Curs 10

2017-2018 Programare Logică

Cuprins

Sisteme de rescriere pentru termeni

Rescrierea termenilor

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

Definiție

O regulă de rescriere (pentru termeni) este formată din doi termeni $l, r \in Trm_{\mathcal{L}}$ astfel încât:

1. l nu este variabilă,
2. $Var(r) \subseteq Var(l)$.

Vom nota o regulă de rescriere prin:

$$l \to r.$$

Reguli de rescriere

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj în care $\mathbf{C} = \{a\}$ și $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $ari(f) = 1$, $ari(g) = 2$.
- Reguli de rescriere:
  - $f(x) \to x$
  - $g(f(x), x) \to f(x)$
  - $f(x) \to a$
  - $f(x) \to g(a, f(x))$

Reguli de rescriere

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj în care $\mathbf{C} = \{a\}$ și $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $ari(f) = 1$, $ari(g) = 2$.
- Reguli de rescriere:
  - $f(x) \to x$
  - $g(f(x), x) \to f(x)$
  - $f(x) \to a$
  - $f(x) \to g(a, f(x))$
- Incorecte:
  - $f(x) \to y$
  - $a \to g(x, y)$
  - $x \to f(x)$

Sisteme de rescriere

Un sistem de rescriere pentru termeni (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere pentru termeni.

Sisteme de rescriere

Un sistem de rescriere pentru termeni (TRS) este o mulțime finită de reguli de rescriere pentru termeni.

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj în care $\mathbf{C} = \{a\}$ și $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $ari(f) = 1$, $ari(g) = 2$.
- Sistem de rescriere:

$$R = \{f(x) \to x, g(f(x), x) \to f(x)\}$$

Contexte

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I
- Dacă $t \in Trm_{\mathcal{L}}$ și $x \in Var$ notăm

$$nr_x(t) = \text{numărul de apariții ale lui } x \text{ în } t$$

Contexte

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I
- Dacă $t \in Trm_{\mathcal{L}}$ și $x \in Var$ notăm

$$nr_x(t) = \text{numărul de apariții ale lui } x \text{ în } t$$

Definiție

Fie z a.î. $z \notin Var$ (o variabilă nouă).

Contexte

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I
- Dacă $t \in Trm_{\mathcal{L}}$ și $x \in Var$ notăm

$$nr_x(t) = \text{numărul de apariții ale lui } x \text{ în } t$$

Definiție

Fie z a.î. $z \notin Var$ (o variabilă nouă). Un termen c se numește context dacă $nr_z(c) = 1$.

Contexte

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I
- Dacă $t \in Trm_{\mathcal{L}}$ și $x \in Var$ notăm
$$nr_x(t) = \text{numărul de apariții ale lui } x \text{ în } t$$

Definiție

Fie z a.î. $z \notin Var$ (o variabilă nouă). Un termen c se numește context dacă $nr_z(c) = 1$.

- Dacă $t_0 \in Trm_{\mathcal{L}}$, definim substituția $\{z \leftarrow t_0\} : Var \cup \{z\} \to Trm_{\mathcal{L}}$
$$\{z \leftarrow t_0\}(x) = \begin{cases} t_0, & \text{dacă } x = z \\ x, & \text{altfel} \end{cases}$$

Contexte

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I
- Dacă $t \in Trm_{\mathcal{L}}$ și $x \in Var$ notăm

$$nr_x(t) = \text{numărul de apariții ale lui } x \text{ în } t$$

Definiție

Fie z a.î. $z \notin Var$ (o variabilă nouă). Un termen c se numește context dacă $nr_z(c) = 1$.

- Dacă $t_0 \in Trm_{\mathcal{L}}$, definim substituția $\{z \leftarrow t_0\} : Var \cup \{z\} \rightarrow Trm_{\mathcal{L}}$

$$\{z \leftarrow t_0\}(x) = \begin{cases} t_0, & \text{dacă } x = z \\ x, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Pentru un context c, notăm:

$$c[z \leftarrow t_0] := \{z \leftarrow t_0\}(c)$$

Relația de rescriere generată de R

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R sistem de rescriere pentru termeni

Relația de rescriere generată de R

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R sistem de rescriere pentru termeni
- Pentru $t, t' \in Trm_{\mathcal{L}}$ definim relația $t \to_R t'$ astfel:

Relația de rescriere generată de R

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R sistem de rescriere pentru termeni
- Pentru $t, t' \in Trm_{\mathcal{L}}$ definim relația $t \to_R t'$ astfel:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și} \\ & & t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde} \\ & & c \text{ context}, \\ & & l \to r \in R, \\ & & \theta \text{ substituție} \end{array}}$$

- Observați că $t \to_R t'$ ddacă t' se poate obține din t înlocuind o instanță a lui l cu o instanță a lui r, unde $l \to r \in R$.
- $\to_R$ este relația de rescriere generată de sistemul de rescriere R.

Echivalența generată de $\rightarrow_R$

- Închiderea tranzitivă:
  $t \overset{*}{\rightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R t_n = t'$

Echivalența generată de $\to_R$

- Închiderea tranzitivă:
  $t \stackrel{*}{\to}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \to_R \ldots \to_R t_n = t'$

- Închiderea simetrică:
  $t \leftrightarrow_R t' \Leftrightarrow t \to_R t'$ sau $t' \to_R t$

Echivalența generată de $\rightarrow_R$

- Închiderea tranzitivă:
  $t \xrightarrow{*}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R t_n = t'$

- Închiderea simetrică:
  $t \leftrightarrow_R t' \Leftrightarrow t \rightarrow_R t'$ sau $t' \rightarrow_R t$

- Echivalența generată de $\rightarrow_R$:
  $t \overset{*}{\leftrightarrow}_R t' \Leftrightarrow t = t_0 \leftrightarrow_R \ldots \leftrightarrow_R t_n = t'$

Exemplu

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I în care $\mathbf{C} = \{0\}$ și $\mathbf{F} = \{s, +\}$ cu $ari(s) = 1$, $ari(+) = 2$.
- Fie sistemul de rescriere

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}.$$

- Considerăm relația de rescriere $\to_R$ generată de R.
- Să arătăm că $s\ s\ 0 + s\ s\ s\ 0 \stackrel{*}{\to}_R s\ s\ s\ s\ s\ 0$.

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- $t = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- $t = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- $t = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ s\ 0$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t'$	$\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- $t = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ s\ 0$
- Contextul $c = z$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0 = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s\ s\ 0 + s\ s\ 0) = t'$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t'$ $\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- $t = s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ s\ 0$
- Contextul $c = z$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s\ s\ 0\ + s\ s\ s\ 0 = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s\ s\ 0 + s\ s\ 0) = t'$
- În concluzie, avem $s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0\ \to_R\ s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde
c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ 0$

Exemplu (cont.)

$$t \rightarrow_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde}$$
$$c \text{ context}, \ l \rightarrow r \in R, \ \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \rightarrow x, \ x + s\ y \rightarrow s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \rightarrow s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ 0$
- Contextul $c := s(z)$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s\ s\ 0 + s\ 0)) = t'$

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = s\ 0$
- Contextul $c := s(z)$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s\ s\ 0 + s\ 0)) = t'$
- În concluzie, avem $s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0)\ \to_R\ s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde}$$
$$c \text{ context}, \ l \to r \in R, \ \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x, \ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde
c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t'$	$\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = 0$

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = 0$
- Contextul $c := s(s(z))$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s\ s\ 0\ + s\ 0)) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0 + 0))) = t'$

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))$
- Regula de rescriere $x\ +\ s\ y \to s(x\ +\ y) \in R$
  - $l = x\ +\ s\ y$
  - $r = s(x\ +\ y)$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
  - $\theta(y) = 0$
- Contextul $c := s(s(z))$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s\ s\ 0\ + s\ 0)) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0 + 0))) = t'$
- În concluzie, avem $s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0))\ \to_R\ s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$t \to_R t'$	$\Leftrightarrow$	t este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$
- Regula de rescriere $x\ +\ 0 \to x \in R$
  - $l = x\ +\ 0$
  - $r = x$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde}$$
$$c \text{ context}, \ l \to r \in R, \ \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$
- Regula de rescriere $x\ +\ 0 \to x \in R$
  - $l = x\ +\ 0$
  - $r = x$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde } c \text{ context}, l \to r \in R, \theta \text{ substituție}$$

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s(s\ s\ 0 + 0)))$
- Regula de rescriere $x + 0 \to x \in R$
  - $l = x + 0$
  - $r = x$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
- Contextul $c := s(s(s(z)))$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s(s\ s\ 0 + 0))) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0))) = t'$

Exemplu (cont.)

$t \to_R t' \quad \Leftrightarrow \quad t$ este $c[z \leftarrow \theta(l)]$ și t' este $c[z \leftarrow \theta(r)]$, unde c context, $l \to r \in R$, θ substituție

$$R = \{x + 0 \to x,\ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

- Acum considerăm $t = s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0)))$
- Regula de rescriere $x\ +\ 0 \to x \in R$
  - $l = x\ +\ 0$
  - $r = x$
- Substituție θ
  - $\theta(x) = s\ s\ 0$
- Contextul $c := s(s(s(z)))$
  - $c[z \leftarrow \theta(l)] = s(s(s(s\ s\ 0\ + 0))) = t$
  - $c[z \leftarrow \theta(r)] = s(s(s(s\ s\ 0))) = t'$
- În concluzie, avem $s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0))) \ \to_R\ s(s(s(s(s\ s\ 0))))$

Exemplu

Exemplu (cont.)

$$\boxed{\begin{array}{lcl} t \to_R t' & \Leftrightarrow & t \text{ este } c[z \leftarrow \theta(l)] \text{ și } t' \text{ este } c[z \leftarrow \theta(r)], \text{ unde} \\ & & c \text{ context}, \ l \to r \in R, \ \theta \text{ substituție} \end{array}}$$

$$R = \{x + 0 \to x, \ x + s\ y \to s(x + y)\}$$

În concluzie, am obținut

$$\begin{array}{lll} s\ s\ 0\ +\ s\ s\ s\ 0 & \to_R & s(s\ s\ 0\ +\ s\ s\ 0) \\ & \to_R & s(s(s\ s\ 0\ +\ s\ 0)) \\ & \to_R & s(s(s(s\ s\ 0\ +\ 0))) \\ & \to_R & s(s(s(s(s\ s\ 0)))) \end{array}$$

Rescrierea termenilor

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

regulă de rescriere	$l \to r$	l, r termeni din $Trm_{\mathcal{L}}$
sistem de rescriere (TRS)	R	mai multe $l \to r$
relația de rescriere	$\to_R$	generată de R
echivalența	$\stackrel{*}{\leftrightarrow}_R$	generată de $\to_R$

$(Trm_{\mathcal{L}}, R)$ este un sistem de rescriere abstract.

Confluență. Perechi critice.

Exemplu

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.

Fie sistemul de rescriere

$$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$$

Observăm că avem următoarele rescrieri

$$\begin{tikzcd} & f(f(i(x_1),x_1),u) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\ f(i(x_1),f(x_1,u)) & & f(e,u) \end{tikzcd}$$

Exemplu

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.

Fie sistemul de rescriere

$$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$$

Observăm că avem următoarele rescrieri

$$
\begin{tikzcd}
 & f(f(i(x_1),x_1),u) \arrow[dl, "R"'] \arrow[dr, "R"] & \\
f(i(x_1),f(x_1,u)) & & f(e,u)
\end{tikzcd}
$$

Cum putem identifica astfel de cazuri pentru un sistem de rescriere oarecare?

Perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

Perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,

Perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)

Perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
3. există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

1. $Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
2. există un subtermen t al lui l_1 care nu este variabilă
   ($l_1 = c[z \leftarrow t]$, unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă)
3. există θ c.g.u pentru t și l_2 (i.e. $\theta(t) = \theta(l_2)$).

Perechea $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ se numește pereche critică.

$$\begin{array}{ccc} & \theta(l_1) & \\ \swarrow_R & & \searrow_R \\ \theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] \end{array}$$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

1. $Var(f(f(x,y),u)) = \{x,y,u\}$ și $Var(f(i(x_1),x_1)) = \{x_1\}$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

1. $Var(f(f(x,y),u)) = \{x,y,u\}$ și $Var(f(i(x_1),x_1)) = \{x_1\}$
2. Luăm subtermenul $t = f(x,y)$ al lui $l_1 = f(f(x,y),u)$
   - $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pt. contextul $c = f(z,u)$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

1. $Var(f(f(x,y),u)) = \{x,y,u\}$ și $Var(f(i(x_1),x_1)) = \{x_1\}$
2. Luăm subtermenul $t = f(x,y)$ al lui $l_1 = f(f(x,y),u)$
   - $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pt. contextul $c = f(z,u)$
3. $\theta = \{x \mapsto i(x_1),\ y \mapsto x_1\}$ c.g.u. pt. t și $l_2 = f(i(x_1),x_1)$.

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x,y),u) \to f(x,f(y,u)),\ f(i(x_1),x_1) \to e\}$

1. $Var(f(f(x,y),u)) = \{x,y,u\}$ și $Var(f(i(x_1),x_1)) = \{x_1\}$
2. Luăm subtermenul $t = f(x,y)$ al lui $l_1 = f(f(x,y),u)$
   - $l_1 = c[z \leftarrow t]$ pt. contextul $c = f(z,u)$
3. $\theta = \{x \mapsto i(x_1),\ y \mapsto x_1\}$ c.g.u. pt. t și $l_2 = f(i(x_1),x_1)$.

$$f(i(x_1),f(x_1,u)) \xleftarrow{R} f(f(i(x_1),x_1),u) \xrightarrow{R} f(e,u)$$

Pereche critică: $(f(i(x_1),f(x_1,u)), f(e,u))$

Confluență și perechi critice

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \theta(l_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] \end{tikzcd}$$

$l_1 \to r_1,\ l_2 \to r_2 \in R$,
$Var(l_1) \cap Var(l_2) = \emptyset$,
$l_1 = c[z \to t]$,
$\theta(t) = \theta(l_2)$ c.g.u

Teoremă (Teorema Perechilor Critice)

Dacă R este noetherian, atunci sunt echivalente:

1. *R este confluent,*
2. *$t_1 \downarrow_R t_2$ pentru orice pereche critică (t_1, t_2).*

Consecință

Corolar

Confluența unui TRS noetherian este decidabilă.

Algoritm:

- pt. or. pereche de reguli de rescriere $l_1 \rightarrow r_1$ și $l_2 \rightarrow r_2$
- se încearcă generarea perechilor critice (t_1, t_2)
- pt. or. pereche critică (t_1, t_2), se arată că $t_1 \downarrow_R t_2$

Exemplu

Exemplu

$R = \{f(f(x)) \to x\}$ este confluent.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.
    Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.
    Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$. Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$
- Perechile critice sunt (y, y) și $(f(y), f(y))$.

Exemplu

Exemplu

$$R = \{f(f(x)) \to x\} \text{ este confluent.}$$

- R este noetherian.
- Determinăm perechile critice:
  - Regulile $l_1 = f(f(x)) \to x = r_1$ și $l_2 = f(f(y)) \to y = r_2$.
    Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.
    - $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$
    - $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$
      Perechea critică: $\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$
- Perechile critice sunt (y, y) și $(f(y), f(y))$.
- Deoarece $y \downarrow y$ și $f(y) \downarrow f(y)$, sistemul de rescriere R este confluent.

Terminarea sistemelor de rescriere

Arbori de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

- Arborele de reducere al unui termen t este definit astfel:
  - rădăcina arborelui are eticheta t,
  - descendenții nodului cu eticheta u sunt etichetați cu termenii u' care verifică $u \to_R u'$.

Arbori de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

- Arborele de reducere al unui termen t este definit astfel:
  - rădăcina arborelui are eticheta t,
  - descendenții nodului cu eticheta u sunt etichetați cu termenii u' care verifică $u \to_R u'$.

- Orice nod al unui arbore de reducere are un număr finit de descendenți deoarece R este o mulțime finită.

Arborele de reducere

Exemplu

- Fie $R = \{x + 0 \to x, x + s(y) \to s(x + y)\}$
- Arborele de reducere al termenului $s(0) + s(0 + 0)$

$$\begin{tikzcd}
 & s(0) + s(0+0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
s(0) + s(0) \arrow[d] & & s(s(0) + (0+0)) \arrow[d] \\
s(s(0) + 0) \arrow[d] & & s(s(0) + 0) \arrow[d] \\
s(s(0)) & & s(s(0))
\end{tikzcd}$$

Terminare

Propoziție

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

Terminare

Propoziție

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

Demonstrație

$(2 \Rightarrow 1)$ $\mathbb{N}$ nu conține lanțuri infinite $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > \cdots$.

Terminare

Propoziție

Sunt echivalente:

1. R este noetherian,
2. oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$.

Demonstrație

$(2 \Rightarrow 1)$ $\mathbb{N}$ nu conține lanțuri infinite $n_1 > n_2 > \cdots > n_k > \cdots$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Într-un sistem de rescriere noetherian orice termen are un arbore de reducere finit și definim

$$\mu(t) = \text{înălțimea arborelui de reducere asociat lui } t.$$

Evident $t \to_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$. $\square$

Ordine de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

O ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ se numește ordine de reducere dacă

Ordine de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

O ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ se numește ordine de reducere dacă

- este *well-founded*:
  - nu există lanțuri descrescătoare infinite, i.e. nu există o secvență infinită de termeni $t_0, t_1, t_2, \ldots$ astfel încât $t_0 > t_1 > t_2 > \ldots$

Ordine de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

O ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ se numește ordine de reducere dacă

- este *well-founded*:
  - nu există lanțuri descrescătoare infinite, i.e. nu există o secvență infinită de termeni $t_0, t_1, t_2, \ldots$ astfel încât $t_0 > t_1 > t_2 > \ldots$
- este compatibilă cu simbolurile de funcții:
  - dacă $s_1 > s_2$, atunci $f(t_1, \ldots, t_{i-1}, s_1, t_{i+1}, \ldots, t_n) > f(t_1, \ldots, t_{i-1}, s_2, t_{i+1}, \ldots, t_n)$, pentru orice simbol de funcție f de aritate n

Ordine de reducere

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și R un sistem de rescriere pentru termeni.

Definiție

O ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ se numește ordine de reducere dacă

- este *well-founded*:
  - nu există lanțuri descrescătoare infinite, i.e. nu există o secvență infinită de termeni $t_0, t_1, t_2, \dots$ astfel încât $t_0 > t_1 > t_2 > \dots$
- este compatibilă cu simbolurile de funcții:
  - dacă $s_1 > s_2$, atunci $f(t_1, \dots, t_{i-1}, s_1, t_{i+1}, \dots, t_n) > f(t_1, \dots, t_{i-1}, s_2, t_{i+1}, \dots, t_n)$, pentru orice simbol de funcție f de aritate n
- este închisă la substituții:
  - dacă $s_1 > s_2$, atunci $\theta(s_1) > \theta(s_2)$ pentru orice substituție θ

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t|,$$

unde $|t|$ este lungimea termenului t (numărul de simboluri din t fără paranteze)

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t|,$$

unde $|t|$ este lungimea termenului t (numărul de simboluri din t fără paranteze)

- este well-founded și compatibilă cu operațiile

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t|,$$

unde $|t|$ este lungimea termenului t (numărul de simboluri din t fără paranteze)

- este well-founded și compatibilă cu operațiile
- în general, nu este închisă la substituții:

$$|f(f(x,x),y)| = 5 > 3 = |f(y,y)|$$

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t|,$$

unde $|t|$ este lungimea termenului t (numărul de simboluri din t fără paranteze)

- este well-founded și compatibilă cu operațiile
- în general, nu este închisă la substituții:

$$|f(f(x,x),y)| = 5 > 3 = |f(y,y)|$$

dar pentru substituția $\theta(y) = f(x,x)$ avem

$$\begin{aligned} |\theta(f(f(x,x),y)| &= |f(f(x,x),f(x,x)| = 7 \\ |\theta(f(y,y))| &= |f(f(x,x),f(x,x)| = 7 \end{aligned}$$

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t|,$$

unde $|t|$ este lungimea termenului t (numărul de simboluri din t fără paranteze)

- este well-founded și compatibilă cu operațiile
- în general, nu este închisă la substituții:

$$|f(f(x,x),y)| = 5 > 3 = |f(y,y)|$$

dar pentru substituția $\theta(y) = f(x,x)$ avem

$$\begin{aligned} |\theta(f(f(x,x),y)| &= |f(f(x,x),f(x,x)| = 7 \\ |\theta(f(y,y))| &= |f(f(x,x),f(x,x)| = 7 \end{aligned}$$

Deci nu este, în general, ordine de reducere.

Ordine de reducere

Exemplu

Relația de ordine strictă $>$ pe $Trm_{\mathcal{L}}$ definită prin

$$s > t \quad \text{ddacă} \quad |s| > |t| \text{ și } nr_x(s) \geq nr_x(t), \text{ pentru orice } x \in Var$$

este o ordine de reducere.

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var(s)$ și $s \neq t$, sau

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var(s)$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var(s)$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var(s)$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

Ordine de reducere

Exemplu

Ordinea lexicografică $>_{lpo}$ indusă pe mulțimea de termeni $Trm_{\mathcal{L}}$ de o relație de ordine strictă $>$ pe limbajul $\mathcal{L}$ este o ordine de reducere.

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var(s)$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

(LPO2c) $f = g$, $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, și există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}$ și $s_i >_{lpo} t_i$.

Ordine de reducere

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \dots, s_m)$, $t = g(t_1, \dots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

(LPO2c) $f = g$, $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, și există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_1 = t_1, \dots, s_{i-1} = t_{i-1}$ și $s_i >_{lpo} t_i$.

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.
- Considerăm $i > f > e$.

Ordine de reducere

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

(LPO2c) $f = g$, $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, și există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}$ și $s_i >_{lpo} t_i$.

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.
- Considerăm $i > f > e$.
- Atunci avem:
  - $f(x, e) >_{lpo} x$ din (LPO1)

Ordine de reducere

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

(LPO2c) $f = g$, $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, și există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}$ și $s_i >_{lpo} t_i$.

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.
- Considerăm $i > f > e$.
- Atunci avem:
  - $f(x, e) >_{lpo} x$ din (LPO1)
  - $i(e) >_{lpo} e$ din (LPO2a) deoarece $e \geq_{lpo} e$

Ordine de reducere

$s >_{lpo} t$ ddacă

(LPO1) $t \in Var$ și $s \neq t$, sau

(LPO2) $s = f(s_1, \ldots, s_m)$, $t = g(t_1, \ldots, t_n)$ și

(LPO2a) există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_i \geq_{lpo} t$, sau

(LPO2b) $f > g$ și $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$

(LPO2c) $f = g$, $s >_{lpo} t_j$, pentru orice j, $1 \leq j \leq n$, și există i, $1 \leq i \leq m$ astfel încât $s_1 = t_1, \ldots, s_{i-1} = t_{i-1}$ și $s_i >_{lpo} t_i$.

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de constantă e, un simbol de funcție i de aritate 1 și un simbol de funcție f de aritate 2.
- Considerăm $i > f > e$.
- Atunci avem:
  - $f(x, e) >_{lpo} x$ din (LPO1)
  - $i(e) >_{lpo} e$ din (LPO2a) deoarece $e \geq_{lpo} e$
  - $i(f(x, y)) >_{lpo} f(i(y), i(x))$ din (LPO2b) deoarece $i > f$ si, din (LPO2c), avem $i(f(x, y)) >_{lpo} i(y)$ și $i(f(x, y)) >_{lpo} i(x)$

Ordine de reducere

Teoremă

Următoarele sunt echivalente:

1. *Un sistem de rescrire R este noetherian.*
2. *Există o ordine de reducere $>$ care satisface $l > r$ pentru orice $l \to r \in R$.*

Algoritmul Knuth-Bendix

Algoritmul Knuth-Bendix

- Procedură pentru a completa un TRS noetherian.

- Intrare: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- Ieșire:
  - T un sistem de rescriere (TRS) = completarea lui R.
  - eșec

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: $T := R$ și $>$ ordine de reducere pentru T

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci $\mathrm{T} := \mathrm{T} \cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci $\mathrm{T} := \mathrm{T} \cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) $= \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completetarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Algoritmul Knuth-Bendix

- INTRARE: R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.
- INIȚIALIZARE: T := R și $>$ ordine de reducere pentru T
- Se execută următorii pași, cât timp este posibil:
  1. CP := CP(T) = $\{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$
  2. Dacă $t_1 \downarrow t_2$, oricare $(t_1, t_2) \in CP$, atunci STOP *(T completetarea lui R)*.
  3. Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$ atunci:
     - dacă $fn(t_1) > fn(t_2)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,
     - dacă $fn(t_2) > fn(t_1)$ atunci T := T $\cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,
     - altfel, STOP *(completare eșuată)*.
- IEȘIRE: T completarea lui R sau eșec.

Atenție! Succesul completării depinde de ordinea de reducere $>$.

Exemplu

Exemplu

- Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție $*$ de aritate 2.
- Fie $R = \{(x * y) * (y * v) \to y\}$.
- Vrem să determinăm completarea sistemului R aplicând algoritmul Knuth-Bendix.
- INIȚIALIZARE:
  - $T = R = \{(x * y) * (y * v) \to y\}$,
  - Ordine de reducere:
    $s > t \quad$ ddacă $\quad |s| > |t|$ și $nr_x(s) \geq nr_x(t)$, pentru orice $x \in X$

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v)$, $r_1 := y$, $l_2 := (x' * y') * (y' * v')$, $r_2 := y'$

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v)$, $r_1 := y$, $l_2 := (x' * y') * (y' * v')$, $r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

  - $t := x * y,\ c = z * (y * v),\ \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru

  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$

  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:

  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$

  - $t := x * y,\ c = z * (y * v),\ \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.

  - $t := y * v,\ c = (x * y) * z,\ \theta := \{y \leftarrow x' * y', v \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = x' * y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$
    Perechea critică: $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$.

Exemplu

Exemplu

- Determinăm perechile critice pentru
  $l_1 := (x * y) * (y * v),\ r_1 := y,\ l_2 := (x' * y') * (y' * v'),\ r_2 := y'$
  Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile:
  $$(x * y),\ (y * v),\ (x * y) * (y * v)\ .$$
  - $t := x * y,\ c = z * (y * v),\ \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = y' * v',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * v') * v)$
    Perechea critică: $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$.
  - $t := y * v,\ c = (x * y) * z,\ \theta := \{y \leftarrow x' * y', v \leftarrow y' * v'\}$
    $\theta(r_1) = x' * y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$
    Perechea critică: $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$.
  - $t := (x * y) * (y * v),\ c = z,\ \theta := \{x \leftarrow x', y \leftarrow y', v \leftarrow v'\}$
    $\theta(r_1) = y',\ \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y'$
    Perechea critică: (y', y').

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').
- Avem
  - $y * ((y * x) * v) > y * x$
  - $(x * (v * y)) * y > v * y$

Exemplu

Exemplu

- Perechile critice:
  1. $(y' * v', y' * ((y' * v') * v))$,
  2. $(x' * y', (x * (x' * y')) * y')$,
  3. (y', y').
- Avem
  - $y * ((y * x) * v) > y * x$
  - $(x * (v * y)) * y > v * y$
- Considerăm
  $T := T \cup \{y * ((y * x) * v) \to y * x,\ (x * (v * y)) * y \to v * y\}$
- T este complet și este completarea lui R_E.

Pe săptămâna viitoare!