Tema 1

Exercițiul 1

Fie A, B şi C trei evenimente. Exprimaţi în funcţie de A, B, C şi de operaţiile cu mulţimi următoarele evenimente:

a) A singur se realizează

b) A şi C se realizează dar nu şi B

c) cele trei evenimente se produc

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc

f) cel mult un eveniment se produce

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce

h) exact două evenimente din cele trei se produc

Exercițiul 2

Într-o urnă se află bile albe și negre într-o proporție oarecare. Se efectuează la întâmplare 5 extrageri cu întoarcere și considerăm A_i evenimentul, din câmpul de evenimente atașat experimentului, ce constă în obținerea unei bile albe la extragerea i, $1 \leq i \leq 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

a) A - numai o bilă este albă;

b) B - cel puțin o bilă este neagră;

c) C - obținerea a cel mult două bile albe;

d) D - obținerea a cel puțin trei bile albe;

e) E - numai două bile sunt negre.

Exercițiul 3

Un administrator de spital codifică pacienţii cu răni prin împuşcare în funcţie de asigurarea (D dacă pacientul are asigurare şi N dacă nu are) şi de starea acestora (b pentru bună, m pentru medie şi s pentru serioasă). Considerăm experienţa aleatoare care consistă in codificarea pacienţilor.

1. a) Determinaţi mulţimea Ω - spaţiului stărilor acestui experiment
   b) Fie A evenimentul *starea de sănătate a pacientului este serioasă*. Descrieţi evenimentele elementare care il compun pe A. Aceeaşi intrebare pentru evenimentul B *pacientul nu este asigurat* şi pentru evenimentul $B^c \cup A$.

2. Considerăm echiprobabilitatea pe Ω. Calculaţi probabilităţile: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ şi $\mathbb{P}(B^c \cup A)$

3. Aceeaşi intrebare pentru probabilitatea $\mathbb{P}'$ definită prin

	b	m	s
D	$0,2$	$0,2$	$0,1$
N	$0,1$	$0,3$	$0,1$

Exercițiul 4

Considerăm experimentul in care extragem o mană de 5 cărţi dintr-un pachet de cărţi de 52 de cărţi. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) Să avem careu (patru cărţi de acelaşi tip) ?

b) Să avem full-house (trei cărţi de un tip şi două de altul) ?

c) Să avem trei cărţi de acelaşi tip ?

d) Să avem două perechi ?

e) Să avem o pereche ?

Exercițiul 5

Coeficienții a, b și c ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sunt determinați prin aruncarea unui zar de trei ori. Calculați probabilitatea ca:

a) rădăcinile ecuației să fie reale;

b) rădăcinile ecuației să fie complexe.

Exercițiul 6

Maria este anul II și urmează cursul de probabilități. Știm că la sfârșitul fiecărei săptămâni ea poate fi sau la zi cu materia sau să rămână în urmă. Dacă este la zi cu materia într-o săptămână dată atunci probabilitatea ca ea să fie la zi cu materia (sau să rămână în urmă) în săptămâna ce urmează este de 0.8 (respectiv 0.2). Dacă este rămasă în urmă cu materia într-o săptămână dată atunci șansa ca ea să ajungă cu materia la zi este 0.4 iar ca să rămână în urmă este de 0.6. Știind că atunci când a început cursul era cu materia la zi care este probabilitatea ca ea să fie cu materia la zi și după trei săptămâni? Dar la sfârșitul cursului (cursul are 14 săptămâni)?[1]

Exercițiul 7

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

[1] Puteți face ultima parte în R.

Exercițiul 8

O urnă conţine r bile roşii şi b bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea şi este intoarsă in urnă impreună cu alte d bile de aceeaşi culoare. Repetăm acest proces la nesfarşit. Calculaţi:

a) Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.

b) Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră ştiind că a doua bilă este albastră.

c) Fie B_n evenimentul ca a n-a bilă extrasă să fie albastră. Arătaţi că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall\, n \geq 1$.

d) Probabilitatea ca prima bilă este albastră ştiind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiţi valoarea limită a acestei probabilităţi.

Exercițiul 9*

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.