Logică Matematică şi Computaţională
Cursul VIII

Claudia MUREȘAN
cmuresan@fmi.unibuc.ro, cmuresan11@yahoo.com

Universitatea din București
Facultatea de Matematică și Informatică
București

2016–2017, Semestrul I

Cuprinsul acestui curs

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Definiție

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie arbitrară de mulțimi. Se definește *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulțimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ și definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I}(A_i \times \{i\})$$

Observație

Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulțimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin atașarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulțimi a indicelui mulțimii respective.

Notație

Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii atașați, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înțelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Mnemonic despre reuniunea disjunctă de mulțimi

Notație

Dacă avem o familie finită și nevidă de mulțimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notațiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \overset{\text{notație}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \overset{\text{notație}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarcă

Ultima dintre notațiile de mai sus este permisă datorită **asociativității reuniunii disjuncte** ca operație binară (adică aplicată unei familii formate din două mulțimi): pentru orice mulțimi A, B, C, se arată imediat (folosind definiția reuniunii disjuncte și o identificare de indici, adică o bijecție între mulțimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A \coprod (B \coprod C) = (A \coprod B) \coprod C$.

Exemplu

Fie $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{1, 3, 5\}$. Cine este reuniunea disjunctă $A \coprod B$?
Putem considera că familia de mulțimi {A,B} este indexată de mulțimea $\{1, 2\}$, iar A are indicele 1 și B are indicele 2, adică $\{A, B\} = \{A_1, A_2\}$, cu $A_1 := A$ și $A_2 := B$. Avem, așadar:

$$A \coprod B = A_1 \coprod A_2 = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (3, 2), (5, 2)\}$$

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Definiție

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi. Se definesc:

- *suma directă* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \oplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod B$: $\leq \oplus \sqsubseteq := \leq \cup \sqsubseteq \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, cu identificarea între fiecare element al lui $A \cup B$ și elementul reuniunii disjuncte $A \coprod B$ care îi corespunde;
- *produsul direct* al poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notat $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$, unde $\leq \times \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe mulțimea produs direct $A \times B$:
$\leq \times \sqsubseteq := \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B, a_1 \leq a_2, b_1 \sqsubseteq b_2\}$.

În cazul în care $(A, \leq)$ are un maxim, pe care îl notăm cu 1, iar $(B, \sqsubseteq)$ are un minim, pe care îl notăm cu 0, atunci *suma ordinală* a poseturilor $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$, notată $(A, \leq) \dotplus (B, \sqsubseteq)$, ca fiind perechea $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dotplus \sqsubseteq)$, unde $\leq \dotplus \sqsubseteq$ este următoarea relație binară pe $A \coprod (B \setminus \{0\})$, cu aceleași identificări ca mai sus:
$\leq \dotplus \sqsubseteq := \leq \cup (\sqsubseteq \setminus \{(0, b) \mid b \in B\}) \cup \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Observație

Definiția de mai sus a relației binare $\leq \times \sqsubseteq$ este un caz particular al definiției unui produs direct arbitrar de relații binare, prezentate într–un curs anterior.

Remarcă (temă)

Cu notațiile din definiția anterioară, relațiile binare sumă directă, $\leq \oplus \sqsubseteq$, produs direct, $\leq \times \sqsubseteq$, și sumă ordinală, $\leq \dotplus \sqsubseteq$, sunt **relații de ordine** pe $A \coprod B$, $A \times B$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\})$, respectiv. Adică:$(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$, $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(A \coprod (B \setminus \{0\}), \leq \dotplus \sqsubseteq)$ sunt **poseturi**.
Acest fapt se demonstrează prin verificarea directă, cu definiția, a proprietăților unei relații de ordine (reflexivitate, tranzitivitate, antisimetrie).
În cazul sumei directe și a sumei ordinale, se analizează toate cazurile în care se pot afla câte două elemente $x, y \in A \coprod B$ vizavi de mulțimile "din care provin" acestea: sunt ambele din A, ambele din B, sau unul din A și unul din B.
În cazul produsului direct, acest fapt se obține dintr–un rezultat mai general, dintr–un curs anterior, rezultat privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare.

Remarcă (temă)

Se observă din diagramele Hasse care urmează și se demonstrează ușor că:

- **suma directă** și **suma ordinală** de poseturi **sunt asociative**, dar **nu sunt comutative**;
- **produsul direct** de poseturi **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism de poseturi**, i. e., pentru orice poseturi $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ și $(C, \leq_C)$, există un izomorfism de poseturi între $((A, \leq_A) \times (B, \leq_B)) \times (C, \leq_C)$ și $(A, \leq_A) \times ((B, \leq_B) \times (C, \leq_C))$ (anume $f : (A \times B) \times C \to A \times (B \times C)$, pentru orice $a \in A$, $b \in B$ și $c \in C$, $f((a, b), c) = (a, (b, c))$) și există un izomorfism de poseturi între $(A, \leq_A) \times (B, \leq_B)$ și $(B, \leq_B) \times (A, \leq_A)$ (anume $g : A \times B \to B \times A$, pentru orice $a \in A$ și $b \in B$, $g(a, b) = (b, a)$).

Se demonstrează simplu că și **produsul direct** de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (structuri pe care le vom studia mai târziu) **este asociativ și comutativ, până la un izomorfism**, în aceste cazuri un izomorfism de latici, latici mărginite, respectiv algebre Boole (a se vedea următoarea parte a acestui curs pentru definiția unui produs direct de algebre).

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Remarcă (temă)

Fie $(A, \leq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ două poseturi.

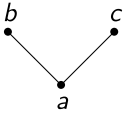
1. Dacă $|A| \geq 2$ și $|B| \geq 2$, atunci produsul direct $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ nu este lanț.
2. Dacă A este un singleton (i. e. o mulțime cu un singur element), atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq)$ sunt izomorfe (i. e. există un izomorfism de poseturi între ele).
3. Dacă B este un singleton, atunci poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$ sunt izomorfe.
4. Dacă $A = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (A, \leq)$.
5. Dacă $B = \emptyset$, atunci $A \times B = \emptyset$, deci $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (\emptyset, \emptyset) = (B, \sqsubseteq)$.

Remarcă

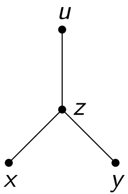
Remarca anterioară arată că lanțurile sunt **indecompozabile** raportat la produsul direct (i. e. lanțurile nu pot fi descompuse în produs direct de alte poseturi), pentru că, dacă un lanț nevid $(L, \leq)$ este izomorf cu un produs direct de poseturi, atunci toate acele poseturi sunt nevide, iar unul dintre ele este izomorf cu $(L, \leq)$ și fiecare dintre celelalte are câte un singur element.

Să vedem cum arată **diagramele Hasse ale poseturilor sumă directă, produs direct și sumă ordinală între două poseturi finite**.

Fie, pentru exemplificare, următoarele două poseturi:



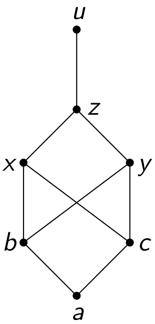
$(A, \leq)$



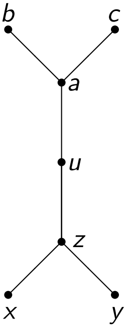
$(B, \sqsubseteq)$

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

Diagrama Hasse a sumei directe $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$, apoi se unește fiecare element maximal al lui A cu fiecare element minimal al lui B:



$(A, \leq) \oplus (B, \sqsubseteq) = (A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$

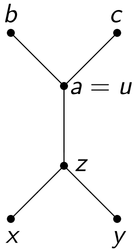


$(B, \sqsubseteq) \oplus (A, \leq) = (B \coprod A, \sqsubseteq \oplus \leq)$

După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru $(A \coprod B, \leq \oplus \sqsubseteq)$ și $(B \coprod A, \sqsubseteq \oplus \leq)$, suma directă de poseturi nu este comutativă, întrucât aceste două poseturi nu sunt izomorfe.

Suma directă, produsul direct și suma ordinală de poseturi

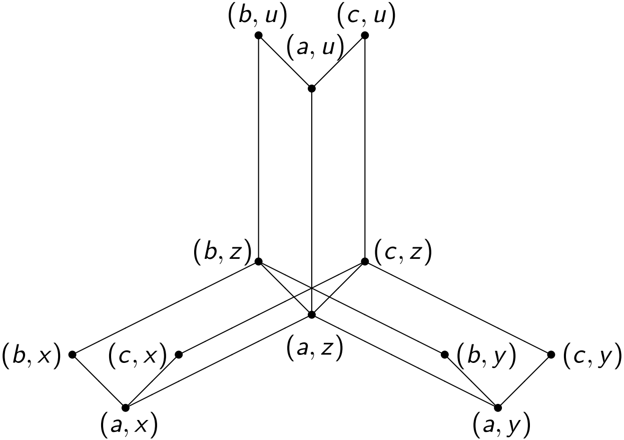
Se poate efectua suma ordinală între $(B, \sqsubseteq)$ și $(A, \leq)$, **nu și invers**. **Diagrama Hasse a sumei ordinale** $(B, \sqsubseteq) \dotplus (A, \leq)$, se obține astfel: se desenează diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ dedesubtul diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$, se identifică maximul lui $(B, \sqsubseteq)$ cu minimul lui $(A, \leq)$, astfel obținându–se un punct comun, și cele două diagrame Hasse se unesc în acest punct comun:



După cum se observă din compararea diagramelor de mai sus pentru suma directă și suma ordinală a acestor poseturi, prima dintre ele are o muchie în plus față de cea de–a doua.

Diagrama Hasse a produsului direct $(A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ se obține astfel:

- se desenează $|B|$ (adică 4, aici) copii ale diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ și se așează pe pozițiile în care apar nodurile în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$;
- se etichetează fiecare nod din fiecare copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$ cu perechea formată din:
  - eticheta lui din diagrama Hasse a lui $(A, \leq)$
    și
  - eticheta nodului din diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$ căruia îi corespunde respectiva copie a diagramei Hasse a lui $(A, \leq)$;
- se adaugă muchiile care unesc fiecare nod etichetat cu (α, β), cu $\alpha \in A$ și $\beta \in B$, cu fiecare nod etichetat cu (α, γ), cu $\gamma \in B$ și β și γ unite prin muchie în diagrama Hasse a lui $(B, \sqsubseteq)$:



$$(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq) \cong (B \times A, \sqsubseteq \times \leq) = (B, \sqsubseteq) \times (A, \leq)$$

Se observă că produsul direct de poseturi este comutativ, adică poseturile $(A, \leq) \times (B, \sqsubseteq) = (A \times B, \leq \times \sqsubseteq)$ și $(B, \sqsubseteq) \times (A, \leq) = (B \times A, \sqsubseteq \times \leq)$ sunt izomorfe, $\varphi : A \times B \rightarrow B \times A$, pentru orice $a \in A$ și orice $b \in B$, $\varphi(a, b) = (b, a)$, fiind un izomorfism de poseturi între ele.

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația sumă directă de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **sumă directă a unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin următoarea **definiție recursivă**: suma directă a familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu

$(A_1, \leq_1) \oplus (A_2, \leq_2) \oplus \ldots \oplus (A_n, \leq_n)$ sau $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i)$ sau

$(A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n, \leq_1 \oplus \leq_2 \oplus \ldots \oplus \leq_n)$ sau $\displaystyle(\coprod_{i=1}^{n} A_i, \bigoplus_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul

definit, recursiv, astfel: $$\bigoplus_{i=1}^{n}(A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\bigoplus_{i=1}^{n-1}(A_i, \leq_i)) \oplus (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

La fel pentru suma ordinală a familiei de poseturi $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, pentru cazul în care $(A_1, \leq_1)$ are maxim $(A_n, \leq_n)$ are minim, iar $(A_2, \leq_2), \ldots, (A_{n-1}, \leq_{n-1})$ sunt poseturi mărginite.

Se pot face generalizări și la cazuri infinite.

Remarcă

Conform unei remarci de mai sus, operația produs direct de poseturi este asociativă, ceea ce permite generalizarea ei la **produs direct al unei familii finite nevide de poseturi** $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, prin **definiția recursivă**: produsul direct al familiei $(A_i, \leq_i)_{i \in \overline{1,n}}$ se notează cu $(A_1, \leq_1) \times (A_2, \leq_2) \times \ldots \times (A_n, \leq_n)$ sau $\prod_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i)$ sau $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \leq_1 \times \leq_2 \times \ldots \times \leq_n)$ sau $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \prod_{i=1}^{n} \leq_i)$ și este posetul definit, recursiv, astfel:

$$\prod_{i=1}^{n} (A_i, \leq_i) := \begin{cases} (A_1, \leq_1), & \text{dacă } n = 1; \\ (\prod_{i=1}^{n-1} (A_i, \leq_i)) \times (A_n, \leq_n), & \text{dacă } n > 1. \end{cases}$$

Notație

Cu notațiile din remarca anterioară, dacă $(A_1, \leq_1) = (A_2, \leq_2) = \ldots = (A_n, \leq_n) = (A, \leq)$, atunci produsul direct $(\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A}, \underbrace{\leq \times \leq \times \ldots \times \leq}_{n \text{ de } \leq})$ se mai notează cu $(A^n, \leq)$.

Definiție

Produsul direct poate fi generalizat la **familii arbitrare de poseturi**, astfel: fie $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ o familie arbitrară de poseturi. Atunci se definește *produsul direct* al acestei familii, notat $\prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$, ca fiind $(\prod_{i \in I} A_i, \leq)$, unde $\leq := \prod_{i \in I} \leq_i$ este următoarea relație binară pe produsul direct de mulțimi $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\}$: pentru orice $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$,

$$f \leq g \text{ ddacă } (\forall\, i \in I)\,(f(i) \leq_i g(i))$$

După cum știm din rezultatul privind proprietățile unui produs direct arbitrar de relații binare, relația $\leq$ definită mai sus este o **relație de ordine** pe $\prod_{i \in I} A_i$, deci $(\prod_{i \in I} A_i, \leq) = \prod_{i \in I}(A_i, \leq_i)$ este un **poset**.

Notație

Pentru $(A_i, \leq_i) = (A, \leq)$, oricare ar fi $i \in I$, în definiția anterioară, produsul direct al familiei $((A_i, \leq_i))_{i \in I}$ devine $(A^I, \leq)$ (notând ordinea de pe $A^I = \{f : I \to A\}$ la fel ca ordinea de pe A).

Ordinea strictă și succesiunea asociate ordinii produs

Remarcă

Cu notațiile din definiția anterioară, dacă notăm $\prod_{i \in I} A_i = A$ și, pentru fiecare $i \in I$, notăm cu $<_i$ relația de ordine strictă asociată lui $\leq_i$, iar cu $\prec_i$ relația de succesiune asociată lui $\leq_i$, și cu $<$ notăm relația de ordine strictă asociată ordinii produs $\leq$, iar cu $\prec$ notăm relația de succesiune asociată lui $\leq$, atunci:

- $<= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (a_i)_{i \in I} \leq (b_i)_{i \in I}$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)\}$;
- $\prec= \{((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in A^2 \mid (\exists\, k \in I)\,[a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)]\}$.

Într–adevăr, să considerăm $a = (a_i)_{i \in I} \in A$ și $b = (b_i)_{i \in I} \in A$.
Dacă $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$, atunci $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $a < b$.
Dacă $a < b$, atunci $a \leq b$ și $a \neq b$, așadar $((a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}) \in \leq = \prod_{i \in I} \leq_i$ și $(a_i)_{i \in I} \neq (b_i)_{i \in I}$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$, ceea ce este echivalent cu $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \leq b_k$ și $a_k \neq b_k)$, adică $a \leq b$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k <_k b_k)$.
Așadar are loc egalitatea între $<$ și mulțimea de mai sus.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Să presupunem că există un $k \in I$ astfel încât $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$. Atunci $a_k <_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i b_i)$, deci $a < b$, conform expresiei lui $<$ de mai sus. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, astfel încât $a \leq x \leq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq_i b_i)$. Atunci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i \leq_i x_i \leq_i b_i = a_i \leq a_i)$ și $a_k \leq_k x_k \leq_k b_k$, prin urmare $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = x_i = b_i)$, conform tranzitivității și antisimetriei lui $\leq_i$ pentru fiecare $i \in I \setminus \{k\}$, și $a_k = x_k$ sau $x_k = b_k$, întrucât $a_k \prec_k b_k$. Așadar $(\forall\, i \in I)\,(a_i = x_i)$ sau $(\forall\, i \in I)\,(x_i = b_i)$, adică $a = x$ sau $x = b$. Prin urmare, $a \prec b$.

Acum să presupunem că $a \prec b$. Atunci $a < b$, deci $a \leq b$ și $a \neq b$, adică $(\forall\, i \in I)\,(a_i \leq b_i)$ și $(\exists\, k \in I)\,(a_k \neq b_k)$. Presupunem prin absurd că există $j, k \in I$ astfel încât $j \neq k$, $a_j \neq b_j$ și $a_k \neq b_k$. Atunci $a_j <_j b_j$ și $a_k <_k b_k$. Fie $x = (x_i)_{i \in I} \in A$ cu $x_k = b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$. Atunci $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare există un unic $k \in I$ astfel încât $a_k \neq b_k$, deci $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$ și, intrucât $a_k \leq_k b_k$ și $a_k \neq b_k$, are loc $a_k <_k b_k$. Presupunem prin absurd că $a_k \not\prec_k b_k$. Atunci există un $u \in A_k$ astfel încât $a_k <_k u <_k b_k$. Atunci, considerând $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, cu $x_k = u$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(x_i = a_i)$, rezultă $a < x < b$, ceea ce contrazice faptul că $a \prec b$. Prin urmare, $a_k \prec_k b_k$. Deci $a_k \prec_k b_k$ și $(\forall\, i \in I \setminus \{k\})\,(a_i = b_i)$.

Relația de succesiune asociată ordinii produs

Remarcă (continuare)

Așadar are loc și a doua egalitate de mai sus.

Remarcă

Din remarca anterioară deducem că, dacă $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ sunt poseturi, iar relația de succesiune asociată lui $\leq_A$, respectiv $\leq_B$, este $\prec_A$, respectiv $\prec_B$, atunci relația de succesiune asociată ordinii produs, $\leq = \leq_A \times \leq_B$, este:

$$\prec = \{((a,b),(a',b')) \in (A \times B)^2 \mid (a = a' \text{ și } b \prec_B b') \text{ sau } (a \prec_A a' \text{ și } b = b')\}$$

A se observa, din această expresie a lui $\prec$, corectitudinea reprezentării de mai sus a produsului direct a două poseturi finite printr–o diagramă Hasse.

Produsul direct al familiei vide

Remarcă

Produsul direct al familiei vide de mulțimi este **un singleton**, adică o mulțime cu un singur element.
Prin urmare, produsul direct al familiei vide de poseturi este un singleton $\{*\}$, organizat ca poset cu unica relație de ordine pe un singleton, anume $\{(*,*)\}$.
La fel stau lucrurile pentru produsul direct al unei familii vide de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos această generalizare).
Într–adevăr, să înlocuim mulțimea de indici I cu $\emptyset$ în definiția anterioară.
Reuniunea familiei vide de mulțimi este $\emptyset$, așadar mulțimea $\prod_{i\in\emptyset} A_i = \{f \mid f : \emptyset \to \emptyset\} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$ (unica funcție de la $\emptyset$ la $\emptyset$; a se vedea definiția unei funcții).
Așadar, pentru orice mulțime A, $A^{\emptyset} = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$.
Este admisă și notația A^0 în loc de $A^{\emptyset}$.
Aceste notații pot fi extinse la produsul direct al familiei vide de poseturi sau de structuri algebrice de un anumit tip (a se vedea mai jos).

Algebre produs direct

Remarcă

După cum știm, în definițiile produsului direct (a două poseturi, al unei familii finite nevide de poseturi, al unei familii arbitrare de poseturi) se pot **înlocui poseturile** cu **mulțimi înzestrate cu relații binare arbitrare**, și se obține noțiunea de *produs direct al unor relații binare*, care este o relație binară pe mulțimea dată de produsul direct al respectivelor mulțimi.

Dar **produsul direct** se poate defini și pentru **structuri algebrice de același tip**, înzestrate cu anumite operații, pe baza cărora se definesc, punctual, operațiile produsului direct.
În cazul laticilor, a căror definiție o vom aminti îndată, **produsul direct al unor latici** este **simultan un poset produs direct** (latice Ore) și **o structură algebrică produs direct**, cu două operații binare (latice Dedekind).
Vom exemplifica mai jos noțiunea de **produs direct al unor mulțimi înzestrate și cu operații, și cu relații binare**.

Algebre produs direct

Remarcă (temă)

- Să se deducă, din faptul că produsul direct al familiei vide de mulțimi este un singleton, faptul că **operațiile zeroare (nulare, fără argumente) sunt constantele** structurilor algebrice.
- Să se scrie produsul de algebre și pentru cazul general al algebrelor înzestrate cu o **operație p–ară (de aritate p, cu p argumente)**, unde $p \in \mathbb{N}$ (sau $\mathbb{N}^*$).

Să exemplificăm pe o structură formată dintr–o mulțime înzestrată cu o relație binară și trei operații, dintre care una binară, una unară (adică având un singur argument) și una zeroară (adică fără argumente, adică o constantă).
Mai întâi pentru **produse directe finite nevide**.
Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și n structuri algebrice de același tip $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in \overline{1,n}$, unde, pentru fiecare $i \in \overline{1,n}$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} A_i$,

  cu *operațiile produs direct*:

- $\circ \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \circ_i \stackrel{\text{notație}}{=} (\circ_1, \ldots, \circ_n)$,
- $f \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} f_i \stackrel{\text{notație}}{=} (f_1, \ldots, f_n)$,
- $c \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} c_i \stackrel{\text{notație}}{=} (c_1, \ldots, c_n)$

  și *relația binară produs direct*:

- $\rho \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i=1}^{n} \rho_i = \rho_1 \times \ldots \times \rho_n$,

definite **pe componente**, i. e. ca mai jos, unde notația pentru un element $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ semnifică faptul că $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$:

Algebre produs direct

- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$,
  $x \circ y \stackrel{\text{definiție}}{=} (x_1 \circ_1 y_1, \ldots, x_n \circ_n y_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, $f(x) \stackrel{\text{definiție}}{=} (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)) \in A$;
- constanta $c \stackrel{\text{definiție}}{=} (c_1, \ldots, c_n) \in A$;
- pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots y_n) \in A$, prin definiție, $x \rho y$ ddacă $x_1 \rho_1 y_1, \ldots, x_n \rho_n y_n$.

Dacă $(A_1, \circ_1, f_1, c_1, \rho_1) = \ldots = (A_n, \circ_n, f_n, c_n, \rho_n) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$, atunci $A = B^n = \{(b_1, \ldots, b_n) \mid b_1, \ldots, b_n \in B\}$, și operațiile și relația binară produs pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Și acum **cazul general**: fie $((A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i))_{i \in I}$ o **familie arbitrară** de structuri algebrice, unde, pentru fiecare $i \in I$:

- $\circ_i : A_i \times A_i \to A_i$ este o operație binară (pe care o vom nota infixat: $x \circ_i y$, pentru $x, y \in A_i$),
- $f_i : A_i \to A_i$ este o operație unară,
- $c_i \in A_i$ este o operație zeroară (adică o constantă),
- $\rho_i \subseteq A_i \times A_i$ este o relație binară,

fiecare dintre acestea pe mulțimea A_i.

Algebre produs direct

Atunci putem defini *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$, cu:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{h \mid h : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, (\forall i \in I)], (h(i) \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\circ$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **punctual**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $g, h \in A$, $g \circ h \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(g \circ h)(i) = g(i) \circ_i h(i)$;
- pentru orice $h \in A$, $f(h) \in A$, definită prin: oricare ar fi $i \in I$, $(f(h))(i) = f_i(h(i))$;
- $c \in A$, definită prin: pentru orice $i \in I$, $c(i) = c_i \in A_i$;
- pentru orice $g, h \in A$, prin definiție, $g \rho h$ ddacă $g(i) \rho_i h(i)$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{h \mid h : I \to B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Algebre produs direct

Scriere alternativă pentru *algebra produs direct* $(A, \circ, f, c, \rho)$:

- $A \stackrel{\text{definiție}}{=} \prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\}$,

cu *operațiile produs direct* $\circ$ (binară), f (unară), c (zeroară, i. e. constantă) și *relația binară produs direct* ρ pe A definite **pe componente**, pe baza celor ale structurilor algebrice $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i)$, cu $i \in I$, i. e. ca mai jos:

- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, $(a_i)_{i \in I} \circ (b_i)_{i \in I} := (a_i \circ_i b_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I} \in A$, $f((a_i)_{i \in I}) := (f_i(a_i))_{i \in I} \in A$;
- $c := (c_i)_{i \in I} \in A$;
- pentru orice $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \in A$, prin definiție, $(a_i)_{i \in I} \rho (b_i)_{i \in I}$ ddacă $a_i \rho_i b_i$, oricare ar fi $i \in I$.

Dacă $(A_i, \circ_i, f_i, c_i, \rho_i) = (B, \circ_B, f_B, c_B, \rho_B)$ pentru fiecare $i \in I$, atunci $A = B^I = \{(a_i)_{i \in I} \mid (\forall i \in I) a_i \in B\}$, și operațiile și relația binară produs direct pot fi notate la fel ca acelea ale lui B.

Produsul direct al familiei vide de structuri algebrice de același tip

În cazul în care $I = \emptyset$, obținem **algebra produs direct al familiei vide de algebre** de tipul de mai sus, anume $(A, \circ, f, c, \rho)$, unde:

- A este un singleton: $A = \{*\}$ (a se vedea, mai sus, produsul direct al familiei vide de poseturi);
- operațiile $\circ$, f și c au singurele definiții posibile pe un singleton, anume: $* \circ * := *$, $f(*) := *$ și $c := *$;
- $\rho \subseteq A^2 = \{(*, *)\}$, deci ρ nu poate fi decât $\emptyset$ sau $\{(*, *)\}$; dar ρ este reflexivă, așadar $\rho = \{(*, *)\}$.

Exercițiu (temă)

Să se demonstreze că un produs direct arbitrar de latici (mărginite) este o latice (mărginită).

Exercițiu (temă)

Pentru un număr natural nenul arbitrar n, să se descompună laticea mărginită $(D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d|n\}, \mathrm{cmmmc}, \mathrm{cmmdc}, |, 1, n)$ în produs direct de lanțuri.

Algebre Boole – definiție și notații

Definiție

O *algebră Boole* (sau *algebră booleană*) este o latice mărginită distributivă complementată.

Remarcă

În orice algebră Boole, datorită distributivității, complementul oricărui element x este unic, ceea ce ne permite să îl notăm prin $\overline{x}$ (sau $\neg x$).
Existența complementului oricărui element al unei algebre Boole de mulțime suport B (existență impusă în definiția anterioară), alături de unicitatea complementului, ne dau posibilitatea de a defini o operație unară $\bar{} : B \to B$ (sau $\neg : B \to B$), care duce fiecare element al lui B în complementul său.
Această operație se va numi *complementare* și se va citi *not*.

Notație

O algebră Boole va fi notată $(B, \leq, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, sau $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, unde $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este laticea distributivă mărginită subiacentă algebrei Boole, iar $\bar{}$ este operația ei de complementare.

Terminologie, și exemple de algebre Boole

Notă

Adesea:

- o latice mărginită distributivă complementată este numită *latice booleană*;
- o latice mărginită distributivă complementată înzestrată și cu operația de complementare este numită *algebră booleană*.

La fel ca în cazul laticilor mărginite:

Remarcă

O algebră Boole nu poate fi vidă, pentru că are minim și maxim.

Definiție

- Algebra Boole cu un singur element (adică algebra Boole cu $0 = 1$, anume lanțul cu un singur element, $\mathcal{L}_1$) se numește *algebra Boole trivială*.
- Orice algebră Boole de cardinal strict mai mare decât 1 (i. e. orice algebră Boole cu cel puțin 2 elemente distincte, adică orice algebră Boole cu $0 \neq 1$) se numește *algebră Boole netrivială*.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Lanțul cu două elemente este o algebră Boole.

Într–adevăr, $\mathcal{L}_2 = (L_2\{0, 1\}, \leq)$, cu $0 < 1$ (i. e. $0 \leq 1$ și $0 \neq 1$):

- este un lanț, deci o latice distributivă, cu $\vee = \max$ și $\wedge = \min$;
- este, evident, o latice mărginită;
- are proprietatea că 0 și 1 sunt complemente unul altuia și nu au alte complemente (fapt valabil în orice latice mărginită), deci $\overline{0} = 1$ și $\overline{1} = 0$.

Așadar, $(L_2, \vee = \max, \wedge = \min, \leq, \bar{}, 0, 1)$ este o algebră Boole, pe care o vom nota tot cu $\mathcal{L}_2$. Această algebră Boole se numește *algebra Boole standard* și are următoarea diagramă Hasse ca poset:

$\mathcal{L}_2$

Notă

Ca și mai sus, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, vom nota cu $\mathcal{L}_n$ lanțul cu n elemente, indiferent dacă ne referim la structura sa de poset, poset mărginit, latice, latice mărginită sau, pentru $n \in \{1, 2\}$, algebră Boole. Structura algebrică la care ne referim va fi dedusă din context, în fiecare caz.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Se arată imediat, direct cu definiția unei algebre Boole, că orice produs direct de algebre Boole este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite punctual.

Remarcă

În particular, considerând algebra Boole standard $\mathcal{L}_2$ și o mulțime arbitrară I, remarca anterioară ne asigură de faptul că produsul direct $\mathcal{L}_2^I = (L_2^I = \{f | f : I \rightarrow L_2\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și ordinea parțială definite **punctual**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$:

- pentru orice $f, g \in L_2^I$, $f \vee g, f \wedge g, \overline{f}, 0, 1 \in L_2^I$, definite prin: pentru orice $i \in I$:
    - $(f \vee g)(i) := f(i) \vee g(i)$
    - $(f \wedge g)(i) := f(i) \wedge g(i)$
    - $\overline{f}(i) := \overline{f(i)}$
    - $0(i) := 0$ și $1(i) := 1$
- iar $f \leq g$ în $\mathcal{L}_2^I$ dacă, pentru fiecare $i \in I$, $f(i) \leq g(i)$ în $\mathcal{L}_2$.

Exemple de algebre Boole

Remarcă

Aplicând remarca anterioară cazului în care I este finită, de cardinal $n \in \mathbb{N}$, obținem că $\mathcal{L}_2^n = (L_2^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in L_2 = \{0, 1\}\}, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ este o algebră Boole, cu operațiile și relația de ordine definite **pe componente**, pornind de la cele ale algebrei Boole standard $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$: pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L_2$:

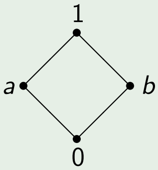
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \ldots, x_n \vee y_n)$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (y_1, y_2, \ldots, y_n) := (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \ldots, x_n \wedge y_n)$
- $\overline{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} := (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})$
- $0 := \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ de } 0}$ și $1 := \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n \text{ de } 1}$
- $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ în $\mathcal{L}_2^n$ ddacă $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, …, $x_n \leq y_n$ în $\mathcal{L}_2$

1. $\mathcal{L}_2^0 = \mathcal{L}_1$ este algebra Boole trivială.
2. $\mathcal{L}_2^1 = \mathcal{L}_2$ este algebra Boole standard.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^2$ se numește *rombul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Am notat: $0 = (0,0)$, $1 = (1,1)$, $a = (0,1)$, $b = (1,0)$, unde $\mathcal{L}_2 = \{0,1\}$.
Diagrama de mai sus este corectă, pentru că ordinea parțială produs, $\leq$, satisface:

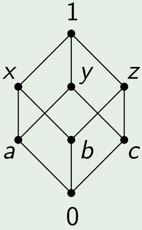
- $(0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$,
- $(0,0) \leq (1,0) \leq (1,1)$,
- $(0,1)$ și $(1,0)$ sunt incomparabile ($(0,1) \nleq (1,0)$ și $(1,0) \nleq (0,1)$, pentru că $1 \nleq 0$ în $\mathcal{L}_2$).

Definițiile operațiilor de algebră Boole se fac pe componente, pornind de la cele ale lui $\mathcal{L}_2$ (de exemplu, $a \vee b = (0,1) \vee (1,0) = (0 \vee 1, 1 \vee 0) = (1,1) = 1$), dar pot fi determinate și din diagrama Hasse a acestei algebre Boole.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Algebra Boole $\mathcal{L}_2^3$ se numește *cubul*, datorită formei diagramei ei Hasse:



Cu notația uzuală $L_2 = \{0, 1\}$ pentru elementele algebrei Boole standard, elementele din diagrama Hasse de mai sus sunt: $0 = (0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 1, 0)$, $c = (1, 0, 0)$, $x = (0, 1, 1)$, $y = (1, 0, 1)$, $z = (1, 1, 0)$ și $1 = (1, 1, 1)$.

Exemple de algebre Boole

Exemplu

Pentru orice mulțime I, $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \subseteq, \bar{}, \emptyset, I)$, unde $\overline{A} = I \setminus A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}(I)$, este o algebră Boole.
Acest fapt poate fi verificat foarte ușor, cu definiția unei algebre Boole, folosind funcțiile caracteristice ale submulțimilor lui I raportat la I sau, direct, calcul cu mulțimi pentru a demonstra proprietățile operațiilor lui $\mathcal{P}(I)$.

Exercițiu (temă)

Demonstrați că singurele algebre Boole total ordonate sunt algebra Boole trivială și algebra Boole standard.
Indicație: presupuneți prin absurd că există o algebră Boole care să fie un lanț $(L, \max, \min, \leq, \bar{}, 0, 1)$ cu cel puțin 3 elemente, adică există $x \in L \setminus \{0, 1\}$. L fiind total ordonată, avem: $x \leq \overline{x}$ sau $\overline{x} \leq x$. Cine este $\overline{x}$, conform definiției complementului?

Propoziție (temă)

Mulțimea elementelor complementate ale unei latici distributive mărginite este o algebră Boole (cu operațiile induse, la care se adaugă operația de complementare).

Operații și operații derivate ale unei algebre Boole

Definiție

Pentru orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$, se definesc următoarele *operații binare derivate*:

- *implicația (booleană)*, $\rightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \rightarrow b := \bar{a} \vee b$;
- *echivalența (booleană)*, $\leftrightarrow$: pentru orice $a, b \in B$, $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$.

Remarcă (complementarea este autoduală (autoinversă, idempotentă))

Dată o algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{}, 0, 1)$, pentru orice $x \in B$, $\overline{\overline{x}} = x$.
Acest fapt se arată direct cu definiția complementului, folosind unicitatea lui în algebre Boole. Într–adevăr, definiția complementului $\overline{x}$ al lui x arată că x satisface condițiile care definesc complementul $\overline{\overline{x}}$ al lui $\overline{x}$: x satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ x \wedge \overline{x} = 0, \end{cases}$ iar $\overline{\overline{x}}$ este unicul element al lui B cu proprietățile: $\begin{cases} \overline{\overline{x}} \vee \overline{x} = 1 \text{ și} \\ \overline{\overline{x}} \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$ Așadar $x = \overline{\overline{x}}$.

Definiția unei algebre Boole

Înainte de a trece mai departe, amintim că: o **algebră Boole** este o **latice distributivă mărginită complementată**, i. e. o structură $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ compusă din:

- o mulțime B,
- o relație de ordine parțială $\leq$ pe B,
- două operații binare $\vee$ și $\wedge$ pe B, notate infixat,
- două constante $0, 1 \in B$,
- o operație unară $\bar{\ }$ pe B,

iar aceste componente au proprietățile:

- $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este o **latice**, i. e.:
  - oricare ar fi $x, y \in B$, există $\sup\{x, y\}$ și $\inf\{x, y\}$ în posetul $(B, \leq)$;
  - $\vee$ și $\wedge$ sunt **idempotente**, **comutative** și **asociative**, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, au loc: $x \vee x = x$, $x \vee y = y \vee x$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, și la fel pentru $\wedge$;
  - $\vee$ și $\wedge$ verifică **absorbția**: pentru orice $x, y \in B$, $x \vee (x \wedge y) = x$ și $x \wedge (x \vee y) = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $x \wedge y = x$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$;
  - pentru orice $x, y \in B$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$;

Definiția unei algebre Boole

- laticea $(B, \vee, \wedge, \leq)$ este **distributivă**, i. e.:
  - $\vee$ este **distributivă** față de $\wedge$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
  - $\wedge$ este **distributivă** față de $\vee$, i. e.: pentru orice $x, y, z \in B$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;
- $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este o **latice mărginită**, i. e., în plus:
  - 0 este **minimul** posetului $(B, \leq)$;
  - 1 este **maximul** posetului $(B, \leq)$;
- laticea mărginită $(B, \vee, \wedge, \leq, 0, 1)$ este **complementată** și satisface **unicitatea complementului**, datorită **distributivității**, iar $\bar{\ }$ este operația de **complementare**:
  - pentru orice $x \in B$, $\overline{x}$ este **unicul complement** al lui x, adică **unicul** element $\overline{x} \in B$ care satisface: $\begin{cases} x \vee \overline{x} = 1 \\ \text{și} \\ x \wedge \overline{x} = 0. \end{cases}$

În plus, în orice algebră Boole $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se definesc următoarele **operații binare derivate**:

- **implicația (booleană)**, $\rightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \rightarrow y := \overline{x} \vee y$;
- **echivalența (booleană)**, $\leftrightarrow$: pentru orice $x, y \in B$, $x \leftrightarrow y := (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Principiul dualității pentru algebre Boole

Remarcă

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$, se arată ușor că $(B, \wedge, \vee, \geq, \bar{\ }, 1, 0)$ este o algebră Boole, numită *duala algebrei Boole $\mathcal{B}$*.
Se știe, din capitolul despre latici al cursului, că:

- $\vee$ și $\wedge$,
- $\leq$ și $\geq := \leq^{-1}$,
- 0 și 1

sunt duale una alteia, respectiv.
Este imediat că operația unară $\bar{\ }$ este duală ei însăși. Spunem că operația $\bar{\ }$ este *autoduală*.
Evident, duala dualei lui $\mathcal{B}$ este $\mathcal{B}$.

Remarca anterioară stă la baza **Principiului dualității pentru algebre Boole**: *orice rezultat valabil într–o algebră Boole arbitrară rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul lui interschimbăm: $\vee$ cu $\wedge$, $\leq$ cu $\geq$, 0 cu 1 (iar operația $\bar{\ }$ rămâne neschimbată), supremumurile cu infimumurile arbitrare, maximele cu minimele arbitrare, elementele maximale cu elementele minimale.*

Legile lui de Morgan pentru algebre Boole arbitrare

- Peste tot în cele ce urmează, dacă nu se va menționa altfel, $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ va fi o algebră Boole arbitrară.
- Următoarea propoziție conține o proprietate aritmetică foarte importantă a algebrelor Boole, pe care o cunoaștem deja pentru cazul particular al algebrei Boole a părților unei mulțimi.

Propoziție (legile lui de Morgan)

Pentru orice $x, y \in B$:

1. $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
2. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Demonstrație: **(1)** Avem de arătat că $\overline{x} \wedge \overline{y}$ este complementul lui $x \vee y$. Conform definiției și unicității complementului, este suficient să demonstrăm că: $(x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 1$ și $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) = 0$.
Aplicăm distributivitatea, comutativitatea, definiția complementului și faptul că 0 și 1 sunt minimul și, respectiv, maximul lui $\mathcal{B}$:
$x \vee y \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) = (x \vee y \vee \overline{x}) \wedge (x \vee y \vee \overline{y}) = (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1;$
$(x \vee y) \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = (x \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (y \wedge \overline{x} \wedge \overline{y}) = (0 \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0.$
(2) Rezultă din (1), prin dualitate.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

Amintim:

Lemă

Fie $(L, \vee, \wedge, \leq)$ o latice și $a, b, x, y \in L$.
Dacă $a \leq b$ și $x \leq y$, atunci: $a \vee x \leq b \vee y$ și $a \wedge x \leq b \wedge y$.
În particular (aplicând proprietatea de mai sus și reflexivitatea unei relații de ordine): dacă $a \leq b$, atunci $a \vee x \leq b \vee x$ și $a \wedge x \leq b \wedge x$.

Propoziție

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice $x, y \in B$, au loc următoarele echivalențe:

1. $x = y$ *ddacă* $\overline{x} = \overline{y}$
2. $x \leq y$ *ddacă* $\overline{y} \leq \overline{x}$
3. $x \leq y$ *ddacă* $x \wedge \overline{y} = 0$ *ddacă* $\overline{x} \vee y = 1$
4. $x \leq y$ *ddacă* $x \rightarrow y = 1$
5. $x = y$ *ddacă* $x \leftrightarrow y = 1$

Demonstrație: Fie $x, y \in B$, arbitrare, fixate.
(1) Următorul șir de implicații demonstrează rezultatul de la acest punct: $x = y$ implică $\overline{x} = \overline{y}$ implică $\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$, ceea ce este echivalent cu $x = y$, conform autodualității complementării.
(2) Aplicând, pe rând, definiția relației de ordine în funcție de $\vee$, punctul **(1)**, **legile lui de Morgan** și definiția relației de ordine în funcție de $\wedge$ în orice latice (și comutativitatea lui $\wedge$), obținem șirul de echivalențe: $x \leq y$ ddacă $x \vee y = y$ ddacă $\overline{x \vee y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{y}$ ddacă $\overline{y} \leq \overline{x}$.
(3) $x \leq y$ implică $x \wedge \overline{y} \leq y \wedge \overline{y} = 0$ implică $x \wedge \overline{y} = 0$. Am aplicat lema anterioară, definiția complementului și faptul că 0 este minimul lui B.
Acum aplicăm faptul că 0 este minimul lui B, distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$, definiția complementului, faptul că 1 este maximul lui B și definiția lui $\leq$ în funcție de $\vee$ în orice latice (și comutativitatea lui $\vee$): dacă $x \wedge \overline{y} = 0$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge \overline{y}) = (y \vee x) \wedge (y \vee \overline{y}) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, prin urmare $x \leq y$.
Am demonstrat faptul că $x \leq y$ ddacă $x \wedge \overline{y} = 0$.
Acum aplicăm punctul **(1)**, **legile lui de Morgan**, faptul evident că $\overline{0} = 1$ și autodualitatea complementării, și obținem: $x \wedge \overline{y} = 0$ ddacă $\overline{x \wedge \overline{y}} = \overline{0}$ ddacă $\overline{x} \vee \overline{\overline{y}} = 1$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$.

Alte proprietăți aritmetice ale unei algebre Boole

(4) Din punctul **(3)** și definiția implicației booleene, obținem: $x \leq y$ ddacă $\overline{x} \vee y = 1$ ddacă $x \rightarrow y = 1$.
(5) Să observăm că, oricare ar fi $a, b \in B$, are loc echivalența: $a \wedge b = 1$ ddacă $[a = 1$ și $b = 1]$. Într–adevăr, implicația directă rezultă din faptul că $a \wedge b \leq a$ și $a \wedge b \leq b$ și faptul că 1 este maximul lui B, iar implicația reciprocă este trivială. Reflexivitatea și antisimetria lui $\leq$, punctul **(4)**, proprietatea de mai sus și definiția echivalenței booleene ne dau: $x = y$ ddacă $[x \leq y$ și $y \leq x]$ ddacă $[x \rightarrow y = 1$ și $y \rightarrow x = 1]$ ddacă $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1$ ddacă $x \leftrightarrow y = 1$.

Propoziție (legea de reziduație)

Fie $(B, \vee, \wedge, \leq, \bar{\ }, 0, 1)$ o algebră Boole. Atunci, pentru orice elemente $\alpha, \beta, \gamma \in B$, are loc echivalența:

$$\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma \text{ ddacă } \alpha \wedge \beta \leq \gamma.$$

Demonstrație: Vom demonstra echivalența din enunț prin dublă implicație.

"$\Leftarrow$": Dacă $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând supremumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și $\overline{\beta}$, obținem: $(\alpha \wedge \beta) \vee \overline{\beta} \leq \gamma \vee \overline{\beta}$. În această inegalitate aplicăm distributivitatea unei algebre Boole și definiția implicației într-o algebră Boole, și obținem inegalitatea echivalentă: $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge (\beta \vee \overline{\beta}) \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $(\alpha \vee \overline{\beta}) \wedge 1 \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică $\alpha \vee \overline{\beta} \leq \beta \rightarrow \gamma$, de unde, întrucât $\alpha \leq \sup\{\alpha, \overline{\beta}\} = \alpha \vee \overline{\beta}$ și aplicând tranzitivitatea unei relații de ordine, rezultă: $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$.

"$\Rightarrow$": Dacă $\alpha \leq \beta \rightarrow \gamma$, adică, explicitând definiția implicației într-o algebră Boole, $\alpha \leq \overline{\beta} \vee \gamma$, atunci, conform lemei anterioare, luând infimumul dintre fiecare membru al acestei inegalități și β, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \vee \gamma) \wedge \beta$, adică, aplicând distributivitatea unei algebre Boole, $\alpha \wedge \beta \leq (\overline{\beta} \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq 0 \vee (\gamma \wedge \beta)$, adică $\alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \beta$. Aplicând în această ultimă inegalitate faptul că $\gamma \wedge \beta = \inf\{\gamma, \beta\} \leq \gamma$ și tranzitivitatea unei relații de ordine, obținem: $\alpha \wedge \beta \leq \gamma$.

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Observație

Pentru toate definițiile legate de acest paragraf al cursului de față și pentru demonstrațiile rezultatelor enunțate aici, a se vedea, de exemplu, cartea de G. Georgescu și A. Iorgulescu din bibliografia din Cursul I, dar și celelalte cărți din acea listă bibliografică.
Pentru un exemplu de aplicație la teorema următoare, a se vedea referatul despre ecuații booleene din seria de materiale didactice pe care le–am trimis pe mail.
Demonstrațiile omise aici nu fac parte din materia pentru examen.

În definiția și rezultatele de mai jos, notăm $x^2 := x \cdot x$ și $x \cdot y := xy$.

Definiție

Se numește *inel Boole* un inel unitar $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in B$.

Lemă

În orice inel Boole B, au loc: pentru orice elemente $x, y \in B$, $xy = yx$ și $x + x = 0$ (cu alte cuvinte, orice inel Boole este comutativ și orice element nenul al unui inel Boole are ordinul 2 în grupul aditiv subiacent inelului; sigur că ordinul lui 0 este 1, 0 fiind elementul neutru al acestui grup aditiv: $0 = 0$).

Echivalența algebre Boole – inele Boole

Teoremă (echivalența algebră Boole $\Leftrightarrow$ inel Boole)

Orice algebră Boole poate fi organizată ca un inel Boole, și invers. Mai precis:

- *Fie* $\mathcal{B} := (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Definim operațiile* $\vee$, $\wedge$ *și* $\bar{}$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x \vee y := x + y + xy \\ x \wedge y := xy \\ \overline{x} := x + 1 \end{cases}$$

  Atunci $(B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o vom nota cu* $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.
- *Fie* $\mathcal{B} := (B, \vee, \wedge, \bar{}, 0, 1)$ *o algebră Boole. Definim operațiile* $+$ *și* $\cdot$ *pe* B *prin: pentru orice* $x, y \in B$*:*

$$\begin{cases} x + y := (x \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge y) \\ xy := x \wedge y \end{cases}$$

  Atunci $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *este un inel Boole, pe care îl vom nota cu* $\mathcal{I}(\mathcal{B})$ *(unde am notat cu* $-$ *operația de inversare a grupului aditiv subiacent inelului).*
- *Aplicațiile* $\mathcal{A}$ *și* $\mathcal{I}$ *sunt "inverse una alteia", în sensul că, pentru orice inel Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}(\mathcal{A}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$*, și, pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}(\mathcal{I}(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.