Tema 1

Soluții

Exercițiul 1

a) A singur se realizează: $A \cap B^c \cap C^c$

b) A şi C se realizează dar nu şi B: $A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc: $A \cap B \cap C$

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce: $A \cup B \cup C$

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) cel mult un eveniment se produce: $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce: $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) exact două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

Exercițiul 2

Evenimentele A, B, C și D se pot exprima în modul următor:

$$\begin{aligned}
A &= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \\
&\quad \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5), \\
B &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \\
&\quad \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c), \\
C &= (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup A \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
D &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup B \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
E &= \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right).
\end{aligned}$$

Exercițiul 3

1. (a) Spaţiul stărilor Ω este $\Omega = \{(O,b),(O,m),(O,s),(N,b),(N,m),(N,s)\}$.

   (b) Avem

$$\begin{aligned}
A &= \text{starea de sănătate a pacientului este serioasă} = \{(O,s),(N,s)\}, \\
B &= \text{pacientul nu este asigurat} = \{(N,b),(N,m),(N,s)\}, \\
B^c \cup A &= \text{sau pacientul este asigurat sau starea acestuia este serioasă} \\
&= \{O,b),(O,m),(O,s),(N,s)\}.
\end{aligned}$$

2. Cum măsura de probabilitate $\mathbb{P}$ corespunde echiprobabilităţii pe Ω avem că $\mathbb{P}((O,b)) = \mathbb{P}((O,m)) = \mathbb{P}((O,s)) = \mathbb{P}((N,b)) = \mathbb{P}((N,m)) = \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{6}$, deci

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{3},\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{2},\\
\mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

3. In acest caz avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.1 = 0.2,\\
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5,\\
\mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.2 + 02 + 0.1 + 0.1 = 0.6.
\end{aligned}$$

Exerciţiul 4

a) Careu: $\frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = 0.024\%$

b) Full-house: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} = 0.14\%$

c) Trei cărţi de acelaşi tip: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = 2.1\%$

d) Două perechi: $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} = 4.75\%$

e) O pereche: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\left(\binom{4}{1}\right)^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} = 42.26\%$

Exerciţiul 5

Pentru a avea rădăcini reale, ecuaţia trebuie să verifice $\Delta \geq 0$, cu alte cuvinte

$$ac \leq \frac{b^4}{4}.$$

Cazurile favorabile pentru produsul ac sunt date în tabelul de mai jos

Valori pentru b:	2	3	4	5	6
Cazuri favorabile:	1	3	8	14	17

Prin urmare numărul cazurilor favorabile este 43 iar cel al cazurilor posibile este de $6^3 = 216$ de unde probabilitatea ca ecuaţia să aibă rădăcini reale este $\frac{43}{216}$ iar rădăcini complexe (nereale) este $\frac{173}{216}$.

Exerciţiul 6

Fie A_i şi B_i evenimentele prin care Maria este la zi cu materia, respectiv a rămas în urmă, după i săptămâni. Conform formulei probabilităţii totale avem

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3|A_2) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_3|B_2) = \mathbb{P}(A_2) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_2) \cdot 0.4$$

Probabilitățile $\mathbb{P}(A_2)$ și $\mathbb{P}(B_2)$ pot fi calculate în același mod:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.4\\
\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.6
\end{aligned}$$

și ținând cont de ipoteză (Maria începe semestrul cu materia la zi) avem $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$ de unde concluzionăm că $\mathbb{P}(A_2) = 0.72$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.28$ și prin urmare $\mathbb{P}(A_3) = 0.688$.

În general avem că după $i+1$ săptămâni

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i+1}) &= \mathbb{P}(A_i)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_i)\cdot 0.4\\
\mathbb{P}(B_{i+1}) &= \mathbb{P}(A_i)\cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_i)\cdot 0.6
\end{aligned}$$

cu valorile inițiale $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$.

Exercițiul 7

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\\
&= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332.
\end{aligned}$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde
$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995\times 0.95}{0.995\times 0.95 + 0.05\times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99\times 0.3 + 0.01\times 0.7 \approx 0.304$ şi
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$
de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exercițiul 8

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:
$$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b) = \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b} = \frac{b}{b+r}.$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\mathbb{P}(1b|2b) = \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)} = \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n=2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k)=\mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k=n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1})=\frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b)=\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\ &+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\ &+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.\end{aligned}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})} = \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}} = \frac{b+nd}{b+r+nd} \to 1.$$

Exercițiul 9

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 5$\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 7$\}$

   Evenimentul E_n se scrie

$$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n)\\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

   Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j)|1 \le i,j \le 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

   In concluzie, probabilitatea evenimentului

$$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

   este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36}\\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 şi nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma* 2 şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

   şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n)\\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n-1}\frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$