scrierea în unar și facem un pas stânga.

$// \; Pas\; 3\,(a)$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_3, & B \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \bullet \\ q_4, & 1, & \leftarrow \\ & 1 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$// \; copiem\; rezultatul$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_4, & B \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \bullet \\ q_4, & 1, & \leftarrow \\ & 1 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$// \; scriem\, 1-ul\; in\; plus$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_4, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \leftarrow \\ q_5, & 1, & \leftarrow \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

$// \; Pas\; 3\,(b)$

$// \; scriem\, 1-ul\; in\; plus$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_3, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \leftarrow \\ q_5, & 1, & \leftarrow \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

$// \; Pas\; 3\,(c)$

$$\delta\begin{pmatrix} & 1 \\ q_3, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \rightarrow \\ q_6, & 1, & \leftarrow \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

$// \; copiem\; rezultatul$

$$\delta\begin{pmatrix} & 1 \\ q_6, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \rightarrow \\ q_6, & 1, & \leftarrow \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

$// \; scriem\, 1-ul\; in\; plus$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_6, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \leftarrow \\ q_5, & 1, & \leftarrow \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

Pas 4. Parcurgem spre stânga prima bandă până ajungem la B (pe a doua și a treia bandă deja eram pe B-ul de la început). Apoi facem un pas dreapta pe toate cele trei benzi pentru a ne poziționa pe primele caractere și mergem în stare finală.

$// \; Pas\; 4$

$$\delta\begin{pmatrix} & 1 \\ q_5, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & \leftarrow \\ q_5, & B, & \bullet \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

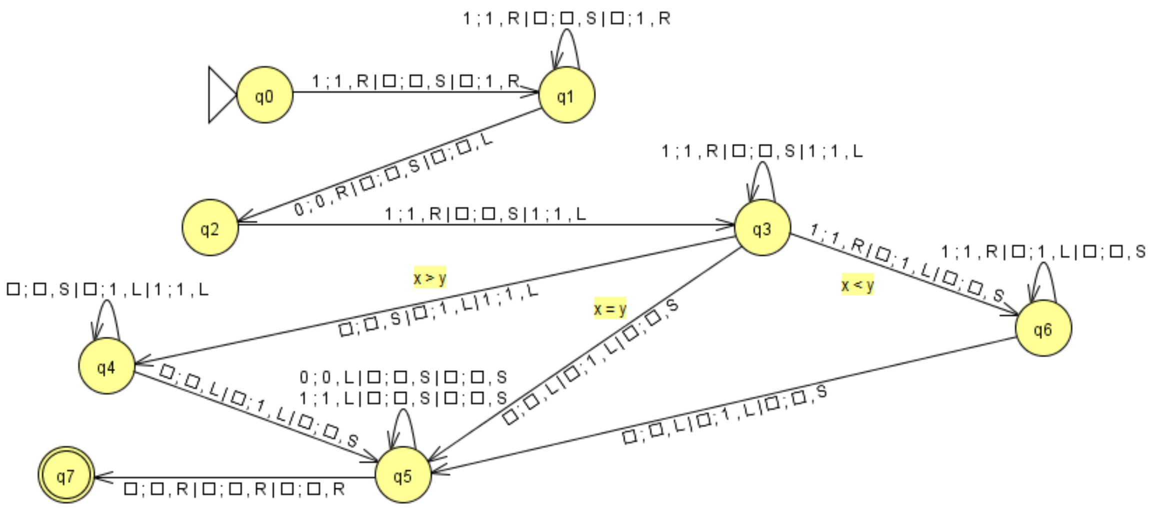
$$\delta\begin{pmatrix} & 0 \\ q_5, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 & \leftarrow \\ q_5, & B, & \bullet \\ & B & \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} & B \\ q_5, & B \\ & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & B & \rightarrow \\ q_7, & B, & \rightarrow \\ & B & \rightarrow \end{pmatrix},\; F = \{q_7\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Pe prima bandă avem x+y, pe a treia avem copia lui x, iar pe a doua avem |x-y|.
Rezultă **C.S. = 2*x + y + |x-y|**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Parcurgem simultan benzile 1 și 3 pentru copierea lui x, adică x pași.
Pas 2: Parcurgem simultan benzile 1 și 3 până când y sau copia lui x se termină, rezultă min{x,y} pași.
Pas 3: Copiem din banda 1 sau 3 pe banda 2 rezultatul, adică |x-y| pași.
Pas 4: Parcurgem toata banda 1, adică x+y pași.
Total: x + min{x,y} + |x-y| + (x+y) = x + max{x,y} + x+y. Rezultă **C.T. = O(max{x,y})**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



~ Seminar 3 ~

(*) Problema 4

Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$**.**

Fie n = 2. Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	a	a	a	a	b	b	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a	a	a	a	b	b	B	...

Ideea de rezolvare:
Pas 1. Marcăm doi de a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate și b-urile marcate) până la b, marcăm un b, ne deplasăm stânga (sărind b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a', pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_0, a) = (q_1, a', \rightarrow)$ // *marcam primul a*
$\delta(q_1, a) = (q_2, a', \rightarrow)$ // *marcam al doilea a*
$\delta(q_2, a) = (q_2, a, \rightarrow)$ // *parcurgem a – urile nemarcate*
$\delta(q_2, b') = (q_2, b', \rightarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*
$\delta(q_2, b) = (q_3, b', \leftarrow)$ // *marcam un b*
$\delta(q_3, b') = (q_3, b', \leftarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*
$\delta(q_3, a) = (q_3, a, \leftarrow)$ // *parcurgem a – urile nemarcate*
$\delta(q_3, a') = (q_0, a', \rightarrow)$ // *reluam pasul* 1

Pas 2. Când toți de a sunt marcați, verificăm ca toți de b să fie marcați. Dacă da, acceptăm intrarea.

$\delta(q_0, b') = (q_4, b', \rightarrow)$ // *toate a – urile sunt marcate*
$\delta(q_4, b') = (q_4, b', \rightarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*
$\delta(q_4, B) = (q_5, B, \leftarrow)$ // *toate b – urile sunt marcate*

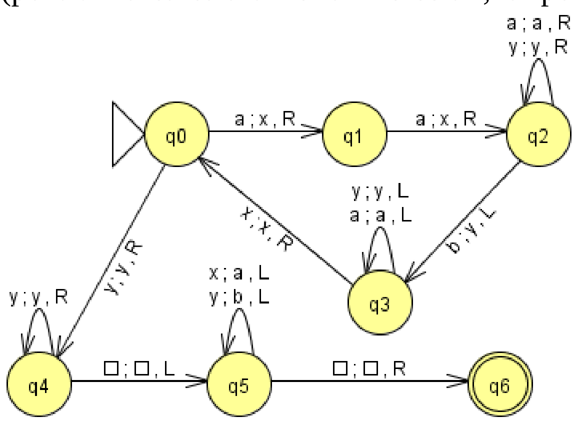
Pas 3. *(Opțional)* Parcurgem toată banda spre stânga și demarcăm toți b' și a'.

$\delta(q_5, b') = (q_5, b, \leftarrow)$
$\delta(q_5, a') = (q_5, a, \leftarrow)$
$\delta(q_5, B) = (q_6, B, \rightarrow), F = \{q_6\}$

Complexitatea spațiu:
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S. = $|w|_a + |w|_b = |w|$.**

Complexitatea timp:
Pas 1: Se repetă până terminăm de marcat toate a-urile (marcând câte două la fiecare pas) sau toate b-urile (marcând câte unul la fiecare pas), deci de min{$|w|_a$:2, $|w|_b$} ori. Iar distanța parcursă dus-întors de fiecare dată (pentru a marca doi de a și un b) scade cu câte o unitate la fiecare aplicare a pasului (capătul din stânga se deplasează spre dreapta cu două poziții pentru că marcăm două a-uri, dar capătul din dreapta se deplasează spre dreapta doar cu o poziție pentru că marcăm un singur b), deci cea mai mare distanță parcursă este la prima aplicare a pasului și este de $|w|_a$ căsuțe (distanța de la primul a la primul b). Rezultă min{$|w|_a$:2, $|w|_b$} * 2 * $|w|_a$.
Pas 2: Pentru a verifica dacă intrarea trebuie acceptată, parcurgem toate b-urile marcate, adică $|w|_a$:2 (= $|w|_b$ dacă intrarea era corectă).
Pas 3: Parcurgem toată banda inițială, adică |w| pași.
Rezultă **C.T.** = min{$|w|_a$: 2, $|w|_b$} * 2 * $|w|_a$ + $|w|_a$: 2 + |w| => **O(|w|²).**

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, iar pentru marcarea b-urilor am folosit y)



(*) Problema 4 *[Rezolvare pe 2 benzi]*

Enunț: Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$.
Fie n = 2. Inițial benzile mașinii Turing arată așa:

…	B	a	a	a	a	b	b	B	…
…	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

…	B	a	a	a	a	b	b	B	…
…	B	a	a	B	B	B	B	B	…

Pas 1. Parcurgem spre dreapta toți de "a" de pe prima bandă, iar pentru fiecare al doilea "a" de pe prima bandă adăugăm un "a" pe a doua bandă și facem pas dreapta.
Pas 2. Când dăm de "b" pe prima bandă stăm pe loc, iar pe a doua bandă facem un pas stânga. Apoi parcurgem simultan prima bandă spre dreapta citind "b"-uri și a doua bandă

spre stânga citind "a"-uri. Dacă dăm de B simultan pe ambele benzi (cuvântul este corect), pe prima bandă facem un pas stânga, iar pe a doua bandă stăm pe loc.

Pas 3. *(Opțional)* Parcurgem spre stânga prima bandă până la B, apoi facem un pas dreapta pe ambele benzi pentru a ne poziționa la începutul lor.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) \text{// } pas\ 1$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_0, \begin{matrix} a \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet \\ \leftarrow \end{matrix}\right) \text{// } pas\ 2$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) \text{// } cuvant\ corect$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) \text{// } pas\ 3$$

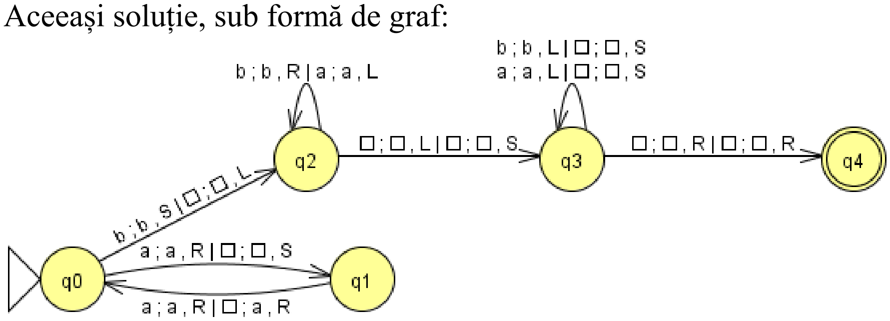
$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}\right), F = \{q_4\}$$

Complexitatea spațiu:
Avem cuvântul inițial și scriem în plus $|w|_a$:2. Rezultă **C.S. = $|w| + |w|_a$:2**.

Complexitatea timp:
Pas 1: Parcurgem toți de "a" din cuvânt, adică $|w|_a$ pași.
Pas 2. Parcurgem simultan $|w|_b$ și $|w|_a$:2 pană ajungem la B, adică min$\{|w|_b, |w|_a$:2$\}$ pași.
Pas 3. Parcurgem tot cuvântul, adică $|w|$ pași.
Total: $|w|_a$ + min$\{|w|_b, |w|_a$:2$\}$ + $|w|$. Rezultă **C.T. = O(|w|)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 5

Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^n b^m c^{2n} \mid n > m \geq 1\}$**.**

Fie n = 3, m = 2. Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	...

Ideea de rezolvare:

Pas 1. Marcăm un a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate și b-urile marcate) până la b, marcăm un b, ne deplasăm dreapta (sărind b-urile nemarcate și c-urile marcate) până la c, marcăm doi de c, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile nemarcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a', pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_0, a) = (q_1, a', \rightarrow) // \, marcam\ un\ a$

$\delta(q_1, a) = (q_1, a, \rightarrow) // \, parcurgem\ a-urile\ nemarcate$

$\delta(q_1, b') = (q_1, b', \rightarrow) // \, parcurgem\ b-urile\ marcate$

$\delta(q_1, b) = (q_2, b', \rightarrow) // \, marcam\ un\ b$

$\delta(q_2, b) = (q_2, b, \rightarrow) // \, parcurgem\ b-urile\ nemarcate$

$\delta(q_2, c') = (q_2, c', \rightarrow) // \, parcurgem\ c-urile\ marcate$

$\delta(q_2, c) = (q_3, c', \rightarrow) // \, marcam\ primul\ c$

$\delta(q_3, c) = (q_4, c', \leftarrow) // \, marcam\ al\ doilea\ c$

$\delta(q_4, c') = (q_4, c', \leftarrow) // \, parcurgem\ c-urile\ marcate$

$\delta(q_4, b) = (q_4, b, \leftarrow) // \, parcurgem\ b-urile\ nemarcate$

$\delta(q_4, b') = (q_4, b', \leftarrow) // \, parcurgem\ b-urile\ marcate$

$\delta(q_4, a) = (q_4, a, \leftarrow) // \, parcurgem\ a-urile\ nemarcate$

$\delta(q_4, a') = (q_0, a', \rightarrow) // \, reluam\ pasul\ 1$

Pas 2. Când toate b-urile sunt marcate, trebuie să marcăm două c-uri (corespunzătoare a-ului marcat deja înainte de a nu mai găsi un b pe care să-l marcăm). Deci suntem pe primul c' de pe bandă (la finalul b-urilor marcate complet), parcurgem spre dreapta toate c-urile marcate, până ajungem la c, apoi marcăm două c-uri, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a' și facem un pas dreapta.

$\delta(q_1, c') = (q_5, c', \rightarrow) // \, toate\ b-urile\ sunt\ marcate$

$\delta(q_5, c') = (q_5, c', \rightarrow) // \, parcurgem\ c-urile\ marcate$

$\delta(q_5, c) = (q_6, c', \rightarrow) // \, marcam\ un\ c$

$\delta(q_6, c) = (q_7, c', \leftarrow) // \, marcam\ al\ doilea\ c$

$\delta(q_7, c') = (q_7, c', \leftarrow) // \, parcurgem\ c-urile\ marcate$

$\delta(q_7, b') = (q_7, b', \leftarrow) // \, parcurgem\ b-urile\ marcate$

$\delta(q_7, a) = (q_7, a, \leftarrow) // \, parcurgem\ a-urile\ nemarcate$

$\delta(q_7, a') = (q_8, a', \rightarrow)$

Pas 3. Marcăm un a, ne deplasăm dreapta (sărind a-urile nemarcate, b-urile marcate și c-urile marcate) până la c, marcăm doi de c, ne deplasăm stânga (sărind c-urile marcate, b-urile marcate și a-urile nemarcate) până la a', facem un pas dreapta și reluăm acest pas.

$\delta(q_8, a) = (q_9, a', \rightarrow)$ // *marcam un a*

$\delta(q_9, a) = (q_9, a, \rightarrow)$ // *parcurgem a – urile nemarcate*

$\delta(q_9, b') = (q_9, b', \rightarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*

$\delta(q_9, c') = (q_9, c', \rightarrow)$ // *parcurgem c – urile marcate*

$\delta(q_9, c) = (q_{10}, c', \rightarrow)$ // *marcam un c*

$\delta(q_{10}, c) = (q_{11}, c', \leftarrow)$ // *marcam al doilea c*

$\delta(q_{11}, c') = (q_{11}, c', \leftarrow)$ // *parcurgem c – urile marcate*

$\delta(q_{11}, b') = (q_{11}, b', \leftarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*

$\delta(q_{11}, a) = (q_{11}, a, \leftarrow)$ // *parcurgem a – urile nemarcate*

$\delta(q_{11}, a') = (q_8, a', \rightarrow)$ // *reluam pasul* 3

Pas 4. Când toate a-urile sunt marcate, verificăm ca toate c-urile să fie marcate. Dacă da, acceptăm intrarea. Deci suntem pe primul b' de pe bandă (la finalul a-urilor complet marcate), parcurgem spre dreapta toate b-urile marcate și c-urile marcate, iar apoi trebuie să întâlnim B și să mergem în starea finală.

$\delta(q_8, b') = (q_{12}, b', \rightarrow)$ // *toate a – urile sunt marcate*

$\delta(q_{12}, b') = (q_{12}, b', \rightarrow)$ // *parcurgem b – urile marcate*

$\delta(q_{12}, c') = (q_{12}, c', \rightarrow)$ // *parcurgem c – urile marcate*

$\delta(q_{12}, B) = (q_{13}, B, \leftarrow)$ // *toate c – urile sunt marcate, cuvant corect*

Pas 5. *(Opțional)* Parcurgem spre stânga demarcând toată banda, iar la B facem dreapta.

$\delta(q_{13}, c') = (q_{13}, c, \leftarrow)$

$\delta(q_{13}, b') = (q_{13}, b, \leftarrow)$

$\delta(q_{13}, a') = (q_{13}, a, \leftarrow)$

$\delta(q_{13}, B) = (q_{14}, B, \rightarrow), F = \{q_{14}\}$

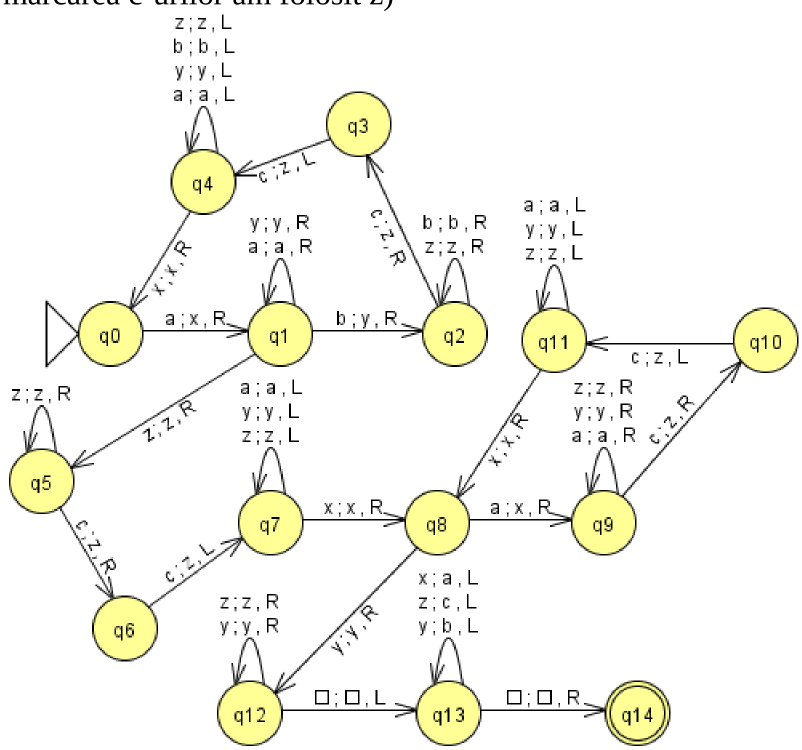
Obs: Pasul 2 testează condiția n > m (să avem mai multe a-uri decât b-uri), iar pasul 4 verifică să avem de două ori mai multe c-uri decât a-uri.

Complexitatea spațiu:
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S.** = $|w|_a+|w|_b+|w|_c$ = **|w|**.

Complexitatea timp:
Pas 1: Se repetă de maxim $|w|_b$ ori. Iar pentru a marca un a, un b și doi de c parcurgem dus-întors o distanța mai mică decât lungimea benzii (Deplasarea cea mai mare este la ultima aplicare a pasului, pentru că la fiecare aplicare distanța crește cu o unitate. La ultima aplicare se parcurg a-urile nemarcate, adică $|w|_a$-$|w|_b$, b-urile marcate, adică $|w|_b$, și c-urile marcate, adică 2*$|w|_b$, deci în total aproximativ $|w|_a$+2*$|w|_b$). Rezultă $|w|_b$ * 2 * ($|w|_a$+2*$|w|_b$).
Pas 2: Se execută o singură dată. Parcurgem spre dreapta toate c-urile marcate și marcăm încă două, adică 2*$|w|_b$+2, apoi parcurgem spre stânga până la a marcat, adică c-urile

marcate ($2*|w|_b$), b-urile marcate ($|w|_b$) și a-urile nemarcate ($|w|_a-|w|_b$). Rezultă aproximativ $|w|_a+4*|w|_b$.
Pas 3: Se repetă de $|w|_a-|w|_b$ ori. La fel ca la pasul 1, distanța crește cu câte o unitate de fiecare dată și este aceeași ca la pasul 1 (de la primul a nemarcat până la primul c nemarcat). Rezultă $(|w|_a-|w|_b) * 2 * (|w|_a+2*|w|_b)$.
Pas 4: Se execută o singură dată. Suntem la finalul a-urilor marcate și parcurgem banda pentru b-urile marcate ($|w|_b$) și c-urile marcate ($2*|w|_a$). Rezultă $|w|_b+2*|w|_a$.
Pas 5: Parcurgem tot cuvântul, adică $|w|$.
Total: $|w|_b*2*(|w|_a+2*|w|_b) + (|w|_a+4*|w|_b) + (|w|_a-|w|_b)*2*(|w|_a+2*|w|_b) + (|w|_b+2*|w|_a) + |w| \le |w|^2$ => **C.T. = O(|w|²)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, pentru marcarea b-urilor am folosit y, iar pentru marcarea c-urilor am folosit z)



(*) Problema 5 *[Rezolvare pe 2 benzi]*

Enunț: Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{a^n b^m c^{2n} \mid n > m \geq 1\}$.
Fie n = 3, m = 2. Inițial benzile mașinii Turing arată așa:

…	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	…
…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

…	B	a	a	a	b	b	c	c	c	c	c	c	B	…
…	B	a	a	a	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

Pas 1. Cât timp citim “a” pe prima bandă mergem spre dreapta, iar pe banda a doua scriem “a” și mergem spre stânga. Apoi facem un pas dreapta pe banda a doua.
Pas 2. Parcurgem simultan spre dreapta “b”-urile de pe prima bandă și “a”-urile de pe a doua bandă. Când dăm de “c” pe prima bandă și încă avem “a” pe a doua bandă (pentru că $|w|_a = n > m = |w|_b$), pe prima bandă stăm pe loc, iar pe a doua mergem în continuare spre dreapta până la B, apoi facem un pas stânga.
Pas 3. Parcurgem prima bandă spre dreapta și pentru fiecare al doilea “c” parcurgem spre stânga câte un “a” de pe banda a doua. Dacă dăm de B simultan pe ambele benzi, cuvântul trebuie acceptat (adică $|w|_c = 2* |w|_a$).
Pas 4. *(Opțional)* Parcurgem prima bandă spre stânga, iar când ajungem la B facem un pas dreapta pe ambele benzi.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} a \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right) // \; pas\; 1$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix} a \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet \\ \rightarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix} b \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}\right) // \; pas\; 2$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet \\ \rightarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet \\ \rightarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix} c \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} c \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \bullet \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \; pas\; 3$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix} c \\ a \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix} c \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix} c \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right) // \; pas\; 4$$

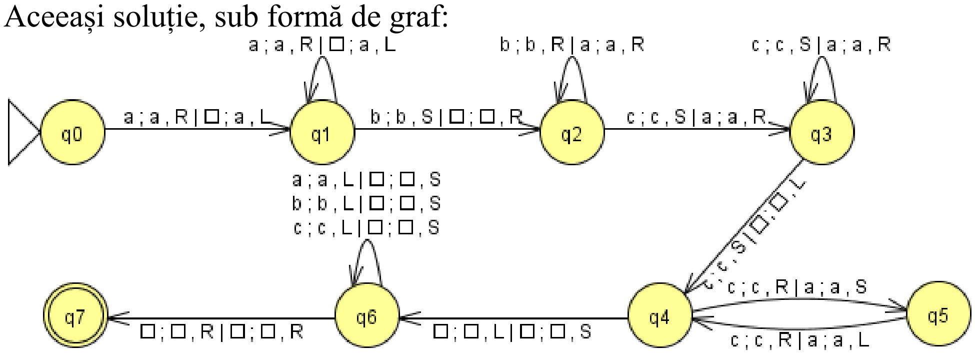
$$\delta\left(q_6, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix} b \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix} a \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \leftarrow \\ \bullet \end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}\right) = \left(q_7, \begin{matrix} B \\ B \end{matrix}, \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}\right), F = \{q_7\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem cuvântul inițial și scriem în plus $|w|_a$. Rezultă **C.S. = $|w| + |w|_a$**.
<u>Complexitatea timp:</u>
(Pas 1) $|w|_a$ + (Pas 2) $|w|_a$ + (Pas 3) $|w|_c$ + (Pas 4) $|w|$. Rezultă **C.T. = O(|w|)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 6

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze produsul lor (x*y).

Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din x și delimitatorul 0), marcăm primul 1 din y cu 1’’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din y) până la B, scriem 2, facem un pas dreapta, scriem 1 (cel în plus pentru rezultat), facem un pas stânga.
Ne deplasăm stânga (sărind 1-urile din rezultat, delimitatorul 2, 1-urile nemarcate din y, 1’’ din y, iar pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi sărim și 1-urile nemarcate din x) până la 1’ din x, facem un pas dreapta.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1',\rightarrow)$ // *marcam 1−ul in plus din x*

$\delta(q_1,1)=(q_1,1,\rightarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_1,0)=(q_2,0,\rightarrow)$

$\delta(q_2,1)=(q_3,1'',\rightarrow)$ // *marcam 1−ul in plus din y*

$\delta(q_3,1)=(q_3,1,\rightarrow)$ // *parcurgem y nemarcat*

$\delta(q_3,B)=(q_4,2,\rightarrow)$

$\delta(q_4,B)=(q_5,1,\leftarrow)$ // *scriem 1−ul in plus pt rezultat*

$\delta(q_5,2)=(q_5,2,\leftarrow)$

$\delta(q_5,1)=(q_5,1,\leftarrow)$ // *parcurgem y nemarcat*

$\delta(q_5,1'')=(q_5,1'',\leftarrow)$

$\delta(q_5,0)=(q_6,0,\leftarrow)$

$\delta(q_6,1)=(q_6,1,\leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_6,1')=(q_7,1',\rightarrow)$

Pas 2. (a) Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind 1-urile nemarcate din x, delimitatorul 0 și 1’’ din y) până la 1 nemarcat din y și mergem la pasul 3(i) (unde îl copiem pe y, în afară de 1’’, la finalul benzii).

$\delta(q_7,1)=(q_8,1',\rightarrow)$ // *marcam din x*

$\delta(q_8,1)=(q_8,1,\rightarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_8,0)=(q_9,0,\rightarrow)$

$\delta(q_9,1'')=(q_{10},1'',\rightarrow)$

Pas 3. (i) Pentru fiecare 1 nemarcat din y, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind 1-urile nemarcate din y, delimitatorul 2 și 1-urile din rezultat) până la B, scriem 1, ne deplasăm stânga (sărind 1-urile din rezultat, delimitatorul 2 și 1-urile nemarcate din y) până la 1’ din y, facem un pas dreapta și reluăm pasul 3(i).

$\delta(q_{10},1) = (q_{11},1',\rightarrow) // \textit{marcam din y}$

$\delta(q_{11},1) = (q_{11},1,\rightarrow) // \textit{parcurgem y nemarcat si rezultatul}$

$\delta(q_{11},2) = (q_{11},2,\rightarrow)$

$\delta(q_{11},B) = (q_{12},1,\leftarrow) // \textit{scriem pt rezultat}$

$\delta(q_{12},1) = (q_{12},1,\leftarrow) // \textit{parcurgem rezultatul si y nemarcat}$

$\delta(q_{12},2) = (q_{12},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{12},1') = (q_{10},1',\rightarrow) // \textit{reluam pasul } 3(i)$

Pas 3. (ii) Când toți de 1 din y sunt marcați (am ajuns pe delimitatorul 2), ne deplasăm stânga și demarcăm y, transformând toți de 1’ în 1 (1’’ rămâne marcat). Apoi ne deplasăm stânga (sărind 1’’ din y, schimbăm starea pentru delimitatorul 0, apoi sărin 1-urile nemarcate din x) până la 1’ din x, facem pas dreapta și reluăm pasul 2(a).

$\delta(q_{10},2) = (q_{13},2,\leftarrow) // \textit{y complet marcat, deci copiat}$

$\delta(q_{13},1') = (q_{13},1,\leftarrow) // \textit{demarcam y (fara } 1''\textit{-ul initial)}$

$\delta(q_{13},1'') = (q_{14},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{14},0) = (q_6,0,\leftarrow) // \textit{parcurgem in } q_6 \textit{ x-ul nemarcat apoi reluam pasul } 2(a)$

Pas 2. (b) Când toți de 1 din x sunt marcați, *eventual demarcăm tot ce e marcat pe bandă (pentru ca într-adevăr banda să rămână ca în desen, fără marcaje)*, apoi mergem în starea finală.

$\delta(q_7,0) = (q_{15},0,\rightarrow) // \textit{x complet marcat}$

$\delta(q_{15},1'') = (q_{16},1,\leftarrow) // \textit{demarcam } 1''\textit{-ul din y (restul din y e deja demarcat)}$

$\delta(q_{16},0) = (q_{17},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{17},1') = (q_{17},1,\leftarrow) // \textit{demarcam tot x-ul}$

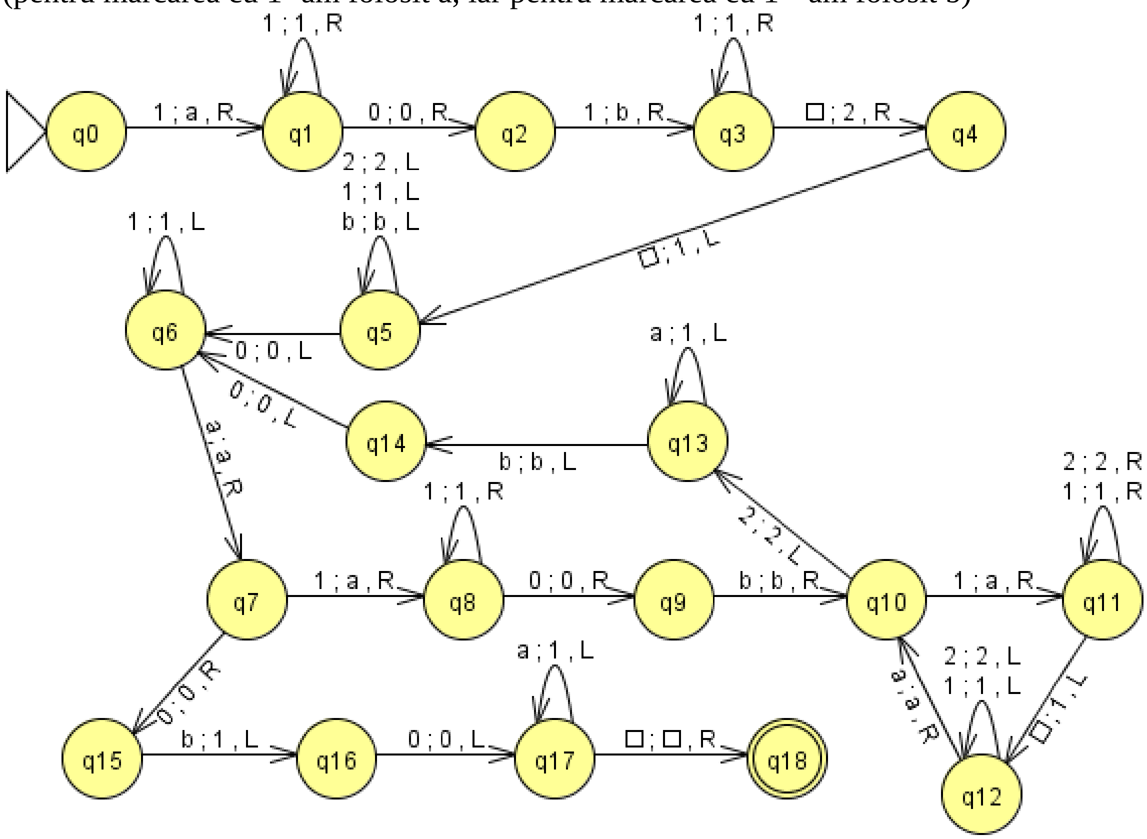
$\delta(q_{17},B) = (q_{18},B,\rightarrow), F = \{q_{18}\}$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale, doi delimitatori și rezultatul. Rezultă **C.S. = x+y+2 + x*y**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată. Parcurgem dus-întors toată banda inițială și cele două caractere pe care le adăugăm. Rezultă aproximativ 2*(x+y+3).
Pas 2(a): Se repetă de x ori. Parcurgem maxim x căsuțe și aplicăm pasul 3. Rezultă x * (x + pasul_3i + pasul_3ii).

Pas 3(i): Se repetă de y ori *(dar pentru fiecare 1 din x)*. Cea mai mare distanță parcursă este la ultima copiere a lui y, când trebuie să parcurgem dus-întors tot rezultatul final, adică x*y. Rezultă y * 2 * x*y.
Pas 3(ii): Se execută o singură dată *(dar pentru fiecare 1 din x)*. Parcurgem maxim y+x.
Pas 2(b): Se execută o singură dată. Parcurgem aproximativ x+3 căsuțe.
Total: 2*(x+y+3) + x * [x + (y * 2 * x*y) + (y+x)] + x+3 => **C.T. = O(x^2y^2)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1' am folosit a, iar pentru marcarea cu 1'' am folosit b)



(*) Problema 6 *[Rezolvare pe 3 benzi]*

Enunț: Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze produsul lor (x*y).
Fie x = 2, y = 3 (reprezentate prin 3, respectiv 4 de 1). Inițial benzile arată așa:

x, y	…	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x, y	…	B	1	1	1	0	1	1	1	1	B	…
x*y	…	B	1	1	1	1	1	1	1	B	B	…
x	…	B	1	1	B	B	B	B	B	B	B	…

Pas 1. Copiem numărul x (fără 1-ul în plus de la scrierea în unar) de pe prima bandă pe a treia (ne asigurăm că numărul x conține cel puțin un 1, de aceea schimbăm starea pentru primul 1; **(a)** Apoi cât timp citim 1 și mergem spre dreapta pe prima bandă, scriem 1 și mergem spre stânga pe a treia. **(b)** Dar dacă după primul 1 am avut 0, adică nu am avut ce copia, atunci adăugăm un 1 pe banda a doua (x * y = 0) și parcurgem prima bandă spre stânga până la B apoi un pas dreapta și mergem în *stare finală*).
Când ajungem pe 0, pe prima și a treia bandă facem un pas dreapta. Astfel ne vom poziționa pe primul 1 din y pe prima bandă și pe primul 1 din copia lui x pe a treia bandă (dacă acesta există; dacă nu, înseamnă că x = 0 și suntem la pasul 1b).

Pas 2. Verificăm să avem cel puțin un 1 în y (pentru primul 1 din y schimbăm starea și ne deplasăm un pas dreapta pe prima bandă), iar pe a doua bandă adăugăm un 1 (cel în plus de la rezultat) și facem un pas stânga.
(i) Apoi pentru fiecare 1 din y-ul de pe prima bandă, în afară de primul 1 (cel în plus pentru scrierea specială în unar):
(a) copiem integral toți de 1 de pe banda a treia (din copia lui x) în banda a doua, mergând spre stânga pe banda a doua și dreapta pe banda a treia;
(b) când ajungem la B pe banda a treia, o parcurgem integral spre stânga până la B, apoi facem un pas dreapta pe banda a treia și un pas dreapta pe prima bandă, reluăm (2i).
(ii) Când ajungem la B pe prima bandă, parcurgem integral prima bandă spre stânga până la B, apoi facem un pas dreapta. (Rezultatul este corect inclusiv pentru y = 0.)

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_0, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \rightarrow \\ q_1, B, \ \bullet \\ B \ \bullet \end{pmatrix} // \, pas\, 1$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \rightarrow \\ q_1, B, \ \bullet \\ 1 \ \leftarrow \end{pmatrix} // \, pas\, 1\,(a)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \ \rightarrow \\ q_2, B, \ \bullet \\ B \ \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_2, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \rightarrow \\ q_3, 1, \leftarrow \\ 1 \ \bullet \end{pmatrix} // \, pas\ 2$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_3, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \bullet \\ q_4, B, \bullet \\ 1 \ \bullet \end{pmatrix} // \, pas\ 2\,(i)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_4, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \bullet \\ q_4, 1, \leftarrow \\ 1 \ \rightarrow \end{pmatrix} // \, pas\ 2\,(a)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_4, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \bullet \\ q_5, B, \ \bullet \\ B \ \leftarrow \end{pmatrix} // \, pas\ 2\,(b)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_5, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \bullet \\ q_5, B, \ \bullet \\ 1 \ \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_5, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ \rightarrow \\ q_3, B, \ \bullet \\ B \ \rightarrow \end{pmatrix} // \, reluam\ 2\,(i)$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_3, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \;\leftarrow \\ q_6, B, \;\bullet \\ 1 \;\bullet \end{pmatrix} \text{// } pas\ 2\ (ii)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_6, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \;\leftarrow \\ q_6, B, \;\bullet \\ 1 \;\bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_6, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \;\leftarrow \\ q_6, B, \;\bullet \\ 1 \;\bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_6, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \;\rightarrow \\ q_7, B, \rightarrow \\ 1 \;\bullet \end{pmatrix}, \; F = \{q_7\}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_2, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \;\bullet \\ q_8, 1, \bullet \\ B \;\bullet \end{pmatrix} \text{// } pas\ 1\ (b)$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_8, 1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \;\leftarrow \\ q_8, 1, \;\bullet \\ B \;\bullet \end{pmatrix}$$

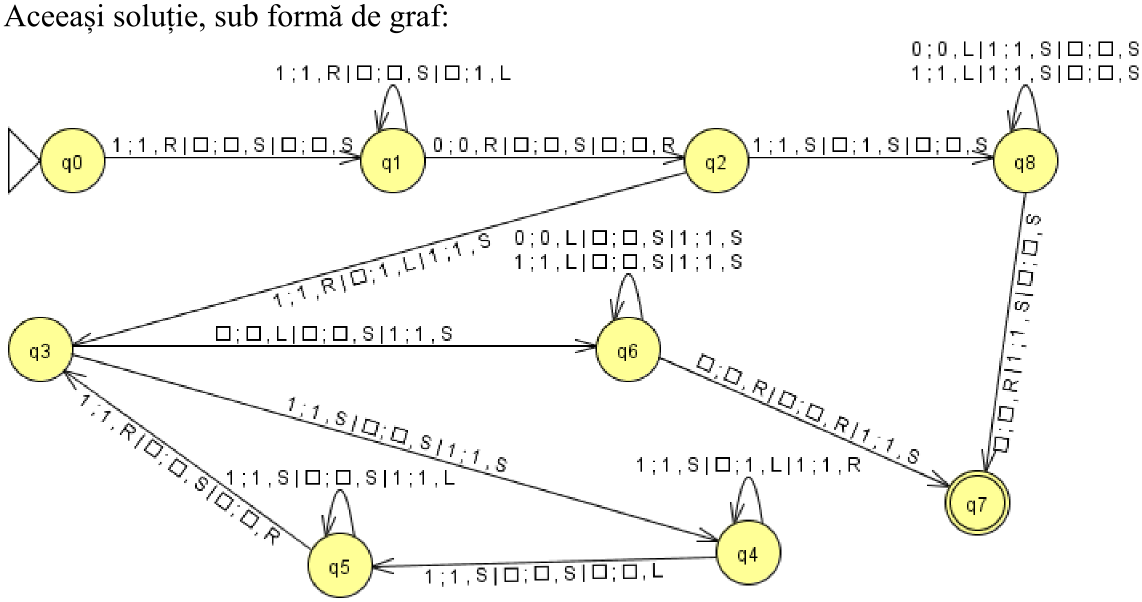
$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_8, 1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \;\leftarrow \\ q_8, 1, \;\bullet \\ B \;\bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_8, 1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \;\rightarrow \\ q_7, 1, \;\bullet \\ B \;\bullet \end{pmatrix}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale, copia lui x și rezultatul. Rezultă **C.S. = x+y + x*y + x**.

<u>Complexitatea timp:</u>
$\underbrace{x}_{pas\,1} + \underbrace{y*(\underbrace{x}_{pas\,2\,a} + \underbrace{x}_{pas\,2\,b})}_{pas\,2\,i} + \underbrace{(y+x)}_{pas\,2\,ii}$ => **C.T. = O(x*y)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 7

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze câtul (x/y) și restul (x%y).

Fie x = 5, y = 2 (reprezentate prin 6, respectiv 3 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Marcăm primul 1 din x cu 1’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din x și delimitatorul 0), marcăm primul 1 din y cu 1’’, ne deplasăm dreapta (sărind toți de 1 nemarcați din y) pană la B, scriem 2, facem un pas dreapta, scriem 1 (cel în plus pentru câtul x/y), stăm pe loc.
Ne deplasăm stânga (sărind 1-urile din cât, delimitatorul 2, 1-urile nemarcate din y, apoi ajungem la 1’’ din y și facem un pas dreapta.

Pas 2. (a) Cât timp e posibil, marcăm cu 1’ alternativ câte un 1 din y apoi din x (marcăm un 1 din y, mergem stânga sărind toți 1’ din y și pe 1’’, pentru 0 schimbăm starea ca să știm că am ajuns pe x, apoi sărim toți 1 din x până la 1’, pas dreapta și marcăm un 1 din x, mergem dreapta sărind toți 1 din x, schimbăm iar starea pentru 0, sărim 1’’ și toți 1’ din y și reluăm).
(b) Dacă y este complet marcat (y s-a cuprins încă o dată integral în x), suntem pe 2 și mergem dreapta sărind 2 și toți de 1 din cât până la finalul benzii și adăugăm un 1 la cât. Apoi mergem stânga (sărind toți de 1 din cât) până la 2, apoi demarcăm toți de 1’ din y, pas dreapta și reluăm pasul 2(a).
(c) Dacă x este complet marcat (y nu a putut fi cuprins integral în x, deci y e posibil să fie marcat parțial, iar această parte marcată a lui y, care a fost marcată simultan cu ultima parte din x, reprezintă restul x%y inclusiv cu 1-ul în plus de la scrierea specială în unar, deoarece marcarea s-a făcut întâi în y și abia apoi nu s-a găsit 1-ul corespunzător din x), suntem pe 0, mergem dreapta până la finalul benzii și scriem 3 apoi mergem la pasul 3(a).

Pas 3. (a) De la finalul benzii mergem stânga până la 1’ din y, îl demarcăm, mergem dreapta până la finalul benzii și adăugăm 1 la rest, apoi reluăm pasul 3(a).
(b) Când ajungem la 1’’ din y (am terminat de copiat restul), îl demarcăm și mergem stânga demarcând tot x până la B, apoi pas dreapta.

$// \ Pas\ 1$
$\delta(q_0,1) = (q_1,1',\rightarrow) \ // \ din\ x$
$\delta(q_1,1) = (q_1,1,\rightarrow)$
$\delta(q_1,0) = (q_2,0,\rightarrow)$
$\delta(q_2,1) = (q_3,1'',\rightarrow) \ // \ din\ y$
$\delta(q_3,1) = (q_3,1,\rightarrow)$

$\delta(q_3,B) = (q_4,2,\rightarrow)$
$\delta(q_4,B) = (q_5,1,\bullet)$
$\delta(q_5,2) = (q_5,2,\leftarrow)$
$\delta(q_5,1) = (q_5,1,\leftarrow)$
$\delta(q_5,1'') = (q_6,1'',\rightarrow)$

// *Pas* 2 (*a*)

$\delta(q_6,1)=(q_7,1',\leftarrow)$ // *din y*
$\delta(q_7,1')=(q_7,1',\leftarrow)$
$\delta(q_7,1'')=(q_7,1'',\leftarrow)$
$\delta(q_7,0)=(q_8,0,\leftarrow)$
$\delta(q_8,1)=(q_8,1,\leftarrow)$
$\delta(q_8,1')=(q_9,1',\rightarrow)$
$\delta(q_9,1)=(q_{10},1',\rightarrow)$ // *din x*
$\delta(q_{10},1)=(q_{10},1,\rightarrow)$
$\delta(q_{10},0)=(q_{11},0,\rightarrow)$
$\delta(q_{11},1'')=(q_{11},1'',\rightarrow)$
$\delta(q_{11},1')=(q_{11},1',\rightarrow)$
$\delta(q_{11},1)=(q_7,1',\rightarrow)$ // *din y, reluam pas* 2(*a*)

// *Pas* 2 (*b*)

$\delta(q_{11},2)=(q_{12},2,\rightarrow)$ // *y complet marcat*
$\delta(q_{12},1)=(q_{12},1,\rightarrow)$
$\delta(q_{12},B)=(q_{13},1,\bullet)$ // *pentru cat*
$\delta(q_{13},1)=(q_{13},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{13},2)=(q_{13},2,\leftarrow)$
$\delta(q_{13},1')=(q_{13},1,\leftarrow)$ // *demarcam y*
$\delta(q_{13},1'')=(q_6,1'',\rightarrow)$ // *reluam pas* 2(*a*)

// *Pas* 2 (*c*)

$\delta(q_9,0)=(q_{14},0,\rightarrow)$ // *x complet marcat*
$\delta(q_{14},1'')=(q_{14},1'',\rightarrow)$
$\delta(q_{14},1')=(q_{14},1',\rightarrow)$
$\delta(q_{14},1)=(q_{14},1,\rightarrow)$
$\delta(q_{14},2)=(q_{14},2,\rightarrow)$
$\delta(q_{14},B)=(q_{15},3,\bullet)$

// *Pas* 3 (*a*)

$\delta(q_{15},3)=(q_{15},3,\leftarrow)$
$\delta(q_{15},1)=(q_{15},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{15},2)=(q_{15},2,\leftarrow)$
$\delta(q_{15},1')=(q_{16},1,\rightarrow)$ // *din y*
$\delta(q_{16},3)=(q_{16},3,\rightarrow)$
$\delta(q_{16},2)=(q_{16},2,\rightarrow)$
$\delta(q_{16},1)=(q_{16},1,\rightarrow)$
$\delta(q_{16},B)=(q_{15},1,\bullet)$ // *pentru rest*

// *Pas* 3 (*b*)

$\delta(q_{15},1'')=(q_{17},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{17},0)=(q_{17},0,\leftarrow)$
$\delta(q_{17},1')=(q_{17},1,\leftarrow)$ // *demarcam x*
$\delta(q_{17},B)=(q_{18},B,\rightarrow)$, $F=\{q_{18}\}$

Obs: Dacă x = 0, se calculează corect x/y = 0 și x%y = 0.
Dar dacă y = 0, mașina se blochează în starea q_6 când întâlnește 2 în loc de 1 din y.

Complexitatea spațiu:
Avem numerele inițiale și cele două rezultate. Rezultă **C.S. = x+y + x/y + x%y**.

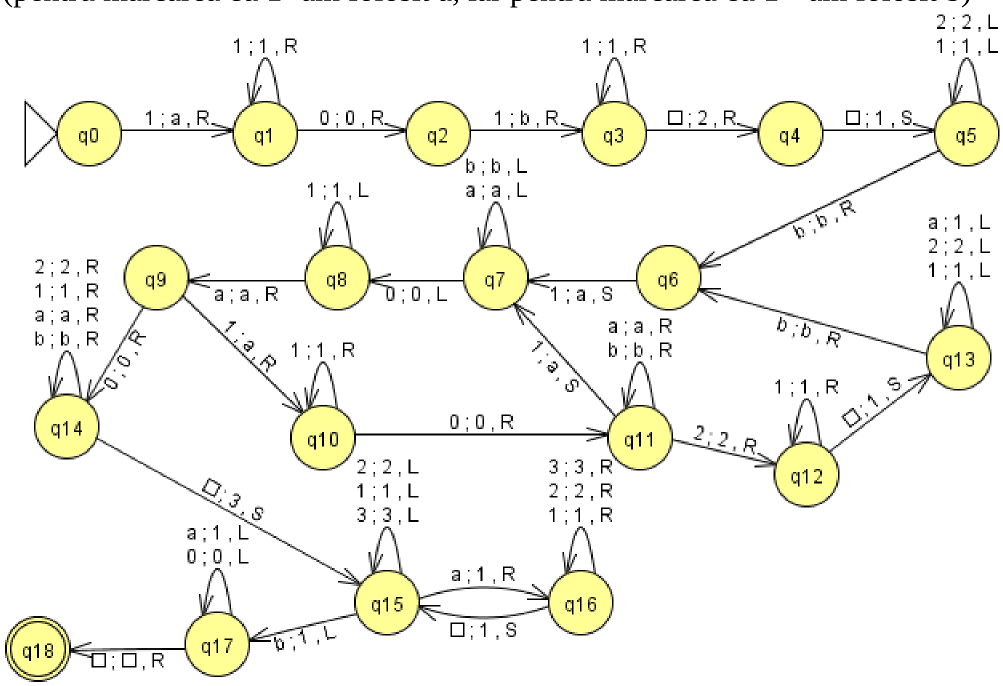
Complexitatea timp:
Pas 1: Parcurgem spre dreapta toată banda inițială (x+y pași), apoi spre stânga până la începutul lui y (y pași).
Pas 2 (a, b): Pentru o aplicare a pasului 2(a), de maxim y ori ne deplasăm x poziții dus-întors pentru marcarea alternativă (2*y*x pași). Apoi aplicăm pasul 2(b), unde parcurgem maxim x/y dus-întors, apoi demarcăm y-ul spre stânga (2*x/y + y pași). Reluăm pașii 2(a) și 2(b) de x/y ori, adică facem x/y * (2*y*x + 2*x/y + y) pași.
Pas 2 (c): Parcurgem dus-întors maxim y + x/y (2*y +2*x/y pași).
Pas 3 (a): De x%y ori parcurgem dus-întors maxim y+x/y+x%y pași.
Pas 3 (b): Parcurgem spre stânga x pentru demarcare (x pași).

Total:

$$\underbrace{x+2*y}_{pas\,1}+\underbrace{\frac{x}{y}*\left(\underbrace{y*2*x}_{pas\,2\,(a)}+\underbrace{2*\frac{x}{y}+y}_{pas\,2\,(b)}\right)+\underbrace{2*\left(y+\frac{x}{y}\right)}_{pas\,2\,(c)}}_{pas\,2}+\underbrace{\underbrace{(x\%y)*2*\left(y+\frac{x}{y}+x\%y\right)}_{pas\,3\,(a)}+\underbrace{x}_{pas\,3\,(b)}}_{pas\,3}$$

Pasul 2(a) este cel dominant, rezultă **C.T. = O(x²)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit a, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit b)



(*) Problema 7 *[Rezolvare pe 3 benzi]*

Enunț: Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze câtul (x/y) și restul (x%y).
Fie x = 5, y = 2 (reprezentate prin 6, respectiv 3 de 1). Inițial benzile arată așa:

x, y	…	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x, y	…	B	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	B	…
x/y, x%y	…	B	1	1	1	3	1	1	B	B	B	B	B	…
y	…	B	1	1	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

Pas 1. Parcurgem spre dreapta pe prima bandă x-ul, 0-ul și primul 1 din y (cel în plus de la scrierea specială în unar). Apoi cât timp citim 1 pe prima bandă scriem 1 pe a treia bandă și facem un pas dreapta pe aceste două benzi (copiem y-ul). Apoi pe prima bandă mergem spre stânga până la 0, având grijă să respectăm condiția ca banda a treia să conțină cel puțin un 1 (adică y-ul să fie minim 1, iar dacă este 0 mașina să se blocheze pentru a nu face împărțirea la 0). Când sărim ultimul 1 din x (cel în plus de la scrierea în unar) mergem stânga pe prima bandă, adăugăm un 1 pe banda a doua (cel în plus la scrierea câtului) și facem un pas dreapta.

Pas 2. Parcurgem simultan spre stânga prima și a treia bandă.

Pas 3. (a) Dacă dăm de B doar pe a treia bandă, adăugăm un 1 pe banda a doua (la cât) și facem un pas dreapta. Apoi parcurgem integral spre dreapta banda a treia până la B, facem un pas stânga și reluăm pasul 2.
(b) Dacă dăm de B doar pe prima bandă (am terminat de calculat câtul), adăugăm delimitatorul 3 pe banda a doua și facem un pas dreapta pe a doua și a treia bandă. Apoi cât timp citim 1 pe banda a treia scriem 1 pe banda a doua și facem un pas dreapta pe ambele benzi. Mai adăugăm un 1 pe banda a doua (cel în plus la scrierea restului), apoi parcurgem integral spre stânga banda a treia, mergem la pasul 4.
(c) Dacă dăm de B simultan pe prima și a treia bandă (înseamnă că x este multiplu de y, deci restul va fi 0), adăugăm pe banda a doua un 1 (la cât), apoi delimitatorul 3 și un 1 (cel în plus de la scrierea restului 0), mergem la pasul 4.

Pas 4. Parcurgem integral spre stânga banda a doua, apoi pas dreapta pe toate cele trei benzi și mergem în starea finală.

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_0, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_1, B, \bullet \\ B \ \bullet \end{pmatrix} // Pas\,1,\ x \geq 0$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_1, B, \bullet \\ B \ \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_1, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \rightarrow \\ q_2, B, \bullet \\ B \ \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_2, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_3, B, \bullet \\ B \ \bullet \end{pmatrix} // y \geq 0$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_3, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \rightarrow \\ q_3, B, \bullet \\ 1 \rightarrow \end{pmatrix} // copiem\ y$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_3, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \leftarrow \\ q_4, B, \bullet \\ B \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_4, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \leftarrow \\ q_4, B, \bullet \\ 1 \ \bullet \end{pmatrix} // verificam\ y \geq 1$$

$$\delta\begin{pmatrix} 0 \\ q_4, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \leftarrow \\ q_5, B, \bullet \\ 1 \ \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_5, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \leftarrow \\ q_6, 1, \rightarrow \\ 1 \ \bullet \end{pmatrix} // 1\ in\ plus\ la\ cat$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_6, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \leftarrow \\ q_6, B, \bullet \\ 1 \leftarrow \end{pmatrix} // Pas\ 2$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_6, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bullet \\ q_7, 1, & \rightarrow \\ B & \rightarrow \end{pmatrix} // Pas\ 3\,(a), 1\ pt.\ cat$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_7, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bullet \\ q_7, B, & \bullet \\ 1 & \rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} 1 \\ q_7, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \bullet \\ q_6, B, & \bullet \\ B & \leftarrow \end{pmatrix} // reluam\ pas\ 2$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_6, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_8, 3, & \rightarrow \\ 1 & \rightarrow \end{pmatrix} // Pas\ 3\,(b)$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_8, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_8, 1, & \rightarrow \\ 1 & \rightarrow \end{pmatrix} // 1\ pt.\ rest$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_8, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_9, 1, & \rightarrow \\ B & \leftarrow \end{pmatrix} // 1\ in\ plus\ la\ rest$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_9, B \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_9, B, & \bullet \\ 1 & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_9, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{10}, B, & \leftarrow \\ B & \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_6, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{11}, 1, & \rightarrow \\ B & \bullet \end{pmatrix} // Pas\ 3\,(c), 1\ pt.\ cat$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_{11}, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{12}, 3, & \rightarrow \\ B & \bullet \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_{12}, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{10}, 1, & \bullet \\ B & \bullet \end{pmatrix} // rest = 0$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_{10}, 1 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{10}, 1, & \leftarrow \\ B & \bullet \end{pmatrix} // Pas\ 4$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_{10}, 3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bullet \\ q_{10}, 3, & \leftarrow \\ B & \leftarrow \end{pmatrix}$$

$$\delta\begin{pmatrix} B \\ q_{10}, B \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \rightarrow \\ q_{13}, B, & \rightarrow \\ B & \rightarrow \end{pmatrix}, F = \{q_{13}\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale, cele două rezultate și copia lui y.
Rezultă **C.S. = x+2*y + x/y + x%y**.

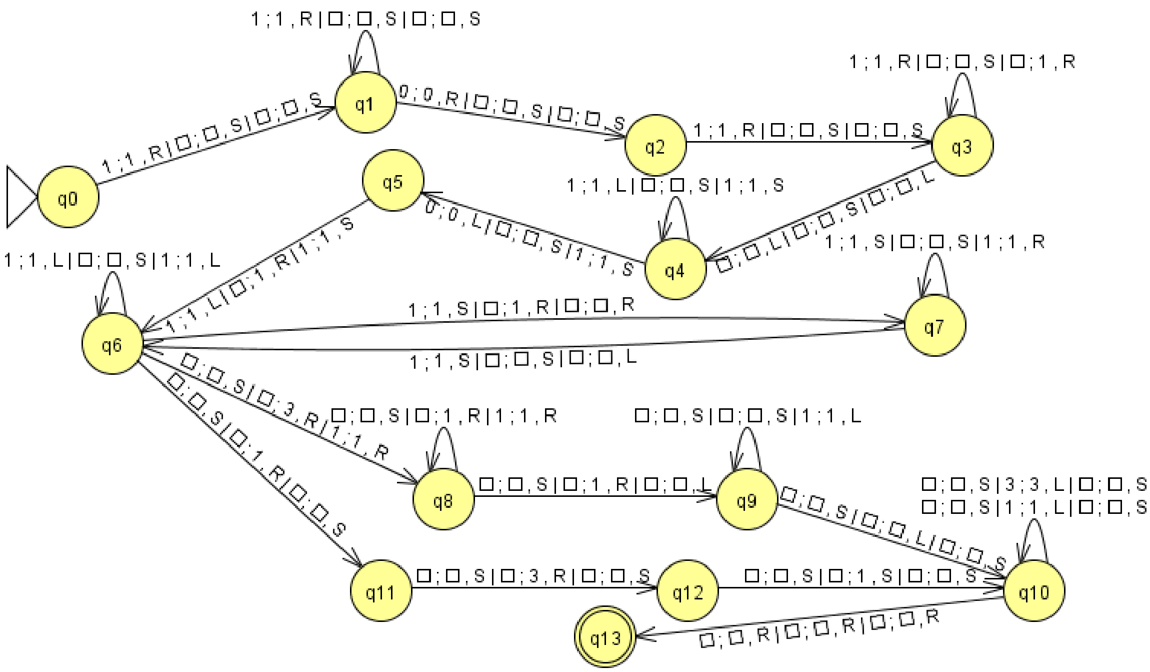
<u>Complexitatea timp:</u>

$$Total:\ \underbrace{x + 2*y}_{pas\,1} + \frac{x}{y}*\left(\underbrace{y}_{pas\,2} + \underbrace{y}_{pas\,3(a)}\right) + \underbrace{x\%y + y}_{pas\,3(b)} + \underbrace{3}_{pas\,3(c)} + \underbrace{x\%y + \frac{x}{y}}_{pas\,4}$$

Câtul și restul sunt numere mai mici sau egale decât x, rezultă **C.T. = O(x+y)**.

Obs: Pentru y = 0, mașina se blochează în starea q_4 pentru că găsește B în loc de 1 pe banda a treia.
Pentru x < y, mașina funcționează corect și calculează câtul x/y = 0 și restul x%y = x (inclusiv pentru x = 0).

Aceeași soluție, sub formă de graf:



~ Seminar 4 ~

Problema 8

Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{w \in \{a,b,c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c > 0\}$ **.**

Rezolvarea (A)

De exemplu inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	a	c	b	c	c	a	b	a	b	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	a	c	b	c	c	a	b	a	b	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Cât timp este posibil, căutăm în această ordine un a, un b și un c pe care să-i marcăm, iar dacă atunci când toți de a sunt marcați și toți de b și toți de c sunt marcați, acceptăm intrarea.

Pas 1. Ne deplasăm dreapta (sărind a', b', b, c' și c) până la primul a, îl marcăm cu a', ne deplasăm stânga (sărind a', b, c și c') până la b' sau B, pas dreapta.

$\delta(q_0, x) = (q_0, x, \rightarrow), x \in \{a', b', b, c', c\}$ // *sarim orice in afara de a*

$\delta(q_0, a) = (q_1, a', \leftarrow)$ // *marcam un a*

$\delta(q_1, y) = (q_1, y, \leftarrow), y \in \{a', b, c, c'\}$ // *sarim orice in afara de a si de b'*

$\delta(q_1, b') = (q_2, b', \rightarrow)$; $\delta(q_1, B) = (q_2, B, \rightarrow)$

Pas 2. Ne deplasăm dreapta (sărind a', a, b', c' și c) până la primul b, îl marcăm cu b', ne deplasăm stânga (sărind a, a', b' și c) până la c' sau B, pas dreapta.

$\delta(q_2, z) = (q_2, z, \rightarrow), z \in \{a', a, b', c', c\}$ // *sarim orice in afara de b*

$\delta(q_2, b) = (q_3, b', \leftarrow)$ // *marcam un b*

$\delta(q_3, t) = (q_3, t, \leftarrow), t \in \{a', a, b', c\}$ // *sarim orice in afara de b si de c'*

$\delta(q_3, c') = (q_4, c', \rightarrow)$; $\delta(q_3, B) = (q_4, B, \rightarrow)$

Pas 3. Ne deplasăm dreapta (sărind a', a, b', b și c') până la primul c, îl marcăm cu c', ne deplasăm stânga (sărind a, b, b' și c') până la a' sau B, pas dreapta și reluăm pasul 1.

$\delta(q_4, p) = (q_4, p, \rightarrow), p \in \{a', a, b', b, c'\}$ // *sarim orice in afara de c*

$\delta(q_4, c) = (q_5, c', \leftarrow)$ // *marcam un c*

$\delta(q_5, r) = (q_5, r, \leftarrow), r \in \{a, b', b, c'\}$ // *sarim orice in afara de c si de a'*

$\delta(q_5, a') = (q_6, a', \rightarrow)$; $\delta(q_5, B) = (q_6, B, \rightarrow)$

$\delta(q_6, x) = (q_6, x, \rightarrow) // exact\ ce\ faceam\ si\ in\ q_0, \quad reluam\ pasul\ 1$

$\delta(q_6, a) = (q_1, a', \leftarrow) // marcam\ un\ a$

Pas 4. Dacă toți de a sunt marcați (adică suntem la pasul 1, căutăm a, dar nu găsim și ajungem pe B-ul din dreapta cuvântului), atunci parcurgem toată banda spre stânga. Dacă întâlnim doar caractere marcate (a', b' și c') iar apoi dăm de B-ul din stânga cuvântului, atunci acceptăm intrarea.

$\delta(q_6, B) = (q_7, B, \leftarrow) // toate\ a-urile\ sunt\ marcate$

$\delta(q_7, s') = (q_7, s, \leftarrow), s' \in \{a', b', c'\}, s \in \{a, b, c\} // demarcam\ tot\ ce\ este\ marcat$

$\delta(q_7, B) = (q_8, B, \rightarrow), F = \{q_8\} // toate\ b-urile\ si\ c-urile\ erau\ marcate,\ acceptam\ cuvantul$

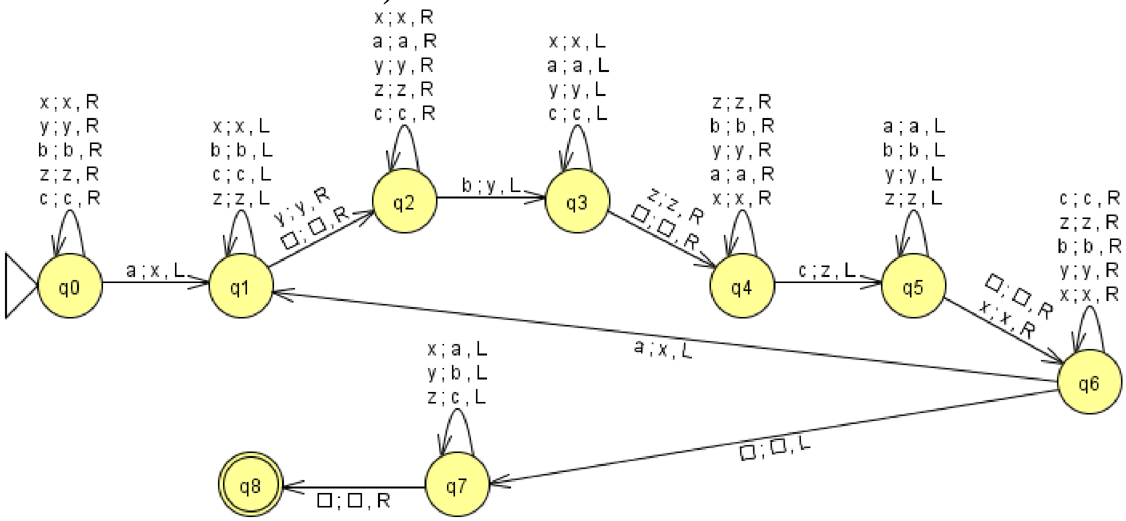
Obs.: - Având în vedere poziționarea aleatoare a literelor în cuvânt, la parcurgerile spre dreapta avem 5 caractere pe care le putem întâlni și pe care trebuie să le sărim, toate în afară de cel nemarcat pe care îl căutăm pentru a-l marca.
- La parcurgerile spre stânga avem 4 caractere pe care le putem întâlni și pe care trebuie să le sărim. Îl excludem pe cel marcat în perechea anterioară de același tip cu cel pe care urmează să-l marcăm la pasul următor (de exemplu la pasul 2 urmează să marcăm un b, deci la parcurgerea spre stânga din cadrul pasului 1 îl excludem pe b', pentru că vrem să începem căutarea lui b din dreapta ultimului b' marcat, deci vrem să schimbăm starea și sensul de parcurgere atunci când îl întâlnim). De asemenea, excludem și caracterul nemarcat de același tip cu cel pe care tocmai l-am marcat în acel pas (de exemplu la pasul 1 am marcat un a și apoi mergând spre stânga vom întâlni doar a-uri marcate pentru că cele nemarcate vor fi la dreapta față de locul de unde am plecat, având în vedere că marcările unei litere se fac la rând, adică primul a, apoi al doilea a, apoi al treilea, etc.)

Obs.: La seminar, dacă am spus că din q_5 atunci când întâlnim a' sau B mergem în q_0 (pentru a relua pasul 1), iar din q_0 cu B mergem în q_6 (avem toți de a marcați), apoi avem din q_6 cu B mergem în stare finală (pentru că bucla din q_6 poate să nu o aplice niciodată), înseamnă că se acceptă și cuvântul vid, ceea ce contrazice condiția din enunț (că numărul de apariții ale fiecărei litere trebuie să fie strict pozitiv).
Soluția prezentată aici mai sus respectă condiția, cuvântul minim acceptat este de lungime 3 și conține un a, un b și un c.

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S. =** $|w|_a + |w|_b + |w|_c = |w|$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas1 + Pas2 + Pas3: Se revine la pasul 1 de $\min\{|w|_a, |w|_b, |w|_c\}$ ori, iar pentru a aplica o dată fiecare dintre cei trei pași (pentru a marca un a, un b și un c) ne deplasăm lungimea benzii înmulțită cu o constantă. Rezultă $\min\{|w|_a, |w|_b, |w|_c\}$ * const. * $|w|$.
Pas 4: Parcurgem maxim întreaga bandă de la dreapta spre stânga. Rezultă maxim $|w|$.
Total: $\min\{|w|_a, |w|_b, |w|_c\}$ * const. * $|w| + |w|$ => **C.T. = O(** $|w|^2$ **)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, pentru marcarea b-urilor am folosit y, iar pentru marcarea c-urilor am folosit z)



Rezolvarea (B)

Enunț: Să se accepte cuvintele din limbajul $L = \{w \in \{a,b,c\}^*, |w|_a = |w|_b = |w|_c > 0\}$.

<u>Ideea de rezolvare:</u>

Pas 1. Cât timp este posibil, încercăm să formăm perechi de câte un a, un b și un c, indiferent de ordinea în care îi găsim nemarcați pe bandă. Folosim la stări indici formați din literele din pereche care nu au fost găsite și marcate încă. Deci starea inițială va fi q_{abc}, iar pe măsură ce găsim câte o literă, aceasta va dispărea de la indice. Dacă în q_{abc} nu mai găsim nicio literă nemarcată (dăm de B-ul) din dreapta benzii, mergem la pasul 3.

Pas 2. Când am găsit și marcat toate 3 literele dintr-o pereche, trecem în starea q_{st} și parcurgem toată banda spre stânga până la B, apoi pas dreapta și revenim la pasul 1 și în q_{abc} pentru a forma o nouă pereche.

Pas 3. Parcurgem toată banda spre stânga demarcând-o și de asemenea verificăm ca ea să nu fie vidă (pentru a nu accepta cuvântul vid).

$\delta(q_{abc}, d) = (q_{abc}, d, \rightarrow), d \in \{a', b', c'\}$ // *Pas* 1
$\delta(q_{abc}, a) = (q_{bc}, a', \rightarrow)$
$\delta(q_{abc}, b) = (q_{ac}, b', \rightarrow)$
$\delta(q_{abc}, c) = (q_{ab}, c', \rightarrow)$
$\delta(q_{bc}, e) = (q_{bc}, e, \rightarrow), e \in \{a', b', c', a\}$
$\delta(q_{bc}, b) = (q_c, b', \rightarrow)$
$\delta(q_{bc}, c) = (q_b, c', \rightarrow)$
$\delta(q_{ac}, f) = (q_{ac}, f, \rightarrow), f \in \{a', b', c', b\}$
$\delta(q_{ac}, a) = (q_c, a', \rightarrow)$
$\delta(q_{ac}, c) = (q_a, c', \rightarrow)$

$\delta(q_{ab}, g) = (q_{ab}, g, \rightarrow), g \in \{a', b', c', c\}$
$\delta(q_{ab}, a) = (q_b, a', \rightarrow)$
$\delta(q_{ab}, b) = (q_a, b', \rightarrow)$
$\delta(q_c, h) = (q_c, h, \rightarrow), h \in \{a', b', c', a, b\}$
$\delta(q_c, c) = (q_{st}, c', \bullet)$
$\delta(q_b, i) = (q_b, i, \rightarrow), i \in \{a', b', c', a, c\}$
$\delta(q_b, b) = (q_{st}, b', \bullet)$
$\delta(q_a, j) = (q_a, j, \rightarrow), j \in \{a', b', c', b, c\}$
$\delta(q_a, a) = (q_{st}, a', \bullet)$

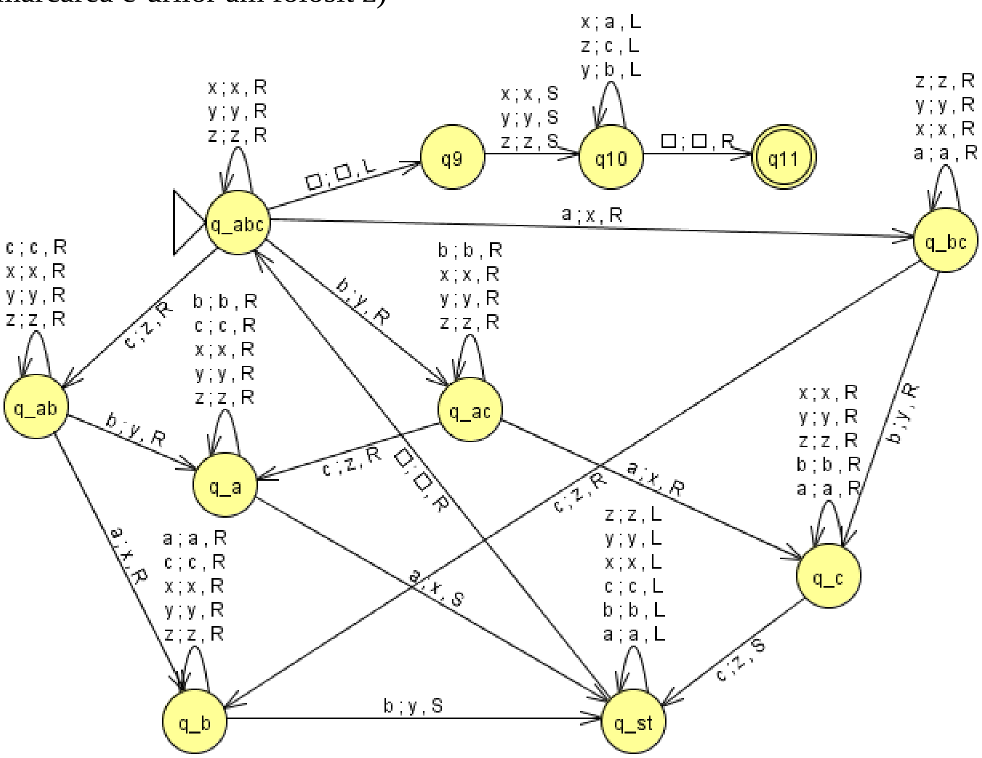
$\delta(q_{st},k)=(q_{st},k,\leftarrow), k \in \{a',b',c',a,b,c\}$ // *Pas* 2
$\delta(q_{st},B)=(q_{abc},B,\rightarrow)$ // *reluam pas* 1
$\delta(q_{abc},B)=(q_9,B,\leftarrow)$ // *Pas* 3
$\delta(q_9,d)=(q_{10},d,\bullet), d \in \{a',b',c'\}$ // *avem banda nevida*

$\delta(q_{10},a')=(q_{10},a,\leftarrow)$
$\delta(q_{10},b')=(q_{10},b,\leftarrow)$
$\delta(q_{10},c')=(q_{10},c,\leftarrow)$
$\delta(q_{10},B)=(q_{11},B,\rightarrow), F=\{q_{11}\}$

Complexitatea spațiu:
Avem cuvântul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S. = $|w|_a+|w|_b+|w|_c$ = |w|**.

Complexitatea timp:
Pas1 + Pas2: Se revine la pasul 1 de min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} ori, iar pentru a marca un a, un b și un c ne deplasăm maxim lungimea benzii dus-întors: min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} * 2 * |w|.
Pas 3: Parcurgem maxim întreaga bandă de la dreapta spre stânga. Rezultă maxim |w|.
Total: min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} * 2 * |w| + |w| => **C.T. = O($|w|^2$)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea a-urilor am folosit x, pentru marcarea b-urilor am folosit y, iar pentru marcarea c-urilor am folosit z)



(*) Problema 8 *[Rezolvare pe 4 benzi]*

Enunț: Să se accepte cuvintele din limbajul $L=\{w \in \{a,b,c\}^*, |w|_a=|w|_b=|w|_c>0\}$.

Ideea de rezolvare:
Pas 1. Parcurgem integral spre dreapta prima bandă, iar de pentru fiecare “a”, “b” sau “c” găsit pe prima bandă adăugăm un “a” pe a doua bandă, un “b” pe a treia bandă, respectiv un “c” pe a patra bandă (pentru primul caracter schimbăm sarea pentru a nu accepta cuvântul vid).
Pas 2. Parcurgem simultan spre stânga benzile 2 – 4 și trebuie să ajungem simultan la B.
Pas 3. Parcurgem integral spre stânga prima bandă, apoi un pas dreapta pe toate patru benzile.

$$\delta\left(q_0,\begin{matrix}a\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}a&\rightarrow\\a&\rightarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_0,\begin{matrix}b\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}b&\rightarrow\\B&\bullet\\b&\rightarrow\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_0,\begin{matrix}c\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}c&\rightarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\c&\rightarrow\end{matrix}\right)\quad //\,Pas\;1$$

$$\delta\left(q_1,\begin{matrix}a\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}a&\rightarrow\\a&\rightarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_1,\begin{matrix}b\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}b&\rightarrow\\B&\bullet\\b&\rightarrow\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_1,\begin{matrix}c\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_1,\begin{matrix}c&\rightarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\c&\rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_1,\begin{matrix}B\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_2,\begin{matrix}B&\bullet\\B&\leftarrow\\B&\leftarrow\\B&\leftarrow\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_2,\begin{matrix}B\\a\\b\\c\end{matrix}\right)=\left(q_2,\begin{matrix}B&\bullet\\a&\leftarrow\\b&\leftarrow\\c&\leftarrow\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_2,\begin{matrix}B\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_3,\begin{matrix}B&\leftarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right)\quad //\,Pas\;2$$

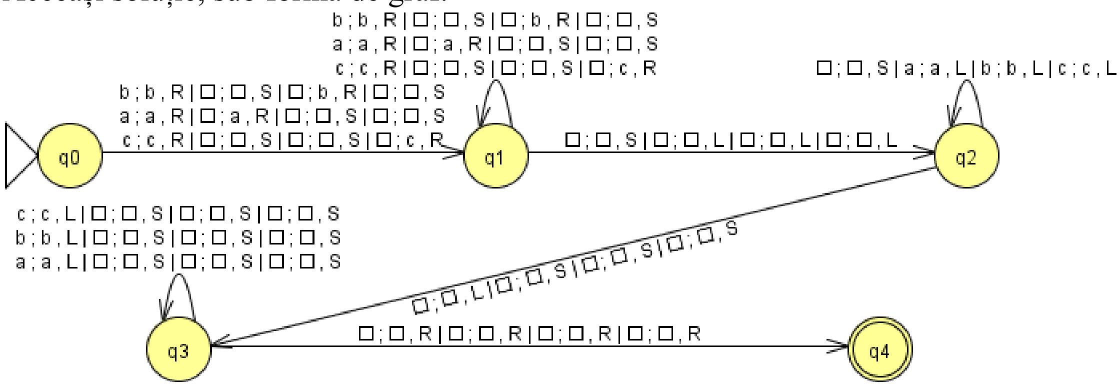
$$\delta\left(q_3,\begin{matrix}a\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_3,\begin{matrix}a&\leftarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_3,\begin{matrix}b\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_3,\begin{matrix}b&\leftarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right),\quad \delta\left(q_3,\begin{matrix}c\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_3,\begin{matrix}c&\leftarrow\\B&\bullet\\B&\bullet\\B&\bullet\end{matrix}\right)\quad //\,Pas\;3$$

$$\delta\left(q_3,\begin{matrix}B\\B\\B\\B\end{matrix}\right)=\left(q_4,\begin{matrix}B&\rightarrow\\B&\rightarrow\\B&\rightarrow\\B&\rightarrow\end{matrix}\right), F=\{q_4\}$$

Complexitatea spațiu:
Avem cuvântul inițial și copia lui. Rezultă **C.S. = |w| + $|w|_a$+$|w|_b$+$|w|_c$ = 2*|w|**.

Complexitatea timp:
(Pas1) |w| + (Pas2) min{$|w|_a$, $|w|_b$, $|w|_c$} + (Pas3) |w| => **C.T. = O(|w|)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 9

Să se accepte numerele x de forma 2^k, k număr natural.

Rezolvarea (A) *(cu împărțiri)*

Fie x = 8 (reprezentat prin 9 de 1). Inițial banda mașinii Turing arată așa:

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Exceptând 1-ul în plus, la fiecare pas vom marca jumătate din număr, deci practic vom face împărțire repetată la 2, partea nemarcată rămasă fiind câtul împărțirii. Dacă la fiecare pas avem un număr par (deci putem să continuăm împărțirea exactă la 2), iar la final avem câtul 1, atunci numărul este acceptat.

Pas 1. Marcăm primul 1 din număr (cel în plus) și facem un pas dreapta.
$\delta(q_0,1)=(1_1,1',\rightarrow)$

Pas 2. Parcurgem toată banda de la stânga la dreapta (sărind 1-urile deja marcate), iar pentru fiecare doi de 1 nemarcați, pe primul îl marcăm pe al doilea îl sărim.
$\delta(q_1,1')=(q_1,1',\rightarrow)$ *// sarim ce era marcat*
$\delta(q_1,1)=(q_2,1',\rightarrow)$ *// marcam primul* 1
$\delta(q_2,1')=(q_2,1',\rightarrow)$ *// sarim ce era marcat*
$\delta(q_2,1)=(q_1,1,\rightarrow)$ *// sarim al doilea* 1 *si reluam*

- Dacă la aplicările intermediare (toate în afară de ultima) ale pasului 2 întâlnim B în starea în care trebuia să marcăm un 1 este bine (numărul curent este par) și trecem la pasul 3.
$\delta(q_1,B)=(q_3,B,\leftarrow)$ *// ok, nr curent par*

- La ultima aplicare a pasului 2, dacă întâlnim B în starea în care trebuia să sărim un 1 este bine (înseamnă că aveam numărul 2^0=1), dar trebuie să verificăm dacă tot numărul este complet marcat și doar dacă da, atunci acceptăm intrarea (altfel înseamnă că am ajuns la un număr curent care este impar dar diferit de 1, deci nu respectă condiția).

$\delta(q_2, B) = (q_4, B, \leftarrow)$ // *nr curent impar*

$\delta(q_4, 1') = (q_4, 1, \leftarrow)$ // *demarcam*

$\delta(q_4, B) = (q_5, B, \rightarrow), F = \{q_5\}$ // *ok, tot nr era marcat, acceptam*

Pas 3. Parcurgem toată banda spre stânga (sărim 1-urile și 1'-urile fără să modificăm nimic) până la B, facem un pas dreapta și reluăm pasul 2.

$\delta(q_3, 1) = (q_3, 1, \leftarrow)$

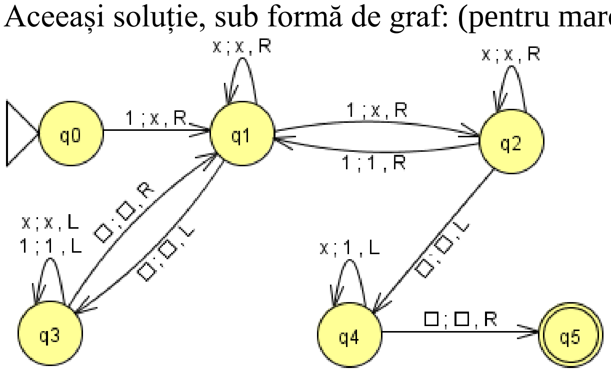
$\delta(q_3, 1') = (q_3, 1', \leftarrow)$

$\delta(q_3, B) = (q_1, B, \rightarrow)$ // *reluam pasul* 2

Complexitatea spațiu:
Avem numărul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S. = x**.

Complexitatea timp:
Pas 1: Ne mutăm cu o poziție.
Pas 2 + Pas 3: La fiecare aplicare a pasului 2 facem o împărțire a numărului curent la 2, deci numărul de reveniri la pasul 2 este maxim k, adică $\log_2 x$. Pasul 2 face o parcurgere completă a benzii de la stânga la dreapta, iar pasul 3 parcurge total banda de la dreapta spre stânga. Rezultă $\log_2 x$ * (2*x).
Total: 1 + $\log_2 x$ * (2*x) => **C.T. = O(x * log x)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf: (pentru marcare am folosit x)



(*) Rezolvarea (B) *(cu înmulțiri)*

Enunț: Să se accepte numerele x de forma 2^k, k număr natural.

Ideea de rezolvare:

Pas 1. Transformăm 1-ul în plus (de la scrierea specială în unar) în 0, apoi la fiecare pas 2 dublăm partea marcată din număr. Inițial marcăm cu 1'' un singur 1 din număr (2^0 = 1) și facem un pas dreapta.

(a) Dacă dăm de B, înseamnă că am avut x = 1 = 2^0, parcurgem toată banda spre stânga transformând 1'' și 0 la loc în 1 și apoi acceptăm numărul.
(b) Dacă dăm de 1, ne întoarcem stânga până la 0, pas dreapta, mergem la pasul 2.

Pas 2. *(Dublăm numărul marcat curent)* Pentru fiecare 1'' găsit îl transformăm în 1', mergem dreapta (sărind toți 1'' și toți 1') și transformăm primul 1 găsit în 1' (dacă dăm de B, mașina se blochează pentru că înseamnă că nu putem face integral înmulțirea curentă cu 2, deci numărul nu este acceptat). Apoi sărim spre stânga toți 1'.

Pas 3. (a) Dacă dăm de 1'' (încă nu am terminat înmulțirea cu 2) îi sărim pe toți spre stânga, iar când ajungem la 1' facem un pas dreapta și reluăm pasul 2.
(b) Dacă dăm de 0 (am terminat înmulțirea cu 2), atunci transformăm toți 1' în 1'' mergând spre dreapta. Mergem la pasul 4.

Pas 4. (a) Dacă dăm de B, înseamnă că am avut x = 2^k, reluăm pasul 1(a) (adică parcurgem toată banda spre stânga transformând toți de 1'' și 0-ul la loc în 1, apoi acceptăm numărul).
(b) Dacă dăm de 1, mergem la pasul 1(b) (adică ne întoarcem stânga până la 0, pas dreapta și apoi reluăm pasul 2).

$\delta(q_0,1)=(q_1,0,\rightarrow)$ // *Pas* 1
$\delta(q_1,1)=(q_2,1'',\rightarrow)$ // 2^0
$\delta(q_2,B)=(q_3,B,\leftarrow)$ // *Pas* 1 (*a*)
$\delta(q_3,1'')=(q_3,1,\leftarrow)$
$\delta(q_3,0)=(q_4,1,\bullet), F=\{q_4\}$
$\delta(q_2,1)=(q_5,1,\leftarrow)$ // *Pas* 1 (*b*)
$\delta(q_5,1'')=(q_5,1'',\leftarrow)$
$\delta(q_5,0)=(q_6,0,\rightarrow)$
$\delta(q_6,1'')=(q_7,1',\rightarrow)$ // *Pas* 2
$\delta(q_7,1'')=(q_7,1'',\rightarrow)$

$\delta(q_7,1')=(q_7,1',\rightarrow)$
$\delta(q_7,1)=(q_8,1',\bullet)$
$\delta(q_8,1')=(q_8,1',\leftarrow)$
$\delta(q_8,1'')=(q_9,1'',\leftarrow)$ // *Pas* 3 (*a*)
$\delta(q_9,1'')=(q_9,1'',\leftarrow)$
$\delta(q_9,1')=(q_6,1',\rightarrow)$ // *reluam pas* 2
$\delta(q_8,0)=(q_{10},0,\rightarrow)$ // *Pas* 3 (*b*)
$\delta(q_{10},1')=(q_{10},1'',\rightarrow)$
$\delta(q_{10},B)=(q_3,B,\leftarrow)$ // *Pas* 4 (*a*), *reluam pas* 1(*a*)
$\delta(q_{10},1)=(q_5,1,\leftarrow)$ // *Pas* 4 (*b*), *reluam pas* 1(*b*)

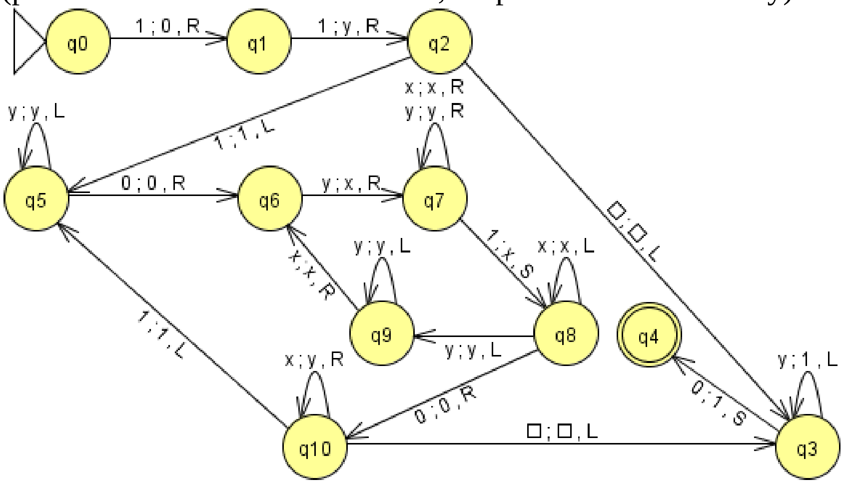
Complexitatea spațiu:
Avem numărul inițial și nu scriem nimic în plus. Rezultă **C.S. = x**.

Complexitatea timp:
Pas 1(b): Facem 5 pași (2 dreapta, 2 stânga, 1 dreapta).
Pas 2, 3(a): Revenim la pasul 2 de câte ori putem dubla numărul curent fără să-l depășim pe x, adică de $\log_2 x$ ori. Pentru a dubla un număr curent k, pentru fiecare unitate din k ne deplasăm dus-întors k căsuțe pe bandă; rezultă complexitatea dublării lui k este $2*k^2$, iar în cel mai rău caz k = x/2, adică ultima dublare are $2*(x/2)^2$ pași.
Pas 3(b): Parcurgem spre dreapta tot numărul dublat anterior, adică în cel mai rău caz aproximativ x pași.
Pas 4(b): Parcurgem spre stânga tot numărul dublat anterior, adică tot x pași.

Pas 4(a): Pentru demarcări parcurgem tot numărul, adică x paşi.

Total: $\underbrace{5}_{pas\,1} + \log_2 x * \left(\underbrace{2*\left(\frac{x}{2}\right)^2}_{pas\,2,3(a)} + \underbrace{x}_{pas\,3(b)} + \underbrace{x}_{pas\,4(b)} \right) + \underbrace{x}_{pas\,4(a)}$ => **C.T. = O(x^2 * log x)**.

Aceeaşi soluție, sub formă de graf:
(pentru marcare cu 1' am folosit x, iar pentru 1'' am folosit y)



(*) Rezolvarea (B) *(cu înmulțiri) [pe 2 benzi]*

Enunț: Să se accepte numerele x de forma 2^k, k număr natural.
Fie x = 8 (reprezentat prin 9 de 1). Inițial benzile maşinii Turing arată aşa:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…
2^k (a.î. $2^k < x \le 2^{k+1}$)	…	B	1	1	1	1	B	B	B	B	B	B	…

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Pe prima bandă transformăm primul 1 în 0, pas dreapta, apoi marcăm un 1 cu 1' și facem un pas dreapta.
(a) Dacă dăm de B, înseamnă că am avut x = 1 = 2^0, parcurgem toată banda spre stânga transformând 1' și 0 la loc în 1 și apoi acceptăm numărul.
(b) Dacă dăm de 1 facem un pas stânga pe prima bandă și mergem la pasul 2.

Pas 2. *(Dublăm numărul de 1-uri de pe banda a doua egalizându-l cu numărul de 1'-uri de pe prima bandă)* **(a)** Cât timp citim 1' pe prima bandă și 1 pe a doua bandă, parcurgem benzile simultan spre stânga.

(b) Apoi cât timp citim 1' pe prima bandă și B pe a doua bandă, scriem 1 pe a doua bandă și parcurgem benzile simultan spre stânga. Când ajungem la 0 pe prima bandă, facem un pas dreapta pe ambele benzi.

Pas 3. *(Dublăm numărul de 1'-uri de pe prima bandă, prin marcarea pe prima bandă a încă atâția de 1 câți sunt pe a doua bandă)* **(a)** Cât timp citim 1' pe prima bandă facem un pas dreapta (în timp ce pe a doua bandă staționăm pe primul 1).
(b) Apoi cât timp citim 1 pe ambele benzi, scriem 1' pe prima bandă și facem simultan un pas dreapta pe ambele benzi.

Pas 4. (a) Dacă dăm de B simultan pe ambele benzi înseamnă că numărul x trebuie acceptat. Parcurgem integral spre stânga banda a doua pentru a ne poziționa la începutul ei. Apoi (analog cu pasul 1a) parcurgem integral prima bandă spre stânga transformând 1' și 0 la loc în 1 și apoi acceptăm numărul.
(b) Dacă dăm de B doar pe a doua bandă și avem 1 pe prima bandă, facem simultan un pas stânga și reluăm pasul 2. (*Obs:* Dacă dăm de B doar pe prima bandă, înseamnă că numărul x trebuie respins, deci nu definim funcția de tranziție, iar mașina de va bloca.)

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \, Pas\, 1$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \, Pas\, 1\,(a)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right), \, F = \{q_4\}$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \, Pas\, 1\,(b)$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right) // \, Pas\, 2\,(a)$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right) // \, Pas\, 2\,(b)$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}0\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \, Pas\, 3\,(a)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}1'\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\right) // \, Pas\, 3\,(b)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_7, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right) // \, Pas\, 4\,(a)$$

$$\delta\left(q_7, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}\right) = \left(q_7, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_7, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right) // \, Pas\, 4\,(b),\, reluam\ pas\ 2$$

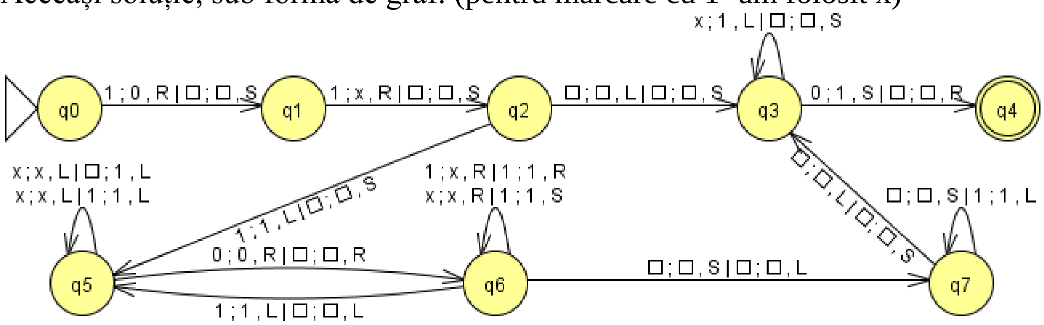
<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial și scriem în plus 2^k care este maxim x-1. Rezultă **C.S. = 2*x**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1(b): Facem 3 pași (2 dreapta, 1 stânga).

Pas 2, 3, 4(b): Revenim la pasul 2 de câte ori putem dubla numărul curent fără să-l depăşim pe x, adică de $\log_2 x$ ori. Dacă aveam deja n de 1 pe a doua bandă, la pasul 2 facem 2*n paşi, apoi la pasul 3 facem 2*(2*n) paşi, deci în total 6*n paşi. Iar n poate fi maxim (x–1)/2, rezultă 6*(x–1)/2 = 3*(x–1) paşi la ultima aplicare.
Pas 4(a): Parcurgem integral benzile, adică maxim (x–1) pentru banda a doua şi x pentru prima, rezultă maxim 2*x–1 paşi.

Total: $\underbrace{3}_{pas\,1} + \log_2 x * \left(\underbrace{2*\frac{x-1}{2}}_{pas\,2} + \underbrace{4*\frac{x-1}{2}}_{pas\,3} + \underbrace{1}_{pas\,4(b)} \right) + \underbrace{(x-1)+x}_{pas\,4(a)}$ => **C.T. = O(x*log x)**.

Aceeaşi soluţie, sub formă de graf: (pentru marcare cu 1' am folosit x)



Problema 10

Se dă un număr în baza 1. Să se transforme în baza 2.

Rezolvarea (A) *(cu resturi)*

Fie x = $10_{(10)}$ = $1010_{(2)}$. Iniţial banda maşinii Turing conţine numărul x în baza 1 (10 reprezentat prin 11 de 1), apoi vom adăuga la dreapta delimitatorul 2 şi scrierea numărului x în binar.

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

Înainte de pasul 4, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	z	u	z	u	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	0	1	0	B	...

Pas 1. (a) Marcăm primul 1 din x cu 1''.
(b) Sărind toţi 1', parcurgem integral spre dreapta x-ul, iar pentru fiecare doi de 1, pe primul îl marcăm cu 1', iar pe al doilea îl sărim, folosind două stări. Dacă avem deja 2-ul pe bandă, îl sărim (iar dacă dăm de B, scriem 2).

Pas 2. (a) Dacă am ajuns la 2 (sau B-ul unde am scris apoi 2) în starea în care trebuia să marcăm primul 1 din pereche (înseamnă că numărul curent este par, deci restul împărţirii la 2 este 0), mergem dreapta până la B (sărind toţi de "z" şi "u"), scriem pe bandă "z" (reprezentând restul 0), apoi mergem la pasul 3.

(b) Dacă am ajuns la 2 (sau B-ul unde am scris apoi 2) în starea în care trebuia să sărim al doilea 1 din pereche (înseamnă că numărul curent este impar, deci restul împărțirii la 2 este 1), mergem dreapta până la B (sărind toți de "z" și "u"), scriem pe bandă "u" (reprezentând restul 1), apoi mergem la pasul 3.

Pas 3. Parcurgem spre stânga banda sărind toți de "z" și "u", apoi când ajungem la 2 schimbăm starea și parcurgem spre stânga tot numărul x până la 1''. **(a)** Dacă am întâlnit 1 nemarcat pe parcurs, vom relua pasul 1(b) pentru a afla și celelalte resturi. **(b)** Dacă tot x-ul era marcat, atunci îl demarcăm complet mergând spre dreapta, iar când ajungem la 2, facem un pas dreapta și trecem la pasul 4.

(Exact în locul cuvântului format din literele "z" și "u" vrem să obținem oglinditul lui, dar scris cu cifrele 0 și 1, pentru că știm că primul rest obținut ar trebui să fie de fapt ultima cifră a scrierii în baza 2.)

Pas 4. (a) Dacă citim "z" scriem 0 (pentru a ști că valoarea de la această poziție din cuvânt urmează să fie interschimbată cu valoarea aflată pe poziția simetrică ei față de mijlocul cuvântului) și mergem într-o anumită stare în care știm că valoarea din stânga perechii ce va fi interschimbată este 0. Apoi parcurgem banda spre dreapta (sărind toți de "z" și "u", adică partea din cuvânt ne-oglindită încă), iar când ajungem la B sau la o cifră (0 sau 1) facem un pas stânga și mergem la pasul 5.
(b) Analog, dacă citim "u" scriem 1 și mergem într-o anumită stare în care știm că valoarea din stânga perechii ce va fi interschimbată este 1. Apoi parcurgem banda spre dreapta (sărind toți de "z" și "u", adică partea din cuvânt ne-oglindită încă), iar când ajungem la B sau la o cifră (0 sau 1) facem un pas stânga și mergem la pasul 5.
(c) Dacă citim o cifră (0 sau 1) (înseamnă că am obținut deja oglinditul întregului cuvânt, acesta având lungime pară), parcurgem toată banda spre stânga până la B apoi facem un pas dreapta și mergem în starea finală.

Pas 5. (a) Dacă citim "z" scriem în loc cifra "adusă" din stânga (0 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(a), respectiv 1 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(b)), apoi trecem într-o stare în care știm că cifra 0 trebuie "dusă" înapoi spre stânga. Parcurgem banda spre stânga sărind toți de "z" și "u", apoi când citim o cifră (indifferent dacă este 0 sau 1) scriem 0, facem un pas dreapta și reluăm pasul 4.
(b) Analog, dacă citim "u" scriem în loc cifra "adusă" din stânga (0 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(a), respectiv 1 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(b)), apoi trecem într-o stare în care știm că cifra 1 trebuie "dusă" înapoi spre stânga. Parcurgem banda spre stânga sărind toți de "z" și "u", apoi când citim o cifră (indifferent dacă este 0 sau 1) scriem 1, facem un pas dreapta și reluăm pasul 4.
(c) Dacă citim o cifră (0 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(a), respectiv 1 dacă am ajuns aici după aplicarea pasului 4(b)) (înseamnă că am obținut deja oglinditul întregului cuvânt, acesta având lungime impară), parcurgem toată banda spre stânga până la B apoi facem un pas dreapta și mergem în starea finală.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1'',\rightarrow)$ // *Pas* 1 (*a*)
$\delta(q_1,1')=(q_1,1',\rightarrow)$ // *Pas* 1 (*b*)
$\delta(q_1,1)=(q_2,1',\rightarrow)$ // *marcam*
$\delta(q_2,1')=(q_2,1',\rightarrow)$
$\delta(q_2,1)=(q_1,1,\rightarrow)$ // *sarim*

$\delta(q_1,B)=(q_3,2,\rightarrow)$ // *Pas* 2 (*a*)
$\delta(q_1,2)=(q_3,2,\rightarrow)$
$\delta(q_3,m)=(q_3,m,\rightarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_3,B)=(q_4,z,\bullet)$

$\delta(q_2,B)=(q_5,2,\rightarrow)$ // *Pas* 2 (*b*)
$\delta(q_2,2)=(q_5,2,\rightarrow)$
$\delta(q_5,m)=(q_5,m,\rightarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_5,B)=(q_4,u,\bullet)$

$\delta(q_4,m)=(q_4,m,\leftarrow), m\in\{z,u\}$ // *Pas* 3
$\delta(q_4,2)=(q_6,2,\leftarrow)$
$\delta(q_6,1')=(q_6,1',\leftarrow)$

$\delta(q_6,1)=(q_7,1,\leftarrow)$ // *Pas* 3 (*a*)
$\delta(q_7,n)=(q_7,n,\leftarrow), n\in\{1',1\}$
$\delta(q_7,1'')=(q_1,1'',\rightarrow)$ // *reluam pas* 1(*b*)

$\delta(q_6,1'')=(q_8,1,\rightarrow)$ // *Pas* 3 (*b*)
$\delta(q_8,1')=(q_8,1,\rightarrow)$ // *demarcam x*
$\delta(q_8,2)=(q_9,2,\rightarrow)$

$\delta(q_9,z)=(q_{10},0,\rightarrow)$ // *Pas* 4 (*a*)
$\delta(q_{10},m)=(q_{10},m,\rightarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_{10},B)=(q_{11},B,\leftarrow)$
$\delta(q_{10},0)=(q_{11},0,\leftarrow)$
$\delta(q_{10},1)=(q_{11},1,\leftarrow)$

$\delta(q_9,u)=(q_{12},1,\rightarrow)$ // *Pas* 4 (*b*)
$\delta(q_{12},m)=(q_{12},m,\rightarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_{12},B)=(q_{13},B,\leftarrow)$
$\delta(q_{12},0)=(q_{13},0,\leftarrow)$
$\delta(q_{12},1)=(q_{13},1,\leftarrow)$

$\delta(q_9,0)=(q_{16},0,\bullet)$ // *Pas* 4 (*c*)
$\delta(q_9,1)=(q_{16},1,\bullet)$
$\delta(q_{16},r)=(q_{16},r,\leftarrow), r\in\{0,1,2\}$
$\delta(q_{16},B)=(q_{17},B,\rightarrow)$, $F=\{q_{17}\}$

$\delta(q_{11},z)=(q_{14},0,\leftarrow)$ // *Pas* 5 (*a*)
$\delta(q_{13},z)=(q_{14},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{14},m)=(q_{14},m,\leftarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_{14},s)=(q_9,0,\rightarrow), s\in\{0,1\}$ // *reluam pas* 4

$\delta(q_{11},u)=(q_{15},0,\leftarrow)$ // *Pas* 5 (*b*)
$\delta(q_{13},u)=(q_{15},1,\leftarrow)$
$\delta(q_{15},m)=(q_{15},m,\leftarrow), m\in\{z,u\}$
$\delta(q_{15},s)=(q_9,1,\rightarrow), s\in\{0,1\}$ // *reluam pas* 4

$\delta(q_{11},0)=(q_{16},0,\bullet)$ // *Pas* 5 (*c*)
$\delta(q_{13},1)=(q_{16},1,\bullet)$ // *ca la pas* 4(*c*)

Complexitatea spațiu:
Avem numărul inițial și pentru scrierea lui în baza 2 avem nevoie de maxim $\log_2 x$ căsuțe.
Rezultă **C.S. = x + log x**.

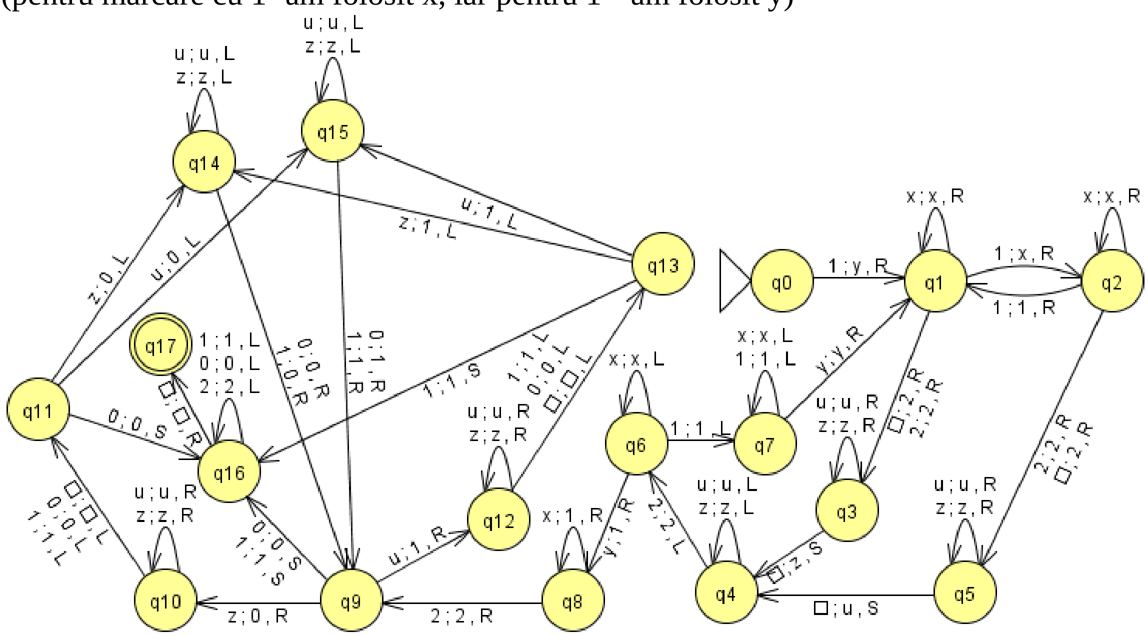
Complexitatea timp:
Revenim la pasul 1(b) pentru fiecare rest care trebuie calculat (adică de maxim $\log_2 x$ ori), iar la fiecare aplicare a lui parcurgem integral numărul x.
La o aplicare a pasului 2(a) sau 2(b) parcurgem maxim $\log_2 x$ căsuțe pe bandă.

La o aplicare a pasului 3 parcurgem maxim ($\log_2 x + x$) căsuțe pe bandă, apoi reluăm pasul 1(b) sau trecem la pasul 4.
Pentru a oglindi rezultatul, repetăm pașii 4+5 de ($\log_2 x$)/2 ori, iar de fiecare dată parcurgem dus-întors maxim $\log_2 x$ căsuțe pe bandă.
Total:

$$\log_2(x)*\left[\underbrace{x}_{pas\,1(b)} + \underbrace{\log_2(x)}_{pas\,2\,(a)\,sau\,(b)} + \underbrace{(\log_2(x)+x)}_{pas\,3}\right] + \frac{\log_2(x)}{2}*\left[\underbrace{2*\log_2(x)}_{\substack{pas\,4\,(a)\,sau\,(b)\\ si\;pas\,5\,(a)\,sau\,(b)}}\right] + \underbrace{\left(\frac{\log_2(x)}{2}+x\right)}_{pas\,4\,(c)\,sau\,5\,(c)}$$

Rezultă **C.T. = O(x * log x)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcare cu 1' am folosit x, iar pentru 1'' am folosit y)



(*) Rezolvarea (A) *(cu resturi) [pe 2 benzi]*

Enunț: Se dă un număr în baza 1. Să se transforme în baza 2.
Fie x = $10_{(10)} = 1010_{(2)}$. Inițial prima bandă a mașinii Turing conține numărul x în baza 1 (10 reprezentat prin 11 de 1), iar a doua bandă este vidă (are doar blank-uri):

$x_{(1)}$	...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
	...	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

La final, benzile vor arăta astfel:

$x_{(1)}$	...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
$x_{(2)}$	...	B	1	0	1	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Marcând numărul dat din doi în doi, aflăm restul împărțirii numărului la 2 și îl scriem pe a doua bandă. Apoi împărțim câtul anterior (partea nemarcată din număr) la doi și

obținem un nou rest pe care îl scriem pe banda a doua la început (în stânga a ceea ce am scris anterior).

Pas 1. Marcăm primul 1 din x cu 1’’ și facem un pas dreapta pe prima bandă.
(Pe a doua bandă citim B, scriem tot B în loc și staționăm.)

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$$

Pas 2. Pe a doua bandă staționăm, iar pe prima o parcurgem integral sărind 1-urile marcate, iar pentru fiecare doi de 1 nemarcați, pe primul îl marcăm, iar pe al doilea îl sărim.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \textit{sarim } 1-\textit{urile marcate anterior}$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \textit{marcam primul } 1$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \textit{sarim } 1-\textit{urile marcate anterior}$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right) // \textit{sarim al doilea } 1 \textit{ si reluam}$$

Pas 3(a). Dacă pe prima bandă citim B în starea în care trebuia să marcăm primul 1, înseamnă că am obținut restul 0, deci pe a doua bandă scriem 0 și facem un pas stânga (pentru a scrie următorul rest pe care îl vom obține), iar pe prima bandă facem un pas stânga pentru a ne poziționa pe ultima cifră din număr (1 marcat sau nemarcat). Mergem la pas 4.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}B\\0\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 3(b). Dacă pe prima bandă citim B în starea în care trebuia să sărim al doilea 1, înseamnă că am obținut restul 1, deci pe a doua bandă scriem 1 și facem un pas stânga (pentru a scrie următorul rest pe care îl vom obține), iar pe prima bandă facem un pas stânga pentru a ne poziționa pe ultima cifră din număr (1 marcat sau nemarcat). Mergem la pas 4.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 4. Pe a doua bandă staționăm (citim B, scriem B în loc), iar pe prima bandă vrem să ne întoarcem stânga până la începutul numărului (până la 1’’) apoi să facem un pas dreapta. Cât timp parcurgem 1-uri marcate păstrăm starea, iar la primul 1 nemarcat întâlnit schimbăm starea (pentru a ști că nu s-a terminat calculul), apoi în noua stare parcurgem în continuare spre stânga toate 1-urile marcate și nemarcate, apoi reluăm pasul 2. Dacă tot numărul este marcat (ajungem la 1’’ fără să fi găsit vreun 1 nemarcat), înseamnă că s-a terminat calculul și mergem în starea finală.

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) // \textit{am gasit } 1 \textit{ nemarcat}$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) \quad ; \quad \delta\left(q_4, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) // \textit{reluam pasul } 2$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) // \textit{tot numarul marcat}$$

Pas 5. Demarcăm tot x-ul mergând spre dreapta pe prima bandă, apoi îl parcurgem integral spre stânga și facem un pas dreapta pe ambele benzi pentru a rămâne la începutul lor.

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}1'\\B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) // \textit{demarcam tot } x$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right)$$

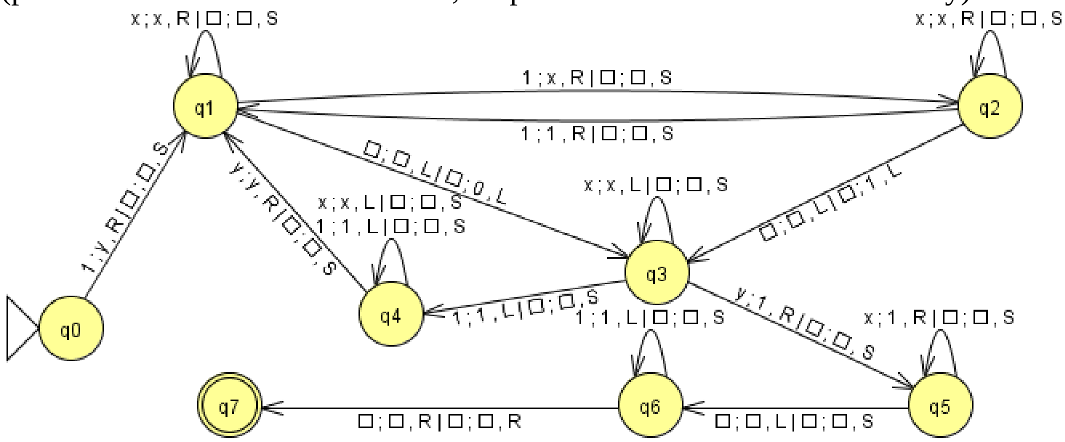
$$\delta\left(q_6, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_7, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \rightarrow\end{matrix}\right), F = \{q_7\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial x și scriem rezultatul care ocupă maxim $\log_2 x$.
Rezultă **C.S. = x + $\log_2$x**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată și ne deplasăm o poziție. Rezultă 1.
Pas 2: Se repetă pentru fiecare caracter scris pe a doua bandă, deci de maxim $\log_2 x$ ori. De fiecare dată parcurgem de la stânga la dreapta tot numărul x. Rezultă x * $\log_2 x$.
Pas 3: Se repetă tot de $\log_2 x$ ori, dar ne deplasăm cu o singură poziție. Rezultă $\log_2 x$.
Pas 4: Se repetă de $\log_2 x$ ori și de fiecare dată parcurgem de la dreapta spre stânga tot numărul x. Rezultă x * $\log_2 x$.
Pas 5: Parcurgem dus-întors x-ul. Rezultă 2*x pași.

Total: $\underbrace{1}_{pas\,1} + \log_2(x) * \left[\underbrace{x}_{pas\,2} + \underbrace{1}_{pas\,3} + \underbrace{x}_{pas\,4}\right] + \underbrace{2*x}_{pas\,5}$ Rezultă **C.T. = O(x * log x)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit x, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit y)



Rezolvarea (B) *(cu adunări)*

Enunț: Se dă un număr în baza 1. Să se transforme în baza 2.

Ideea de rezolvare: Pentru fiecare 1 din x cu excepția primului, vom face adunarea modulo 2 la rezultat cu o unitate.

Pas 1. Marcăm cu 1’’ primul 1 din x, parcurgem tot numărul spre dreapta până la B, apoi scriem 2, facem un pas dreapta și scriem 0 și stăm pe loc.

Pas 2. Parcurgem banda spre stânga sărind toți de 0, 1 și 2, iar când ajungem la 1’’ sau 1’ facem un pas dreapta.

Pas 3. (a) Dacă mai avem 1 nemarcat din x, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta până la B, un pas stânga și mergem la pasul 4.

(b) Dacă tot x este marcat (suntem pe 2), mergem stânga și demarcăm tot x-ul apoi mergem în starea finală.

Pas 4. *(Adunăm o unitate modulo 2 la rezultat.)*

(a) Cât timp citim 1 îl transformăm în 0 și facem un pas stânga, pas 4(b).

(b) Apoi, dacă întâlnim un 0, îl transformăm în 1 și mergem la pasul 2.

(c) Dacă dăm de 2 (după ce am transformat toți de 1 în 0), facem un pas dreapta, transformăm primul 0 la loc în 1, apoi parcurgem banda spre dreapta până la B (sărim toate 0-urile), adăugăm încă un 0 pe bandă și mergem la pasul 2.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1'',\rightarrow)$ // *Pas* 1	$\delta(q_6,1)=(q_6,0,\leftarrow)$ // *Pas* 4 (a)
$\delta(q_1,1)=(q_1,1,\rightarrow)$	$\delta(q_6,0)=(q_3,1,\leftarrow)$ // *Pas* 4 (b)
$\delta(q_1,B)=(q_2,2,\rightarrow)$	$\delta(q_6,2)=(q_7,2,\rightarrow)$ // *Pas* 4 (c)
$\delta(q_2,B)=(q_3,0,\bullet)$	$\delta(q_7,0)=(q_8,1,\rightarrow)$
$\delta(q_3,m)=(q_3,m,\leftarrow), m\in\{0,1,2\}$ // *Pas* 2	$\delta(q_8,0)=(q_8,0,\rightarrow)$
$\delta(q_3,n)=(q_4,n,\rightarrow), n\in\{1'',1'\}$	$\delta(q_8,B)=(q_3,0,\bullet)$
$\delta(q_4,1)=(q_5,1',\rightarrow)$ // *Pas* 3 (a)	$\delta(q_4,2)=(q_9,2,\leftarrow)$ // *Pas* 3 (b)
$\delta(q_5,m)=(q_5,m,\rightarrow), m\in\{0,1,2\}$	$\delta(q_9,1')=(q_9,1,\leftarrow)$
$\delta(q_5,B)=(q_6,B,\leftarrow)$	$\delta(q_9,1'')=(q_{10},1,\bullet), F=\{q_{10}\}$

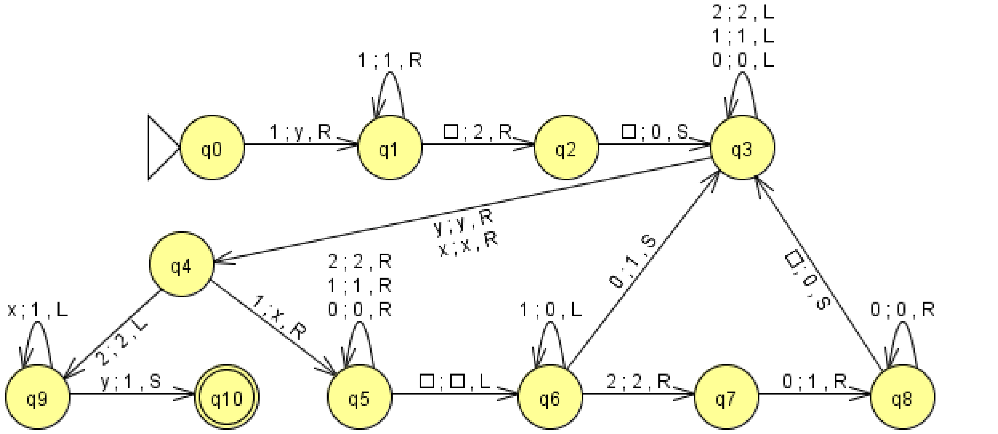
<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial x și scriem rezultatul care ocupă maxim $\log_2 x$.
Rezultă **C.S. = x + $\mathbf{log_2}$x**.

<u>Complexitatea timp:</u>

$$Total: \underbrace{x+x}_{pasii\,1+2} + x * \left[\underbrace{(x+\log_2 x)}_{pas\,3(a)} + \underbrace{\log_2(x)}_{pas\,4(a)} + \underbrace{1}_{pas\,4(b)} + \underbrace{\log_2(x)}_{pas\,4(c)} + \underbrace{(\log_2 x + x)}_{pas\,2} \right] + \underbrace{x}_{pas\,3(b)}$$

Rezultă **C.T. = O($\mathbf{x^2}$)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit x, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit y)



(*) Rezolvarea (B) *(cu adunări) [pe 2 benzi]*

Enunț: Se dă un număr în baza 1. Să se transforme în baza 2.
Fie x = $10_{(10)}$ = $1010_{(2)}$. Inițial prima bandă a mașinii Turing conține numărul x în baza 1 (10 reprezentat prin 11 de 1), iar a doua bandă este vidă (are doar blank-uri):

$x_{(1)}$	...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
	...	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	...

La final, benzile vor arăta astfel:

$x_{(1)}$	...	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...
$x_{(2)}$	...	B	1	0	1	0	B	B	B	B	B	B	B	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pentru fiecare 1 din x cu excepția primului, vom face adunarea modulo 2 la rezultat cu o unitate.

Pas 1. Marcăm cu 1’’ primul 1 din număr și facem un pas dreapta pe prima bandă. Pe banda a doua scriem un 0 (rezultatul inițial, ca să putem face adunarea) și facem un pas dreapta.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1'' \rightarrow\\0 \,,\rightarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 2(i). Pentru fiecare 1 nemarcat din x, pe prima bandă îl marcăm și apoi staționăm, iar pe banda a doua facem un pas stânga (eram pe B, iar acum vom fi pe ultimul caracter din rezultat) și mergem la pasul 3.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \leftarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 3(a). Cât timp citim 1 pe banda a doua, îl transformăm în 0 și facem un pas stânga.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1'\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \leftarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 3(b,c). Dacă citim 0 sau B pe banda a doua, îl transformăm în 1 și mergem la pasul 4.

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\ 0\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \rightarrow\end{matrix}\right) \quad ; \quad \delta\left(q_2, \begin{matrix}1'\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \rightarrow\end{matrix}\right)$$

Pas 4. Pe banda a doua ne deplasăm dreapta sărind toți de 0. Când citim B pe banda a doua, scriem B și staționăm, iar pe prima bandă citim și scriem 1'-ul pe care staționasem și facem un pas dreapta, apoi reluăm pasul 2.

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\ 0\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1'\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \rightarrow\end{matrix}\right) \quad ; \quad \delta\left(q_3, \begin{matrix}1'\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1'\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) // \textit{reluam pasul } 2$$

Pas 2(ii). Când tot numărul e marcat (citim B pe prima bandă), parcurgem prima bandă integral spre stânga demarcând-o, apoi parcurgem integral spre stânga a doua bandă, facem un pas dreapta pe ambele benzi și mergem în starea finală.

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) \qquad \delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\ 0\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B\\ 0\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \leftarrow\end{matrix}\right)$$

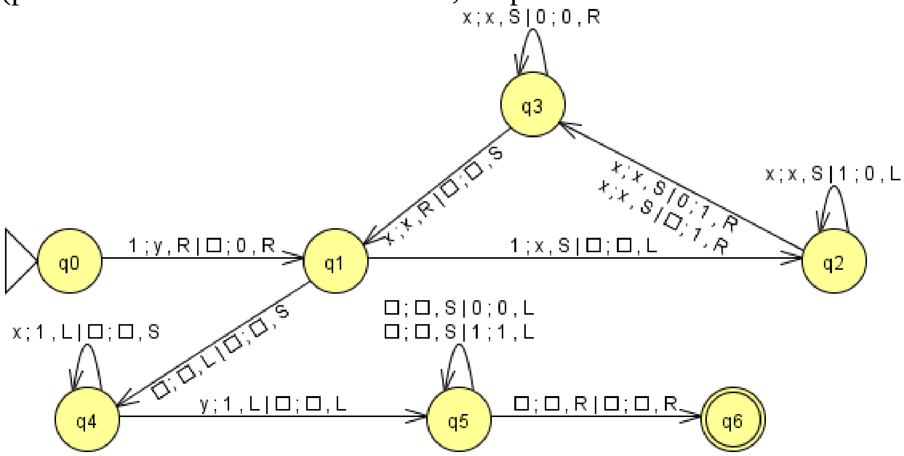
$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1'\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \bullet\end{matrix}\right) \qquad \delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B\\ 1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\ \leftarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1''\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\ \leftarrow\end{matrix}\right) \qquad \delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\ \rightarrow\end{matrix}\right), F = \{q_6\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numărul inițial x și scriem rezultatul care ocupă maxim $\log_2 x$.
Rezultă **C.S. = x + $\mathbf{\log_2 x}$**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată și ne deplasăm o poziție. Rezultă 1.
Pas 2. Se repetă de x ori și ne deplasăm câte o poziție. Rezultă x.
Pas 3. Se repetă de x ori și parcurgem de la dreapta la stânga maxim tot rezultatul. Rezultă $x * \log_2 x$.
Pas 4. Se repetă de x ori și parcurgem de la stânga la dreapta maxim tot rezultatul. Rezultă $x * \log_2 x$.
Total: **C.T. = O(x * log x)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1’ am folosit x, iar pentru marcarea cu 1’’ am folosit y)



(*) Problema 11

Se dau două numere naturale x și y. Să se calculeze ridicarea la putere (y^x).

Fie x = 3, y = 2 (reprezentate prin 4, respectiv 3 de 1). Inițial banda arată așa:

...	B	1	1	1	1	0	1	1	1	B	...

La final, banda va arăta astfel:

...	B	1	1	1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	...

<u>Ideea de rezolvare:</u>
După delimitatorul 2, vom calcula pe rând, pe măsură ce marcăm câte un 1 din x, produsul dintre y și rezultatul parțial calculat anterior (y la o putere mai mică). Nu vrem să concatenăm rezultatele intermediare, ci vrem să scriem noul rezultat parțial astfel încât să folosim și 1-urile scrise deja pentru rezultatul parțial calculat la pasul anterior și să adăugăm doar atâtea câte sunt necesare până la rezultatul curent.
Deci la un pas oarecare vrem să calculăm y^k, dar avem deja scris y^{k-1}, deci trebuie să adăugăm doar diferența dintre ele, adică $y^k – y^{k-1} = y^{k-1} * (y-1)$. Deci practic trebuie să înmulțim fostul rezultat parțial (y^{k-1}) aflat după delimitatorul 2 cu numărul y-1 pe care îl găsim între delimitatorii 0 și 2 (dar la înmulțire eliminăm un 1 pentru scrierea specială în baza 1 și încă un 1 pentru că trebuie să înmulțim doar cu y-1, nu cu tot y, deci vom marca cu 1’’ primii doi de 1 din y).

Pas 1. Marcăm doi de 1 din x cu 1’ (unul pentru scrierea specială în baza 1 și celălalt pentru că la finalul pasului vom fi calculat deja y^1), ne deplasăm la dreapta (sărim x-ul nemarcat, schimbăm starea pentru 0), copiem tot y-ul dintre 0 și 2 la finalul benzii (deci am calculat y^1) după ce scriem delimitatorul 2. Pas dreapta și marcăm cu 1’’ primul 1 din rezultatul parțial (copia lui y din dreapta lui 2), acesta fiind 1-ul în plus pentru rezultatul final și nu trebuie folosit la înmulțiri. Ne deplasăm stânga și demarcăm tot y-ul dintre 0 și 2 (care era marcat în urma copierii) și marcăm cu 1’’ primii doi de 1 din y din dreapta lui

0 (cei doi care nu trebuie să participe la înmulțire, după cum am explicat mai sus), apoi de deplasăm stânga până la 1’ din x și facem un pas dreapta.

$\delta(q_0,1)=(q_1,1',\rightarrow)\,//\,marcam\,1-ul\ in\ plus\ din\ x$

$\delta(q_1,1)=(q_2,1',\rightarrow)\,//\,marcam\ un\,1\ din\ x\ pt\ copierea\ lui\ y$

$\delta(q_2,1)=(q_2,1,\rightarrow)\,//\ parcurgem\ x\ nemarcat$

$\delta(q_2,0)=(q_3,0,\rightarrow)$

$\delta(q_3,1)=(q_4,1',\rightarrow)\,//\,marcam\ din\ y\ pentru\ a-l\ copia$

$\delta(q_4,1)=(q_4,1,\rightarrow)\,//\ parcurgem\ y\ nemarcat$

$\delta(q_4,B)=(q_5,2,\rightarrow)\quad;\quad\delta(q_4,2)=(q_5,2,\rightarrow)$

$\delta(q_5,1)=(q_5,1,\rightarrow)\,//\ parcurgem\ partea\ scrisa\ deja\ din\ copia\ lui\ y$

$\delta(q_5,B)=(q_6,1,\leftarrow)\,//\,scriem\ pt\ copia\ lui\ y$

$\delta(q_6,1)=(q_6,1,\leftarrow),\delta(q_6,2)=(q_6,2,\leftarrow)\,//\ parcurgem\ ce\ am\ scris\ si\ y-ul\ necopiat\ inca$

$\delta(q_6,1')=(q_3,1',\rightarrow)\,//\,reluam\ copierea\ lui\ y$

$\delta(q_3,2)=(q_7,2,\rightarrow)\,//\ y\ este\ complet\ marcat,\ deci\ copiat$

$\delta(q_7,1)=(q_8,1'',\leftarrow)\,//\,marcam\,1-ul\ in\ plus\ de\ la\ rezultat\ final$

$\delta(q_8,2)=(q_9,2,\leftarrow)$

$\delta(q_9,1')=(q_9,1,\leftarrow)\,//\,demarcam\ tot\ y$

$\delta(q_9,0)=(q_{10},0,\rightarrow)$

$\delta(q_{10},1)=(q_{11},1'',\rightarrow),\delta(q_{11},1)=(q_{12},1'',\leftarrow)\,//\,marcam\ primii\ doi\ de\,1\ din\ y$

$\delta(q_{12},1'')=(q_{12},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{12},0)=(q_{12},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{12},1)=(q_{12},1,\leftarrow)\,//\ parcurgem\ x\ nemarcat$

$\delta(q_{12},1')=(q_{13},1',\rightarrow)$

Pas 2(a). Pentru fiecare 1 nemarcat din x, îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta, sărim 1-urile nemarcate din x, 0-ul și cei doi de 1’’ din y și mergem la pasul 3.

$\delta(q_{13},1)=(q_{14},1',\rightarrow)\,//\,marcam\ din\ x$

$\delta(q_{14},1)=(q_{14},1,\rightarrow)\,//\ parcurgem\ x\ nemarcat$

$\delta(q_{14},0)=(q_{15},0,\rightarrow)$

$\delta(q_{15},1'')=(q_{15},1'',\rightarrow)$

Pas 3(a). Pentru fiecare 1 nemarcat din y (dintre 0 și 2), îl marcăm cu 1’, ne deplasăm dreapta, sărim 1-urile nemarcate din y, 2-ul și 1’’-ul din fostul rezultat parțial și mergem la pasul 4.

$\delta(q_{15},1) = (q_{16},1',\rightarrow)$ // *marcam din y*

$\delta(q_{16},1) = (q_{16},1,\rightarrow)$ // *parcurgem y nemarcat*

$\delta(q_{16},2) = (q_{16},2,\rightarrow)$

$\delta(q_{16},1'') = (q_{17},1'',\rightarrow)$

Pas 4(a). (Vrem să copiem fostul rezultat parțial la finalul benzii, concatenat cu el însuși sau cu ultima lui copie.) Pentru fiecare 1 nemarcat din y^{x-1} (sau generic din y^{k-1} la aplicarea nr k a pasului) din dreapta lui 2, îl marcăm cu 1', ne deplasăm dreapta până la B (sărim 1-urile necopiate încă și 1'-urile scrise la pasul curent), scriem 1'' (nu putem scrie 1 pentru a nu-i încurca cu cei necopiați încă și nu putem scrie 1' pentru a nu-i încurca cu cei care trebuie re-copiați pentru un alt 1 din y). (Vom face copierea de la stânga la dreapta.) Apoi ne deplasăm stânga, sărim toate 1''-urile (ce am scris), apoi toate 1-urile (ce urmează a fi copiat), iar când întâlnim 1' facem un pas dreapta și reluăm pasul 4.

$\delta(q_{17},1) = (q_{18},1',\rightarrow)$ // *marcam din* y^{x-1}

$\delta(q_{18},1) = (q_{18},1,\rightarrow)$ // *parcurgem ce e necopiat inca*

$\delta(q_{18},1'') = (q_{18},1'',\rightarrow)$ // *parcurgem ce am scris deja*

$\delta(q_{18},B) = (q_{19},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{19},1'') = (q_{19},1'',\leftarrow)$ // *parcurgem ce am scris deja*

$\delta(q_{19},1) = (q_{19},1,\leftarrow)$ // *parcurgem ce e necopiat inca*

$\delta(q_{19},1') = (q_{17},1',\rightarrow)$ // *reluam pasul* $4(a)$

Pas 4(b). Când am terminat copierea rezultatului parțial anterior suntem pe 1'' din dreapta 1'-urilor, ne deplasăm stânga și demarcăm toți de 1', apoi sărim un 1'' (cel în plus pentru scrierea în unar) din noul rezultat parțial, 2-ul și toți de 1 din y) până la 1' din y, facem un pas dreapta și reluăm pasul 3(a).

$\delta(q_{17},1'') = (q_{20},1''\leftarrow)$ // y^{x-1} *complet marcat si copiat*

$\delta(q_{20},1') = (q_{20},1,\leftarrow)$ // *demarcam* y^{x-1}

$\delta(q_{20},1'') = (q_{21},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{21},2) = (q_{22},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{22},1) = (q_{22},1,\leftarrow)$ // *parcurgem y nemarcat*

$\delta(q_{22},1') = (q_{15},1',\rightarrow)$ // *reluam pasul* $3(a)$

Pas 3(b). Când toți de 1 din y (dintre 0 și 2) sunt marcați (suntem pe 2), ne deplasăm dreapta, sărim un 1'', sărim toți de 1 (demarcați anterior, după terminarea copierii), demarcăm toți de 1'', ajungem la B, facem un pas stânga. Parcurgem spre stânga, sărim toți de 1 din noul rezultat parțial, sărim un 1'', un 2, demarcăm pe toți de 1' din y, apoi sărim spre stânga cei doi de 1'' din y, 0-ul și toți de 1 din x, iar când ajungem la 1' din x facem un pas dreapta și reluăm pasul 2(i).

$\delta(q_{15},2) = (q_{23},2,\rightarrow)$ // *y complet marcat, inmultirea* $y * y^{x-1}$ *efectuata*

$\delta(q_{23},1'') = (q_{24},1'',\rightarrow)$

$\delta(q_{24},1) = (q_{24},1,\rightarrow)$ // *parcurgem fostul rezultat (demarcat anterior la pasul* 4)

$\delta(q_{24},1'') = (q_{24},1,\rightarrow)$ // *demarcam ce am scris pt* $y^x - y^{x-1}$

$\delta(q_{24},B) = (q_{25},B,\leftarrow)$

$\delta(q_{25},1) = (q_{25},1,\leftarrow)$ // *parcurgem tot* y^x

$\delta(q_{25},1'') = (q_{25},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{25},2) = (q_{26},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{26},1') = (q_{26},1,\leftarrow)$ // *demarcam y*

$\delta(q_{26},1'') = (q_{26},1'',\leftarrow)$

$\delta(q_{26},0) = (q_{27},0,\leftarrow)$

$\delta(q_{27},1) = (q_{27},1,\leftarrow)$ // *parcurgem x nemarcat*

$\delta(q_{27},1') = (q_{13},1',\rightarrow)$ // *reluam pasul* 2(*i*)

Pas 2(b). Când toți de 1 din x sunt marcați am terminat calculul. Suntem pe 0 (la finalul lui x), ne deplasăm stânga și demarcăm toți de 1' din x, apoi ajungem la B, parcurgem spre dreapta sărind 0, 2 și 1-urile, iar 1''-urile de la y și de la rezultat le demarcăm, apoi când ajungem la B din dreapta, parcurgem integral spre stânga toată banda, un pas dreapta și mergem în starea finală.

$\delta(q_{13},0) = (q_{28},0,\leftarrow)$ // *x complet marcat, gata calculul* y^x

$\delta(q_{28},1') = (q_{28},1,\leftarrow)$ // *demarcam x*

$\delta(q_{28},B) = (q_{29},B,\rightarrow)$

$\delta(q_{29},1) = (q_{29},1,\rightarrow)$; $\delta(q_{29},0) = (q_{29},0,\rightarrow)$; $\delta(q_{29},2) = (q_{29},2,\rightarrow)$

$\delta(q_{29},1'') = (q_{29},1,\rightarrow)$ // *demarcam* 1 – *urile speciale din y si din rezultat*

$\delta(q_{29},B) = (q_{30},B,\leftarrow)$

$\delta(q_{30},1) = (q_{30},1,\leftarrow)$; $\delta(q_{30},0) = (q_{30},0,\leftarrow)$; $\delta(q_{30},2) = (q_{30},2,\leftarrow)$

$\delta(q_{30},B) = (q_{31},B,\rightarrow), F = \{q_{31}\}$

<u>Complexitatea spațiu:</u>
Avem numerele inițiale și rezultatul calculat. Rezultă **C.S. = x + y + x*y**.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pas 1: Se execută o singură dată. Ne deplasăm x+y pentru a scrie delimitatorul și încă y*y pentru a copia y-ul la finalul benzii. Rezultă $x+y+y^2$.
Pas 2: Se repetă de x ori și ne deplasăm maxim x căsuțe, apoi executăm pasul 3, apoi pentru demarcările finale de la pasul 2(b) ne deplasăm toată banda dus-întors $2*(x+y+y^x)$.
Pas 3. Se repetă de y ori și ne deplasăm maxim y căsuțe, apoi executăm pasul 4, apoi pentru demarcarea de la pasul 3(b) ne deplasăm $2*y^x+y+x$ pași.

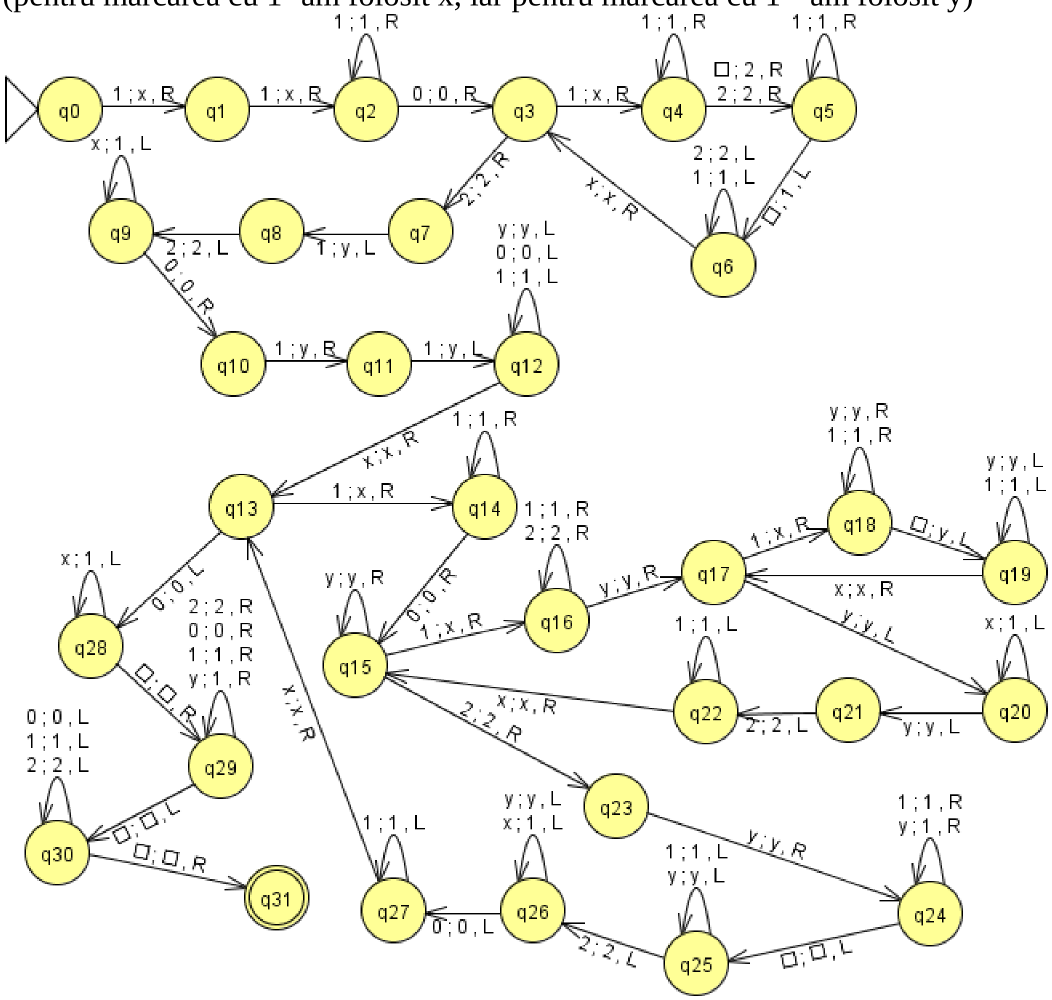
Pas 4: Se repetă de y^{x-1} ori și ne deplasăm dus-întors maxim $2*(y^x - y^{x-1})$ căsuțe. Apoi pentru demarcare ne deplasăm $y^{x-1}+y$.

$$Total: \quad C.T. = \underbrace{\left(x+y+y^2\right)}_{pas1} +$$

$$+\underbrace{x*\left\{x+\underbrace{y*\left[y+\underbrace{y^{x-1}*\left(y^x-y^{x-1}\right)}_{pas\,4\,(a)}+\underbrace{\left(y^{x-1}+y\right)}_{pas\,4\,(b)}\right]}_{pas\,3\,(a)}+\underbrace{\left(2*y^x+y+x\right)}_{pas\,3\,(b)}\right\}}_{pas\,2\,(a)}+\underbrace{2*\left(x+y+y^x\right)}_{pas\,2\,(b)}$$

Funcția dominantă este $x*y*y^{x-1}*y^x$ (pentru că paranteza de la pasul 4(a) < y^x)
=> Rezultă **C. T. = O(x * y^{2x})**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1' am folosit x, iar pentru marcarea cu 1'' am folosit y)



~ Seminar 5 ~

Problema 12

Se dă un număr natural x. Să se calculeze $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Rezolvarea (A) *(prin încercări) [pe 2 benzi]*

Fie x = 10 (reprezentat prin 11 de 1). Rezultatul va fi 3 (reprezentat prin 4 de 1).
Inițial benzile mașinii Turing arată așa:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…	y^2
$\sqrt{x}$	…	B	1	1	1	1	B	B	B	B	B	B	B	B	…	$y \in \{0,1,2,3,\dots,\sqrt{x}\}$

<u>Ideea de rezolvare:</u>
Pas 1. Pe prima bandă transformăm primul 1 în 1'' și facem un pas dreapta, iar pe a doua bandă adăugăm un 1 și stăm pe loc.
Pas 2(a). Dacă dăm de 1 pe prima bandă, atunci vom calcula pătratul numărului de pe B2 prin parcurgerea unităților din B1 (pentru a testa dacă y^2 a ajuns la valoarea lui x).
Pas (*). Pentru fiecare 1 nemarcat din B2, îl marcăm cu 1', mergem pe B2 în stânga până la B (sărind toți 1'), un pas dreapta, apoi parcurgem simultan B1 și B2.
(*a) Dacă întâlnim B doar pe B2, mergem la pasul 3.
(*b) Dacă întâlnim B doar pe B1, mergem la pasul 4.
(*c) Dacă întâlnim B simultan pe B1 și pe B2, facem un pas stânga pe B2 pentru a verifica dacă acea bandă este complet marcată. **(*i)** Dacă da (avem fix $y^2 = x$), adăugăm un 1 în plus pe B2 (cel în plus de la scrierea în unar), apoi mergem la pasul 5. **(*ii)** Dacă nu, mergem la pasul 4.
Pas 3. Pe B2 mergem stânga (sărim toți de 1) până la 1', un pas dreapta, reluăm pasul (*).
Pas 4. Pe B2 mergem dreapta până la B, apoi mergem la pasul 5. (Pătratul numărului curent de pe B2 este strict mai mare decât x, deci ar trebui să scădem o unitate pentru a avea partea întreagă inferioară a radicalului, dar păstrăm acel 1 ca fiind cel în plus la scrierea specială în unar.)
Pas 5. Mergem stânga până la începutul ambelor benzi demarcând tot și trecem în stare finală.
Pas (**). Când B2 este complet marcat (adică s-a terminat for-ul de la pasul (*)), adăugăm un 1 pe B2, demarcăm spre stânga tot B2. Pe B1 mergem stânga până la 1'', pas dreapta pe ambele benzi și reluăm pasul 2(a).
Pas 2(b). Dacă dăm de B pe prima bandă (am avut x=0), atunci demarcăm 1'' de pe prima bandă și mergem în starea finală (răspunsul de pe a doua bandă este tot 0, reprezentat printr-un 1).

$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1''\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$ // *Pas* 1

$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\bullet\end{matrix}\right)$ // *Pas* 2(*a*), (*)

$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1\\m\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1\\m\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\right), m \in \{1',1\}$

$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* (*a)

$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* 3

$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$ // *reluam* (*)

$\delta\left(q_3, \begin{matrix}B\\m\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B\\m\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\bullet\end{matrix}\right), m \in \{1',1\}$ // *Pas* (*b)

$\delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\m\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B\\m\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right), m \in \{1',1\}$ // *Pas* 4

$\delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1\\m\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right), m \in \{1',1\}$ // *Pas* 5

$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_6, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}\right) = \left(q_7, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right), F = \{q_7\}$

$\delta\left(q_3, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_8, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* (*c)

$\delta\left(q_8, \begin{matrix}B\\1'\end{matrix}\right) = \left(q_9, \begin{matrix}B\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\rightarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* (*i)

$\delta\left(q_9, \begin{matrix}B\\B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_8, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\bullet\end{matrix}\right)$ // *Pas* (*ii)

$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_{10}, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* (**)

$\delta\left(q_{10}, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}\right) = \left(q_{10}, \begin{matrix}1\\1'\end{matrix}, \begin{matrix}\bullet\\\leftarrow\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_{10}, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}\right) = \left(q_{10}, \begin{matrix}1\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\bullet\end{matrix}\right)$

$\delta\left(q_{10}, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1''\\B\end{matrix}, \begin{matrix}\rightarrow\\\rightarrow\end{matrix}\right)$ // *reluam* 2(*a*)

$\delta\left(q_1, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B\\1\end{matrix}, \begin{matrix}\leftarrow\\\leftarrow\end{matrix}\right)$ // *Pas* 2 (*b*)

Complexitatea spațiu:

Avem numărul inițial și rezultatul calculat. Rezultă **C.S. =** $x + \sqrt{x}$.

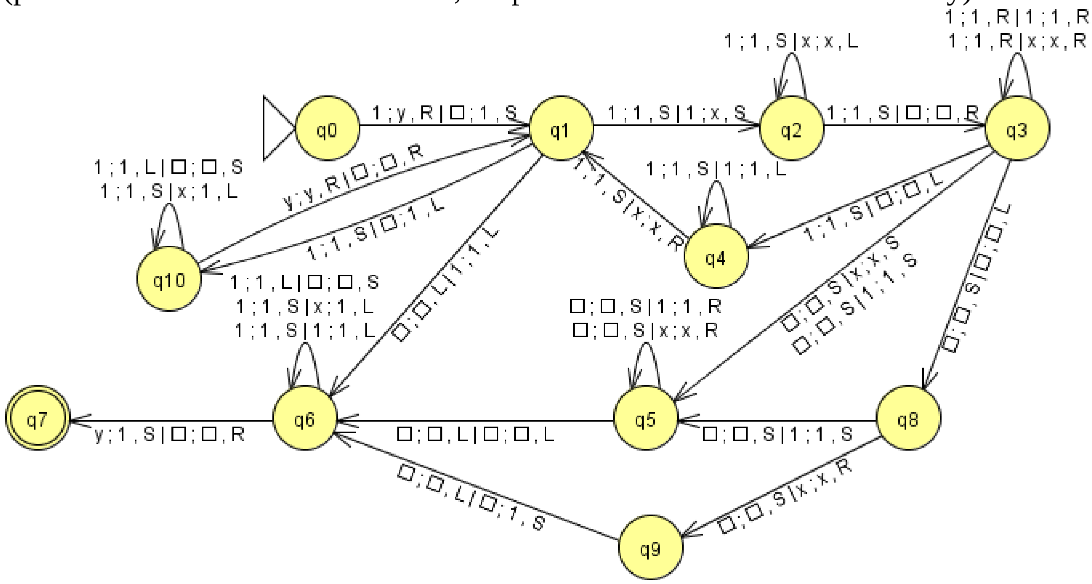
Complexitatea timp:

Pentru a înmulți numărul y de pe B2 cu el însuși (fără a-l avea copiat și altundeva) și a pune rezultatul pe o altă bandă (aici parcurgere pe B1, în loc de scriere) complexitatea este y^2 (pentru că de y ori parcurgem dus-întors tot y-ul) .

Cea mai mare valoare pe care o ia y este aproximativ $\sqrt{x}$, deci pentru a-l ridica la pătrat o singură dată avem complexitatea ($\sqrt{x}$)^2 = x. Dar avem aproximativ $\sqrt{x}$ încercări până y ajunge la valoarea finală.

Rezultă în total **C.T. =** $x\sqrt{x}$.

Aceeași soluție, sub formă de graf:
(pentru marcarea cu 1' am folosit x, iar pentru marcarea cu 1'' am folosit y)



(*) Rezolvarea (B) *(cu sumă de nr. impare) [pe 2 benzi]*

Enunț: Se dă un număr natural x. Să se calculeze $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.
Fie x = 10 (reprezentat prin 11 de 1). Rezultatul va fi 3 (reprezentat prin 4 de 1).
Inițial benzile mașinii Turing arată așa:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…
	…	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	…

La final, benzile vor arăta astfel:

x	…	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	B	…	$\sum_{k=1}^{y}[1+2*(k-1)]$
$\lfloor\sqrt{x}\rfloor$	…	B	1	1	1	1	B	B	B	B	B	B	B	B	…	$y \in \{1,2,3,...,\lfloor\sqrt{x}\rfloor\}$

<u>Ideea de rezolvare:</u> Orice număr pătrat perfect k² poate fi scris ca suma primelor k numere impare: $k^2 = \underbrace{1+3+5+...+(2*k-1)}_{k \quad numere}$.

Deci cât timp este posibil, vom scădea din X primele numere impare și de fiecare dată vom incrementa rezultatul de pe B2. Acest număr de pe B2 va ajunge chiar $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$.

Pas 1. Pe B1 sărim spre dreapta peste primul 1 din x (cel în plus de la scrierea în unar) și scriem un 1 pe B2 (primul număr impar).
Pas 2. *(Parcurgem în x numărul impar curent: 2*k–1)* Pentru primul 1 de pe B2, dacă avem 1 pe B1 facem un pas dreapta pe ambele benzi. Apoi cât timp citim 1 pe ambele benzi, avem circuit între două stări, în una facem pas dreapta doar pe B1, iar în cealaltă facem pas dreapta pe ambele benzi.

Pas 3. Dacă ajungem la B pe B2, iar pe B1 încă avem 1, atunci adăugăm un 1 pe B2 și parcurgem integral spre stânga B2 până la B, apoi facem un pas dreapta și reluăm pasul 2 (pentru a încerca să "scădem" din x următorul număr impar).

Pas 4. (a) Dacă pe B2 mai avem 1, iar pe B1 ajungem la B în una din cele două stări între care aveam circuit la pasul 2, înseamnă că numărul impar curent nu poate fi cuprins în întregime în x. Considerăm acest 1 în plus cel de la scrierea în unar a rezultatului. Mergem la pasul 5.

(b) Dacă pe B1 și B2 dăm simultan de B (înseamnă că x este pătrat perfect) , mai adăugăm un 1 pe B2, pentru scrierea în unar, apoi mergem la pasul 5.

(c) Dacă x a fost 0, adică am întâlnit B pe B1 imediat după aplicarea pasului 1, mergem în starea finală.

Pas 5. Ne întoarcem stânga pe ambele benzi până la B, apoi un pas dreapta, starea finală.

$$\delta\left(q_0, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right) // Pas\ 1$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1 & \rightarrow\end{matrix}\right) // Pas\ 2; adunam\ 1+2*(y-1)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_3, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_2, \begin{matrix}1 & \rightarrow\\ 1 & \rightarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1 & \bullet\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right) // Pas\ 3; \Sigma < x,\ incrementam\ y$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_4, \begin{matrix}1 & \bullet\\ 1 & \leftarrow\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_4, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_1, \begin{matrix}1 & \bullet\\ B & \rightarrow\end{matrix}\right) // reluam\ pas 2$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}B\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B & \leftarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right) // Pas\ 4(a); \Sigma > x$$

$$\delta\left(q_3, \begin{matrix}B\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B & \leftarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_2, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}B & \leftarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right) // Pas\ 4(b); \Sigma = x\ (p.p.)$$

$$\delta\left(q_1, \begin{matrix}B\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B & \leftarrow\\ 1 & \bullet\end{matrix}\right) // Pas\ 4(c); x = 0$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1 & \bullet\\ 1 & \leftarrow\end{matrix}\right) // Pas\ 5$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}1\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_5, \begin{matrix}1 & \leftarrow\\ B & \bullet\end{matrix}\right)$$

$$\delta\left(q_5, \begin{matrix}B\\ B\end{matrix}\right) = \left(q_6, \begin{matrix}B & \rightarrow\\ B & \rightarrow\end{matrix}\right), F = \{q_6\}$$

<u>Complexitatea spațiu:</u>

Avem numărul inițial și rezultatul calculat. Rezultă **C.S. =** $x + \sqrt{x}$.

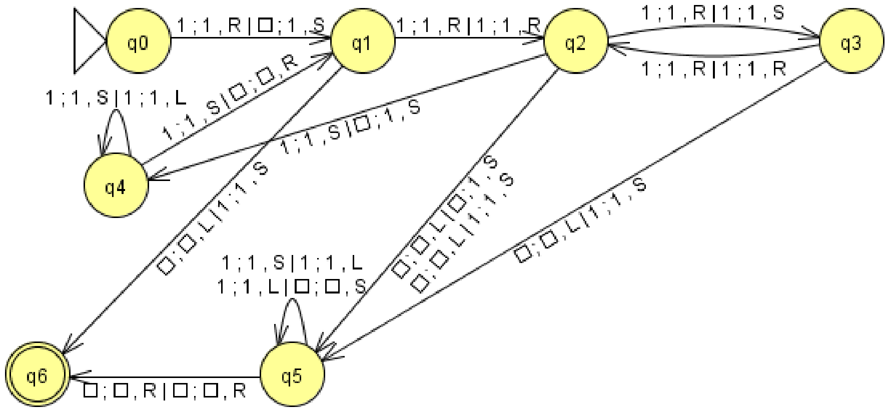
<u>Complexitatea timp:</u>

Pe B1 o parcurgem o singură dată integral de la stânga la dreapta pe măsură ce cuprindem în x numerele impare (pasul 2), iar în acest timp pe B2 o parcurgem dus-întors pentru fiecare dintre numerele impare, deci în total pe B2 facem aproximativ 2*x pași.

Iar apoi la pasul 5 le parcurgem integral spre stânga, deci facem aproximativ $x + \sqrt{x}$ pași.

Rezultă **C.T. = O(X)**.

Aceeași soluție, sub formă de graf:



Problema 13

Se dau x și y nr. nat. Să se calculeze cmmdc(x,y).

Rezolvarea (A) ***(cu alg. Euclid cu resturi) [pe 3 benzi]*** ***// TO DO …***

Problema 14

Se dă x nr. nat. Să se accepte dacă este număr prim.

Rezolvarea (A) ***(cu divizori de la 2 la x/2) [pe 2 benzi]*** ***// TO DO …***

(*) Rezolvarea (B) ***(cu Ciurul lui Eratostene) [pe 2 benzi]*** ***// TO DO …***

~ Seminar 6 ~

(Programe standard)

Instrucțiuni posibile :

$V \leftarrow V$

$V \leftarrow V + 1$

$$V \leftarrow V \dot{-} 1 \qquad = \begin{cases} V - 1\, , \, dacă\ V \geq 1 \\ 0\, , \, dacă\ V = 0 \end{cases}$$

$IF\ V \neq 0\ GOTO\ L$

Etichete pentru salturi în program: $L_1, L_2, L_3, \ldots$

Cu eticheta specială E (exit) se iese de tot din program.

Variabile

- de intrare : $X_1, X_2, X_3, \ldots$
- de ieșire : $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ (dar în general avem doar una, Y)
- interne / auxiliare / de lucru : $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$

Variabilele de ieșire și cele auxiliare au inițial (la intrarea în program) valoarea 0.

Problema 1 : $Y \leftarrow X$

$$\begin{array}{l}
IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
\left.\begin{array}{l} Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \\ IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ E \end{array}\right\} \Leftrightarrow GOTO\ E \quad (macroinstructiune) \\
[L_1]: Y \leftarrow Y + 1 \\
\qquad X \leftarrow X \dot{-} 1 \\
\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 + 1 \\
\qquad IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
[L_2]: X \leftarrow X + 1 \\
\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1 \\
\qquad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_2
\end{array}$$

Fiecare unitate din numărul X o mutăm în Y (cât timp X este nenul, îl decrementăm pe X și îl incrementăm pe Y). Vrem ca la ieșirea din program variabilele de intrare să nu își

piardă valoarea. De aceea, simultan cu cele două operații anterioare incrementăm și o variabilă auxiliară Z1.
Apoi, pentru a reface valoarea lui X când acesta a devenit 0: îl incrementăm pe X și îl decrementăm pe Z1 cât timp Z1 este nenul.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_1 revenim de X ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 4 – 7 din program). La eticheta L_2 revenim tot de X ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 8-10 din program).
Rezultă 4*X + 3*X => **O(X)**.

Problema 2 : $Y \leftarrow X_1 + X_2$

$$
\begin{array}{l}
IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
GOTO\ L_2 \\
[L_1]: Y \leftarrow Y + 1 \\
\qquad X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1 \\
\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 + 1 \\
\qquad IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
[L_3]: X_1 \leftarrow X_1 + 1 \\
\qquad\quad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1 \\
\qquad\quad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_3 \\
[L_2]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_4 \\
GOTO\ E \\
[L_4]: Y \leftarrow Y + 1 \\
\qquad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1 \\
\qquad Z_2 \leftarrow Z_2 + 1 \\
\qquad IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_4 \\
[L_5]: X_2 \leftarrow X_2 + 1 \\
\qquad\quad Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} 1 \\
\qquad\quad IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ L_5
\end{array}
$$

Dacă X_1 este nenul, la eticheta L_1 îl decrementăm cu câte o unitate și incrementăm Y și Z_1 până ce X_1 devine 0. Apoi la eticheta L_3 restabilim X_1 la valoarea sa inițială cu ajutorul lui Z_1.
La eticheta L_2 verificăm dacă X_2 este nenul. Dacă da, procedăm la fel ca pentru X_1, la eticheta L_4 îl decrementăm pe X_2 și incrementăm Y și Z_2, până când X_2 devine 0. Apoi la eticheta L_5 restabilim valoarea lui X_2 cu ajutorul lui Z_2.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_1 revenim de X_1 ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 3 – 6 din program). La eticheta L_3 revenim tot de X_1 ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 7 – 9 din program).
La eticheta L_4 revenim de X_2 ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 12 – 15 din program). La eticheta L_5 revenim tot de X_2 ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 16 – 18 din program).
Rezultă $4*X_1 + 3*X_1 + 4*X_2 + 3*X_2$ => $\mathbf{O(X_1 + X_2)}$.

Problema 3 : $Y \leftarrow X_1 * X_2$

1 $IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $GOTO\ E$
3 $[L_1]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_2$
4 $GOTO\ E$
5 $[L_2]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$
6 $\quad Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
7 $[L_3]: Y \leftarrow Y + 1$
8 $\quad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1$
9 $\quad Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$
10 $\quad IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_3$
11 $[L_4]: X_2 \leftarrow X_2 + 1$
12 $\quad Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} 1$
13 $\quad IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ L_4$
14 $IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_2$
15 $[L_5]: X_1 \leftarrow X_1 + 1$
16 $\quad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1$
17 $\quad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_5$

Dacă numerele X_1 și X_2 sunt nenule, de X_1 ori (eticheta L_2) valoarea lui X_2 o mutăm în Z_2 și îl incrementăm pe Y simultan (eticheta L_3), apoi restabilim valoarea lui X_2 cu ajutorul lui Z_2 (eticheta L_4). La final, restabilim valoarea lui X_1 cu ajutorul lui Z_1 (eticheta L_5).

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_2 revenim de X_1 ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 5, 6 și 14 din program), plus cele două porțiuni recursive: (a) la eticheta L_3 revenim de X_2 ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 7 – 10 din program); apoi (b) la eticheta L_4 revenim tot de X_2 și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 11 – 13 din program).

La eticheta L_5 revenim de X_1 ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 15 – 17 din program).
Rezultă $X_1 * (3 + 4*X_2 + 3*X_2) + 3*X_1$ => **$O(X_1 * X_2)$**.

Problema 4 : $Y \leftarrow f_{=}(X_1, X_2) \quad = \begin{cases} 1, \, dac\check{a} \; X_1 = X_2 \\ 0, \, dac\check{a} \; X_1 \neq X_2 \end{cases}$

$$
\begin{array}{l}
[L_0]: IF \; X_1 \neq 0 \; GOTO \; L_1 \\
IF \; X_2 \neq 0 \; GOTO \; L_2 \quad // \; X_1 = 0, \, X_2 \neq 0 \\
Y \leftarrow Y + 1 \\
GOTO \; L_2 \quad // \; X_1 = 0, \, X_2 = 0 \\
[L_1]: IF \; X_2 \neq 0 \; GOTO \; L_3 \quad // \; X_1 \neq 0, \, X_2 \neq 0 \\
GOTO \; L_2 \quad // \; X_1 \neq 0, \, X_2 = 0 \\
[L_3]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1 \\
\qquad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1 \\
\qquad Z \leftarrow Z + 1 \\
\qquad GOTO \; L_0 \\
[L_2]: IF \; Z \neq 0 \; GOTO \; L_4 \\
GOTO \; E \\
[L_4]: X_1 \leftarrow X_1 + 1 \\
\qquad X_2 \leftarrow X_2 + 1 \\
\qquad Z \leftarrow Z \dot{-} 1 \\
\qquad IF \; Z \neq 0 \; GOTO \; L_4
\end{array}
$$

Dacă numerele X_1 și X_2 sunt nenule (eticheta L_1), le decrementăm simultan și incrementăm Z (eticheta L_3), apoi revenim la începutul programului (eticheta L_0) pentru a testa iar dacă vreo unul din cele două numere a ajuns la 0.
Dacă X_1 este 0 (după zero sau mai multe treceri prin recursivitatea de la L_3), îl testăm și pe X_2. Dacă X_2 este nenul, atunci numerele sunt diferite și returnăm Y = 0, iar dacă și X_2 este 0, atunci numerele sunt egale și returnăm Y = 1.
Dacă X_1 este nenul, mergem la eticheta L_1 și îl testăm și pe X_2. Dacă X_2 este și el nenul mergem la eticheta L_3 explicată mai sus, iar dacă X_2 este 0, atunci numerele sunt diferite și returnăm Y = 0.
După ce decidem valoarea lui Y și ieșim din recursivitatea etichetei L_0, mergem la eticheta L_2 unde îl testăm pe Z pentru a ști dacă am trecut vreodată prin L_3 (scăderile simultane). Dacă Z este 0, atunci ieșim direct din program, iar dacă Z este nenul, atunci mergem la eticheta L_4 unde restabilim valorile inițiale ale lui X_1 și X_2 cu ajutorul lui Z.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_0 revenim până când cel puțin unul dintre numerele X_1 și X_2 devine 0, adică de $\min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare data executăm 6 instrucțiuni simple (rândurile 1, 5, 7 – 10 din program). Apoi ieșim din această recursivitate (pe rândurile 2, 4 sau 6) și, dacă este cazul să restabilim valoarea numerelor, revenim la eticheta L_4 de $Z = \min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 13 – 16 din program).
Rezultă $6*\min\{X_1, X_2\} + 4*\min\{X_1, X_2\}$ => **$O(\min\{X_1, X_2\})$**.

Problema 5 : $Y \leftarrow f_{:2}(X) \;\; = \begin{cases} 1, \, dac\check{a} \;\, X \;\, par \\ 0, \, dac\check{a} \;\, X \;\, impar \end{cases}$

1 $[L_0]: IF \;\, X \neq 0 \; GOTO \; L_1$
2 $Y \leftarrow Y + 1$
3 $GOTO \; L_2 \quad // \; X \;\, par$
4 $[L_1]: X \leftarrow X \dot{-} 1$
5 $\qquad Z \leftarrow Z + 1$
6 $\qquad IF \;\, X \neq 0 \; GOTO \; L_3$
7 $\qquad GOTO \; L_2 \quad // \; X \;\, impar$
8 $[L_3]: X \leftarrow X \dot{-} 1$
9 $\qquad Z \leftarrow Z + 1$
10 $GOTO \; L_0$
11 $[L_2]: IF \;\, Z \neq 0 \; GOTO \; L_4$
12 $GOTO \; E$
13 $[L_4]: X \leftarrow X + 1$
14 $\qquad Z \leftarrow Z \dot{-} 1$
15 $\qquad IF \;\, Z \neq 0 \; GOTO \; L_4$

Cât timp X este nenul, îl decrementăm pe X și îl incrementăm pe Z. Dacă X devine 0 după ce am scăzut un număr par (inclusiv 0) de unități înseamnă că X este număr par, returnăm Y = 1 și ieșim din recursivitatea lui L_0 (rândul 3 din program). Iar dacă X devine 0 după ce am scăzut un număr impar de unități înseamnă că X este un număr impar, returnăm Y = 0 și ieșim din recursivitate (rândul 7 din program).
Apoi, dacă e cazul să refacem valoarea lui X (adică dacă era nenul inițial), mergem la eticheta L_4 și mutăm la loc unitățile lui X cu ajutorul lui Z.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_0 revenim după ce am scăzut două unități din X, deci în total de X/2 ori și de fiecare dată executăm 7 instrucțiuni simple (rândurile 1, 4 – 6, 8 – 10). Apoi, dacă e cazul, revenim de X ori la eticheta L_4 și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 13 – 15 din program). Rezultă $(X/2)*7 + 3*X$ => **$O(X)$**.

Problema 6 : $Y \leftarrow f_{<}(X_1, X_2) \quad = \begin{cases} 1, \text{ dacă } X_1 < X_2 \\ 0, \text{ dacă } X_1 \geq X_2 \end{cases}$

Observăm că dacă $X_2 = 0$, suntem sigur pe a doua ramură a funcției (pentru că 0 nu poate fi mai mare strict decât un număr natural X_1, indiferent de valoarea acestuia).
De aceea, ar fi mai eficient să-l testăm întâi pe X_2.

1 $[L_0]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $GOTO\ L_2 \quad //\ X_1 \geq X_2$
3 $[L_1]: IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_3 \quad //\ X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0$
4 $Y \leftarrow Y + 1$
5 $GOTO\ L_2 \quad //\ X_1 < X_2$
6 $[L_3]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$
7 $\quad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1$
8 $\quad Z \leftarrow Z + 1$
9 $\quad GOTO\ L_0$
10 $[L_2]: IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_4$
11 $GOTO\ E$
12 $[L_4]: X_1 \leftarrow X_1 + 1$
13 $\quad X_2 \leftarrow X_2 + 1$
14 $\quad Z \leftarrow Z \dot{-} 1$
15 $\quad IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_4$

Dacă numerele X_1 și X_2 sunt nenule (eticheta L_1), le decrementăm simultan și incrementăm Z (eticheta L_3), apoi revenim la începutul programului (eticheta L_0) pentru a testa iar dacă vreo unul din cele două numere a ajuns la 0.
Dacă X_2 este 0 știm că $X_1 \geq X_2$, deci returnăm $Y = 0$ și ieșim din recursivitatea lui L_0 (rândul 2 din program).
Iar dacă X_2 este nenul, mergem la eticheta L_1 și îl testăm și pe X_1. Dacă X_1 este și el nenul mergem la eticheta L_3 explicată mai sus, iar dacă X_1 este 0, atunci avem $X_1 < X_2$ și returnăm $Y = 1$.
După ce decidem valoarea lui Y și ieșim din recursivitatea etichetei L_0, mergem la eticheta L_2 unde îl testăm pe Z pentru a ști dacă am trecut vreodată prin L_3 (scăderile simultane). Dacă Z este 0, atunci ieșim direct din program, iar dacă Z este nenul, atunci mergem la eticheta L_4 unde restabilim valorile inițiale ale lui X_1 și X_2 cu ajutorul lui Z.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_0 revenim până când cel puțin unul dintre numerele X_1 și X_2 devine 0, adică de $\min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare data executăm 6 instrucțiuni simple (rândurile 1, 3, 6 – 9 din program). Apoi ieșim din această recursivitate (pe rândurile 2 sau 5) și, dacă este

cazul să restabilim valoarea numerelor, revenim la eticheta L_4 de $Z = \min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 12 – 15 din program).
Rezultă $6*\min\{X_1, X_2\} + 4*\min\{X_1, X_2\}$ => **O(min{X₁, X₂})**.

Problema 7 : $Y \leftarrow f_{\leq}(X_1, X_2) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } X_1 \leq X_2 \\ 0, \text{ dacă } X_1 > X_2 \end{cases}$

Observăm că dacă $X_1 = 0$, suntem sigur pe prima ramură a funcției (pentru că 0 nu poate fi mai mare strict decât un număr natural X_2, indiferent de valoarea acestuia).
De aceea, ar fi mai eficient să-l testăm întâi pe X_1.

1 $[L_0]: IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1$

2 $Y \leftarrow Y + 1$

3 $GOTO\ L_2 \quad // X_1 \leq X_2$

4 $[L_1]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_3 \quad // X_1 \neq 0, X_2 \neq 0$

5 $GOTO\ L_2 \quad // X_1 > X_2$

6 $[L_3]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$

7 $\quad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1$

8 $\quad Z \leftarrow Z + 1$

9 $\quad GOTO\ L_0$

10 $[L_2]: IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_4$

11 $GOTO\ E$

12 $[L_4]: X_1 \leftarrow X_1 + 1$

13 $\quad X_2 \leftarrow X_2 + 1$

14 $\quad Z \leftarrow Z \dot{-} 1$

15 $\quad IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_4$

Dacă numerele X_1 și X_2 sunt nenule (eticheta L_1), le decrementăm simultan și incrementăm Z (eticheta L_3), apoi revenim la începutul programului (eticheta L_0) pentru a testa iar dacă vreo unul din cele două numere a ajuns la 0.
Dacă X_1 este 0 știm că $X_1 \leq X_2$, deci returnăm Y = 1 și ieșim din recursivitatea lui L_0 (rândul 3 din program).
Iar dacă X_1 este nenul, mergem la eticheta L_1 și îl testăm și pe X_2. Dacă X_2 este și el nenul mergem la eticheta L_3 explicată mai sus, iar dacă X_2 este 0, atunci avem $X_1 > X_2$ și returnăm Y = 0.
După ce decidem valoarea lui Y și ieșim din recursivitatea etichetei L_0, mergem la eticheta L_2 unde îl testăm pe Z pentru a ști dacă am trecut vreodată prin L_3 (scăderile simultane). Dacă Z este 0, atunci ieșim direct din program, iar dacă Z este nenul, atunci mergem la eticheta L_4 unde restabilim valorile inițiale ale lui X_1 și X_2 cu ajutorul lui Z.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_0 revenim până când cel puțin unul dintre numerele X_1 și X_2 devine 0, adică de $\min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare data executăm 6 instrucțiuni simple (rândurile 1, 4, 6 – 9 din program). Apoi ieșim din această recursivitate (pe rândurile 3 sau 5) și, dacă este cazul să restabilim valoarea numerelor, revenim la eticheta L_4 de $Z = \min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 12 – 15 din program).
Rezultă $6*\min\{X_1, X_2\} + 4*\min\{X_1, X_2\}$ => $\mathbf{O(\min\{X_1, X_2\})}$.

Problema 8 : $Y \leftarrow |X_1 - X_2|$

$[L_0]: IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1$
$IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_2$ $\quad$ $//\ X_1 = 0,\ X_2 \neq 0, Y \leftarrow X_2 - X_1$
$GOTO\ L_3$ $\quad$ $//\ X_1 = 0,\ X_2 = 0, Y \leftarrow 0$
$[L_1]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_4$ $\quad$ $//\ X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0$
$GOTO\ L_5$ $\quad$ $//\ X_1 \neq 0,\ X_2 = 0, Y \leftarrow X_1 - X_2$
$[L_4]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$
$\quad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1$
$\quad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1$
$\quad GOTO\ L_0$
$[L_2]: Y \leftarrow Y + 1$
$\quad X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1$
$\quad Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$
$\quad IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_2$
$[L_6]: X_2 \leftarrow X_2 + 1$
$\quad Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} 1$
$\quad IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ L_6$
$\quad GOTO\ L_3$
$[L_5]: Y \leftarrow Y + 1$
$\quad X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1$
$\quad Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$
$\quad IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_5$

22 $[L_7]: X_1 \leftarrow X_1 + 1$
23 $\quad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1$
24 $\quad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_7$
25 $[L_3]: IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_8$
26 $GOTO\ E$
27 $[L_8]: X_1 \leftarrow X_1 + 1$
28 $\quad X_2 \leftarrow X_2 + 1$
29 $\quad Z_0 \leftarrow Z_0 \dot{-} 1$
30 $\quad IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_8$

Dacă X_1 este nenul, îl testăm și pe X_2 (eticheta L_1).

- Dacă și X_2 este nenul, mergem la eticheta L_4, unde decrementăm simultan X_1 și X_2 și incrementăm Z_0, apoi ne întoarcem la începutul programului (eticheta L_0) pentru a testa iar numerele.
- Dacă în schimb $X_2 = 0$, atunci mergem la eticheta L_5, unde Y va obține valoarea curentă din X_1 și în același timp incrementăm Z_1. Apoi la eticheta L_7 mutăm la loc în X_1 valoarea lui Z_1.

Dacă X_1 este 0 îl testăm și pe X_2.

- Dacă X_2 este nenul, mergem la eticheta L_2, unde Y va obține valoarea curentă din X_2 și în același timp incrementăm Z_2. Apoi la eticheta L_6 mutăm la loc în X_2 valoarea lui Z_2.
- Dacă și X_2 este 0 (înseamnă că numerele au fost egale, deci Y va rămâne 0), mergem la eticheta L_3, unde verificăm dacă am făcut vreodată decrementarea simultană de la eticheta L_4, adică dacă Z_0 este nenul. Dacă $Z_0 = 0$, ieșim de tot din program. Altfel, la eticheta L_8 mutăm valoarea lui Z_0 înapoi în X_1 și în X_2.

<u>Complexitatea timp:</u>
- La eticheta L_0 revenim până când cel puțin unul dintre numerele X_1 și X_2 devine 0, adică de $Z_0 = \min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare data executăm 6 instrucțiuni simple (rândurile 1, 4, 6 – 9 din program). Apoi ieșim din această recursivitate (pe rândurile 2, 3 sau 5).
- Pentru a muta în Y valoarea diferenței, revenim la eticheta L_2 (dacă $X_1 < X_2$) sau la eticheta L_5 (dacă $X_1 > X_2$) de $|X_1 - X_2|$ ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 10 – 13, respectiv 18 – 21 din program).
- Apoi pentru a restabili valoarea în X_2 cu ajutorul lui Z_2, sau valoarea în X_1 cu ajutorul lui Z_1, revenim la eticheta L_6, respectiv L_7 tot de $|X_1 - X_2|$ ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 14 – 16, respectiv 22 – 24 din program).
- În oricare dintre cele 3 cazuri, mergem la eticheta L_3 pentru a testa dacă Z_0 este nenul (adică dacă am ajuns cel puțin o dată la scăderea simultană din L_4). Dacă nu, ieșim din program. Dacă da, revenim la eticheta L_8 de $Z_0 = \min\{X_1, X_2\}$ ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 27 – 30 din program).

Rezultă $6*\min\{X_1, X_2\} + 4*|X_1 - X_2| + 3*|X_1 - X_2| + 4*\min\{X_1, X_2\}$
$\Rightarrow O(\min\{X_1, X_2\} + |X_1 - X_2|) = \mathbf{O(\max\{X_1, X_2\})}$.

~ Seminar 7 ~

Problema 9 : $Y \leftarrow X_1^{X_2}$

$[L_1]: IF\ \ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_2$

$\quad IF\ \ X_2 \neq 0\ GOTO\ E \qquad // \ 0^{X_2} = 0$

$\quad GOTO\ L_1 \qquad // \ pentru\ 0^0\ cicleaza$

$[L_2]: IF\ \ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_3 \qquad // \ X_1 \neq 0,\ X_2 \neq 0$

$\quad Y \leftarrow Y + 1$

$\quad GOTO\ E \qquad // \ X_1^{\ 0} = 1$

$[L_3]: Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \qquad // \ puterea\ anterioara$

$[L_4]: X_2 \leftarrow X_2 \dot{-} 1 \qquad // \ De\ X_2\ ori\ ...$

$\quad Z_2 \leftarrow Z_2 + 1$

$\quad [L_5]: X_1 \leftarrow X_1 \dot{-} 1 \qquad // \ ...Y\ devine\ Z_0 * X_1\ ...$

$\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 + 1$

$\qquad [L_6]: Y \leftarrow Y + 1 \qquad // \ \left(de\ X_1\ ori\ adaugam\ Z_0\ la\ Y\right)$

$\qquad\quad Z_0 \leftarrow Z_0 \dot{-} 1$

$\qquad\quad Z_3 \leftarrow Z_3 + 1$

$\qquad\quad IF\ \ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_6$

$\qquad IF\ \ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_7$

$\qquad Z_3 \leftarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} [L_0]: Z_3 \leftarrow Z_3 \dot{-} 1 \\ \qquad IF\ \ Z_3 \neq 0\ GOTO\ L_0 \end{cases}$

$\qquad GOTO\ L_8$

$\qquad [L_7]: Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \qquad // \ "reparam"\ L_6$

$\qquad\quad Z_3 \leftarrow Z_3 \dot{-} 1$

$\qquad\quad IF\ \ Z_3 \neq 0\ GOTO\ L_7$

$\qquad IF\ \ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_5$

$\quad [L_8]: X_1 \leftarrow X_1 + 1 \qquad // \ "reparam"\ L_5$

$\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1$

$\qquad IF\ \ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_8$

27 $\quad IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_9$
28 $\quad GOTO\ L_{10}$
29 $\quad [L_9]: Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \qquad // ...\ Z_0\ devine\ Y,\ iar\ Y\ devine\ 0\ (daca\ X_2 \neq 0)...$
30 $\qquad Y \leftarrow Y \dot{-} 1$
31 $\qquad IF\ Y \neq 0\ GOTO\ L_9$
32 $\quad IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_4$
33 $\quad [L_{10}]: X_2 \leftarrow X_2 + 1 \qquad //\ "reparam"\ L_4$
34 $\qquad Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} 1$
35 $\qquad IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ L_{10}$

- Dacă ambele numere sunt 0, programul ciclează.
- Pentru bază 0 și putere nenulă returnăm 0, iar pentru bază nenulă și putere 0 returnăm 1.
- Dacă ambele numere sunt nenule, pornind de la Y = 1, de X_2 ori (eticheta L_4) înmulțim X_1 cu fostul rezultat Z_0 (rândurile 10 – 26) și punem valoarea înapoi în Z_0 (rândurile 29 – 31). La finalul calculului, refacem valoarea lui X_2 (rândurile 33 – 35).

Pentru a face o înmulțire, de X_1 ori (eticheta L_5) adăugăm Z_0 unități la Y (rândurile 12 – 15) și refacem valoarea lui Z_0 (rândurile 16 – 22), iar apoi refacem valoarea lui X_1 (rândurile 24 – 26).

<u>Complexitatea timp:</u>
Pașii cei mai costisitori ca timp sunt cei pentru înmulțiri:

$$\underbrace{X_1}_{\substack{prima\\ inmultire}} + \underbrace{(X_1)^2}_{\substack{a\ \ 2-a\\ inmultire}} + \underbrace{(X_1)^3}_{\substack{a\ \ 3-a\\ inmultire}} + ... + \underbrace{(X_1)^{X_2}}_{\substack{a\ \ X_2-a\\ inmultire}}$$

Funcția dominantă este cea de la ultima înmulțire => **C.T. = O(** $X_1^{X_2}$ **).**

Obs: Dacă în loc să scriem explicit pentru fiecare înmulțire complexitatea obținută și apoi să păstrăm funcția cea mai mare, am fi aproximat toate înmulțirile cu cazul cel mai rău și am fi înmulțit acea funcție cu numărul de reveniri la eticheta L_4, atunci am fi obținut $C.T. = O\left(X_2 * X_1^{X_2}\right)$. Funcția de mai sus reprezintă însă o aproximare mai exactă (față de cea de aici, de la observație) a numărului propriu-zis de pași făcuți de program.

Problema 10 : $Y_1 \leftarrow X_1 / X_2 \quad , \quad Y_2 = X_1 \% X_2$

$[L_0]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_1$
$\qquad GOTO\ L_0 \quad //\ ciclam$
$[L_1]: IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_2$
$\qquad GOTO\ E \quad //\ Y_1 = Y_2 = 0$
$[L_2]: Y_2 \leftarrow X_1$
$[L_3]: Z_1 \leftarrow f_<(Y_2, X_2)$
$\qquad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ E$
$\qquad Y_2 \leftarrow Y_2 \dot{-} X_2 \qquad //\ pb.16\ din\ SE8$
$\qquad Y_1 \leftarrow Y_1 + 1$
$\qquad GOTO\ L_3$

- Dacă X_2 este 0, atunci programul ciclează în eticheta L_0 (pentru că împărțirea la 0 nu este posibilă).
- Dacă X_1 este 0, atunci câtul și restul vor fi amândouă 0 și ieșim din program.
- Dacă ambele numere sunt nenule, la eticheta L_2 vom copia deîmpărțitul X_1 în Y_2 (variabila unde dorim ca la final să obținem restul). Apoi cât timp este posibil (dacă $Y_2 \geq X_2$), vom scădea din Y_2 câte X_2 unități și vom incrementa de fiecare dată câtul Y_1. Când Y_2 devine strict mai mic decât X_2 (nu mai putem face scăderi), restul se află deja în variabila Y_2 și ieșim din program.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_2, mutarea lui X_1 în Y_2 are complexitate X_1.
La eticheta L_3 revenim de $Y_1 = X_1 / X_2$ ori, iar de fiecare dată executăm rândurile 6 – 10 din program. Macroinstrucțiunea $f_<$ (rândul 6) are complexitate $\min\{Y_2, X_2\}$, adică X_2 la fiecare aplicare unde returnează 0, iar la ultima aplicare, unde returnează 1, are o complexitate mai mică decât X_2. La rândul 8, complexitatea este numărul care se scade, adică mereu X_2. Rezultă $2 + X_1 + (X_1 / X_2) * (X_2 + 1 + X_2 + 2)$ => **C.T. = O(X_1)**.

Problema 11 : $Y \leftarrow X!$ (*factorial*)

$$
\begin{array}{r|l}
1 & Y \leftarrow Y+1 \\
2 & IF\ \ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
3 & GOTO\ E \quad //\,0! = 1 \\
4 & [L_1]: Z_1 \leftarrow X \\
5 & [L_2]: Z_2 \leftarrow Y * Z_1 \\
6 & \qquad Y \leftarrow Z_2 \\
7 & \qquad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1 \\
8 & \qquad IF\ \ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_2
\end{array}
$$

Dacă X = 0, returnăm Y = 1. Dacă X este nenul, pornim de la Y = 1 și tot înmulțim rezultatul anterior cu numărul Z_1, care inițial este egal cu X, iar apoi scade cu câte o unitate după fiecare înmulțire până ajunge la 0.

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_1 avem complexitatea X, apoi pentru cele X înmulțiri avem de fiecare dată complexitatea egală cu rezultatul lor (rândul 5). Apoi ca să mutăm la loc în Y noul rezultat (rândul 6), complexitatea este tot rezultatul obținut la înmulțirea curentă.

Rezultă $\underbrace{X}_{L_1} + 2 * \underbrace{\left\{ \underbrace{X}_{\substack{prima\\ inmultire}} + \underbrace{X*(X-1)}_{a\ \ 2-a\ \ inmultire} + \underbrace{X*(X-1)*(X-2)}_{a\ \ 3-a\ \ inmultire} + ... + \underbrace{X*(X-1)*...*2*1}_{a\ \ X-a\ \ inmultire} \right\}}_{L_2}$.

Funcția dominantă este cea de la ultima înmulțire => **C.T. = O(X!)**.

Obs: Dacă în loc să scriem explicit pentru fiecare înmulțire complexitatea obținută și apoi să păstrăm funcția cea mai mare, am fi aproximat toate înmulțirile cu cazul cel mai rău și am fi înmulțit acea funcție cu numărul de reveniri la eticheta L_2, atunci am fi obținut *C.T. = O(X * (X!))*. Funcția de mai sus reprezintă însă o aproximare mai exactă (față de cea de aici, de la observație) a numărului propriu-zis de pași făcuți de program.

Problema 12 : $Y \leftarrow patrat\_perfect(X) = \begin{cases} 1, daca\ X = p.p. \\ 0, daca\ X \neq p.p. \end{cases}$

OBS: Orice pătrat perfect k^2 poate fi scris ca suma primelor k numere impare.

$$k^2 = \underbrace{1+3+5+...+(2*k-1)}_{k \quad numere}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & Y \leftarrow Y+1 \\
2 & IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
3 & GOTO\ E \quad //\, 0 = p.p. \\
4 & [L_1]: Z_1 \leftarrow X \\
5 & \qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \quad //\, nr.\ impar \\
6 & \qquad Y \leftarrow Y \dot{-} 1 \\
7 & [L_2]: Z_2 \leftarrow f_{<}(Z_1, Z_0) \\
8 & \qquad IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ E \quad //\, X \neq p.p. \\
9 & \qquad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} Z_0 \qquad\qquad //\, pb.16\ din\ SE8 \\
10 & \qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \\
11 & \qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \\
12 & \qquad IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_2 \\
13 & \qquad Y \leftarrow Y + 1 \quad //\, X = p.p.
\end{array}$$

Dacă X = 0 returnăm Y = 1. Dacă X este nenul, îi copiem valoarea în Z_1 (eticheta L_1) și setăm numărul impar $Z_0 = 1$. Apoi cât timp este posibil ($Z_1 \geq Z_0$), scădem numărul impar curent din copia lui X (rândul 9), apoi incrementăm cu 2 unități numărul impar (rândurile 10 – 11). Dacă după o scădere copia lui X a ajuns fix pe 0, atunci returnăm 1 (pentru că înseamnă că X a putut fi scris ca suma primelor numere impare). Dacă după scăderi copia lui X a ajuns la o valoare mai mică decât numărul impar curent, atunci returnăm 0.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pentru copierea lui X (rândul 4) complexitatea este X.
Macroinstrucțiunea de comparare (rândul 7) are complexitate minimul dintre cei doi parametri, iar la toate comparările care returnează 0 (toate în afară de ultima, pentru care ieșim din program) acest minim va fi Z_0, care în cel mai rău caz are aproximativ valoarea

$\sqrt{X}$. Și facem această comparare pentru fiecare număr impar pe care îl putem scădea, adică de aproximativ $\sqrt{X}$ ori. Deci în total pentru comparări avem complexitatea X.
Scăderile de numere impare (rândul 9) se fac până când X ajunge aproape sau chiar 0, deci în total pentru scăderi avem complexitatea maxim X.
Rezultă **C.T. = O(X)**.

(*) Problema 13 : $Y \leftarrow \lfloor \sqrt{X} \rfloor$

Folosim tot observația de la problema anterioară, care zicea că suma primelor k numere impare este egală cu k^2.

1 $\quad IF\ \ X \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $\quad GOTO\ E \quad // \sqrt{0} = 0$
3 $\quad [L_1]: Z_1 \leftarrow X$
4 $\qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1 \quad // nr.\, impar$
5 $\quad [L_2]: Z_2 \leftarrow f_<(Z_1, Z_0)$
6 $\qquad IF\ \ Z_2 \neq 0\ GOTO\ E$
7 $\qquad Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} Z_0 \qquad\qquad // \, pb.16\ din\ SE8$
8 $\qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1$
9 $\qquad Z_0 \leftarrow Z_0 + 1$
10 $\qquad Y \leftarrow Y + 1$
11 $\qquad IF\ \ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_2$

La fel ca la programul anterior, îi facem o copie lui X (eticheta L_1), apoi cât timp este posibil (eticheta L_2) scădem din acea copie primele numere impare, dar la fiecare scădere făcută incrementăm Y (rândul 10) pentru a număra câte numere impare am scăzut.
Suma acelor numere impare reprezintă de fapt cel mai mare pătrat perfect mai mic sau egal cu X. Deci Y va fi chiar $\lfloor \sqrt{X} \rfloor$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Analog cu problema anterioară, complexitatea pentru copierea lui X este X, cea pentru toate comparările este X, iar cea pentru toate scăderile este tot X. Rezultă **C.T. = O(X)**.

Problema 14 : $Y \leftarrow al\ X - ulea\ nr.\ din\ sirul\ Fibonacci$

X:	0	1	2	3	4	5	6	7	…
Y:	0	1	1	2	3	5	8	13	…

1 $Z_0 \leftarrow X$
2 $IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_1$
3 $GOTO\ E$
4 $[L_1]: Z_2 \leftarrow Z_2 + 1 \quad // Z_1 = 0, Z_2 = 1$
5 $\quad Z_0 \leftarrow Z_0 \dot{-} 1$
6 $[L_2]: Z_0 \leftarrow Z_0 \dot{-} 1$
7 $\quad Y \leftarrow Z_1 + Z_2$
8 $\quad IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_3$
9 $\quad GOTO\ E$
10 $\quad [L_3]: Z_1 \leftarrow Z_2$
11 $\qquad Z_2 \leftarrow Y$
12 $\quad GOTO\ L_2$

- Îl copiem pe X. Dacă X era 0 returnăm 0.
- Setăm $Z_1 = 0$ și $Z_2 = 1$ (rândul 4) care vor fi numerele din șir de la pașii imediat anteriori celui pe care îl calculăm acum. Setăm $Y = Z_1+Z_2$ (rândul 7). Scădem 2 unități din copia lui X (rândurile 5 – 6), apoi verificăm dacă am ajuns pe 0. Dacă da, înseamnă că X a fost 1 sau 2 și returnăm Y care are deja valoarea 1.
- Dacă nu, înseamnă că $X \geq 2$ și mergem la eticheta L_3 unde actualizăm numerele din șir ca fiind următoarele (rândurile 10 – 11), adică Z_1 îi ia valoarea lui Z_2, iar Z_2 îi ia valoarea lui Y. Apoi ne întoarcem la eticheta L_2, unde decrementăm copia lui X (pentru a ști că vom calcula încă un număr din șir) și actualizăm $Y = Z_1+Z_2$. Repetăm acest pas până când copia lui X ajunge pe 0.

<u>Complexitatea timp:</u>
Revenim la eticheta L_2 de X–1 ori și avem 3 instrucțiuni simple (rândurile 6, 8 și 12) și cele 3 macroinstrucțiuni de actualizare a numerelor din șir (rândurile 7, 10 și 11) care în cel mai rău caz au complexitatea maxim Y (numărul căutat, la ultima actualizare). Rezultă **C.T. = O(X*Y)**.

Obs: În mod normal complexitatea trebuie exprimată doar în funcție de mărimea datelor de intrare X (nu și a celor de ieșire Y), deci aici Y trebuie înlocuit cu formula matematică ce aproximează valoarea celui de-al X-ulea număr Fibonacci în funcție de valoarea lui X.

Problema 15 : $Y \leftarrow palindrom(X) = \begin{cases} 1, \; daca \; X = X^R \\ 0, \; daca \; X \neq X^R \end{cases}$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & Z_0 \leftarrow 10 \\
2 & Z_1 \leftarrow X \\
3 & [L_1]: IF \; Z_1 \neq 0 \; GOTO \; L_2 \\
4 & \quad GOTO \; L_3 \\
5 & \quad [L_2]: Z_2 \leftarrow Z_1 \% Z_0 \quad // ultima \; cifra \\
6 & \qquad Z_3 \leftarrow Z_4 * Z_0 \\
7 & \qquad Z_4 \leftarrow Z_3 + Z_2 \quad // Z_4 = X^R \\
8 & \qquad Z_5 \leftarrow Z_1 / Z_0 \\
9 & \qquad Z_1 \leftarrow Z_5 \\
10 & \quad GOTO \; L_1 \\
11 & [L_3]: Y \leftarrow f_{=}(X, Z_4)
\end{array}
$$

- Copiem X-ul în Z_1 (rândul 2) pentru a calcula X^R (oglinditul numărului X) în Z_4.
- Cât timp Z_1 nu a ajuns 0, îi obținem în Z_2 ultima sa cifră (rândul 5), apoi actualizăm Z_4 înmulțindu-l cu 10 și adăugându-i această nouă cifră (rândurile 6 – 7), iar apoi actualizăm și Z_1 împărțindu-l la 10 pentru a elimina ultima sa cifră (rândurile 8 – 9).
- După ce am obținut oglinditul numărului X, îl comparăm cu X și returnăm 1 dacă sunt egale și 0 dacă diferă (rândul 11).

Complexitatea timp:
- Avem complexitate 10+X (rândurile 1 – 2).
- Apoi la eticheta L_1 revenim pentru fiecare cifră a lui X, deci de maxim $\log_2(X)$ ori.
(a) Pentru a calcula câtul și restul împărțirii lui Z_1 la Z_0 (rândurile 5 și 8) avem complexitate Z_1 care este maxim X.
(b) Pentru a actualiza oglinditul cu adăugarea unei noi cifre la final (rândurile 6 – 7) avem maxim 2*X eventual înmulțit cu maxim constanta 10 (pentru că oglinditul are același număr de cifre ca X, sau chiar mai puține dacă X-ul se termina în zerouri).
(c) Iar pentru a actualiza Z_1 după eliminarea ultimei sale cifre (rândul 9) avem tot maxim X.
- La final, pentru a compara X cu oglinditul său complexitatea este minimul dintre parametri, care în cel mai rău caz este X înmulțit cu o constantă (la fel, pentru că oglinditul are maxim același număr de cifre ca X).
Rezultă **C.T. = O(X * log(X))**.

~ Seminar 8 ~

Problema 16 : $Y \leftarrow Y \dot{-} X = \begin{cases} Y - X, daca\ Y \geq X \\ 0, daca\ Y < X \end{cases}$

1 $IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $GOTO\ E$
3 $[L_1]: Y \leftarrow Y \dot{-} 1$
4 $\quad X \leftarrow X \dot{-} 1$
5 $\quad Z \leftarrow Z + 1$
6 $\quad IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1$
7 $[L_2]: X \leftarrow X + 1$
8 $\quad Z \leftarrow Z \dot{-} 1$
9 $\quad IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_2$

Cât timp X este nenul, decrementăm simultan Y și X și incrementăm Z (eticheta L_1). Apoi când X ajunge 0, incrementăm X și decrementăm Z până când Z devine 0 iar X ajunge la valoarea inițială (eticheta L_2).

<u>Complexitatea timp:</u> La eticheta L_1 revenim de X ori și de fiecare dată executăm 4 instrucțiuni simple (rândurile 3 – 6). La eticheta L_2 revenim tot de X ori și de fiecare dată executăm 3 instrucțiuni simple (rândurile 7 – 9). Rezultă **C.T. = O(X)**.

(*) Problema 17 : $Y \leftarrow Y + X$

1 $IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $GOTO\ E$
3 $[L_1]: Y \leftarrow Y + 1$
4 $\quad X \leftarrow X \dot{-} 1$
5 $\quad Z \leftarrow Z + 1$
6 $\quad IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1$
7 $[L_2]: X \leftarrow X + 1$
8 $\quad Z \leftarrow Z \dot{-} 1$
9 $\quad IF\ Z \neq 0\ GOTO\ L_2$

Singura diferență față de programul anterior este la rândul 2, unde avem incrementare pentru Y în loc de decrementare.

<u>Complexitatea timp:</u> La fel ca la programul anterior, **C.T. = O(X)**.

Problema 18 : $Y \leftarrow f_{\vdots}(X_1, X_2) = \begin{cases} 1, daca\ X_1 \vdots X_2 \\ 0, daca\ X_1 \not\vdots X_2 \end{cases}$

```
1  [L0]: IF X2 ≠ 0 GOTO L1
2        GOTO L0    // ciclam
3  [L1]: IF X1 ≠ 0 GOTO L2
4        Y ← Y + 1
5        GOTO E    // 0 ⋮ X2
6  [L2]: Z1 ← X1
7  [L3]: Z2 ← f<(Z1, X2)
8        IF Z2 ≠ 0 GOTO E    // X1 not⋮ X2
9        Z1 ← Z1 ∸ X2
10       IF Z1 ≠ 0 GOTO L3
11       Y ← Y + 1    // X1 ⋮ X2
```

Dacă $X_2 = 0$ programul ciclează, iar dacă $X_1 = 0$ returnăm 1 (pentru că 0 este divizibil cu orice). Dacă ambele numere sunt nenule, îl copiem pe X_1 în Z_1 (rândul 6), iar apoi cât timp este posibil (dacă $Z_1 \geq X_2$) scădem din Z_1 câte X_2 unități (rândul 9). Dacă după un anumit număr de scăderi Z_1 ajunge fix 0 returnăm 1 (înseamnă că a fost divizibil cu X_2), iar dacă ajunge la o valoare mai mică decât X_2 returnăm 0 (înseamnă că nu a fost divizibil).

Complexitatea timp:
Pentru a copia X_1 avem complexitate X_1 (eticheta L_2).
La eticheta L_3 revenim de câte ori putem scădea, adică de X_1 / X_2 ori. De fiecare dată executăm compararea (rândul 7) de complexitate minimul dintre parametri, care la toate comparările unde întoarce 0 complexitatea este X_2, iar la ultima comparare este o valoare mai mică decât X_2.
Pentru scăderi (rândul 9) complexitatea totală este maxim X_1 pentru că scădem până acesta ajunge pe 0 sau mai mic decât X_2.
Rezultă $X_1 + (X_1 / X_2)*X_2 + X_1$ => **C.T. = O(X_1)**.

Problema 19 : $Y \leftarrow nr\_prim(X) = \begin{cases} 1, daca\ X = nr.prim \\ 0, daca\ X \neq nr.prim \end{cases}$

```
1  Z0 ← 2    // divizorul posibil
2  Z1 ← X / Z0    // jumatatea lui X
3  IF X ≠ 0 GOTO L1
4  GOTO E    // 0 ≠ nr.prim
5  [L1]: X ← X ∸ 1
6        IF X ≠ 0 GOTO L2
7        X ← X + 1
8        GOTO E    // 1 ≠ nr.prim
9  [L2]: X ← X + 1
10 [L3]: Y ← Y + 1
11       Z2 ← f<(Z1, Z0)
12       IF Z2 ≠ 0 GOTO E    // X = nr.prim
13       Y ← Y ∸ 1
14       Z3 ← f⋮(X, Z0)
15       IF Z3 ≠ 0 GOTO E    // X ≠ nr.prim
16       Z0 ← Z0 + 1
17       GOTO L3
```

Dacă X este 0 sau 1 returnăm Y = 0.
Altfel, testăm dacă $Z_0 = 2$ este divizor al lui X. Dacă da, returnăm 0 (X nu este prim). Dacă nu, incrementăm Z_0 și reluăm testarea până când Z_0 ajunge strict mai mare decât X/2. Atunci returnăm 1 pentru că înseamnă că X este prim.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pentru calculul lui X/2 (rândul 2) avem complexitate X.
În cel mai rău caz (când X este prim) revenim la L_3 de aproximativ X/2 ori pentru fiecare divizor posibil testat. De fiecare dată executăm compararea (rândul 11) de complexitate minimul parametrilor (X/2 și Z_0 posibilul divizor), adică Z_0 care este maxim X/2. Tot de fiecare dată executăm și verificarea divizibilității (rândul 14), mereu de complexitate X.
Rezultă X + (X/2) * (X/2 + X) => **C.T. = O(X²)**.

Obs: Dacă înlocuim rândul 2 al programului cu $Z_1 \leftarrow \lfloor \sqrt{X} \rfloor$, adică să ne oprim din căutarea divizorilor când ajungem la $\sqrt{X}$ în loc de X/2, atunci revenim la eticheta L_3 de maxim $\sqrt{X}$ ori. Operația de comparare are complexitatea Z_0 care acum este maxim $\sqrt{X}$, iar verificarea divizibilității rămâne X, deci complexitatea timp devine $X + \sqrt{X} * \left(\sqrt{X} + X\right)$ => **C.T. = O(** $X\sqrt{X}$ **)**.

Problema 20 : $Y \leftarrow nr\_perfect(X) = \begin{cases} 1, \ daca \ X = nr.perfect \\ 0, \ daca \ X \neq nr.perfect \end{cases}$

Un număr este perfect dacă este egal cu suma divizorilor săi diferiți de el însuși.

X = 6 => ∑(div ≠ X) = 1 + 2 + 3 = 6 = X (este nr. perfect)
X = 10 => ∑(div ≠ X) = 1 + 2 + 5 = 8 < X (nu este nr. perfect)
X = 28 => ∑(div ≠ X) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 = X (este nr. perfect)
X = 36 => ∑(div ≠ X) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55 > X (nu este nr. perfect)

$$\begin{array}{ll}
& Z_0 \leftarrow 2 \\
& Z_1 \leftarrow X / Z_0 \quad // \, divizorul \ posibil \\
& Z_2 \leftarrow X \quad // \, X - \Sigma(div) \\
& IF \ Z_2 \neq 0 \ GOTO \ L_1 \\
& GOTO \ E \quad // \, 0 \neq nr.perfect \\
[L_1]: & IF \ Z_1 \neq 0 \ GOTO \ L_2 \\
& \quad GOTO \ L_3 \quad // \, divizorul = 0 \\
[L_2]: & Z_3 \leftarrow f_{:}(X, Z_1) \\
& \quad IF \ Z_3 \neq 0 \ GOTO \ L_4 \\
[L_5]: & Z_1 \leftarrow Z_1 \dot{-} 1 \\
& \quad GOTO \ L_1 \\
[L_4]: & Z_4 \leftarrow f_{<}(Z_2, Z_1) \\
& \quad IF \ Z_4 \neq 0 \ GOTO \ E \quad // \, X < \Sigma(div) \\
& \quad Z_2 \leftarrow Z_2 \dot{-} Z_1 \\
& \quad GOTO \ L_5 \\
[L_3]: & IF \ Z_2 \neq 0 \ GOTO \ E \quad // \, X > \Sigma(div) \\
& \quad Y \leftarrow Y + 1 \quad // \, X = \Sigma(div)
\end{array}$$

Dacă X = 0 returnăm 0. Altfel, setăm Z_1 (posibilul divizor) la valoarea X/2 (rândul 2) și copiem X-ul în Z_2 (rândul 3).
Cât timp Z_1 nu a ajuns la 0, verificăm dacă este divizor al lui X (rândul 8).
(a) Dacă da, comparăm acest divizor cu Z_2 (rândul 12), iar dacă este mai mic sau egal, atunci scădem divizorul Z_1 din Z_2 (rândul 14), apoi decrementăm Z_1 (rândul 10). Dacă divizorul este strict mai mare decât valoarea rămasă în Z_2, înseamnă că nu putem face scăderea și că avem $X < \sum(\text{div} \neq X)$, deci returnăm 0 (X nu este număr perfect).
(b) Dacă nu, doar decrementăm Z_1 (rândul 10).
Dacă Z_1 a ajuns la 0 (deci am reușit să scădem toți divizorii din Z_2 copia lui X), verificăm dacă Z_2 a ajuns și el pe 0. Dacă da, returnăm 1 (X este număr perfect). Iar dacă nu, returnăm 0, pentru că înseamnă că avem $X > \sum(\text{div} \neq X)$.

<u>Complexitatea timp:</u>
Pentru a calcula X/2 (rândul 2) avem complexitate X, iar pentru a copia X (rândul 3) tot X. La eticheta L_1 revenim maxim de X/2 ori. De fiecare dată testăm divizibilitatea (rândul 8) cu complexitate X. Pentru fiecare divizor găsit (maxim $2\sqrt{X}$ divizori, pentru că îi putem grupa în perechi de câte 2 divizori (div, X/div), dintre care primul este maxim $\sqrt{X}$), verificăm dacă îl putem scădea (rândul 12) cu complexitatea divizorului, adică maxim X/2; apoi dacă putem, chiar facem scăderea (rândul 14) cu complexitatea divizorului, adică tot maxim X/2.

Rezultă $2*X + \underbrace{\frac{X}{2} * \underbrace{X}_{f_{\vdots}}}_{L2} + \underbrace{2*\sqrt{X}*\left(\underbrace{\frac{X}{2}}_{f_<} + \underbrace{\frac{X}{2}}_{\dot{-}}\right)}_{L4}$ => **C.T. = O(X²)**.

Problema 21 : $Y \leftarrow \lfloor \log_2(X) \rfloor$

Rezolvarea (A) ***(cu înmulțiri cu 2)***

$$\begin{array}{ll}
[L_0]: & IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
 & GOTO\ L_0 \quad //\,ciclam \\
[L_1]: & Z_0 \leftarrow 2 \\
 & Z_1 \leftarrow Z_1 + 1 \quad //\,Z_1 = 2^Y \\
[L_2]: & Z_3 \leftarrow Z_1 * Z_0 \\
 & Z_1 \leftarrow Z_3 \\
 & Y \leftarrow Y + 1 \\
 & Z_2 \leftarrow f_{\leq}(Z_1, X) \\
 & IF\ Z_2 \neq 0\ GOTO\ L_2 \\
 & Y \leftarrow Y \dot{-} 1
\end{array}$$

(*) Rezolvarea (B) ***(cu împărțiri la 2)***

$$\begin{array}{ll}
[L_0]: & IF\ X \neq 0\ GOTO\ L_1 \\
 & GOTO\ L_0 \quad //\,ciclam \\
[L_1]: & Z_0 \leftarrow 2 \\
 & Z_1 \leftarrow X \quad //\,Z_1 = X / 2^Y \\
[L_2]: & Z_2 \leftarrow Z_1 / Z_0 \\
 & Z_1 \leftarrow Z_2 \\
 & Y \leftarrow Y + 1 \\
 & IF\ Z_1 \neq 0\ GOTO\ L_2 \\
 & Y \leftarrow Y \dot{-} 1
\end{array}$$

- La rezolvarea (A), pornim de la $Z_1 = 1$ și îl tot înmulțim cu 2 până ajungem la o valoare strict mai mare decât X, iar pentru fiecare înmulțire incrementăm Y. Apoi, după ce Z_1 l-a depășit pe X, scădem o unitate din Y pentru a avea partea întreagă inferioară din logaritm.

- La rezolvarea (B), pornim de la $Z_1 = X$ și îl tot împărțim la 2 până ajungem la 0, iar pentru fiecare împărțire incrementăm Y. Apoi, când Z_1 a devenit 0, scădem o unitate din Y pentru a avea partea întreagă inferioară din logaritm.

Complexitatea timp:

- Rezolvarea (A): revenim la eticheta L_2 de $Y = \lfloor \log_2(X) \rfloor$ ori, iar cea mai costisitoare înmulțire este ultima, de complexitate aproximativ $2^Y = 2^{\log_2(X)} = X$. Iar compararea (rândul 8) are în cel mai rău caz tot complexitate X. Rezultă **C.T. = O(X * log(X))**.

- Rezolvarea (B): revenim la eticheta L_2 de $Y = \lfloor \log_2(X) \rfloor$ ori, iar cea mai costisitoare împărțire este prima, de complexitate X. Rezultă **C.T. = O(X * log(X))**.

Obs: Dacă în loc să aproximăm toate operațiile (înmulțiri, respectiv împărțiri) cu cel mai rău caz (ultima înmulțire, respectiv prima împărțire) și să înmulțim cu numărul de repetiții ($Y = \lfloor \log_2(X) \rfloor$ în ambele cazuri), am aduna separat complexitățile pentru fiecare dintre operații, atunci am obține următoarele formule:

- Rezolvarea (A):

$2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{\log_2(X)+1}$ este o serie geometrică cu primul element 2, numărul de elemente Y+1 = $\log_2$(X)+1 și rația 2.

Atunci formula devine: $2 * \frac{1 - 2^{\log_2(X)+1}}{1-2} = 2 * \frac{2*X-1}{2-1} = 4*X-2$

Rezultă **C.T. = O(X)**.

- Rezolvarea (B):

$X + \frac{X}{2^1} + \frac{X}{2^2} + \frac{X}{2^3} + ... + \frac{X}{2^{\log_2(X)}}$ reprezintă o serie geometrică cu primul element X, numărul de elemente Y+1 = $\log_2$(X)+1 și rația ½.

Atunci formula anterioară devine:

$$X * \frac{1 - \frac{1}{2^{Y+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = X * \frac{1 - \frac{1}{2*X}}{1-\frac{1}{2}} = X * \frac{2*X-1}{2*X} * 2 = 2*X-1$$

(Am folosit că $2^{Y+1} = 2*2^Y = 2*2^{\log_2(X)} = 2*X$.)

Rezultă **C.T. = O(X)**.

Problema 22 : $Y \leftarrow cmmmc(X_1, X_2)$

1 $IF\ X_1 \neq 0\ GOTO\ L_1$
2 $GOTO\ E$
3 $[L_1]: IF\ X_2 \neq 0\ GOTO\ L_2$
4 $\quad GOTO\ E$
5 $[L_2]: Z_0 \leftarrow f_{<}(X_1, X_2)$
6 $\quad IF\ Z_0 \neq 0\ GOTO\ L_3$
7 $\quad Z_1 \leftarrow X_2$
8 $\quad Z_2 \leftarrow X_1 \qquad // Z_1 \leq Z_2$
9 $GOTO\ L_4$
10 $[L_3]: Z_1 \leftarrow X_1$
11 $\quad Z_2 \leftarrow X_2 \qquad // Z_1 < Z_2$
12 $[L_4]: Y \leftarrow Y + Z_2 \qquad // Y = M_{Z_2}$
13 $\quad Z_3 \leftarrow f_{\vdots}(Y, Z_1)$
14 $\quad IF\ Z_3 \neq 0\ GOTO\ E$
15 $\quad GOTO\ L_4$

Dacă $X_1 = 0$ sau $X_2 = 0$, returnăm 0.
Dacă ambele numere sunt nenule, le comparăm (rândul 5) și apoi copiem numărul mai mic în Z_1 și numărul mai mare în Z_2 (rândurile 7 – 8 sau 10 – 11, în funcție de rezultatul comparării).
La eticheta L_4 îl incrementăm pe Y cu $Z_2 = \max\{X_1, X_2\}$ unități, apoi testăm dacă Y este divizibil cu $Z_1 = \min\{X_1, X_2\}$. Dacă da, ieșim din program și avem deja rezultatul în Y. Dacă nu, revenim la eticheta L_4 (unde Y devine următorul multiplu de Z_2).

<u>Complexitatea timp:</u>
La eticheta L_2, pentru a compara numerele, avem complexitatea $\min\{X_1, X_2\}$.
Apoi pentru a copia cele două numere (fie la rândurile 7 – 8, fie la 10 – 11) avem complexitatea $X_1 + X_2$.
În cel mai rău caz (când numerele sunt prime între ele, iar rezultatul este $X_1 * X_2$), la eticheta L_4 revenim de $Z_1 = \min\{X_1, X_2\}$ ori. De fiecare dată actualizăm Y-ul (rândul 12) cu complexitatea $Z_2 = \max\{X_1, X_2\}$, apoi testăm divizibilitatea (rândul 13) cu complexitatea Y, care în cel mai rău caz ajunge $X_1 * X_2$.
Rezultă: $\min\{X_1, X_2\} + X_1 + X_2 + \min\{X_1, X_2\} * (\max\{X_1, X_2\} + X_1 * X_2)$
=> **C.T. = O(X1 * X2 * min{X_1, X_2})**.

~ Seminar 9 ~

(Funcții recursive)

Funcții elementare

succesor: $s(x) = x + 1$

constantă: $C_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = k$

proiecție: $\Pi_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_k$

Obs: - La funcțiile *constantă* și *proiecție*, indicele de sus reprezintă numărul de parametri asupra cărora va fi aplicată acea funcție.
- La funcția *constantă*, indicele de jos reprezintă constanta numerică pe care o va întoarce funcția ca rezultat (deci k poate fi oricât, inclusiv mai mare decât n).
- La funcția *proiecție*, indicele de jos reprezintă al câtelea parametru (x_k) va fi întors ca rezultat de către funcție (deci $k \le n$ la funcția proiecție).

Operații

Compunere

(a) $f(x) = h(g(x))$

(b) $f(x_1,\dots,x_n) = h(g_1(x_1,\dots,x_n),\dots,g_k(x_1,\dots,x_n))$

Obs: - Toate funcțiile aflate cel mai în interiorul compunerilor (aici notate cu g, respectiv $g_1, \dots, g_k$) trebuie să aibă exact aceeași parametri (inclusiv în aceeași ordine) ca funcția f.
- Numărul de parametri al funcției h (notat aici cu k) poate să fie diferit de cel al funcției f (notat aici cu n).

Recursivitate

(a) $\begin{cases} f(0) = k \\ f(t+1) = g(t, f(t)) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} f(x_1,\dots,x_n,0) = h(x_1,\dots,x_n) \\ f(x_1,\dots,x_n,t+1) = g(x_1,\dots,x_n,t, f(x_1,\dots,x_n,t)) \end{cases}$

Obs: - Recursivitatea se face după un singur parametru pe care îl înlocuim cu 0 la pasul de oprire și cu t+1 la pasul recursiv (restul parametrilor nu se modifică).

- La *pasul de oprire a recursivității* (pasul 0), în dreapta egalului vom avea cu un parametru mai puțin decât avea funcția f din stânga egalului: restul parametrilor (dacă există) în afară de cel pe care se face recursivitatea.
- La *pasul recursiv* (pasul t+1), în dreapta egalului (la funcția g) vom avea cu un parametru mai mult decât avea funcția f din stânga egalului: toți parametri de la pasul anterior (toți parametrii X și parametrul t), precum și funcția de la pasul anterior (adică funcția f aplicată pe toți parametrii X și pe t).

Minimizare nemărginită

$$f(x_1,...,x_n) = \min_t \left[g(x_1,...,x_n,t) = 0 \right]$$

Minimizare mărginită

$$f(x_1,...,x_n,y) = \min_{t \le y} \left[g(x_1,...,x_n,t) = 0 \right]$$

EXERCIȚII

(1) $f_+(x_1,x_2) = x_1 + x_2$

$$f_+(x_1,0) = x_1 = \Pi_1^{(1)}(x_1)$$

$$f_+(x_1,t+1) = (x_1+t)+1 = s\left(\Pi_3^{(3)}\left(x_1,t,\ f_+(x_1,t)\right)\right)$$

(2) $f_*(x_1,x_2) = x_1 * x_2$

$$f_*(x_1,0) = 0 = C_0^{(1)}(x_1)$$

$$f_*(x_1,t+1) = x_1*(t+1) = (x_1*t)+x_1 = f_+\left(\Pi_3^{(3)}\left(x_1,t,\ f_*(x_1,t)\right), \Pi_1^{(3)}\left(x_1,t,\ f_*(x_1,t)\right)\right)$$

(3) $f_\wedge(x_1,x_2) = x_1^{x_2}$

$$f_\wedge(x_1,0) = 1 = C_1^{(1)}(x_1)$$

$$f_\wedge(x_1,t+1) = x_1^{t+1} = x_1^{t} * x_1 = f_*\left(\Pi_3^{(3)}\left(x_1,t,\ f_\wedge(x_1,t)\right), \Pi_1^{(3)}\left(x_1,t,\ f_\wedge(x_1,t)\right)\right)$$

(4) $f(x) = a^x, a\ const.$

$$f(0) = 1$$

$$f(t+1) = a^{t+1} = a^t * a = f_*\left(\Pi_2^{(2)}\left(t,\ f(t)\right), C_a^{(2)}\left(t,\ f(t)\right)\right)$$

(5) $f_!(x) = x! = 1*2*3*...*x$

$f_!(0) = 0! = 1$

$f_!(t+1) = t!*(t+1) = f_*\left(\Pi_2^{(2)}(t, f_!(t)), s\left(\Pi_1^{(2)}(t, f_!(t))\right)\right)$

(6) $f_\Sigma(x) = 1+2+3+...+x$

$f_\Sigma(0) = 0$

$f_\Sigma(t+1) = f_\Sigma(t) + (t+1) = f_+\left(\Pi_2^{(2)}(t, f_\Sigma(t)), s\left(\Pi_1^{(2)}(t, f_\Sigma(t))\right)\right)$

(7) $pred(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = x \dot{-} 1$

$pred(0) = 0$

$pred(t+1) = t = \Pi_1^{(2)}(t, pred(t))$

(8) $f_{\dot{-}}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 - x_2, & x_1 \geq x_2 \\ 0, & x_1 < x_2 \end{cases} = x_1 \dot{-} x_2$

$f_{\dot{-}}(x_1, 0) = x_1 = \Pi_1^{(1)}(x_1)$

$f_{\dot{-}}(x_1, t+1) = x_1 \dot{-} (t+1) = (x_1 \dot{-} t) \dot{-} 1 = pred\left(\Pi_3^{(3)}(x_1, t, f_{\dot{-}}(x_1, t))\right)$

(9) $f_{|\,|}(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$

$f_{|\,|}(x_1, x_2) = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1) = f_+\left(f_{\dot{-}}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}\left(\Pi_2^{(2)}(x_1, x_2), \Pi_1^{(2)}(x_1, x_2)\right)\right)$

(10) $f_{\max}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, \ daca\ x_1 \geq x_2 \\ x_2, \ altfel \end{cases}$

$f_{\max}(x_1, x_2) = x_2 + (x_1 \dot{-} x_2) = f_+\left(\Pi_2^{(2)}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}(x_1, x_2)\right)$

(11) $f_{\min}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1, \ daca\ x_1 \leq x_2 \\ x_2, \ altfel \end{cases}$

$f_{\min}(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} (x_1 \dot{-} x_2) = f_{\dot{-}}\left(\Pi_1^{(2)}(x_1, x_2), f_{\dot{-}}(x_1, x_2)\right)$

$f_{\max}(x_1, x_2) = f_{\min}(x_1, x_2) + |x_1 - x_2| = f_+\left(f_{\min}(x_1, x_2), f_{||}(x_1, x_2)\right)$
$f_{\min}(x_1, x_2) = f_{\max}(x_1, x_2) \dot{-} |x_1 - x_2| = f_{\dot{-}}\left(f_{\max}(x_1, x_2), f_{||}(x_1, x_2)\right)$

$$f_{\max}(x_1,x_2)=x_1+x_2 \dot{-} f_{\min}(x_1,x_2)=f_{\dot{-}}\left(f_+(x_1,x_2),f_{\min}(x_1,x_2)\right)$$
$$f_{\min}(x_1,x_2)=x_1+x_2 \dot{-} f_{\max}(x_1,x_2)=f_{\dot{-}}\left(f_+(x_1,x_2),f_{\max}(x_1,x_2)\right)$$

(12) $par(x)=\begin{cases}1, \, daca \; x = par\\ 0, \, daca \; x = impar\end{cases}$

$$par(0)=1$$
$$par(t+1)=1\dot{-}par(t)=f_{\dot{-}}\left(C_1^{(2)}(t,par(t)),\Pi_2^{(2)}(t,par(t))\right)$$
$$//\, sau: \quad par(t+1)=impar(t)$$

(13) $impar(x)=\begin{cases}1, \, daca \; x = impar\\ 0, \, daca \; x = par\end{cases}$

$$impar(0)=0$$
$$impar(t+1)=1\dot{-}impar(t)=f_{\dot{-}}\left(C_1^{(2)}(t,impar(t)),\Pi_2^{(2)}(t,impar(t))\right)$$
$$//\, sau: \quad impar(t+1)=par(t)$$

Predicate

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, \, daca \; x>0\\ 1, \, daca \; x=0\end{cases} \quad =1\dot{-}x$$
$$\alpha(0)=1$$
$$\alpha(t+1)=0=C_0^{(2)}(t,\alpha(t))$$

(14) $f_=(x_1,x_2)=\begin{cases}1, \, daca \; x_1=x_2\\ 0, \, daca \; x_1\neq x_2\end{cases}$

$$f_=(x_1,x_2)=1\dot{-}|\,x_1-x_2\,|=\alpha\left(f_{||}(x_1,x_2)\right)$$

(15) $f_\leq(x_1,x_2)=\begin{cases}1, \, daca \; x_1\leq x_2\\ 0, \, daca \; x_1> x_2\end{cases}$

$$f_\leq(x_1,x_2)=1\dot{-}(x_1\dot{-}x_2)=\alpha\left(f_{\dot{-}}(x_1,x_2)\right)$$

Prop.1: Dacă P și Q sunt predicate calculabile, atunci și $\neg P, P\wedge Q, P\vee Q$ sunt predicate calculabile.

$\neg P = \alpha(P)$

Dem: $P \wedge Q = P * Q = f_*(P,Q)$ // *sau*: $P \wedge Q = \min(P,Q)$

$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \alpha(f_*(\alpha(P), \alpha(Q)))$ // *sau*: $P \vee Q = \max(P,Q)$

Prop.2: Dacă g și h sunt funcții calculabile, iar P un predicat calculabil, atunci f este funcție calculabilă.

$$f(x_1,...,x_n) = \begin{cases} g(x_1,...,x_n), \, daca \; P(x_1,...,x_n) = 1 \\ h(x_1,...,x_n), \, daca \; P(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases}$$

Dem:

$$f = g * P + h * \alpha(P)$$

Prop.3: Dacă f este funcție calculabilă, atunci g și h sunt funcții calculabile.

$$g(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = \sum_{t=0}^{x_{n+1}} f(x_1,...,x_n,t)$$

$$h(x_1,...,x_n,x_{n+1}) = \prod_{t=0}^{x_{n+1}} f(x_1,...,x_n,t)$$

Dem:

$$g(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n,0)$$
$$g(x_1,...,x_n,t+1) = g(x_1,...,x_n,t) + f(x_1,...,x_n,t+1)$$

$$h(x_1,...,x_n,0) = f(x_1,...,x_n,0)$$
$$h(x_1,...,x_n,t+1) = h(x_1,...,x_n,t) * f(x_1,...,x_n,t+1)$$

Prop.4: Dacă P este predicat calculabil, atunci sunt calculabile și următoarele predicate:

$(\forall t)_{\le x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)$

$(\exists t)_{\le x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)$

$(\forall t)_{< x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)$

$(\exists t)_{< x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)$

Dem:

$$(\forall t)_{\le x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t) \iff \left[\prod_{t=0}^{x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)\right] = 1$$

$$(\exists t)_{\le x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t) \iff \left[\sum_{t=0}^{x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)\right] \ne 0$$

$$(\forall t)_{< x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t) \iff (\forall t)_{\le x_{n+1}} [(t = x_{n+1}) \vee P(x_1,...,x_n,t)]$$

$$(\exists t)_{< x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t) \iff (\exists t)_{\le x_{n+1}} [(t \ne x_{n+1}) \wedge P(x_1,...,x_n,t)]$$

Prop.5: Dacă P este predicat calculabil, atunci funcția $\min\limits_{t \le x_{n+1}} P(x_1,...,x_n,t)$ este calculabilă.

(16) $P_{\vdots}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, \; daca\; x_1 \vdots x_2\\ 0, \; daca\; x_1 \not\vdots\, x_2\end{cases}$ ***„este divizibil"***

$P_{\vdots}(x_1,x_2) \;\; \Leftrightarrow \;\; (\exists t)_{\le x_1}[x_1 = x_2 * t]$

(17) $P_{|}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, \; daca\; x_1 \mid x_2\\ 0, \; daca\; x_1 \nmid x_2\end{cases}$ ***„divide"***

$P_{|}(x_1,x_2) \;\; \Leftrightarrow \;\; (\exists t)_{\le x_2}[x_1 * t = x_2]$

(18) $prim(x)=\begin{cases}1, \; daca\; x = nr.prim\\ 0, \; daca\; x \ne nr.prim\end{cases}$

$prim(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; (x>1)\wedge(\forall t)_{<x}[(t=0)\vee(t=1)\vee\alpha(P_{\vdots}(x,t))]$

Obs: La seminar am uitat să punem şi condiţia "x > 1".

(19) $patrat\_perfect(x)=\begin{cases}1, \; daca\; x = patrat\;\; perfect\\ 0, \; daca\; x \ne patrat\;\; perfect\end{cases}$

$patrat\_perfect(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; (\exists t)_{\le x}[x = t * t]$

(20) $numar\_perfect\,(x)=\begin{cases}1, \; daca\; x = numar\;\; perfect\\ 0, \; daca\; x \ne numar\;\; perfect\end{cases}$

$numar\_perfect(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; x = \sum_{t=0}^{x}(t*[(t\ne 0)\wedge(t\ne x)\wedge P_{\vdots}(x,t)])$

(21) $f_{/}(x_1,x_2)=\left\lfloor \frac{x_1}{x_2} \right\rfloor$

$f_{/}(x_1,x_2)=\min_{t\le x_1}[(t+1)*x_2 > x_1]$

(22) $f_{\%}(x_1,x_2)=x_1 \% x_2$

$f_{\%}(x_1,x_2)=x_1 \dot{-} x_2 * f_{/}(x_1,x_2)= f_{\dot{-}}(\Pi_1^{(2)}(x_1,x_2), f_{*}(\Pi_2^{(2)}(x_1,x_2), f_{/}(x_1,x_2)))$

sau $f_{\%}(x_1,x_2)=\min_{t<x_2}[P_{\vdots}(x_1-t,x_2)]$

~ Seminar 10 ~

(Recapitulare C&C)

(23) $f(x) = 2 * x + 4$

- rezolvare doar cu compunere

$$f(x) = f_{+}\left(f_{*}\left(C_{2}^{(1)}(x), \Pi_{1}^{(1)}(x)\right), C_{4}^{(1)}(x)\right)$$

- rezolvare cu recursivitate și compunere

$$f(0) = 4$$

$$f(t+1) = 2*(t+1)+4 = (2*t+4)+2 = f(t)+2 = f_{+}\left(\Pi_{2}^{(2)}(t, f(t)), C_{2}^{(2)}(t, f(t))\right)$$

(24) $f(x) = \sum_{k=0}^{x} (3*k \dot{-} 2)$

$$f(0) = 3*0 \dot{-} 2 = 0$$

$$f(t+1) = f(t) + [3*(t+1) \dot{-} 2] = f(t) + (3*t+1)$$

$$= f_{+}\left(\Pi_{2}^{(2)}(t, f(t)), s\left(f_{*}\left(C_{3}^{(2)}(t, f(t)), \Pi_{1}^{(2)}(t, f(t))\right)\right)\right)$$

(25) $f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2*x_1 \dot{-} x_2, & daca\ x_1 \le x_2 \\ x_1^{x_2+3}, & daca\ x_1 > x_2 \end{cases}$

$$f(x_1, x_2) = f_{\dot{-}}\left(f_{*}\left(C_{2}^{(2)}(x_1, x_2), \Pi_{1}^{(2)}(x_1, x_2)\right), \Pi_{2}^{(2)}(x_1, x_2)\right) * f_{\le}(x_1, x_2) +$$

$$+ f_{\wedge}\left(\Pi_{1}^{(2)}(x_1, x_2), f_{+}\left(\Pi_{2}^{(2)}(x_1, x_2), C_{3}^{(2)}(x_1, x_2)\right)\right) * \alpha\left(f_{\le}(x_1, x_2)\right)$$