SERII - APLICAȚII

I SERIE „TELESCOPICĂ"

- Este o serie unde se reduc foarte mulți termeni, a.î. la final rămânem cu destul de puțini. Pentru acest tip de serii vom aplica desfacerea în fracții simple.

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Aplicăm desfacerea în fracții simple:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\overset{n+1}{A}}{n} + \frac{\overset{n}{B}}{n+1} = \frac{An + A + Bn}{n(n+1)}.$$

- Grupăm în funcție de n și dăm factor comun.

$$\Rightarrow \frac{n(A+B) + A}{n(n+1)}$$

; ne uităm în seria noastră, și observăm că numărătorul nu are n, așadar:

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Revenim în formula noastră: $\frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Dacă scriem din termenii sumei:

$$\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots \cancel{\frac{1}{k}} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1$$

Ex 2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)} = ?$$

$$\frac{4}{k(k+2)} = \frac{\overset{k+2}{A}}{k} + \frac{\overset{k}{B}}{k+2} = \frac{Ak + 2A + Bk}{k(k+2)} = \frac{k(A+B)+2A}{k(k+2)}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} A+B=0 \Rightarrow B=-2 \\ 2A=4 \Rightarrow \boxed{A=2} \end{array} \Bigg| \Rightarrow \frac{4}{k(k+2)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+2}\right)$$

Scriem termenii: $\left(\frac{2}{1} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) + \left(\frac{2}{2} - \cancel{\frac{2}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{4}} - \cancel{\frac{2}{6}}\right)$

$$+ \left(\cancel{\frac{2}{5}} - \cancel{\frac{2}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{2}{6}} - \cancel{\frac{2}{8}}\right) + \cancel{\frac{2}{n-1}} + \frac{2}{n+1} \left(\cancel{\frac{2}{n}} - \frac{2}{n+2}\right)$$

$$= 2 + 1 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = 3 - \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2+5n}{n^2+3n+2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k(k+2)} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+5n}{n^2+3n+2} = \underline{\underline{3}}$$

NB: ~~Sumele~~ Seriile „telescopice" și seriile geometrice sunt singurele serii infinite, pentru care putem să calculăm valoarea exactă

II SERII GEOMETRICE

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

- Trebuie să identificăm rația și să stabilim dacă:
  $|r| < 1 \Rightarrow$ serie convergentă
  $|r| \geq 1 \Rightarrow$ serie divergentă.

$\boxed{\text{Suma seriei: } \frac{a_1}{1-r}}$, a_1 = primul termen

Forma generală: $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} \Rightarrow a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$

$= a(1 + r + r^2 + \dots + r^n)$

Vom scrie câțiva termeni, ca să determinăm dacă avem o progresie geometrică:

$n=1$: $\frac{1}{4}$

$n=2$: $-\frac{3}{16}$

$n=3$: $\frac{9}{64}$

$n=4$: $\frac{-27}{256}$

$\Rightarrow r = \left(-\frac{3}{4}\right)$ (de ce? $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{-3}{\cancel{16}\,4} \cdot \cancel{4} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow$ avem o progresie geometrică cu rația $\boxed{r = -\frac{3}{4}}$

Revenim în formulă: $a(1 + r + r^2 + \dots + r^n)$

$\frac{1}{4} + \frac{-3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{-27}{256} + \dots$

$\underbrace{\frac{1}{4}}_{a}\left(1 + \underbrace{-\frac{3}{4}}_{r} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{-3}{4}\right)^3 + \left(-\frac{3}{4}\right)^4 + \dots\right)$

Conform criteriului de convergență $|r| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{conv.} \\ \geq 1 \Rightarrow \text{div.} \end{cases}$ $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow$ serie conv.

ex2

$$\sum_{k=0}^{\infty} 8\left(\frac{1}{3}\right)^k = 8 + \frac{8}{3} + \frac{8}{9} + \frac{8}{27} + \dots$$

$$= 8 + 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= \underbrace{8}_{a}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{r} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \left(\frac{1}{3}\right)^{\dots}\right)$$

$|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ serie convergentă.

Suma seriei: $\frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{3}} = 8\cdot\frac{3}{2} = 12$

ex 3

$$1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1\cdot 2^n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

$\Rightarrow a = 1$

$r = 2$ $\quad |2| > 1 \Rightarrow$ serie divergentă

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-2} = -1$!! (Fals)

Dacă seria nu converge, nu putem calcula suma.

$$\sum_{n=2}^{\infty} 5^{n-1} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

$n=2 \quad 5^1 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2$

$n=3 = \quad 5^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3$

$n=4 \quad 5^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \quad \boxed{r=\frac{2}{3}} < 1 \Rightarrow \text{con.}$$

5

$n=0 \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{3^{-1}} = 1 \cdot 3 = 3 \quad \frac{\cancel{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\cancel{3}}{\frac{1}{\cancel{3}}} = 9$

$n=1 \Rightarrow 2$

$n=2 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$r = 5 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{9}{2}$

$$\frac{\cancel{5^2} \cdot \left(\frac{9}{\cancel{10}}\right)^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{5} \cdot \cancel{\left(\frac{9}{10}\right)^2}} = \left|\frac{9}{2}\right|$$

$\therefore r = \left|\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} > 1 \Rightarrow$ serie divergente

$$\sum_{n=5}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{9^{n+2}}$$

$n=5 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{9^7}$

$n=6 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{9^8}$

$n=7 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{9^9}$

$\frac{1}{3^8 \cdot 5} =$

$\frac{\cancel{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{9}\,3} = \left|\frac{1}{6}\right| < 1 \Rightarrow$ Serie convergente

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{9^7}}{\frac{6}{1} - \frac{1}{6}} = \left(\frac{3}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{9^7} \cdot \frac{6}{5}$$

$$= \frac{3^5 \cdot 1 \cdot 6}{2^5 \cdot 9^7 \cdot 5} = \frac{3^5 \cdot 6}{9^7 \cdot 10} = \frac{\cancel{3^5} \cdot 6}{3^{\cancel{14}\,9} \cdot 10} = \frac{\cancel{3^2}}{3^9 \cdot \cancel{10}\,5}$$

$\frac{1}{n^2}$ com.

III SERII POLINOMIALE (p-series)

Formă generală: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$

CONDIȚIE: $\frac{1}{n^p}$; dacă
- $p > 1 \Rightarrow$ serie convergentă
- $p \leq 1 \Rightarrow$ ~~dacă~~ serie divergentă

Ex:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonică); $p = 1 \Rightarrow$ serie divergentă

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$ $p = 2 \Rightarrow$ serie convergentă

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$ serie divergentă

Aplicații:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^2} \Rightarrow$ convergent, ptn că $p = 2 > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \Rightarrow$ divergent, ptn că $p = 1$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2016n^3}{\sqrt[3]{n^6}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{\sqrt[8]{n^3}}$

Exemplu serie telescopică

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{\overset{n+2/}{A}}{n+1} + \frac{\overset{n+1/}{B}}{n+2} = \frac{An+2A+Bn+B}{(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \frac{n(A+B)+2A+B}{(n+1)(n+2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow \boxed{B=2} \\ A+A+B=-2 \Rightarrow A=\boxed{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$

$$-\frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \frac{2}{6} + \dots \frac{-2}{n} + \frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$

$$= \cancel{-\frac{2}{3} - \frac{2}{n+2}} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{n+2} = -\frac{2n+4+2}{}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+2} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$S = 1-1+1-1+1 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{(1-1)} \; (-1)^{n-1}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

IV CRITERIUL INTEGRAL

: Notăm termenul general a_n cu $f(x)$.

Criteriul se poate aplica $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este continuă, pozitivă și descrescătoare.

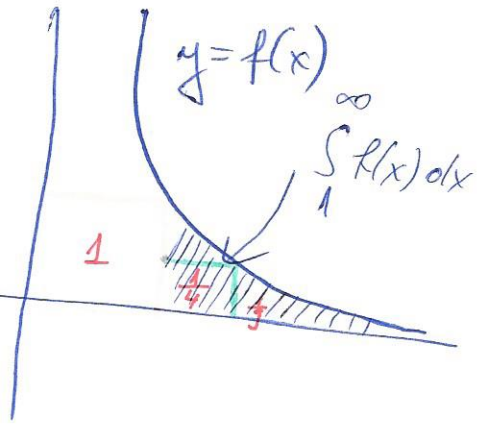
Dacă $\int_1^\infty f(x)$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

$\int_1^\infty f(x)$ divergentă $\Rightarrow \sum a_n$ divergentă.

exemplu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad ; f(x) = \frac{1}{x^2}$$

- toți termenii sunt pozitivi
- termenii sunt din ce în ce mai mici
- funcția este continuă (vezi grafic)



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

- Luăm separat integrala

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = ? \quad \int x^{-2}\,dx = \int \frac{x^{-1}}{-1} = \int_1^\infty -\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sum_{n=2}^{\infty} < 1 + 1$$

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} < 2 \xRightarrow{\text{Criteriul integral}} \cancel{f(x)}\ a_n \text{ convergent.}$$

Ex 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

331
280
240
210
1630

$f(x) = \frac{1}{x}$; pozitivă, continuă, descrescătoare

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} = \ln x \Big|_1^{\infty} = \text{Ocu } \ln\infty - \underbrace{\ln 1}_{0} = \infty$$

(nu e OK)

$\Rightarrow f(x)$ este divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

De ce??

$$\sum_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq \frac{1}{2}}$$

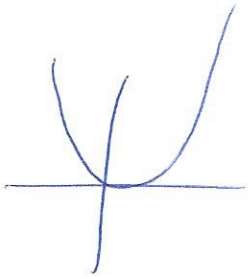
Aplicație

$$\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

. Avem 2 variante de rezolvare: folosind criteriul integral sau seria telescopică.

. Criteriul integral

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; $f(x) \leftarrow$ descrescătoare, pozitivă, continuă.



$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$$

Aplicație criteriul integral

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\frac{n^4}{4n^5} = \frac{1}{4n^1} \text{ divergentă}$$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; fct continuă, pozitivă, descrescătoare; $f : (2; \infty)$

$\int \frac{1}{x \ln x} dx = ?$ Wot $\ln x = t$

$\frac{1}{x} dx = 1 dt \Rightarrow$

$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \int 1 \, dx = x$

$x \Big|_2^{\infty} = \infty$ → serie divergentă

$\int \frac{1}{t}$

$\ln t \Big|_2^{\infty} = \ln(\ln \infty) - \ln(\ln(2))$

$\Rightarrow \infty$

$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}$

$\int \frac{n}{n+1}$

$f(x) = \frac{x}{x+1}$

$\int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \int 1 - \int \frac{1}{x+1}$

$x - \int \frac{1}{x+1}$

$\int \frac{x}{x+1} = ?$ Wot $x+1 = t$

$1 dx = 1 dt$

Wot $x+1 = t$

$1 dx = 1 dt$

$\Rightarrow x - \int \frac{1}{t} = (x - \ln x+1) \Big|_1^{\infty}$

$\infty -$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = \frac{n^2+2n}{n^2+2n} + \frac{1}{n^2+2n}$$

$$1 + \frac{1}{n^2+2n} > 1$$

$$a_{n+1} - a_n \qquad \overset{n+1}{\frac{n+1}{n+2}} - \overset{n+2}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

$$\frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+1+1} = \frac{n+1}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{n}$$

$$= \frac{(n+1)(n^2+1)}{n(n^2+2n+2)} = \frac{n^3+n+n^2+1}{n^3+2n^2+2n} = \frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+2n^2+2n} < 1$$

$$\int \frac{n}{n^2+1}$$

$$\cancel{\text{wst } n^2+1 = t}$$

$$\cancel{2n\,dt}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}$$

wst $x^2+1 = t$

$2x\,dx = 1\,dt$

$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}\ln|t|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|x^2+1|\Big|_1^{\infty}\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ serie divergentă

V CRITERIUL COMPARAȚIEI

- Dacă vrem să demonstrăm că o serie este convergentă, ~~demonstrăm că există~~ o comparăm cu o serie mai mare decât ea, care este convergentă. (poți da exemplul cu Dacia)

- Dacă vrem să demonstrăm că o serie este divergentă, atunci o comparăm cu o serie mai mică decât ea, care este divergentă.

Ex:

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n} = ? \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ln n} \Delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

divergentă

divergentă

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

convergentă

convergentă (serie geometrică cu $|r| = 3 > 1$)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{2/2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ serie convergentă.

$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ convergentă.

VI CRITERIUL COMPARĂRII LIMITEI

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \begin{cases} >0 \\ >0 \end{cases}$$

>0, $\sum b_n$ converg $\Rightarrow a_n$ converg

>0, $\sum b_n$ diverge $\Rightarrow a_n$ diverge.

Ex:

Încercăm să ne alegem b_n o serie despre care știm convergența. (sau putem afla mai ușor)

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^4-1}$

Fie $b_n = \frac{5}{n^4}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5}{n^4-1}}{\frac{5}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4-1} = 1 > 0 \text{ ; } b_n \text{ convergentă}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5}{n^4-1} \text{ converg.}$$

Ex

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n \cdot n} < \underbrace{\frac{1}{3^n}}_{b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{\cancel{3^n} \cdot n} \cdot \cancel{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} = 2 > 0 \text{, și } b_n \text{ convergentă}$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n \cdot n} \text{ convergentă}$$

VII CRITERIUL RAPORTULUI

CUVINTE CHEIE: FACTORIAL, EXPONENȚIALE.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \to \text{convergent}$$
$$> 1 \to \text{divergent.}$$

Exemple

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{5}{3^n} = ?$ $\quad a_{n+1} = \frac{5}{3^{n+1}}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{5}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{\cancel{5}} = \frac{1}{3} < 1$

$\Rightarrow$ ~~se~~ serie convergentă.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} = ?$ $\quad a_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{5^n} = \frac{5}{3} > 1$

$\to$ serie div.

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{e^n}{\pi^n}$ $\quad a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{\pi^{n+1}}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{\pi^{n+1}} \cdot \frac{\pi^n}{e^n} = \frac{e}{\pi} < 1$

$\to$ serie conv

4) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = ?$ $\quad a_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$

$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+2)^n}{(n+2+1)^n}}$ $= \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{e}{e} = 1$

(criteriul nu decide)

Aplicând criteriul divergenței (al n-lea termen)

$\to$ Serie divergentă.

ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^4}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{1+(n+1)^4}{(n+1)!}$; $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+(n+1)^4}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{1+n^4} = \frac{1+(n+1)^4}{(n+1)(n+1)^4} = 0$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4+1}{(n+1)^4(n+1)} = 0$

ex: $\sum_{1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}} = \cancel{2(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{3} = \infty$

→ serie divergente

VIII CRITERIUL RADICALULUI (RĂDĂCINII)

- Este folosit atunci când vrem să scapăm de puteri.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} <1 \to \text{serie convergentă} \\ =1 \to \text{NAȘPA} \\ >1 \to \text{serie divergentă.} \end{cases}$$

Aplicații

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = ? \Rightarrow \sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{3}{5} < 1 \to$ serie convergentă.

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n} \cdot 3^n}{10^n} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{2^{2n} \cdot 3^n}{10^n}} \Rightarrow \frac{2^2 \cdot 3}{10} = \frac{4 \cdot 3}{10} > 1 \to$ serie divergentă.

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+2}}$. Aplicăm criteriul radicalului

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^{n+2}}} = \frac{4}{3}.$$ De ce? $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n+2}} = 3$. De ce?

$$\lim_{n\to\infty} \left(3^{n+2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n+2}{n}} = 3^1 = 3$$

ATENȚIE

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, unde c este o constantă

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1$, $\forall p$ exponent pozitiv

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty$

Aplicatii

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot n^3}{3^n} = ?$ Aplicăm criteriul radicalului (rădăcinii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n \cdot n^3}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n} \cdot \sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

$\Rightarrow$ conv.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(n^4+2)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{3^n(n^4+2)}} = \frac{5}{3 \cdot 1} = \frac{5}{3} > 1$

$\Rightarrow$ serie divergentă

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{2^n \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n}{2^n \cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2 \cdot \infty} = 0$

$\Rightarrow$ serie convergentă

- CURIOZITĂȚI MATEMATICE

ASYMPTOTIC HIERARCHY

$$\ln n < \underbrace{\sqrt{n} < n < n^2}_{\text{polinomiale}} < \underbrace{2^n < 3^n < 4^n}_{\text{exponențiale}} < \underbrace{n!}_{\text{factorial}} < n^n$$

$\downarrow$ 1

$\downarrow$ 2 $\downarrow$ 3 $\downarrow$ 4

∞

IX RAABE DUHAMEL

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \begin{cases} >1 & \text{convergent} \\ =1 & \text{naspa} \\ <1 & \text{divergent} \end{cases}$$

Raportul este răsturnat față de criteriul raportului, (dintre a_n și a_{n+1}) prin urmare, condițiile de convergență și divergență sunt opuse.

* Raabe-Duhamel se folosește atunci când criteriul raportului nu a mers, mai ales că avem deja calculat $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ și trebuie doar să răsturnăm și să aplicăm formula.

APLICAȚII

Exemplu: $\cancel{a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)^2}{2\cdot 2\cdot 4\cdot}}$

$$a_n = \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}$$; Aplicăm criteriul raportului

$$a_{n+1} = \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2(2n+2)^2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = 1 \Rightarrow \text{naspa.}$$

Aplicăm Raabe Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}-1\right) = \lim n\left(\frac{-4n-3}{4n^2+2\ldots}\right) = -1<1$$

$\to$ divergent.

Ex2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)} \; ; \; a_{n+1} = \frac{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)(2n+3)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot n!\cdot 2^n\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{n!\,2^n} = \frac{2(n+1)}{2n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n+3} = 1 \to \text{naspa (criteriul nu decide)}$$

Aplicăm Raabe-Duhamel

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+2}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1$$

$\to$ serie divergentă