Probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională. Partea a X-a

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică
Str. Academiei Nr. 14, Sector 1, Cod poştal 010014, Bucureşti, România
Adrese de email: c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Abstract

Textul de faţă conţine probleme date de autoare la examenul aferent cursului de logică matematică şi computaţională din anul I de studiu al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti. Unele dintre enunţurile de mai jos sunt extinse faţă de versiunile respectivelor exerciţii care au apărut la acest examen.

Vom folosi notaţia "ddacă" drept prescurtare pentru sintagma "dacă şi numai dacă".

Amintim abrevierea "i. e." ("id est"), semnificând "adică".

Pentru noţiunile şi rezultatele teoretice pe care le vom folosi în exerciţiile următoare, recomandăm consultarea bibliografiei de la sfârşitul acestui text. Oferim în cele ce urmează un mic mnemonic de noţiuni şi rezultate care ne vor fi necesare pentru rezolvarea acestor exerciţii.

Vom nota cu $\mathbb{N}$ mulţimea numerelor naturale şi cu $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (mulţimea numerelor naturale nenule), iar, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \leq b$, notăm cu $\overline{a, b} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\} = \{x \in \mathbb{N} \mid a \leq x \leq b\}$.

Amintim denumirile alternative:

- *poset* (de la englezescul *partially ordered set*) $\equiv$ *mulţime parţial ordonată* (i. e. mulţime înzestrată cu o relaţie de ordine pe ea);
- *lanţ* $\equiv$ *mulţime liniar ordonată* $\equiv$ *mulţime total ordonată;*
- *funcţie izotonă* $\equiv$ *funcţie care păstrează ordinea* $\equiv$ *funcţie crescătoare;*
- *algebră Boole* $\equiv$ *algebră booleană,*

precum şi definiţiile, notaţiile şi rezultatele următoare:

- se foloseşte următoarea convenţie: dacă o mulţime A este suportul unei structuri algebrice $\mathcal{A}$, atunci prin A vom înţelege deopotrivă mulţimea A şi structura algebrică $\mathcal{A}$, în cazul în care va fi clar la ce structură algebrică pe A ne vom referi;
- vom spune că o structură algebrică este *nevidă*, respectiv *finită* ddacă mulţimea ei suport este nevidă, respectiv finită;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $|A|$ cardinalul lui A, iar cu $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$ (mulţimea părţilor lui A);

- pentru orice mulţimi A şi B, vom nota cu $A \cong B$ faptul că A este în bijecţie cu B, care se transcrie prin: $|A| = |B|$;

- pentru orice mulţime A, notăm cu $A^2 = A \times A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$: *produsul cartezian, produsul direct de mulţimi*; aici, produsul direct al unei mulţimi cu ea însăşi; în general, notăm cu $A^1 = A$ şi cu $A^{n+1} = A^n \times A = \{(a, b) \mid a \in A^n, b \in A\}$, pentru orice n natural nenul: *puterile naturale (nenule) ale unei mulţimi* (se defineşte şi A^0, care este un singleton, i. e. o mulţime cu un singur element); a se vedea, în materialele din bibliografie, şi produsele directe de structuri algebrice, precum şi puterile naturale ale unei structuri algebrice;

- pentru orice mulţime A, o *relaţie binară pe* A este o submulţime a lui A^2;

- dacă A este o mulţime şi $\rho \subseteq A^2$, iar $a, b \in A$, atunci faptul că $(a, b) \in \rho$ se mai notează: $a \,\rho\, b$;

- pentru orice mulţime A, se notează cu Δ_A relaţia binară pe A definită prin $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ şi numită *diagonala lui* A;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se zice:
  - (i) *reflexivă* ddacă orice $x \in A$ are proprietatea $x \,\rho\, x$;
  - (ii) *simetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $y \,\rho\, x$;
  - (iii) *antisimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, x$, atunci $x = y$;
  - (iv) *asimetrică* ddacă, oricare ar fi $x, y \in A$, dacă $x \,\rho\, y$, atunci $(y, x) \notin \rho$;
  - (v) *tranzitivă* ddacă, oricare ar fi $x, y, z \in A$, dacă $x \,\rho\, y$ şi $y \,\rho\, z$, atunci $x \,\rho\, z$;

- o relaţie binară ρ pe o mulţime A se numeşte:
  - (i) *(relaţie de) preordine* ddacă este reflexivă şi tranzitivă;
  - (ii) *(relaţie de) echivalenţă* ddacă este o preordine simetrică;
  - (iii) *(relaţie de) ordine (parţială)* ddacă este o preordine antisimetrică;
  - (iv) *(relaţie de) ordine totală* (sau *liniară*) ddacă este o relaţie de ordine cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in A$, are loc $x \,\rho\, y$ sau $y \,\rho\, x$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se defineşte *inversa lui* ρ ca fiind relaţia binară pe A notată cu ρ^{-1} şi dată de: $\rho^{-1} = \{(b, a) \mid a, b \in A, (a, b) \in \rho\} \subseteq A^2 = A \times A$;

- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A şi orice $a, b \in A$, are loc: $(a, b) \in \rho$ ddacă $(b, a) \in \rho^{-1}$;

- pentru orice relaţii binare ρ şi σ pe o mulţime A, avem:
  - (i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$;
  - (ii) $\rho \subseteq \sigma$ ddacă $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;
  - (iii) $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcup\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea reuniunii cu inversarea);
  - (iv) $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$; în general, pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice familie $(\rho_i)_{i \in I}$ de relaţii binare pe A, $(\bigcap\limits_{i \in I} \rho_i)^{-1} = \bigcap\limits_{i \in I} \rho_i^{-1}$ (comutarea intersecţiei cu inversarea);

- inversa unei relaţii de ordine notate $\leq$ se notează, uzual, cu $\geq$;
- pentru orice mulţime A şi orice relaţii binare ρ şi σ pe A, compunerea dintre relaţiile binare ρ şi σ se notează cu $\rho \circ \sigma$ şi se defineşte astfel: $\rho \circ \sigma = \{(a, c) \mid a, c \in A, (\exists\, b \in A)\, (a, b) \in \sigma$ şi $(b, c) \in \rho\}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se definesc: $\rho^0 = \Delta_A$ şi $\rho^{n+1} = \rho^n \circ \rho$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  (i) ρ este reflexivă ddacă $\Delta_A \subseteq \rho$;
  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \rho^{-1}$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, se numeşte *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie binară reflexivă/simetrică/tranzitivă pe A care include pe ρ;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A, *închiderea reflexivă/simetrică/tranzitivă a lui* ρ se notează $\mathcal{R}(\rho)/\mathcal{S}(\rho)/\mathcal{T}(\rho)$, respectiv;
- dată o relaţie binară ρ pe o mulţime A, au loc echivalenţele:
  (i) ρ este reflexivă ddacă $\rho = \mathcal{R}(\rho)$;
  (ii) ρ este simetrică ddacă $\rho = \mathcal{S}(\rho)$;
  (iii) ρ este tranzitivă ddacă $\rho = \mathcal{T}(\rho)$;
- pentru orice relaţie binară ρ pe o mulţime A:
  (i) $\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho$;
  (ii) $\mathcal{S}(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$;
  (iii) $\mathcal{T}(\rho) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n$;
- pentru orice mulţime A, notăm cu $Echiv(A)$ mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe A, şi, pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, se notează cu $A/\!\sim$ *mulţimea factor a lui* A *prin* $\sim$, i. e. mulţimea claselor de echivalenţă ale relaţiei de echivalenţă $\sim$;
- pentru orice mulţime nevidă A, o *partiţie a lui* A este o familie nevidă de părţi nevide ale lui A două câte două disjuncte şi având reuniunea egală cu A; vom nota mulţimea partiţiilor lui A cu $Part(A)$;
- pentru orice mulţime nevidă A, $Echiv(A) \cong Part(A)$, întrucât funcţia $\varphi : Echiv(A) \rightarrow Part(A)$, definită prin: $\varphi(\sim) = A/\!\sim$ pentru orice $\sim \in Echiv(A)$, este o bijecţie; inversa lui φ este definită astfel: pentru orice mulţime $I \neq \emptyset$ şi orice $\pi = (A_i)_{i \in I} \in Part(A)$, $\varphi^{-1}(\pi)$ este relaţia de echivalenţă pe A care are drept clase mulţimile A_i, cu $i \in I$, adică $\varphi^{-1}(\pi) = \sim \subseteq A^2$, definită prin: oricare ar fi $x, y \in A$, $x \sim y$ ddacă există $k \in I$ astfel încât $x, y \in A_k$;

- pentru orice n natural nenul, notăm cu $\mathcal{L}_n$ lanţul cu n elemente şi cu L_n mulţimea suport a lui $\mathcal{L}_n$; cele n elemente ale lui L_n vor fi notate adecvat fiecărei situaţii în care vor apărea în cele ce urmează; $\mathcal{L}_n$ este unic modulo un izomorfism de poseturi, i. e. modulo o funcţie izotonă bijectivă şi cu inversa izotonă;

- pentru orice poset $(P, \leq)$, notăm cu $<$ relaţia de ordine strictă asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $<=\leq \setminus \Delta_P = \{(a,b) \mid a, b \in P, a \leq b, a \neq b\}$, şi cu $\prec$ relaţia de succesiune asociată lui $\leq$, i. e. relaţia binară pe mulţimea P definită prin: $\prec= \{(a,b) \mid a, b \in P, a < b, (\nexists\, x \in P)\, a < x < b\}$;

- notăm laticile sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq)$ sau $(L, \vee, \wedge)$, laticile mărginite sub forma $(L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ sau $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, iar algebrele Boole sub forma $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ sau $(B, \vee, \wedge, \bar{\cdot}, 0, 1)$, cu semnificaţia uzuală pentru fiecare simbol din aceste notaţii;

- legătura dintre operaţiile binare $\vee$ şi $\wedge$ şi relaţia de ordine $\leq$ în orice latice $(L, \vee, \wedge, \leq)$ este: pentru orice elemente $x, y \in L$, au loc echivalenţele: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;

- într–o latice mărginită $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$, două elemente $x, y \in L$ sunt *complemente* unul altuia ddacă $\begin{cases} x \vee y = 1 \text{ şi} \\ x \wedge y = 0, \end{cases}$ iar un element $z \in L$ se zice *complementat* ddacă are cel puţin un complement;

- într–o latice mărginită distributivă, orice element complementat are un unic complement;

- o latice este nedistributivă ddacă are o sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul;

- orice lanţ este o latice (distributivă), cu operaţiile binare $\vee = \max$ şi $\wedge = \min$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, se definesc *implicaţia booleană,* $\rightarrow$, şi *echivalenţa booleană,* $\leftrightarrow$, ca operaţii binare pe B, astfel: pentru orice $x, y \in B$:

  (i) $x \rightarrow y = \overline{x} \vee y$;

  (ii) $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;

- în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$, pentru orice elemente $x, y \in B$, au loc următoarele:

  (i) $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$ şi: $\overline{x} = 1$ ddacă $x = 0$, iar: $\overline{x} = 0$ ddacă $x = 1$ (de fapt, mai general: în orice latice mărginită, 0 şi 1 sunt complemente unul altuia şi nu au alte complemente);

  (ii) $\overline{\overline{x}} = x$;

  (iii) $x \rightarrow y = 1$ ddacă $x \leq y$;

  (iv) $x \leftrightarrow y = 1$ ddacă $x = y$;

- pentru orice mulţime A, $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$ este o algebră Boole, unde am notat, pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $\overline{X} = A \setminus X$;

- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}_2^n$ (puterea a n–a a lanţului cu 2 elemente) este o algebră Boole; pentru $n = 1$, avem algebra Boole $\mathcal{L}_2$, numită *algebra Boole standard*; dacă notăm cu $L_2 = \{0, 1\}$ mulţimea suport a lanţului cu 2 elemente, $\mathcal{L}_2$, atunci $L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$ este mulţimea subiacentă a algebrei Boole $\mathcal{L}_2^n$; vom păstra aceste notaţii în cele ce urmează;

- orice algebră Boole finită este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$ pentru un $n \in \mathbb{N}$;
- se numeşte *atom* al unei algebre Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ un succesor al lui 0 în posetul $(B, \leq)$, adică un element $a \in B$ cu $0 \prec a$ (i. e. astfel încât $0 < a$ şi nu există niciun $x \in B$ cu proprietatea că $0 < x < a$);
- se numeşte *filtru* al unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o submulţime nevidă F a lui B închisă la conjuncţie şi la majorare, i. e. o mulţime F cu proprietăţile:

  (i) $\emptyset \neq F \subseteq B$;

  (ii) pentru orice $x, y \in F$, rezultă că $x \wedge y \in F$;

  (iii) pentru orice $x \in F$ şi orice $y \in B$, dacă $x \leq y$, atunci $y \in F$;

  mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ se notează cu $\mathcal{F}(\mathcal{B})$;
- este imediat că orice filtru al unei algebre Boole conţine elementul 1;
- pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi orice $a \in B$, mulţimea notată $[a) = \{b \in B \mid a \leq b\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$, numit *filtrul principal generat de a*; notăm mulţimea filtrelor principale ale lui $\mathcal{B}$ cu $\mathcal{PF}(\mathcal{B})$;
- orice algebră Boole finită are toate filtrele principale;
- se numeşte *congruenţă* a unei algebre Boole $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B compatibilă cu operaţiile de algebră Boole ale lui $\mathcal{B}$, i. e. o relaţie binară $\sim$ pe B cu proprietăţile:

  (i) $\sim \in Echiv(B)$;

  (ii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \vee y \sim x' \vee y'$ (**compatibilitatea cu** $\vee$);

  (iii) pentru orice $x, y, x', y' \in B$, dacă $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, atunci $x \wedge y \sim x' \wedge y'$ (**compatibilitatea cu** $\wedge$);

  (iv) pentru orice $x, x' \in B$, dacă $x \sim x'$, atunci $\overline{x} \sim \overline{x'}$ (**compatibilitatea cu** $\bar{\cdot}$);

  notăm cu $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$;
- referitor la definiţia anterioară, a se observa următorul fapt: compatibilitatea unei relaţii binare $\sim$ pe B cu operaţiile zeroare ale lui $\mathcal{B}$ (i. e. constantele 0 şi 1) se scrie astfel: $0 \sim 0$ şi $1 \sim 1$, proprietăţi care sunt satisfăcute nu numai de către orice relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B, ci chiar de către orice relaţie reflexivă $\sim$ pe B;
- mulţimea congruenţelor unei algebre Boole $\mathcal{B}$ este în bijecţie cu mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$;
- notăm cu V mulţimea variabilelor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu E mulţimea enunţurilor calculului propoziţional clasic;
- notăm cu $(E/_\sim, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziţionale clasice, despre care ştim că este o algebră Boole;

- notăm cu $\hat{\varphi} \in E/_{\sim}$ clasa unui enunţ φ în algebra Lindenbaum–Tarski $E/_{\sim}$;
- dată o interpretare în calculul propoziţional clasic, i. e. o funcţie $h : V \to \mathcal{L}_2$, notăm cu $\tilde{h} : E \to \mathcal{L}_2$ unica extindere a lui h la E care transformă conectorii logici în operaţii booleene (notaţii alternative: $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$, $\tilde{h} : E \to L_2$);
- se notează cu $\vdash \varphi$ faptul că un enunţ φ este o teoremă formală (adevăr sintactic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\vDash \varphi$ faptul că un enunţ φ este universal adevărat (tautologie, adevăr semantic) în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vdash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- se notează cu $\Sigma \vDash \varphi$ faptul că un enunţ $\varphi \in E$ este deductibil semantic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ în logica propoziţională clasică;
- pentru orice enunţ φ, $\vdash \varphi$ ddacă $\emptyset \vdash \varphi$, şi $\vDash \varphi$ ddacă $\emptyset \vDash \varphi$;
- se notează cu $h \vDash \varphi$, respectiv $h \vDash \Sigma$, faptul că o interpretare $h : V \to \mathcal{L}_2$ satisface un enunţ $\varphi \in E$, respectiv o mulţime de enunţuri $\Sigma \subseteq E$, i. e. $\tilde{h}(\varphi) = 1$, respectiv $\tilde{h}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$;
- pentru orice $\varphi, \psi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$ ddacă $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (**Teorema deducţiei** pentru calculul propoziţional clasic); în cele ce urmează, vom nota prin **TD** această teoremă;
- pentru orice $\varphi \in E$, are loc echivalenţa: $\vdash \varphi$ ddacă $\hat{\varphi} = 1$ (**lemă** din calculul propoziţional clasic);
- pentru orice $\varphi \in E$ şi orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalenţa: $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vDash \varphi$ (**Teorema de completitudine tare** a calculului propoziţional clasic); în cele ce urmează, vom nota prin **TCT** această teoremă; cazul $\Sigma = \emptyset$ în **TCT** se numeşte **Teorema de completitudine** a calculului propoziţional clasic.

1 Lista 1 de subiecte

Exerciţiul 1.1. *Fie A o mulţime nevidă şi ρ o relaţie binară pe A. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{S}(\rho)$*;*

(ii) ρ *este reflexivă şi simetrică.*

Rezolvare: (ii)⇒(i): Dacă ρ este reflexivă şi simetrică, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \rho = \mathcal{S}(\rho)$.
(i)⇒(ii): Dacă are loc egalitatea $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{S}(\rho)$, atunci, conform formulelor pentru $\mathcal{R}(\rho)$ şi $\mathcal{S}(\rho)$, obţinem: $\Delta_A \cup \rho = \rho \cup \rho^{-1}$. Întrucât $\begin{cases} \Delta_A \subseteq \Delta_A \cup \rho \text{ şi} \\ \rho^{-1} \subseteq \rho \cup \rho^{-1}, \end{cases}$ rezultă că: $\begin{cases} \Delta_A \subseteq \rho \cup \rho^{-1} \text{ şi} \\ \rho^{-1} \subseteq \Delta_A \cup \rho. \end{cases}$

Fie $a \in A$, arbitrar. Atunci $(a, a) \in \Delta_A \subseteq \rho \cup \rho^{-1}$, deci are loc cel puţin una dintre situaţiile:

- $(a, a) \in \rho$;
- $(a, a) \in \rho^{-1}$, prin urmare $(a, a) \in \rho$.

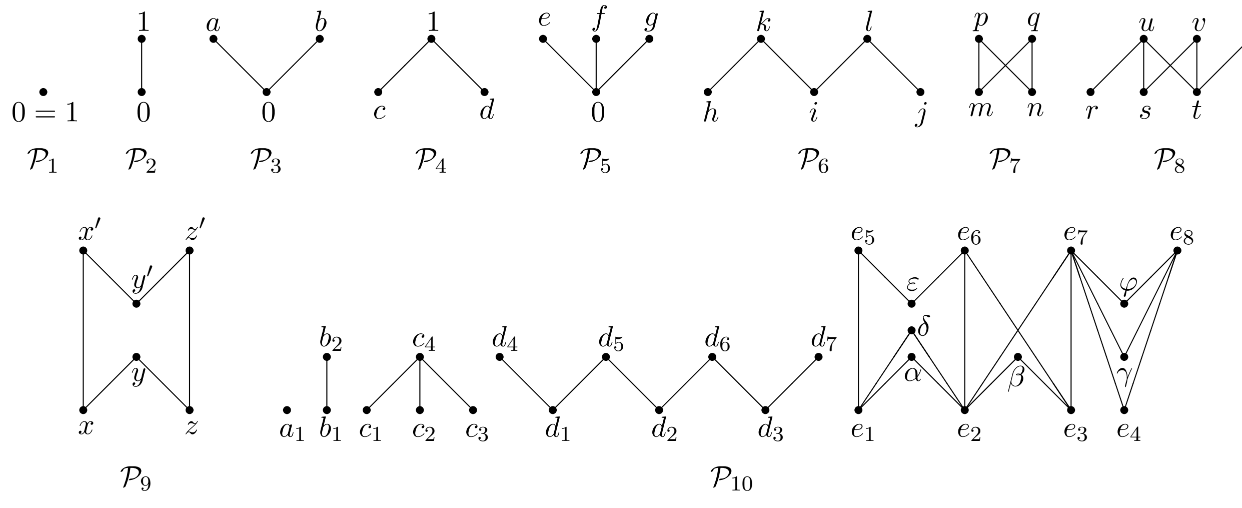
Aşadar, oricare ar fi $a \in A$, $(a, a) \in \rho$, deci $\Delta_A \subseteq \rho$, prin urmare ρ este reflexivă, iar $\Delta_A \cup \rho = \rho$. Cum $\rho^{-1} \subseteq \Delta_A \cup \rho$, rezultă că $\rho^{-1} \subseteq \rho$, prin urmare $(\rho^{-1})^{-1} \subseteq \rho^{-1}$, i. e. $\rho \subseteq \rho^{-1}$, aşadar $\begin{cases} \rho^{-1} \subseteq \rho \text{ şi} \\ \rho \subseteq \rho^{-1}, \end{cases}$ deci $\rho = \rho^{-1}$, aşadar ρ este simetrică.

Exerciţiul 1.2. *Să se deseneze diagramele Hasse a:*

(i) zece poseturi finite nevide două câte două neizomorfe în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid;

(ii) două latici finite nevide neizomorfe în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid; în plus, să se demonstreze că acestea două sunt (modulo câte un izomorfism de latici) singurele latici finite nevide în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid.

Rezolvare: Faptul că două poseturi finite nevide sunt neizomorfe se traduce în proprietatea că diagramele lor Hasse sunt diferite. La fel pentru latici finite nevide.
(i) În fiecare dintre următoarele poseturi, $<=\prec$:



Într–adevăr:

- în $\mathcal{P}_1 = \mathcal{L}_1$ (lanţul cu 1 element): $<=\prec= \emptyset$;
- în $\mathcal{P}_2 = \mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente): $<=\prec= \{(0, 1)\}$;
- în $\mathcal{P}_3$: $<=\prec= \{(0, a), (0, b)\}$;
- în $\mathcal{P}_4$: $<=\prec= \{(c, 1), (d, 1)\}$;
- în $\mathcal{P}_5$: $<=\prec= \{(0, e), (0, f), (0, g)\}$;
- în $\mathcal{P}_6$: $<=\prec= \{(h, k), (i, k), (i, l), (j, l)\}$;

- în $\mathcal{P}_7$: $<=\prec=\{(m,p),(m,q),(n,p),(n,q)\}$;
- în $\mathcal{P}_8$: $<=\prec=\{(r,u),(s,u),(t,u),(s,v),(t,v),(t,w)\}$;
- în $\mathcal{P}_9$: $<=\prec=\{(x,x'),(z,z'),(x,y),(z,y),(y',x'),(y',z')\}$;
- în $\mathcal{P}_{10}$:$<=\prec=\{(b_1,b_2),(c_1,c_4),(c_2,c_4),(c_3,c_4),(d_1,d_4),(d_1,d_5),(d_2,d_5),(d_2,d_6),(d_3,d_6),(d_3,d_7),$ $(e_1,e_5),(e_2,e_6),(e_3,e_7),(e_1,\alpha),(e_2,\alpha),(e_1,\delta),(e_2,\delta),(\varepsilon,e_5),(\varepsilon,e_6),(e_2,\beta),(e_3,\beta),(e_2,e_7),(e_3,e_6),$ $(e_4,e_7),(e_4,e_8),(\gamma,e_7),(\gamma,e_8),(\varphi,e_7),(\varphi,e_8)\}$.

(ii) Fie $\mathcal{L}$ o latice finită şi nevidă. Atunci $\mathcal{L}$ este mărginită, i. e. are 0 şi 1. Dacă laticea mărginită $\mathcal{L}$ are un singur element, atunci, în $\mathcal{L}$, $0=1$, prin urmare $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1$ (lanţul cu 1 element), iar, dacă $\mathcal{L}$ are exact două elemente, atunci $0\neq 1$ şi 0 şi 1 sunt singurele elemente ale lui $\mathcal{L}$, aşadar $\mathcal{L}=\mathcal{L}_2$ (lanţul cu 2 elemente).

Deci $\mathcal{L}_1$ este singura latice cu un singur element, iar $\mathcal{L}_2$ este singura latice cu două elemente. În fiecare dintre acestea, $<=\prec$, după cum am observat la punctul (i) (a se revedea poseturile $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$).

Acum să considerăm o latice finită nevidă (deci mărginită) $\mathcal{L}$ cu 3 sau mai multe elemente. Întrucât $\mathcal{L}$ are cel puţin 3 elemente, rezultă că $\mathcal{L}$ are un element x diferit de 0 şi de 1. Atunci, în $\mathcal{L}$, $0<x<1$, aşadar $0<1$ (i. e. $(0,1)$ aparţine relaţiei de ordine strictă asociate relaţiei de ordine a lui $\mathcal{L}$) şi $0\not\prec 1$ (i. e. $(0,1)$ nu aparţine relaţiei de succesiune asociate relaţiei de ordine a lui $\mathcal{L}$), prin urmare $<\neq\prec$ în $\mathcal{L}$ (i. e. relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune nu coincid în $\mathcal{L}$).

Aşadar, $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ sunt singurele latici finite şi nevide în care relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune coincid (singurele modulo un izomorfism de latici (mărginite), desigur, iar $\mathcal{L}_1$ şi $\mathcal{L}_2$ sunt neizomorfe, pentru că au cardinale diferite).

Exerciţiul 1.3. *Fie $\mathcal{B}=(B,\vee,\wedge,\leq,\bar{\cdot},0,1)$ o algebră Boole cu cel puţin doi atomi distincţi, iar F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Să se demonstreze că: $F\neq B$ ddacă F nu conţine doi atomi distincţi ai lui $\mathcal{B}$.*

Rezolvare: Este suficient să demonstrăm că: $F=B$ ddacă F conţine doi atomi distincţi ai lui $\mathcal{B}$.
"$\Rightarrow$:" Presupunem că $F=B$. Prin ipoteză, există $a,b\in B$, astfel încât a şi b sunt atomi în $\mathcal{B}$ şi $a\neq b$. Cum $F=B$, rezultă că $a,b\in F$.
"$\Leftarrow$:" Presupunem că există $a,b\in F$, astfel încât a şi b sunt atomi în $\mathcal{B}$ şi $a\neq b$. Cum F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, rezultă că $a\wedge b\in F$.

$0\leq a\wedge b\leq a$ şi $0\prec a$, prin urmare $0=a\wedge b$ sau $a\wedge b=a$. Dacă am avea $a\wedge b=a$, atunci, întrucât $a\wedge b\leq b$, ar rezulta că $a\leq b$. Dar $0\prec b$, iar $0\neq a$ pentru că $0\prec a$, ceea ce implică $a=b$; am obţinut o contradicţie cu alegerea lui a şi b. Aşadar, are loc $0=a\wedge b$.

Prin urmare, $0\in F$, iar F este un filtru al lui $\mathcal{B}$ (în particular, F este o submulţime a lui B închisă la majorare), de unde rezultă că $F=B$.

Exerciţiul 1.4. *Fie $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\varphi,\psi,\chi\in E$ şi $\Sigma\subseteq E$, $\Delta\subseteq E$, astfel încât:*

$$\varphi=(\alpha\rightarrow\neg\,\beta)\leftrightarrow(\gamma\wedge(\neg\,\delta\rightarrow\varepsilon)),\ \ \psi=\alpha\wedge\beta,\ \ \chi=\neg\,\delta\wedge\neg\,\varepsilon,$$

$$\Sigma\vdash\varphi,\ \ \Delta\vdash\gamma,\ \ \Sigma\cap\Delta\vdash\psi.$$

Să se demonstreze că: $\Sigma\cup\Delta\vdash\chi$.

Rezolvare: Proprietăţile $\Sigma\vdash\varphi,\ \Delta\vdash\gamma,\ \Sigma\cap\Delta\vdash\psi$ sunt echivalente, conform **TCT**, cu $\Sigma\vDash\varphi,\ \Delta\vDash\gamma,\ \Sigma\cap\Delta\vDash\psi$, respectiv.

Să demonstrăm că $\Sigma\cup\Delta\vDash\chi$. În acest scop, să considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma\cup\Delta$, i. e. o funcţie arbitrară $h:V\rightarrow L_2=\{0,1\}$ astfel încât $h\vDash\Sigma\cup\Delta$.

Cum $\Sigma\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Sigma$. Dar $\Sigma\vDash\varphi$, aşadar $\tilde{h}(\varphi)=1$.

Cum $\Delta\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Delta$. Dar $\Delta\vDash\gamma$, aşadar $\tilde{h}(\gamma)=1$.

Cum $\Sigma\cap\Delta\subseteq\Sigma\cup\Delta$, iar $h\vDash\Sigma\cup\Delta$, rezultă că $h\vDash\Sigma\cap\Delta$. Dar $\Sigma\cap\Delta\vDash\psi$, aşadar $\tilde{h}(\psi)=1$.

$\psi=\alpha\wedge\beta$, prin urmare $1=\tilde{h}(\psi)=\tilde{h}(\alpha\wedge\beta)=\tilde{h}(\alpha)\wedge\tilde{h}(\beta)$, aşadar $\tilde{h}(\alpha)=\tilde{h}(\beta)=1$, prin urmare $\tilde{h}(\alpha\to\neg\beta)=\tilde{h}(\alpha)\to\overline{\tilde{h}(\beta)}=1\to\overline{1}=1\to 0=0$.

$\varphi=(\alpha\to\neg\beta)\leftrightarrow(\gamma\wedge(\neg\delta\to\varepsilon))$, prin urmare $1=\tilde{h}(\varphi)=\tilde{h}(\alpha\to\neg\beta)\leftrightarrow\tilde{h}(\gamma\wedge(\neg\delta\to\varepsilon))=0\leftrightarrow\tilde{h}(\gamma\wedge(\neg\delta\to\varepsilon))=0\leftrightarrow(\tilde{h}(\gamma)\wedge\tilde{h}(\neg\delta\to\varepsilon))=0\leftrightarrow(1\wedge\tilde{h}(\neg\delta\to\varepsilon))=0\leftrightarrow\tilde{h}(\neg\delta\to\varepsilon)=0\leftrightarrow(\overline{\tilde{h}(\delta)}\to\tilde{h}(\varepsilon))$. Deci $0\leftrightarrow(\overline{\tilde{h}(\delta)}\to\tilde{h}(\varepsilon))=1$, prin urmare $\overline{\tilde{h}(\delta)}\to\tilde{h}(\varepsilon)=0$, ceea ce, întrucât acest calcul este efectuat în algebra Boole standard, $\mathcal{L}_2$, înseamnă că $\overline{\tilde{h}(\delta)}=1$ şi $\tilde{h}(\varepsilon)=0$, deci $\tilde{h}(\delta)=\tilde{h}(\varepsilon)=0$.

$\chi=\neg\delta\wedge\neg\varepsilon$, prin urmare $\tilde{h}(\chi)=\tilde{h}(\neg\delta\wedge\neg\varepsilon)=\overline{\tilde{h}(\delta)}\wedge\overline{\tilde{h}(\varepsilon)}=\overline{0}\wedge\overline{0}=1\wedge 1=1$.

În concluzie, orice interpretare h cu $h\vDash\Sigma\cup\Delta$ are proprietatea că $\tilde{h}(\chi)=1$, ceea ce înseamnă că $\Sigma\cup\Delta\vDash\chi$, iar, conform **TCT**, acest fapt este echivalent cu: $\Sigma\cup\Delta\vdash\chi$.

2 Lista 2 de subiecte

Exerciţiul 2.1. *(i) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid. Să se demonstreze că: $(P,\leq)$ este un lanţ ddacă $\mathcal{S}(\leq)=P^2$.*

(ii) Să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\notin Echiv(P)$.

(iii) Să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)\setminus\{P^2\}$.

(iv) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid. Să se demonstreze că, pentru orice $x,y\in P$, $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$.

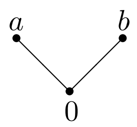
(v) Fie $(P,\leq)$ un poset nevid, astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi, pentru fiecare $x\in P$, fie $\hat{x}$ clasa de echivalenţă a lui x raportat la $\mathcal{S}(\leq)$. Să se demonstreze că, pentru orice $x,y\in P$: $\hat{x}=\hat{y}$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P,\leq)$.

(vi) Pentru un k natural nenul, arbitrar, fixat, să se dea un exemplu de poset finit şi nevid $(P,\leq)$ astfel încât $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}|=k$ (i. e. $\mathcal{S}(\leq)$ are exact k clase de echivalenţă).

(vii) Pentru un k natural nenul, arbitrar, fixat, să se determine toate poseturile nevide $(P,\leq)$ cu proprietăţile: $\mathcal{S}(\leq)\in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}|=k$ (i. e. $\mathcal{S}(\leq)$ are exact k clase de echivalenţă).

Rezolvare: (i) $P^2\supseteq\mathcal{S}(\leq)=\leq\cup\leq^{-1}=\leq\cup\geq=\{(x,y)\mid x,y\in P, x\leq y \text{ sau } x\geq y\}=\{(x,y)\mid x,y\in P, x\leq y \text{ sau } y\leq x\}$. Aşadar: $\mathcal{S}(\leq)=P^2$ ddacă $P^2\subseteq\mathcal{S}(\leq)$ ddacă, oricare ar fi $x,y\in P$, are loc $(x,y)\in\mathcal{S}(\leq)$ ddacă, oricare ar fi $x,y\in P$, avem $x\leq y$ sau $y\leq x$ ddacă relaţia de ordine $\leq$ este totală ddacă $(P,\leq)$ este lanţ.

(ii) Pentru orice mulţime nevidă P, $P^2\in Echiv(P)$, aşadar, conform (i), posetul $(P,\leq)$ dat ca exemplu nu trebuie să fie lanţ. Este uşor de observat că închiderea simetrică a unei relaţii de ordine $\leq$ este reflexivă (pentru că $\leq$ este reflexivă) şi simetrică (fiind o închidere simetrică). Aşadar, $\mathcal{S}(\leq)$ nu este relaţie de echivalenţă ddacă $\mathcal{S}(\leq)$ nu este tranzitivă. Deci exemplul dat trebuie să fie o relaţie de ordine care nu este totală şi care îşi pierde tranzitivitatea prin considerarea închiderii sale simetrice.



Fie $(P, \leq)$ posetul reprezentat prin diagrama Hasse de mai sus. Atunci $\leq = \{(0,0),(a,a),(b,b),(0,a),(0,b)\}$, aşadar $\mathcal{S}(\leq) = \{(0,0),(a,a),(b,b),(0,a),(a,0),(0,b),(b,0)\}$. Cum $(a,0),(0,b) \in \mathcal{S}(\leq)$, dar $(a,b) \notin \mathcal{S}(\leq)$, rezultă că $\mathcal{S}(\leq)$ nu este tranzitivă, deci $\mathcal{S}(\leq) \notin Echiv(P)$.
(iii) Pentru orice mulţime nevidă P, $Echiv(P) \setminus \{P^2\}$ conţine relaţiile de echivalenţă pe P cu două sau mai multe clase de echivalenţă. Rezultatul de la punctul (i), alături de proprietatea că închiderea simetrică a unei reuniuni (disjuncte) de relaţii binare este reuniunea (disjunctă a) inchiderilor simetrice ale acelor relaţii binare (după cum se observă din formula închiderii simetrice şi comutarea reuniunii cu inversarea pentru relaţii binare) sugerează un exemplu adecvat aici: după cum vom arăta mai jos, considerând un poset $(P, \leq)$ format din reuniunea disjunctă a mai multe lanţuri, $\mathcal{S}(\leq)$ va deveni o relaţie de echivalenţă ale cărei clase de echivalenţă vor fi închiderile simetrice ale restricţiei lui $\leq$ la fiecare dintre acele lanţuri.

De exemplu, dacă posetul $(P, \leq)$ este reuniunea disjunctă a lanţurilor $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ şi $\mathcal{L}_3$, cu diagrama Hasse de mai jos, din stânga, sau reuniunea disjunctă a trei lanţuri izomorfe cu $\mathcal{L}_2$, ca în diagrama Hasse de mai jos, din dreapta, atunci $\mathcal{S}(\leq)$ va fi o relaţie de echivalenţă cu trei clase:

$\mathcal{P}_1 = (P_1, \leq)$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2 = (P_2, \sqsubseteq)$

Într–adevăr, în cazul posetului $\mathcal{P}_1$ figurat mai sus, cu $P_1 = \{a,b,c,d,e,f\}$, are loc: $\leq = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)\}$, prin urmare $\mathcal{S}(\leq) = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d),(d,e),(d,f),(e,d),(e,e),(e,f),(f,d),(f,e),(f,f)\} = \{a\}^2 \cup \{b,c\}^2 \cup \{d,e,f\}^2 \in Echiv(P_1) \setminus \{P_1^2\}$, având clasele de echivalenţă: $\{a\}$, $\{b,c\}$ şi $\{d,e,f\}$.

De asemenea, în cazul posetului $\mathcal{P}_2$ de mai sus, cu $P_2 = \{x,y,z,t,u,v\}$, avem: $\sqsubseteq = \{(x,x),(x,y),(y,y),(z,z),(z,t),(t,t),(u,u),(u,v),(v,v)\}$, prin urmare $\mathcal{S}(\sqsubseteq) = \{(x,x),(x,y),(y,x),(y,y),(z,z),(z,t),(t,z),(t,t),(u,u),(u,v),(v,u),(v,v)\} = \{x,y\}^2 \cup \{z,t\}^2 \cup \{u,v\}^2 \in Echiv(P_2) \setminus \{P_2^2\}$, având clasele de echivalenţă: $\{x,y\}$, $\{z,t\}$ şi $\{u,v\}$.
(iv) Pentru orice $x, y \in P$, au loc echivalenţele: $(x,y) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă $(x,y) \in \leq \cup \leq^{-1}$ ddacă $(x,y) \in \leq \cup \geq$ ddacă $x \leq y$ sau $x \geq y$ ddacă $x \leq y$ sau $y \leq x$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$.
(v) Notăm $\sim = \mathcal{S}(\leq)$. Pentru orice $x, y \in P$, au loc echivalenţele: $\hat{x} = \hat{y}$ ddacă $x \sim y$ ddacă $(x,y) \in \sim$ ddacă $(x,y) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă x şi y sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$, cu ultima echivalenţă rezultând din punctul (iv).
(vi) Considerăm k lanţuri nevide: $\mathcal{L}_{n_1} = (L_{n_1}, \leq_1)$, $\mathcal{L}_{n_2} = (L_{n_2}, \leq_2)$, $\ldots$, $\mathcal{L}_{n_k} = (L_{n_k}, \leq_k)$, cu $n_1, n_2 \ldots, n_k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât:

- pentru fiecare $j \in \overline{1,k}$, $L_{n_j} = \{x_{j,1}, x_{j,2}, \ldots, x_{j,n_j}\}$, cu $x_{j,1} <_j x_{j,2} <_j \ldots <_j x_{j,n_j}$, unde $<_j = \leq_j \setminus \Delta_{L_{n_j}}$ ($\mathcal{L}_{n_j}$ este lanţul cu n_j elemente);
- mulţimile $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$ sunt două câte două disjuncte.

Fie $\mathcal{P} = (P, \leq)$ posetul dat de reuniunea (disjunctă a) celor k lanţuri descrise mai sus, i. e.: $P = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_{n_j}$ şi $\leq = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j$. Atunci $\mathcal{S}(\leq) = \mathcal{S}(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j) = (\bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j)^{-1} = (\bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j^{-1}) =$

$\bigcup\limits_{j=1}^{k}(\leq_j \cup \leq_j^{-1}) = \bigcup\limits_{j=1}^{k}\mathcal{S}(\leq_j) = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_{n_j}^2$; pentru ultima egalitate am folosit punctul (i).

Întrucât mulţimile $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$ sunt două câte două disjuncte, rezultă că mulţimile date de relaţiile de ordine $\leq_1 \subseteq L_{n_1}^2, \leq_2 \subseteq L_{n_2}^2, \ldots, \leq_k \subseteq L_{n_k}^2$ sunt două câte două disjuncte.

Conform punctului (iv), pentru orice $a, b \in P$, are loc: $(a, b) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă a şi b sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$ ddacă $(a, b) \in \leq = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j$ sau $(b, a) \in \leq = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j$ ddacă există $i \in \overline{1, k}$ astfel încât $a, b \in L_{n_i}$. Pentru ultima echivalenţă am folosit faptul că relaţiile de ordine $\leq_1 \subseteq L_{n_1}^2, \leq_2 \subseteq L_{n_2}^2, \ldots, \leq_k \subseteq L_{n_k}^2$ sunt totale (de aici rezultă implicaţia inversă: $a, b \in L_i$ implică $a \leq_i b$ sau $b \leq_i a$, iar $\leq_i \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j$) şi două câte două disjuncte (de aici rezultă implicaţia directă: relaţiile din reuniunea anterioară sunt două câte două disjuncte, aşadar există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $a \leq_i b$, sau există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $b \leq_i a$, deci există $i \in \overline{1, k}$, astfel încât $a \leq_i b$ sau $b \leq_i a$, iar $\leq_i \subseteq L_i^2$, aşadar $a, b \in L_i$).

În concluzie: oricare ar fi $a, b \in P$, are loc: $(a, b) \in \mathcal{S}(\leq)$ ddacă există $i \in \overline{1, k}$ astfel încât $a, b \in L_{n_i}$, iar mulţimile $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$ formează o partiţie a lui P (fiind nevide, două câte două disjuncte şi având reuniunea P), ceea ce arată că $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$, având clasele de echivalenţă $L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}$: $P/_{\mathcal{S}(\leq)} = \{L_{n_1}, L_{n_2}, \ldots, L_{n_k}\}$.

(vii) Observăm că, în rezolvarea punctului (vi), nu am folosit finitudinea lanţurilor $\mathcal{L}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_2}, \ldots, \mathcal{L}_{n_k}$ decât pentru a obţine un poset $(P, \leq)$ finit. În rest, întreaga demonstraţie de la punctul (vi) este valabilă pentru orice k lanţuri nevide două câte două disjuncte. Cu alte cuvinte: reuniunea disjunctă a k lanţuri este un poset de tipul cerut, adică: dacă avem k lanţuri nevide: $\mathcal{P}_1 = (P_1, \leq_1)$, $\mathcal{P}_2 = (P_2, \leq_2)$, $\ldots$, $\mathcal{P}_k = (P_k, \leq_k)$, astfel încât mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt două câte două disjuncte, iar $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este posetul dat de reuniunea (disjunctă a) acestor k lanţuri, i. e.: $P = \bigcup\limits_{j=1}^{k} P_j$ şi $\leq = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \leq_j$, atunci $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$, $P/_{\mathcal{S}(\leq)} = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$.

Acum vom demonstra reciproca: orice poset de tipul cerut este o reuniune disjunctă a k lanţuri.

Fie, aşadar, $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un poset nevid cu proprietăţile: $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$. Notăm $\sim = \mathcal{S}(\leq)$ şi fie $P_1, P_2, \ldots, P_k$ clasele de echivalenţă ale lui $\sim$, i. e. $P/\sim = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$. Atunci $\{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ este o partiţie a lui P, i. e. $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt nevide şi două câte două disjuncte şi au reuniunea egală cu P.

Pentru fiecare $j \in \overline{1, k}$, notăm cu $\leq_j$ restricţia lui $\leq$ la P_j, i. e. $\leq_j = \leq \cap P_j^2$, şi considerăm $\leq_j$ ca relaţie binară pe P_j.

Acum fie $j \in \overline{1, k}$, arbitrar, fixat.

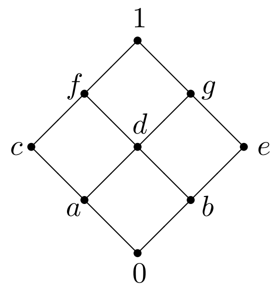
$\leq$ este o relaţie de ordine, i. e. o relaţie reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică. Din definiţia antisimetriei, rezultă imediat că $\leq_j = \leq \cap P_j^2$ este o relaţie antisimetrică. $\leq$ este reflexivă, adică $\Delta_P \subseteq \leq$, prin urmare $\Delta_P \cap P_j^2 \subseteq \leq \cap P_j^2$, i. e. $\Delta_{P_j} \subseteq \leq_j$, ceea ce arată că relaţia binară $\leq_j$ este reflexivă. Acum fie $x, y, z \in P_j$, astfel încât $x \leq_j y$ şi $y \leq_j z$. Dar $\leq_j \subseteq \leq$, aşadar $x \leq y$ şi $y \leq z$, prin urmare $x \leq z$ datorită tranzitivităţii lui $\leq$. Cum $x, z \in P_j$, rezultă că $(x, z) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$, i. e. $x \leq_j z$. Deci $\leq_j$ este şi tranzitivă. Aşadar, $\leq_j$ este o relaţie de ordine pe P_j, deci $(P_j, \leq_j)$ este un poset.

Acum fie $x, y \in P_j$, arbitrare, fixate. P_j este o clasă de echivalenţă a lui $\sim = \mathcal{S}(\leq)$, aşadar $x \sim y$, i. e. $\hat{x} = \hat{y}$, ceea ce înseamnă, conform punctului (v), că x şi y sunt comparabile în posetul $(P, \leq)$, i. e. $x \leq y$ sau $y \leq x$. Dar $x, y \in P_j$, prin urmare $(x, y) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$ sau $(y, x) \in \leq \cap P_j^2 = \leq_j$, adică $x \leq_j y$ sau $y \leq_j x$. Aşadar, relaţia de ordine $\leq_j$ pe P_j este totală, deci posetul $(P_j, \leq_j)$ este un lanţ.

Prin urmare, $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, …, $(P_k, \leq_k)$ sunt lanţuri şi posetul $\mathcal{P} = (P, \leq)$ este reuniunea disjunctă a acestor lanţuri.

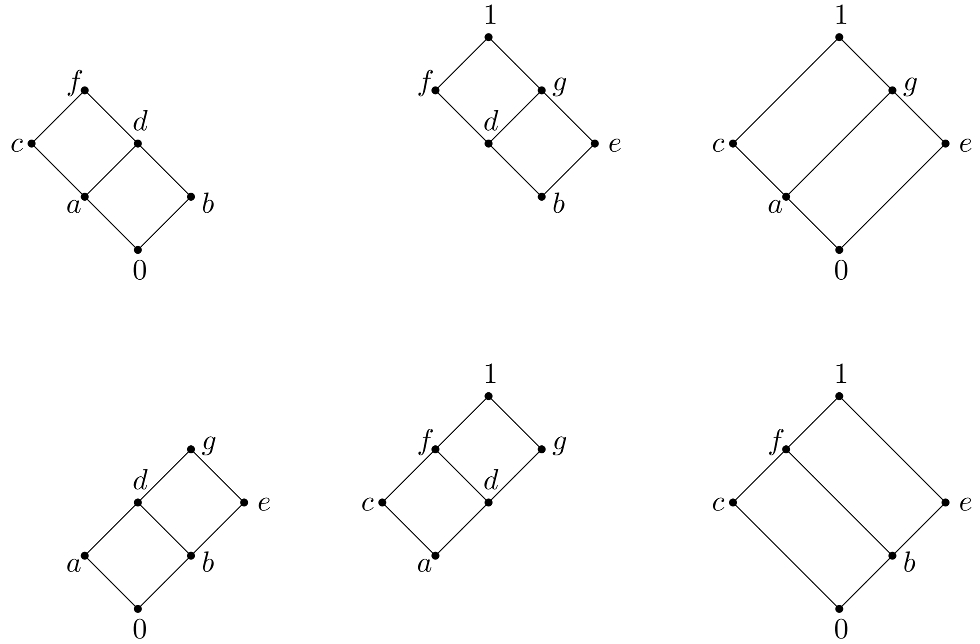
În concluzie: poseturile nevide cu proprietatea că închiderea simetrică a relaţiei lor de ordine este o relaţie de echivalenţă cu k clase sunt exact reuniunile disjuncte a câte k lanţuri nevide. Altfel scris: un poset nevid $\mathcal{P} = (P, \leq)$ are proprietăţile $\mathcal{S}(\leq) \in Echiv(P)$ şi $|P/_{\mathcal{S}(\leq)}| = k$ ddacă există k lanţuri nevide $(P_1, \leq_1)$, $(P_2, \leq_2)$, …, $(P_k, \leq_k)$ astfel încât mulţimile $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sunt două câte două disjuncte, $P = \bigcup_{j=1}^{k} P_j$ şi $\leq = \bigcup_{j=1}^{k} \leq_j$.

Exerciţiul 2.2. *Considerăm laticea $\mathcal{L}_3^2 = \mathcal{L}_3 \times \mathcal{L}_3$, cu diagrama Hasse:*



Să se pună în evidenţă toate sublaticile acestei latici care sunt izomorfe cu $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$ şi să indice, dintre acestea, acelea care sunt sublatici mărginite ale lui $\mathcal{L}_3^2$.

Rezolvare: $\mathcal{L}_3^2$, cu elementele notate ca mai sus, are şase sublatici izomorfe cu $\mathcal{L}_2 \times \mathcal{L}_3$, anume următoarele:



Dintre acestea, numai două sunt sublatici mărginite ale lui $\mathcal{L}_3^2$, anume: $\{0, a, c, e, g, 1\}$ şi $\{0, b, c, e, f, 1\}$.

Exerciţiul 2.3. *Să se demonstreze că:*

(i) *pentru orice* n *natural, algebra Boole* $\mathcal{L}_2^n$ *are exact* 2^n *congruenţe;*

(ii) *dacă* $\mathcal{B}$ *este o algebră Boole, atunci:* $\mathcal{B}$ *are doar un număr finit de congruenţe ddacă există un număr natural* n*, astfel încât* $\mathcal{B}$ *este izomorfă cu* $\mathcal{L}_2^n$*.*

Rezolvare: Dacă $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ este o algebră Boole arbitrară, atunci $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{F}(\mathcal{B})$, iar $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{PF}(\mathcal{B})$. De asemenea, se observă uşor că $B \cong \mathcal{PF}(\mathcal{B})$, o bijecţie între aceste două mulţimi fiind $\varphi : B \to \mathcal{PF}(\mathcal{B})$, pentru orice $a \in B$, $\varphi(a) = [a)$. Într–adevăr, cum $\mathcal{PF}(\mathcal{B}) = \{[a) \mid a \in B\}$, rezultă că φ este surjectivă, iar injectivitatea lui φ se deduce astfel: fie $a, b \in B$, astfel încât $\varphi(a) = \varphi(b)$, i. e. $[a) = [b)$; dar $a \in [a)$ şi $b \in [b)$, ceea ce implică $a \in [b) = \{x \in B \mid b \leq x\}$ şi $b \in [a) = \{x \in B \mid a \leq x\}$, adică $b \leq a$ şi $a \leq b$, deci $a = b$ conform antisimetriei lui $\leq$. Prin urmare, $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{F}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{PF}(\mathcal{B}) \cong B$, deci $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |\mathcal{F}(\mathcal{B})| \geq |\mathcal{PF}(\mathcal{B})| = |B|$, aşadar $|B| \leq |\mathcal{C}(\mathcal{B})|$. În plus, dacă B este finită, atunci $\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \mathcal{PF}(\mathcal{B})$ şi, prin urmare, în acest caz, $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \cong B$ şi, în concluzie, şi $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong B$, deci $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |B|$.
(i) $\mathcal{L}_2^n$ este o algebră Boole finită, aşadar $|\mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)| = |L_2^n| = 2^n$.
(ii) "$\Leftarrow$:" Dacă $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$, atunci $\mathcal{C}(\mathcal{B}) \cong \mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)$, aşadar $|\mathcal{C}(\mathcal{B})| = |\mathcal{C}(\mathcal{L}_2^n)| = 2^n$ conform punctului (i), deci $\mathcal{B}$ are exact 2^n congruenţe.
"$\Rightarrow$:" Dacă $\mathcal{C}(\mathcal{B})$ este finită, atunci, cum $|B| \leq |\mathcal{C}(\mathcal{B})|$, rezultă că B este finită, prin urmare există un $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\mathcal{B}$ este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^n$.

Exerciţiul 2.4. *Să se demonstreze următoarea regulă de deducţie pentru calculul propoziţional clasic: pentru orice* $\Sigma \subseteq E$*, orice* $\Delta \subseteq E$ *şi orice* $\varphi, \psi, \chi \in E$*:*

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi, \ \ \Delta \vdash \varphi}{\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi}.$$

Rezolvare: Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ şi $\varphi, \psi, \chi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vdash \varphi$. Avem de demonstrat că $\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi$.

Aplicând **TCT**, din faptul că $\Sigma \vdash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vdash \varphi$ obţinem: $\Sigma \vDash \varphi \to \neg\,\psi$ şi $\Delta \vDash \varphi$. Să demonstrăm că $\Sigma \cup \Delta \vDash \psi \to \chi$.

Considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta$, i. e. o funcţie arbitrară $h : V \to L_2 = \{0, 1\}$ cu proprietatea că $h \vDash \Sigma \cup \Delta$.

Cum $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Delta$, iar $h \vDash \Sigma \cup \Delta$, rezultă că $h \vDash \Sigma$. Dar $\Sigma \vDash \varphi \to \neg\,\psi$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi \to \neg\,\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\tilde{h}(\varphi) \to \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, i. e. $\overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$.

Cum $\Delta \subseteq \Sigma \cup \Delta$, iar $h \vDash \Sigma \cup \Delta$, rezultă că $h \vDash \Delta$. Dar $\Delta \vDash \varphi$, prin urmare $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

Aşadar, $1 = \overline{\tilde{h}(\varphi)} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{1} \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = 0 \vee \overline{\tilde{h}(\psi)} = \overline{\tilde{h}(\psi)}$, în consecinţă $\tilde{h}(\psi) = \overline{\overline{\tilde{h}(\psi)}} = \overline{1} = 0$.

Prin urmare, $\tilde{h}(\psi \to \chi) = \tilde{h}(\psi) \to \tilde{h}(\chi) = 0 \to \tilde{h}(\chi) = 1$.

În concluzie, orice interpretare care satisface $\Sigma \cup \Delta$ satisface şi enunţul $\psi \to \chi$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \cup \Delta \vDash \psi \to \chi$, iar acest fapt, conform **TCT**, este echivalent cu: $\Sigma \cup \Delta \vdash \psi \to \chi$.

3 Lista 3 de subiecte

Exerciţiul 3.1. *Fie* A *o mulţime nevidă, iar* ρ *şi* σ *două relaţii binare nevide pe* A*. Să se demonstreze că:*

(i) $\mathcal{R}(\rho \cap \sigma) = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\sigma)$*;*

(ii) dacă ρ e simetrică, atunci $\mathcal{S}(\rho \cap \sigma) = \rho \cap \mathcal{S}(\sigma)$;

(iii) dacă σ e asimetrică şi $\rho \cap \sigma \neq \emptyset$, atunci $\rho \cap \sigma$ e asimetrică;

(iv) dacă ρ e simetrică, σ e asimetrică şi $\sigma \nsubseteq \rho$, atunci $\rho \cup \sigma$ nu e simetrică.

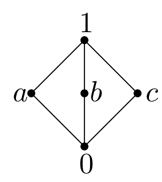
Rezolvare: (i) $\mathcal{R}(\rho \cap \sigma) = \Delta_A \cup (\rho \cap \sigma) = (\Delta_A \cup \rho) \cap (\Delta_A \cup \sigma) = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\sigma)$.
(ii) Dacă ρ e simetrică, atunci $\rho = \rho^{-1}$, prin urmare $\mathcal{S}(\rho\cap\sigma) = (\rho\cap\sigma)\cup(\rho\cap\sigma)^{-1} = (\rho\cap\sigma)\cup(\rho^{-1}\cap\sigma^{-1}) = (\rho \cap \sigma) \cup (\rho \cap \sigma^{-1}) = \rho \cap (\sigma \cup \sigma^{-1}) = \rho \cap \mathcal{S}(\sigma)$.
(iii) Presupunem că σ e asimetrică şi $\rho \cap \sigma \neq \emptyset$. Fie $a, b \in A$, astfel încât $(a, b) \in \rho \cap \sigma$, arbitrare. $\rho \cap \sigma \subseteq \sigma$, prin urmare $(a, b) \in \sigma$, aşadar $(b, a) \notin \sigma$, deoarece σ este asimetrică. Dar $\sigma \supseteq \rho \cap \sigma$, prin urmare $(b, a) \notin \rho \cap \sigma$. Aşadar, $\rho \cap \sigma$ este asimetrică.
(iv) Presupunem că ρ e simetrică, σ e asimetrică şi $\sigma \nsubseteq \rho$. Atunci există $a, b \in A$, astfel încât $(a, b) \in \sigma$ şi $(a, b) \notin \rho$. Cum $(a, b) \in \sigma$ şi σ este asimetrică, rezultă că $(b, a) \notin \sigma$. Cum $(a, b) \notin \rho$, iar ρ e simetrică şi, prin urmare, $\rho^{-1} = \rho$, rezultă că $(b, a) \notin \rho^{-1} = \rho$. Aşadar, $(b, a) \notin \rho$ şi $(b, a) \notin \sigma$, deci $(b, a) \notin \rho\cup\sigma$. Dar $(a, b) \in \sigma \subseteq \rho \cup \sigma$, deci $(a, b) \in \rho \cup \sigma$. Aşadar $\rho \cup \sigma$ nu este simetrică.

Exerciţiul 3.2. *(i) Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ o latice mărginită cu proprietatea că, oricare ar fi $x, y \in L \setminus \{0, 1\}$, dacă $x \neq y$, atunci x şi y sunt complemente unul altuia. Să se demonstreze că, dacă $|L| \geq 5$, atunci $\mathcal{L}$ nu este distributivă, şi să se deseneze diagrama Hasse a lui $\mathcal{L}$ pentru cazul în care $|L| = 5$.*

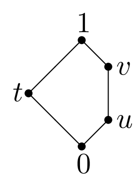
(ii) Să se deseneze diagramele Hasse pentru 7 latici finite nevide distributive două câte două neizomorfe şi diagramele Hasse pentru 7 latici finite nevide nedistributive două câte două neizomorfe astfel încât, în fiecare dintre acestea, singurele elemente complementate să fie 0 şi 1 (i. e. primul şi ultimul element).

Rezolvare: (i) Dacă $|L| \geq 5$, atunci $|L\setminus\{0, 1\}| \geq 3$, aşadar există trei elemente $x, y, z \in L\setminus\{0, 1\}$ două câte două distincte. Conform ipotezei, rezultă că y şi z sunt complemente ale lui x în $\mathcal{L}$. Dar $y \neq z$, aşadar x are cel puţin două complemente distincte în $\mathcal{L}$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{L}$ nu este distributivă.

Dacă $|L| = 5$, atunci, cum $\mathcal{L}$ este nedistributivă, rezultă că $\mathcal{L}$ este izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul, pe care le vom nota cu $\mathcal{D}$ şi, respectiv, $\mathcal{P}$. Amintim diagramele lor Hasse:

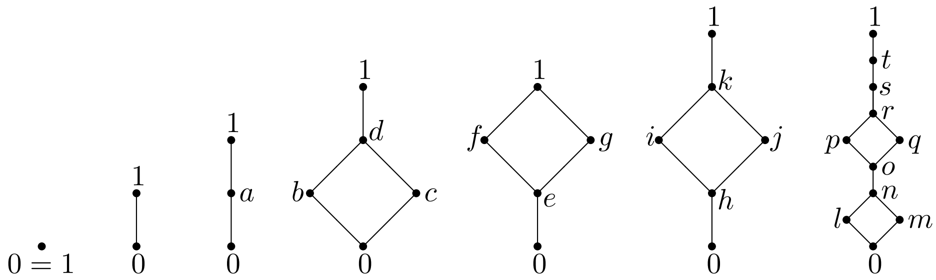


$\mathcal{D}$

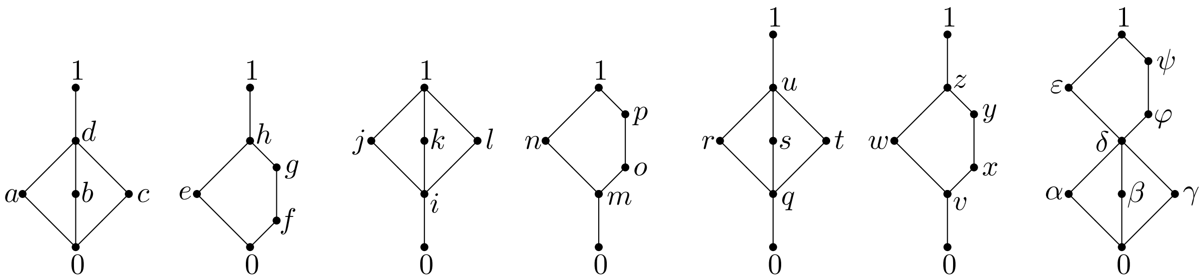


$\mathcal{P}$

În $\mathcal{D}$, fiecare două dintre elementele a, b, c sunt complemente unul altuia, în timp ce, în $\mathcal{P}$, u şi v nu sunt complemente unul altuia. Rezultă că $\mathcal{L}$ este izomorfă cu $\mathcal{D}$ (diamantul), având prima dintre cele două diagrame Hasse de mai sus.
(ii) Laticile distributive reprezentate prin următoarele diagrame Hasse:



şi laticile nedistributive reprezentate prin următoarele diagrame Hasse:



satisfac condiţiile din enunţ.

Exerciţiul 3.3. *Fie A o mulţime nevidă, $a \in A$ şi $M = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin X\}$. Considerăm algebra Boole $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A)$, cu $\overline{X} = A \setminus X$ pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$. Să se demonstreze că:*

(i) M nu este filtru al algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$;

(ii) M este sublatice a laticii $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$;

(iii) M nu este subalgebră Boole a algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$;

(iv) pe M se poate defini o structură de algebră Boole.

Rezolvare: (i) $a \in A$, aşadar $A \notin M$, iar A este ultimul element al algebrei Boole $\mathcal{P}(A)$, prin urmare M nu este filtru al acestei algebre Boole.

A se observa că $\emptyset \in M$, deci $M \neq \emptyset$.

(ii) $M \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi, pentru orice $X, Y \in M$, avem: $a \notin X$ şi $a \notin Y$, prin urmare $a \notin X \cup Y$ şi $a \notin X \cap Y$, deci $X \cup Y \in M$ şi $X \cap Y \in M$, aşadar M este închisă la $\cup$ şi la $\cap$, deci M este o sublatice a laticii $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$.

(iii) Conform punctului (i), $A \notin M$, aşadar M nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{P}(A)$.

(iv) Observăm că $M = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$, aşadar $(M, \cup, \cap, \subseteq, \bar{\cdot}, \emptyset, A \setminus \{a\})$ este o algebră Boole, unde am notat $\overline{X} = (A \setminus \{a\}) \setminus X = A \setminus (X \cup \{a\})$ pentru orice $X \in M$.

Exerciţiul 3.4. *Să se demonstreze că următoarea regulă de deducţie este valabilă în calculul propoziţional clasic: pentru orice $\Sigma, \Delta, \Gamma \subseteq E$ şi orice $\varphi, \psi \in E$:*

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi),\ \Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi,\ \Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi}{\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi}.$$

Rezolvare: Fie $\Sigma, \Delta, \Gamma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$, $\Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi$ şi $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi$. Avem de demonstrat că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$.

Conform **TCT**, proprietăţile $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$, $\Delta \vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi$, $\Gamma \vdash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi$ sunt echivalente cu $\Sigma \vDash \varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$, $\Delta \vDash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi$, $\Gamma \vDash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi$, respectiv.

Să demonstrăm că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vDash \neg\varphi \wedge \neg\psi$. În acest scop, considerăm o interpretare arbitrară care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, i. e. o funcţie arbitrară $h : V \rightarrow L_2 = \{0, 1\}$ astfel încât $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$.

$\Sigma \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Sigma$. Dar $\Sigma \vDash \varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)$, aşadar $\tilde{h}(\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)) = 1$.

$\Delta \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Delta$. Dar $\Delta \vDash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi$, aşadar $\tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) = 1$.

$\Gamma \subseteq \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ şi $h \vDash \Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$, prin urmare $h \vDash \Gamma$. Dar $\Gamma \vDash (\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi$, aşadar $\tilde{h}((\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi) = 1$.

Avem de demonstrat că $\tilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 1$, ceea ce este echivalent cu $\overline{\tilde{h}(\varphi)} \wedge \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, fapt echivalent cu $\overline{\tilde{h}(\varphi)} = \overline{\tilde{h}(\psi)} = 1$, egalităţi echivalente cu $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 0$.

Presupunem prin absurd că $\tilde{h}(\varphi) = 1$. Atunci $1 = \tilde{h}(\varphi \rightarrow (\neg\neg\varphi \rightarrow \psi)) = \tilde{h}(\varphi) \rightarrow (\overline{\overline{\tilde{h}(\varphi)}} \rightarrow \tilde{h}(\psi)) = 1 \rightarrow (\overline{\overline{1}} \rightarrow \tilde{h}(\psi)) = 1 \rightarrow (1 \rightarrow \tilde{h}(\psi))$, deci $1 \rightarrow (1 \rightarrow \tilde{h}(\psi)) = 1$, aşadar $1 \rightarrow \tilde{h}(\psi) = 1$, prin urmare $\tilde{h}(\psi) = 1$.

Atunci $1 = \tilde{h}((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg\varphi) = (\tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)) \rightarrow \overline{\tilde{h}(\varphi)} = (1 \wedge 1) \rightarrow \overline{1} = 1 \rightarrow 0 = 0$. Am obţinut o contradicţie.

Rezultă că $\tilde{h}(\varphi) = 0$, prin urmare $1 = \tilde{h}((\varphi \vee \neg\neg\psi) \rightarrow \varphi) = (\tilde{h}(\varphi) \vee \overline{\overline{\tilde{h}(\psi)}}) \rightarrow \tilde{h}(\varphi) = (0 \vee \tilde{h}(\psi)) \rightarrow 0 = \tilde{h}(\psi) \rightarrow 0$, aşadar $\tilde{h}(\psi) \rightarrow 0 = 1$, deci $\tilde{h}(\psi) = 0$.

Am obţinut că $\tilde{h}(\varphi) = \tilde{h}(\psi) = 0$, ceea ce, conform unui raţionament de mai sus, este echivalent cu faptul că $\tilde{h}(\neg\varphi \wedge \neg\psi) = 1$.

În concluzie, orice interpretare care satisface mulţimea de enunţuri $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma$ satisface şi enunţul $\neg\varphi \wedge \neg\psi$, ceea ce înseamnă că $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vDash \neg\varphi \wedge \neg\psi$, fapt echivalent cu $\Sigma \cup \Delta \cup \Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi$ conform **TCT**.

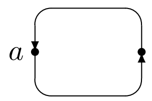
4 Lista 4 de subiecte

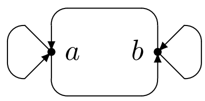
Exerciţiul 4.1. *(i) Să se dea un exemplu de mulţime finită şi nevidă A şi de relaţie binară ρ pe A cu proprietăţile: ρ nu e reflexivă şi nu e tranzitivă, dar $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho)$.*

(ii) Să se demonstreze că, dacă A este o mulţime finită şi nevidă, iar ρ este o relaţie binară pe A, reflexivă şi netranzitivă, atunci $\mathcal{R}(\rho) \neq \mathcal{T}(\rho)$.

(iii) Să se demonstreze că, dacă A este o mulţime finită şi nevidă, iar ρ este o preordine pe A, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho)$.

Rezolvare: (i) Fie $A = \{a, b\}$ $(a \neq b)$ şi ρ următoarea relaţie binară pe A: $\rho = \{(a, b), (b, a)\}$. ρ nu este reflexivă, pentru că $(a, a) \notin \rho$, şi nu este tranzitivă, pentru că $(a, b), (b, a) \in \rho$, dar $(a, a) \notin \rho$.

$\rho :$ 

$\mathcal{R}(\rho) = \mathcal{T}(\rho) = A^2 :$ 

$\mathcal{R}(\rho) = \Delta_A \cup \rho = \{(a,a),(b,b)\} \cup \{(a,b),(b,a)\} = A^2$.

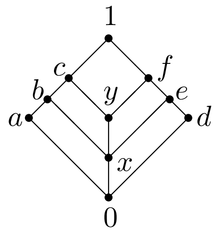
$\rho \subseteq \mathcal{T}(\rho)$, aşadar: $(a,b),(b,a) \in \mathcal{T}(\rho)$, iar $\mathcal{T}(\rho)$ este tranzitivă, prin urmare $(a,a) \in \mathcal{T}(\rho)$; $(b,a),(a,b) \in \mathcal{T}(\rho)$, iar $\mathcal{T}(\rho)$ este tranzitivă, prin urmare $(b,b) \in \mathcal{T}(\rho)$. Aşadar, avem: $\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\} \subseteq \mathcal{T}(\rho)$, i. e. $A^2 \subseteq \mathcal{T}(\rho)$; dar $\mathcal{T}(\rho) \subseteq A^2$, prin urmare $\mathcal{T}(\rho) = A^2$.

În concluzie, $\mathcal{R}(\rho) = A^2 = \mathcal{T}(\rho)$.

(ii) Dacă ρ este reflexivă, atunci $\mathcal{R}(\rho) = \rho$, iar, dacă ρ nu e tranzitivă, atunci $\mathcal{T}(\rho) \neq \rho$, aşadar, pentru ρ reflexivă şi netranzitivă, avem: $\mathcal{R}(\rho) = \rho \neq \mathcal{T}(\rho)$, deci $\mathcal{R}(\rho) \neq \mathcal{T}(\rho)$.

(iii) Dacă ρ este o preordine, atunci: întrucât ρ este reflexivă, are loc $\mathcal{R}(\rho) = \rho$, iar, întrucât ρ este tranzitivă, are loc $\mathcal{T}(\rho) = \rho$, aşadar $\mathcal{R}(\rho) = \rho = \mathcal{T}(\rho)$.

Exerciţiul 4.2. *Fie $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, 0, 1)$ laticea mărginită dată de următoarea diagramă Hasse:*



Pentru orice n natural, notăm cu $C_n = \{\alpha \in L \mid \alpha$ are exact n complemenţi distincţi în $\mathcal{L}\}$. Să se determine:

(i) C_n pentru toţi $n \in \mathbb{N}$;

(ii) valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care C_n este o sublatice a lui $\mathcal{L}$;

(iii) valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care C_n este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$.

Rezolvare: (i) În laticea $\mathcal{L}$:

- 0 are ca unic complement pe 1;
- complemenţii lui a sunt: d, e, f;
- b are ca unic complement pe d;
- c are ca unic complement pe d;
- complemenţii lui d sunt: a, b, c;
- e are ca unic complement pe a;
- f are ca unic complement pe a;
- x nu are complemenţi, pentru că: singurul element $\alpha \in L$ cu $x \vee \alpha = 1$ este $\alpha = 1$, dar $x \wedge 1 = x \neq 0$;
- y nu are complemenţi, pentru că: singurul element $\alpha \in L$ cu $y \vee \alpha = 1$ este $\alpha = 1$, dar $y \wedge 1 = y \neq 0$;
- 1 are ca unic complement pe 0.

Aşadar:

- $C_0 = \{x, y\}$;
- $C_1 = \{0, b, c, e, f, 1\}$;
- $C_2 = \emptyset$;
- $C_3 = \{a, d\}$;
- $C_n = \emptyset$, pentru orice $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pentru orice $n \in \{2\} \cup \{k \in \mathbb{N} |\ k \geq 4\}$, $C_n = \emptyset$, care este o sublatice a lui $\mathcal{L}$.

$C_0 = \{x, y\}$, care este un lanţ, pentru că $x \leq y$, deci C_0 este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, întrucât: cum $x \leq y$, rezultă că $x \vee y = y \in C_0$, iar $x \wedge y = x \in C_0$.

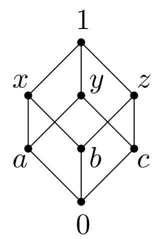
C_1 nu este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, pentru că: $b, e \in C_1$, dar $b \wedge e = x \notin C_1$.

C_3 nu este o sublatice a lui $\mathcal{L}$, pentru că: $a, d \in C_3$, dar $a \wedge d = 0 \notin C_3$.

Aşadar: C_n este o sublatice a lui $\mathcal{L}$ ddacă $n \in \{0, 2\} \cup \{k \in \mathbb{N} |\ k \geq 4\}$.

(iii) $0 \notin \{x, y\} = C_0$ şi $0 \notin \emptyset = C_2 = C_n$, pentru orice $n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$, aşadar niciuna dintre mulţimile C_n cu $n \in \{0, 2\} \cup \{k \in \mathbb{N} |\ k \geq 4\}$ nu este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$. Acest fapt şi rezultatul de la punctul (ii) arată că nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât C_n să fie o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}$.

Exerciţiul 4.3. *(i) Considerăm algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ (cubul):*



Să se determine o sublatice mărginită L a lui $\mathcal{L}_2^3$ cu exact 4 elemente care este lanţ, şi o sublatice mărginită M a lui $\mathcal{L}_2^3$ cu exact 4 elemente care nu este lanţ. Să se demonstreze că L nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$, în timp ce M este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

(ii) Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole (cu cel puţin 4 elemente), iar S o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$ cu exact 4 elemente. Să se demonstreze că: S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$ ddacă S nu este lanţ.

Rezolvare: (i) Fie $L = \{0, a, x, 1\}$ şi $M = \{0, b, y, 1\}$. În algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$, au loc:

- $0 \leq a \leq x \leq 1$, aşadar L este lanţ;
- $b \nleq y$ şi $y \nleq b$, aşadar M nu este lanţ.

Cum L este lanţ şi $0, 1 \in L$, rezultă că L este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}_2^3$, pentru că: oricare ar fi $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \vee \beta = \max\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta\} \subset L$ şi $\alpha \wedge \beta = \min\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta\} \subset L$.

M este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{L}_2^3$, pentru că: $0, 1 \in M$ şi: oricare ar fi $\alpha \in M$, $0 \vee \alpha = \alpha \in M$, $0 \wedge \alpha = 0 \in M$, $1 \vee \alpha = 1 \in M$ şi $1 \wedge \alpha = \alpha \in M$, iar $b \vee y = 1 \in M$ şi $b \wedge y = 0 \in M$.

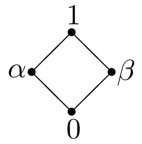
$a \in L$, dar $\overline{a} = z \notin L$, prin urmare L nu este închisă la complementare, deci L nu este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

$M = \{0, b, y, 1\}$, iar $\overline{0} = 1 \in M$, $\overline{b} = y \in M$, $\overline{y} = b \in M$ şi $\overline{1} = 0 \in M$, aşadar M este închisă şi la complementare, deci M este subalgebră Boole a lui $\mathcal{L}_2^3$.

(ii) Considerăm $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\cdot}, 0, 1)$ şi $S \subseteq B$, cu $|S| = 4$, astfel încât $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, iar S este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$.

"$\Rightarrow$:" Dacă S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$, atunci S este o algebră Boole, şi, întrucât $|S| = 4$, rezultă că S este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$ (rombul), care nu este lanţ (are diagrama Hasse următoare), aşadar S nu este lanţ.

$\mathcal{L}_2^2$:

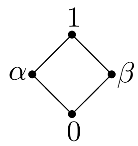


"$\Leftarrow$:" Presupunem că S nu este lanţ.

S este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$, deci $0, 1 \in S$, şi $|S| = 4$, prin urmare $S = \{0, \alpha, \beta, 1\}$, cu elementele $0, \alpha, \beta, 1 \in B$ două câte două distincte.

$0 \leq \alpha \leq 1$ şi $0 \leq \beta \leq 1$, iar S nu este lanţ, aşadar $\alpha \nleq \beta$ şi $\beta \nleq \alpha$, ceea ce înseamnă că diagrama Hasse a laticii mărginite S este următoarea (S este izomorfă cu $\mathcal{L}_2^2$):

$S \cong \mathcal{L}_2^2$:



Din această diagramă Hasse deducem că egalităţile $\begin{cases} \alpha \vee \beta = 1 \text{ şi} \\ \alpha \wedge \beta = 1 \end{cases}$ au loc în S, şi deci şi în $\mathcal{B}$, pentru că S este o sublatice a lui $\mathcal{B}$, aşadar operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ de pe S sunt exact operaţiile $\vee$ şi $\wedge$ din $\mathcal{B}$ restricţionate la $S \times S$. Aşadar, α şi β sunt complemente unul altuia in S, şi deci şi în $\mathcal{B}$, prin urmare $\overline{\alpha} = \beta$ şi $\overline{\beta} = \alpha$ în $\mathcal{B}$.

Concluzionând: $S = \{0, \alpha, \beta, 1\}$ este o sublatice mărginită a lui $\mathcal{B}$ şi au loc: $\overline{0} = 1 \in S$, $\overline{\alpha} = \beta \in S$, $\overline{\beta} = \alpha \in S$ şi $\overline{1} = 0 \in S$, deci S este închisă şi la complementare, aşadar S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$.

Exerciţiul 4.4. *Să se demonstreze că, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa:*

$$\{\varphi\} \vdash \neg\,\psi \quad \textit{ddacă} \quad \{\psi\} \vdash \neg\,\varphi.$$

Rezolvare: Notăm cu $x = \hat{\varphi}, y = \hat{\psi} \in E/\sim$.

Folosind **TD** şi o lemă din calculul propoziţional clasic, obţinem echivalenţele: $\{\varphi\} \vdash \neg\,\psi$ ddacă $\vdash \varphi \to \neg\,\psi$ ddacă $\widehat{\varphi \to \neg\,\psi} = 1$ ddacă $\hat{\varphi} \to \overline{\hat{\psi}} = 1$ ddacă $x \to \overline{y} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{y} = 1$ ddacă $\overline{y} \vee \overline{x} = 1$ ddacă $y \to \overline{x} = 1$ ddacă $\hat{\psi} \to \overline{\hat{\varphi}} = 1$ ddacă $\widehat{\psi \to \neg\,\varphi} = 1$ ddacă $\vdash \psi \to \neg\,\varphi$ ddacă $\{\psi\} \vdash \neg\,\varphi$.

Bibliografie

[1] S. Burris, H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, The Millenium Edition, disponibilă online.

[2] D. Buşneag, D. Piciu, *Lecţii de algebră*, Editura Universitaria Craiova (2002).

[3] D. Buşneag, D. Piciu, *Probleme de logică şi teoria mulţimilor*, Craiova (2003).

[4] V. E. Căzănescu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1974, 1975, 1976).

[5] G. Georgescu, *Elemente de logică matematică*, Academia Militară, Bucureşti (1978).

[6] G. Georgescu, A. Iorgulescu, *Logică matematică*, Editura ASE, Bucureşti (2010).

[7] K. Kuratowski, *Introducere în teoria mulţimilor şi în topologie*, traducere din limba poloneză, Editura Tehnică, Bucureşti (1969).

[8] S. Rudeanu, *Curs de bazele informaticii*, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).

[9] A. Scorpan, *Introducere în teoria axiomatică a mulţimilor*, Editura Universităţii din Bucureşti (1996).

[10] Articolele cu probleme date la examenul de logică matematică şi computaţională, precum şi celelalte articole din *Revista de logică*, publicaţie online, în care se află şi articolul de faţă.

[11] Cursurile de logică matematică şi computaţională de pe site–ul Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii din Bucureşti (pe serverul de cursuri: *moodle*).