Seminar 5

1. Justificati afirmatiile
   a) $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star$

   b) Sirul $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ este convergent

   c) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$ este divergenta

   d) Sirul $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ are limita $\ln 2$.

2. Determinati multimea punctelor de acumulare A' pentru
   a) $A = \left\{ \frac{1}{2^n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$
   b) $A = \mathbb{Q}$

3. Verificati daca functiile urmatoare isi ating valorile extreme si determinati aceste valori
   a) $f : (-1,1) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
   b) $f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 0 \\ x & , x \in (0,1] \end{cases}$
   c) $f : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

4. (**caracterizarea monotoniei cu ajutorul derivatei**) Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o functie derivabila pe (a,b). Au loc afirmatiile
   a) f este crescatoare pe $(a,b) \iff f'(x) \geq 0, \, \forall x \in (a,b)$
   b) f este decrescatoare pe $(a,b) \iff f'(x) \leq 0, \, \forall x \in (a,b)$
   c) Daca $f'(x) > 0, \, \forall x \in (a,b) \implies$ f este strict crescatoare pe (a,b)
   d) Daca $f'(x) < 0, \, \forall x \in (a,b) \implies$ f este strict descrescatoare pe (a,b)
In general, reciprocele afirmatiilor c) si d) nu sunt adevarate. Justificati.

5. Determinati punctele de extrem local ale functiilor de la exercitiul 3.

6. Folosind regula lui l'Hopital, calculati limitele
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Exercitii suplimentare

1. Determinati multimea punctelor de acumulare A' pentru
   a) $A = \left\{ \frac{n!}{3^n} \middle| \, n \in \mathbb{N} \right\}$
   b) $A = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$

2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$ un interval si $f : A \to A$ o functie avand urmatoarele proprietati
   i) f este derivabila pe A
   ii) $\exists\, q < 1$ astfel incat $|f'(x)| \le q$, $\forall x \in A$
   iii) $\exists\, a \in A$ astfel incat $f(a) = a$.
   Definim recursiv sirul $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si $x_0 \in A$. Justificati afirmatiile
   a) $|x_{n+1} - a| \le q|x_n - a|$, $\forall n \in \mathbb{N}$
   b) (x_n) este sir convergent si are limita a.

3. Determinati punctele de extrem local si valorile extreme ale functiilor
   a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x|\,(1 - x)$
   b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{|\ln x|}{\sqrt{x}}$

4. Folosind regula lui l'Hopital, calculati limitele
   a) $\lim\limits_{x \searrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

   b) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^\alpha \ln(\sin x), \quad \alpha > 0$

Regula lui l'Hopital. Fie $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ o vecinatate a lui x_0 si $f, g : V \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ doua functii avand proprietatile:
i) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (sau $+\infty$)
ii) f, g sunt derivabile pe $V \setminus \{x_0\}$
iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in V \setminus \{x_0\}$
iv) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$
atunci $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.