CURS #5

CONȚINUTUL CURSULUI #5:

II.4. Norme vectoriale și matriciale. Numere de condiționare. Condiționarea sistemelor.

Definiția (II.13.)

Fie $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, ..., v_n)^T$. Definim următoarele norme vectoriale:

1. $\| v \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$ - *norma unu;*
2. $\| v \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |v_i|$ - *norma infinit;*
3. $\| v \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ - *norma doi.*

Definiția (II.14.)

Fiind dată o normă vectorială $\| \cdot \|$ pe spațiul $\mathbb{R}^n$, se definește norma matricială pe spațiul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonată normei vectoriale pe $\mathbb{R}^n$ astfel:

$$\| A \| = \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|}{\| v \|} \tag{1}$$

Teorema (II.5.)

Norma matricială subordonată normei vectoriale $\| \cdot \|_\infty$ poate fi exprimată astfel:

$$\| A \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \tag{2}$$

Demonstrație: Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și fie $\beta = \| v \|_\infty$, astfel că $|v_j| \leq \beta, j = \overline{1,n}$. Atunci

$$|(Av)_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||v_j| \leq \beta \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3}$$

Rezultă

$$\frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} = \frac{\max_{i=\overline{1,n}} |(Av)_i|}{\beta} \leq \frac{\max_{i=\overline{1,n}} \beta \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}{\beta} = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{4}$$

Cum inegalitatea (4) are loc pentru $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci putem scrie

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \leq C, \tag{5}$$

unde $C := \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Să demonstrăm că $\sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \geq C$

Fie m astfel încât $\max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |a_{mj}|$. Considerăm vectorul $w \in \mathbb{R}^n$ construit astfel:

$$w_j = \begin{cases} \dfrac{|a_{mj}|}{a_{mj}}, & a_{mj} \neq 0 \\ 0, & a_{mj} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Atunci $\| w \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |w_i| = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{|a_{mi}|}{|a_{mi}|} = 1$ și

$$
\begin{aligned}
\| Aw \|_\infty &= \max_{i=\overline{1,n}} |(Aw)_i| = \max_{i=\overline{1,n}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{mj} w_j \right| \\
&= \left| \sum_{a_{mj}\neq 0} a_{mj} w_j \right| = \left| \sum_{a_{mj}\neq 0} a_{mj} \frac{|a_{mj}|}{a_{mj}} \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{mj}| = C
\end{aligned}
$$

sau

$$\frac{\| Aw \|_\infty}{\| w \|_\infty} \geq C \tag{7}$$

Am găsit astfel un vector $w \in \mathbb{R}^n$ care satisface inegalitatea (7), deci

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} \geq C \tag{8}$$

Din relațiile (5), (8) rezultă egalitatea

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| Av \|_\infty}{\| v \|_\infty} = C. \tag{9}$$

Teorema (II.6.)

Norma matricială subordonată normei vectoriale $\| \cdot \|_1$ poate fi exprimată prin relația $\| A \|_1 = \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

Propoziția (II.4.)

Fie $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică. Atunci $\exists \mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_n\} \subset \mathbb{R}^n$ o bază ortonormată formată din vectori proprii ai matricei B, atașați valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Teorema (II.7.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $\lambda_i^B, i = \overline{1,n}$ valorile proprii asociate matricei simetrice $B = A^T A$. Atunci

$$\| A \|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} \sqrt{\lambda_i^B} \tag{10}$$

Demonstrație: Cum $B = B^T \Rightarrow B$ este simetrică. Mai mult,

$$< Bv, v > = < A^T A v, v > = < Av, Av > = \| Av \|_2^2 \geq 0, \forall v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$$

B este semipozitiv definită, iar conform Prop. (II.3.) b) rezultă că $\lambda_i^B \geq 0, \forall i = \overline{1,n}$, unde λ_i^B reprezintă valorile proprii asociate matricei B. Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci conform Prop. (II.4.) există o bază ortonormată $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$ formată din vectori proprii ai matricei B, în raport cu care v se scrie ca o combinație liniară de aceștia, i.e.

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$$

Dar $Bw_i = \lambda_i^B w_i, i = \overline{1,n}$, astfel că

$$Bv = B(\sum_{i=1}^{n} c_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i (Bw_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^B w_i.$$

Presupunem în continuare că $\lambda_n^B \geq \lambda_{n-1}^B \geq ... \geq \lambda_1^B \geq 0$, atunci

$$\| Av \|_2^2 = < Av, Av > = < v, A^T A v > = < v, Bv > \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&= < \sum_{i=1}^{n} c_i w_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^B w_j > = \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \lambda_j^B < w_i, w_j > \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \lambda_j^B \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \lambda_i^B \leq \lambda_n^B \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \lambda_n^B \| v \|_2^2 \Rightarrow
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$\frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} \leq \sqrt{\lambda_n^B} \Rightarrow \sup_{v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} \leq \sqrt{\lambda_n^B} \Rightarrow \| A \|_2 \leq \sqrt{\lambda_n^B}$$

Pentru a demonstra egalitatea alegem $v = w_n \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\| Av \|_2}{\| v \|_2} &= \frac{\| Aw_n \|_2}{\| w_n \|_2} = \| Aw_n \|_2 = < Aw_n, Aw_n > = < w_n, Bw_n > \\
&= < w_n, \lambda_n^B w_n > = \lambda_n^B \geq \lambda_n^B \Rightarrow \| A \|_2 \geq \sqrt{\lambda_n^B}
\end{aligned}
$$

Din cele două inegalități rezultă

$$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_n^B} \tag{13}$$

Teorema (II.8.)

Fiind dată norma $\|\cdot\|$ subordonată normei vectoriale, atunci

$$\| AB \| \leq \| A \| \| B \|, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \tag{14}$$

Demonstrație: Deoarece

$$\| A \| = \sup_{w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| Aw \|}{\| w \|} \Rightarrow \frac{\| Aw \|}{\| w \|} \leq \| A \| \Rightarrow \| Aw \| \leq \| A \| \| w \|$$

Astfel că

$$\| A(Bv) \| \leq \| A \| \| Bv \| \leq \| A \| \| B \| \| v \| \Rightarrow$$

$$\frac{\| ABv \|}{\| v \|} \leq \| A \| \| B \|, \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \tag{15}$$

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| ABv \|}{\| v \|} \leq \| A \| \| B \| \Rightarrow \| AB \| \leq \| A \| \| B \| \tag{16}$$

Definiția (II.15.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară. Definim numărul de condiționare al matricei A relativ la norma $\|\cdot\|_p, p \in \{1, 2, \infty\}$ numărul notat prin $\kappa_p(A)$ definit astfel:

$$\kappa_p(A) = \| A \|_p \| A^{-1} \|_p \tag{17}$$

sau la general

$$\kappa(A) = \| A \| \| A^{-1} \| \tag{18}$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă subordonată unei norme vectoriale.

Obs.: Este evident că $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)$. Mai mult, deoarece

$$1 = \| AA^{-1} \| \leq \| A \| \| A^{-1} \| = \kappa(A) \Rightarrow \kappa(A) \geq 1. \tag{19}$$

Teorema (II.9.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nesingulară, atunci

$$\kappa_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_n^B}}{\sqrt{\lambda_1^B}} \tag{20}$$

unde $\lambda_n^B \geq \lambda_{n-1}^B \geq ... \geq \lambda_1^B > 0, \lambda_i^B, i = \overline{1, n}$ sunt valorile proprii ale matricei $B = A^T A$.

Demonstrație: Dacă $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și A nesingulară, atunci

$$0 < \| Av \|_2^2 = < Av, Av > = < B^T Bv, v >,$$

deci B este pozitiv definită, astfel că valorile proprii $\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}$.
Vom demonstra următorul rezultat:
Dacă $\lambda \in \sigma(A^T A)$, atunci $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-T} A^{-1})$.
Într-adevăr, fie $\lambda \in \sigma(A^T A)$, atunci λ este soluția ecuației $det(A^T A - \lambda I_n) = 0$ sau $det(A^T (I_n - \lambda A^{-T} A^{-1})A) = 0$.

Deoarece A este nesingulară (i.e. $det(A) \neq 0$) din ultima relație rezultă

$$det(I_n - \lambda A^{-T} A^{-1}) = 0$$

Mai mult, deoarece $\lambda > 0$ din relația de mai sus rezultă:

$$det(A^{-T} A^{-1} - \frac{1}{\lambda} I_n) = 0, \tag{21}$$

deci $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-T} A^{-1})$. Astfel că dacă $\sigma(A^T A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, atunci $\sigma((A^{-1})^T A^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\} \Rightarrow$

$$\kappa_2(A) = \| A \|_2 \| A^{-1} \|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{\lambda_i} \cdot \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_1}} \tag{22}$$

Să considerăm o abatere a datelor de intrare atât în matricea A cât și în vectorul termenilor liberi

$$A \rightarrow A + \delta A; \quad b \rightarrow b + \delta b \tag{23}$$

Această perturbație va afecta soluția $x \rightarrow x + \delta x$, deci soluția perturbată $x + \delta x$ verifică sistemul

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b \tag{24}$$

Teorema (II.10.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nesingulară, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și fie sistemul $Ax = b$ și sistemul perturbat $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$, cu $\delta x, \delta b \in \mathbb{R}^n, \delta A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci soluția $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și avem următoarea estimare

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x \|} \leq \kappa(A) \left(\frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} \right) \tag{25}$$

Relația (25) ne indică faptul că eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ a soluției sistemului perturbat poate atinge valoarea însumată a erorilor relative $\frac{\| \delta A \|}{\| A \|}, \frac{\| \delta b \|}{\| b \|}$ amplificată cu valoarea numărului de condiționare $\kappa(A)$.
Un număr de condiționare mare presupune că la mici perturbări în datele de intrare se pot obține perturbări considerabile în soluția sistemului.

- Dacă $\kappa(A) >> 1$ atunci eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ poate fi mare. Vom spune în cazul acesta că sistemul este slab - condiționat;
- Dacă $\kappa(A) \approx 1$ atunci eroarea relativă $\frac{\| \delta x \|}{\| x \|}$ este mică și vom spune că sistemul este bine - condiționat;

Demonstrație Th. II.10.: Din (24) rezultă:

$$Ax + A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b + \delta b$$

Cum x verifică sistemul $Ax = b$ și neglijând produsul $\delta A \delta x$ în relația de mai sus se obține

$$A\delta x + \delta A x \approx \delta b \tag{26}$$

de unde

$$\delta x \approx -A^{-1}\delta A x + A^{-1}\delta b \tag{27}$$

Utilizând norma $\| \cdot \|$ în relația de mai sus rezultă

$$\| \delta x \| \leq \| A^{-1} \| \| \delta A \| \| x \| + \| A^{-1} \| \| \delta b \| \tag{28}$$

Prin urmare, cum $x \neq 0$ se obține estimarea

$$\begin{aligned} \frac{\| \delta x \|}{\| x \|} & \leq \| A^{-1} \| \| A \| \frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \| A^{-1} \| \| A \| \frac{\| \delta b \|}{\| A \| \| x \|} \\ & \leq \| A^{-1} \| \| A \| \left(\frac{\| \delta A \|}{\| A \|} + \frac{\| \delta b \|}{\| b \|} \right) \end{aligned} \tag{29}$$

În relația de mai sus s-a ținut seama că $\| b \| \leq \| A \| \| x \|$.
Exemplu: Fie sistemele $Ax = b$ și $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}; \quad A+\delta A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8,1 & 7,2 \\ 7,08 & 5,04 & 6 & 5 \\ 8 & 5,98 & 9,89 & 9 \\ 6,99 & 4,99 & 9 & 9,98 \end{pmatrix}; \tag{30}$$

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}; \quad b+\delta b = \begin{pmatrix} 32,1 \\ 22,9 \\ 33,1 \\ 30,9 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Soluția sistemului $Ax = b$ este $x = (1;\ 1;\ 1;\ 1)^T$, iar soluția sistemului $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$ este $x+\delta x \approx (333;\ -550;\ \ 144;\ -85)^T$. Se observă că o perturbație mică în datele de intrare produce perturbație considerabilă în soluție. Numărul de condiționare este $\kappa_2(A) = 2984 \gg 1$, deci sistemul inițial este slab-condiționat.

II.4. Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare.

II.4.1. Metode iterative de aproximare.

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}^n$. Considerăm sistemul compatibil determinat

$$Ax = a \tag{32}$$

și un sistem echivalent

$$x = Bx + b \tag{33}$$

Definiția (II.16.)

O metodă iterativă de aproximare a soluției sistemului de ecuații liniare (32) presupune construcția unui șir recurent $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ conform formulei:

$$x^{(k+1)} = Bx^k + b, \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \quad \textit{arbitrar} \tag{34}$$

Metoda iterativă (34) este convergentă dacă și numai dacă $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, unde x este soluția sistemului (32).

Definiția (II.17.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se definește raza spectrală $\rho(A)$ a matricei A astfel:

$$\rho(A) = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| \tag{35}$$

unde $\lambda_i \in \sigma(A), i = \overline{1,n}$. Dacă $\lambda = a + bi \in C$ atunci $|\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definiția (II.18.)

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește convergentă dacă șirul de matrice format din puterile A^k ale matricei A este convergent la matricea nulă (sau componentele puterii matricei A tind la zero). Vom scrie:

$$\lim_{k\to\infty} A^k = O_n \tag{36}$$

sau

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0, \quad i, j = \overline{1,n} \tag{37}$$

Propoziția (II.5.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) *A este o matrice convergentă;*
b) $\lim_{k\to\infty} \| A^k \| = 0$;
c) $\lim_{k\to\infty} A^k x = 0_n, \forall x \in \mathbb{R}^n$;
d) $\rho(A) < 1$.

Propoziția (II.6.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Atunci

$$\rho(A) \leq \| A \| \tag{38}$$

pentru orice normă matriceală $\| \cdot \|$ subordonată unei norme vectoriale.

Demonstrație: Fie $\lambda \in \sigma(A)$ și fie x vectorul propriu asociat valorii proprii λ cu proprietatea $\| x \| = 1$. Atunci $Ax = \lambda x$ de unde rezultă

$$\| Ax \| = |\lambda| \, \| x \| = |\lambda|$$

Pe de altă parte

$$\| Ax \| \leq \| A \| \| x \| = \| A \|$$

Din aceste relații rezultă $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda| \leq \| A \|$.

Propoziția (II.7.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $\| A \| < 1$, atunci

$$\exists\, (I_n - A)^{-1} \quad \textit{și} \quad \| (I_n - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| A \|} \tag{39}$$

Demonstrație: Dacă $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei A atunci $1 - \lambda_i, i = \overline{1,n}$ sunt valorile proprii ale matricei $I_n - A$. Deoarece $\rho(A) < 1$ rezultă $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1,n}$, iar $1 - \lambda_i \neq 0, i = \overline{1,n}$, deci $I_n - A$ este inversabilă. În continuare să observăm următoarea egalitate:

$$(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^k) = I_n - A^{k+1} \tag{40}$$

sau

$$I_n + A + A^2 + ... + A^k = (I_n - A)^{-1}(I_n - A^{k+1}) \tag{41}$$

Trecând la limită în relația de mai sus și ținând cont că $\lim_{k\to\infty} A^{k+1} = O_n$ se obține următoarea estimare:

$$\| (I_n - A)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k = \frac{1}{1 - \| A \|} \tag{42}$$

Teorema (II.11.)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversabilă, $a \in \mathbb{R}^n$ și o metodă iterativă (34) de aproximare a soluției sistemului de ecuații liniare $Ax = a$ definită de sistemul echivalent $x = Bx + b$. Atunci metoda iterativă este convergentă dacă și numai dacă

$$\rho(B) < 1 \tag{43}$$

Demonstrație: Fie $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= Bx^{(k-1)} + b - x = Bx^{(k-1)} - Bx \\ &= B(x^{(k-1)} - x) = ... = B^k(x^{(0)} - x) \Rightarrow \end{aligned} \tag{44}$$

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \to x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k(x^{(0)} - x) = 0, \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} B^k = 0_n \Leftrightarrow \rho(B) < 1 \quad \text{(conform Prop. II.5.)}$$

Teorema (II.12.)

Dacă $\| B \| = q$, $q \in (0,1)$, atunci metoda iterativă (34) este convergentă și are loc următoarea estimare a erorii:

$$\| x^{(k)} - x \| \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|, \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{45}$$

Demonstrație: Deoarece $\| B \| < 1$, atunci conform Prop. II.7. rezultă că $\exists\, (I - B)^{-1}$ și $\| (I - B)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| B \|} = \frac{1}{1-q}$

Evaluăm diferența $x^{(k+1)} - x^{(k)}$:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^{(k)} &= Bx^{(k)} + b - x^{(k)} = Bx^{(k)} - Bx^{(k-1)} \\ &= B(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \| \leq \| B \| \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| = q \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \|$$

Evaluăm $(I - B)(x^{(k)} - x)$:

$$\begin{aligned} (I - B)(x^{(k)} - x) &= x^{(k)} - Bx^{(k)} - x + Bx \\ &= x^{(k)} - Bx^{(k)} - b = x^{(k)} - x^{(k+1)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(k)} - x &= (I - B)^{-1}(x^{(k)} - x^{(k+1)}) \\ &= (I - B)^{-1}B(x^{(k-1)} - x^{(k)}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \| x^{(k)} - x \| &\leq \| (I - B)^{-1}B \| \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \\ &\leq \frac{q}{1-q} \| x^{(k)} - x^{(k-1)} \| \leq ... \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \end{aligned}$$

Deoarece $q \in (0,1) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{q^k}{1-q} = 0 \Rightarrow (x^{(k)})_{k\geq 0}$ converge la x, deci metoda iterativă este convergentă.

II.4.2. Metoda Jacobi Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă, $a \in \mathbb{R}^n$, atunci avem următoarele echivalențe:

$$Ax = a \Leftrightarrow -Ax = -a \Leftrightarrow x - Ax = x - a \Leftrightarrow x = (I - A)x + a. \tag{46}$$

Considerând $B = I - A$, $b = a$, obținem sistemul $x = Bx + b$ în baza căruia se construiește metoda iterativă Jacobi.

Conform Th. II.11. metoda Jacobi este convergentă dacă și numai dacă $\rho(B) < 1$. Mai mult, dacă $\| B \| = q \in (0,1)$, atunci conform Th. II.12. rezultă că metoda Jacobi este convergentă și are loc estimarea:

$$\| x^{(k)} - x \| \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|, \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{47}$$

ALGORITM (Metoda Jacobi)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$- `inv.;` $a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieșire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n$; N.

STEP 1: `Se determină` $q = \| I - A \|$;
`if` $q \geq 1$ `then`
`OUTPUT('Metoda Jacobi nu asigură conv.')`
`STOP`
`endif`

STEP 2: `Se iniţializează` $x^{(0)} = 0$; $k = 0$;

STEP 3: `Determină:` $B = I - A$; $b = a$;

STEP 4: `do`
$k = k + 1$;
$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$;
`while` $\frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \| \geq \varepsilon$;

STEP 5: $x_{aprox} = x^{(k)}, N = k$.

II.4.3. Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii.

Metoda Jacobi poate fi aplicată doar pentru o clasă restrânsă de matrice. În cele ce urmează vom prezenta metoda Jacobi pentru o clasă de matrice, pentru care această metodă este convergentă.

Definiția (II.19.)

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) *Spunem că A este diagonal dominantă pe linii dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j=\overline{1,n}, j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}$$

b) *Spunem că A este diagonal dominantă pe coloane dacă*

$$|a_{jj}| > \sum_{i=\overline{1,n}, i \neq j} |a_{ij}|, \quad j = \overline{1,n}$$

Fie $D = diag(A) = diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$. Se observă că $|a_{ii}| > 0, i = \overline{1,n}$, deci D este inversabilă. Se construiesc următoarele echivalențe:

$$\begin{aligned} Ax = a \; &\Leftrightarrow D^{-1}Ax = D^{-1}a \;\Leftrightarrow x - D^{-1}Ax = x - D^{-1}a \\ &\Leftrightarrow x = (I - D^{-1}A)x + D^{-1}a \end{aligned}$$

Considerând $B = I - D^{-1}A, b = D^{-1}a$ se obține sistemul $x = Bx + b$.

Teorema (II.13.)

Fie sistemul $Ax = a$ cu A matrice nesingulară și diagonal dominantă pe linii, și sistemul echivalent $x = Bx + b$, unde $B = I - D^{-1}A, b = D^{-1}a$. Fie $q = \| B \|_\infty$ și $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ definit prin formula

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b \tag{48}$$

Atunci $q < 1$ și $\| x^{(k)} - x \|_\infty \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație: Componentele matricei $B = I - D^{-1}A$ se pot reprezenta după cum urmează:

$$b_{ij} = \delta_{ij} - d_{ik}^{-1}a_{kj} = \delta_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ii}} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$$

Pe de altă parte, evaluând norma infinit a matricei B, se obține:

$$q = \| B \|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,n}} |b_{ij}| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,n}, j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \Rightarrow$$

$$q = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{\sum_{j=\overline{1,n}, j \neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Conform Th. II.12. rezultă că metoda iterativă este convergentă și are loc estimarea din enunț.

ALGORITM (Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii)

Date de intrare: $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$- inv.; $a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieșire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n$; N.

STEP 1: for i=1:n do

if $|a_{ii}| \leq \sum_{j=\overline{1,n}, j\neq i} |a_{ij}|$ then

OUTPUT('Matr. nu este diag. dom. pe linii')

STOP.

endif

endfor

STEP 2: Se inițializează: $x^{(0)} = 0$; $k = 0$;

STEP 3: Determină: $b_{ij} = \delta_{ij} - \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, i,j = \overline{1,n}$; $b_i = \dfrac{a_i}{a_{ii}}, i = \overline{1,n}$;

$q = \| B \|_\infty$;

STEP 4: do

$k = k + 1$;

$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + b$; (B, b au fost calculați la STEP 3)

while $\dfrac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_\infty \geq \varepsilon$

STEP 5: $x_{aprox} = x^{(k)}$; $N = k$;

II.4.4. Metoda Jacobi relaxată.

Metoda Jacobi relaxată este o variantă îmbunătățită a metodei Jacobi și constă în introducerea unui parametru $\sigma > 0$, numit parametru de relaxare. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită, $a \in \mathbb{R}^n$. Sistemul $Ax = b$ este echivalent cu $\sigma Ax = \sigma a$ sau $(I - \sigma A)x = x - \sigma a$, deci

$$x = B_\sigma x + b_\sigma, \quad \sigma > 0 \tag{49}$$

cu $B_\sigma = I - \sigma A, b_\sigma = \sigma a$. Pentru $\sigma = 1$ avem metoda Jacobi.

Teorema (II.14.)

Fie $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1 > 0$ valorile proprii ale matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrice și pozitiv definite. Atunci metoda Jacobi relaxată este convergentă dacă și numai dacă

$$\sigma \in \left(0, \frac{2}{\rho(A)}\right) \tag{50}$$

Mai mult, dacă $q = \rho(B_\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |1 - \sigma\lambda_i|$, atunci $q < 1$ și avem următoarea estimare a erorii

$$\| x^{(k)} - x \|_A \leq \frac{q^k}{1-q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_A \tag{51}$$

unde $\| x \|_A = < Ax, x > = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i$.

Demonstrație: Deoarece A este simetrică și pozitiv definită rezultă că A este inversabilă, deci sistemul $Ax = a$ admite soluția unică x.

Metoda iterativă construită în baza formulei (49) este convergentă dacă și numai dacă $\rho(B_\sigma) < 1$. În cele ce urmează vom deduce condiția pe care trebuie să o satisfacă σ astfel încât $\rho(B_\sigma) < 1$.
Valorile proprii ale matricei $I - \sigma A$ sunt $1 - \sigma\lambda_1, ..., 1 - \sigma\lambda_n$. Într-adevar, fie λ este o valoare proprie a matricei A. Atunci

$$det((I_n - \sigma A) - (1 - \sigma\lambda)I_n) = 0 \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$$

Avem următoarele echivalențe

$$\rho(I_n - \sigma A) < 1 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} |1 - \sigma\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow -1 < 1 - \sigma\lambda_i < 1, i = \overline{1,n}$$

Deoarece $\lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq ... \geq \lambda_1 > 0 \Rightarrow$

$$1 > 1 - \sigma\lambda_1 \geq ... \geq 1 - \sigma\lambda_n > -1 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 1 > 1 - \sigma\lambda_1 \\ 1 - \sigma\lambda_n > -1 \end{cases} \Rightarrow \sigma \in \left(0, \frac{2}{\lambda_n}\right)$$

Astfel se demonstrează prima parte a teoremei.

Se observă că $q = \rho(B_\sigma) = \rho(I_n - \sigma A) < 1$. Pentru a demonstra formula (51) este necesar să demonstrăm, conform Th. II.11. că $\| B_\sigma \|_A = q$.
Deoarece matricea A este simetrică și pozitiv definită, atunci $\exists \mathcal{B} = \{u_1, ..., u_n\} \subset \mathbb{R}^n$ o bază ortonormată formată din vectori proprii asociați valorilor proprii $\lambda_i > 0, i = \overline{1,n}$.
În baza vectorilor proprii ortonormați, putem construi o bază $A-$ortonormată dacă alegem $v_i = \dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, i = \overline{1,n}$. Într-adevăr,

$$< Av_i, v_j > = \left\langle A\frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\rangle = \left\langle \lambda_i \frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{u_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right\rangle$$
$$= \frac{\lambda_i \delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Fie $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Atunci $\exists \alpha_i, i = \overline{1,n}$ astfel încât $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Evaluăm în continuare $\| v \|_A, \| B_\sigma v \|_A$:

$$\| v \|_A^2 = < Av, v > = < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A v_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j >$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j < Av_i, v_j > = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$$

În mod analog se poate demonstra că

$$\| B_\sigma v \|_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 (1 - \sigma\lambda_i)^2 \leq q^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = q^2 \| v \|_A^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\| B_\sigma v \|_A}{\| v \|_A} \leq q \Rightarrow \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\| B_\sigma v \|_A}{\| v \|_A} \leq q \Rightarrow$$

$$\| B_\sigma \|_A \leq q \tag{52}$$

Fie k astfel încât $|1 - \sigma\lambda_k| = q$.

Atunci

$$\| B_\sigma v_k \|_A^2 = < AB_\sigma v_k, B_\sigma v_k > = < AB_\sigma \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}, B_\sigma \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}} >$$
$$= \frac{1}{\lambda_k} < A(1 - \sigma\lambda_k)u_k, (1 - \sigma\lambda_k)u_k > = (1 - \sigma\lambda_k)^2 \Rightarrow$$
$$\frac{\| B_\sigma v_k \|_A}{\| v_k \|_A} = q \geq q \Rightarrow \| B_\sigma \|_A \geq q \tag{53}$$

Din inegalitățile (52) și (53) rezultă $\| B_\sigma \|_A = q$.

Definiția (II.20.)

Numim parametru optim de relaxare pentru metoda Jacobi relaxată (îl notăm σ_O) acea valoare a lui σ pentru care $q = \| B_\sigma \|_A$ (îl notăm q_O) are valoare minimă.

Propoziția (II.8.)

Parametrul optim de relaxare σ_O, respectiv q_O se calculează conform relațiilor:

$$\sigma_O = \frac{2}{\lambda_n + \lambda_1}, \quad q_O = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

ALGORITM (Metoda Jacobi relaxată)

Date de intrare: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ - sim. şi poz. def.;
$a \in \mathbb{R}^n$; ε.
Date de ieşire: $x_{aprox} \in \mathbb{R}^n; N$.

STEP 1: Determină: σ_O, q_O; $b_{ij} = \delta_{ij} - \sigma a_{ij}, i, j = \overline{1,n}$;
$b_i = \sigma a_i, i = \overline{1,n}$;

STEP 2: Se iniţializează: $x^{(0)} = 0; k = 0$;

STEP 3: do

$k = k + 1$
$x^{(k)} = B_\sigma x^{(k-1)} + b_\sigma$;
(B_σ, b_σ au fost calculaţi la STEP 1)

while $\dfrac{q_O^k}{1 - q_O} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_A \geq \varepsilon$

STEP 4: $x_{aprox} = x^{(k)}$; $N = k$.

II.4.5. Metoda Gauss - Seidel relaxată.

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și pozitiv definită, $a \in \mathbb{R}^n$ și $\sigma > 0$ parametru de relaxare. Descompunem matricea $A = L + D + R$. Matricea L este partea inferioară a matricei A, i.e. $l_{ij} = a_{ij}, i > j, l_{ij} = 0$ în rest. Matricea R este partea superioară matricei A, i.e. $r_{ij} = a_{ij}, i < j$, $r_{ij} = 0$ în rest. Matricea $D = diag(A)$, i.e. $d_{ii} = a_{ii}, d_{ij} = 0, i \neq j$.
Avem următoarele sisteme echivalente

$$\begin{aligned}
&Ax = a \Leftrightarrow \sigma Ax = \sigma a \Leftrightarrow \sigma(L + D + R)x = \sigma a \Leftrightarrow \\
&(\sigma L + D + (\sigma - 1)D + \sigma R)x = \sigma a \Leftrightarrow \\
&(\sigma L + D)x = ((1 - \sigma)D - \sigma R)x + \sigma a \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$x = (\sigma L + D)^{-1}((1 - \sigma)D - \sigma R)x + (\sigma L + D)^{-1}\sigma a \Leftrightarrow x = B_\sigma x + b_\sigma$$

unde $B_\sigma = (\sigma L + D)^{-1}((1 - \sigma)D - \sigma R), b_\sigma = (\sigma L + D)^{-1}\sigma a$

Teorema (II.15.)

Metoda Gauss - Seidel relaxată este convergentă dacă și numai dacă

$$\sigma \in (0, 2) \tag{54}$$

Dacă $q = \| B_\sigma \|_A$, atunci $q < 1$ și are loc următoare estimare

$$\| x^{(k)} - x \|_A \leq \frac{q^k}{1 - q} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|_A, \forall k \in \mathbb{N} \tag{55}$$

Componentele $x_i^{(k)}$ se pot calcula evitând calculul inversei matricei $\sigma L + D$. Avem

$$\begin{aligned}
x^{(k)} &= B_\sigma x^{(k-1)} + b_\sigma \\
&\Leftrightarrow (\sigma L + D)x^{(k)} = ((1 - \sigma)D - \sigma R)x^{(k-1)} + \sigma a \Rightarrow \\
Dx^{(k)} &= -\sigma L x^{(k)} + ((1 - \sigma)D - \sigma R)x^{(k-1)} + \sigma a \\
&= (1 - \sigma)Dx^{(k-1)} - \sigma R x^{(k-1)} - \sigma L x^{(k)} + \sigma a \Rightarrow \\
x^{(k)} &= (1 - \sigma)x^{(k-1)} + \sigma D^{-1}(a - Rx^{(k-1)} - Lx^{(k)})
\end{aligned}$$

Relația de mai sus scrisă pe componente este:

$$x_i^{(k)} = (1 - \sigma)x_i^{(k-1)} + \frac{\sigma}{a_{ii}} \left(a_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} \right) \tag{56}$$

ALGORITM (Metoda Gauss-Seidel relaxată) (Temă)