06.09.2022

Cap. I Mulțimea nr. reale

• $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Structură algebrică:

↳ „+" - adunare $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x+y$ - suma nr. x, y;

A1) comutativitatea;

A2) asociativitatea;

A3) elementul neutru: $\exists\ 0 \in \mathbb{R}$ a.î. $0+x = x+0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

A4) opusul: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R}$ a.î. $x+(-x) = -x+x = 0$;

↳ „·" - înmulțirea $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x \cdot y$ - produsul nr. x, y;

I1) comutativitatea;

I2) asociativitatea;

I3) elementul neutru: $\exists\ 1 \in \mathbb{R}$ a.î. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R}$;

I4) inversul: $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists\ x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ a.î. $x \cdot x^{-1} = 1$;

D) distributivitatea „·" față de adunare:

$x(y+z) = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

$(y+z)x = xy + xz, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

! $(\mathbb{R}; +; \cdot)$ - corp comutativ;

- Structura de ordine

$x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x < y$ sau $x = y$ sau $x > y$

„$\leq$" – rel. de ordine $\Leftrightarrow$ $x < y$ sau $x = y$;

O_1) reflexivitatea: $x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$;

O_2) antisimetria: $x \leq y$ și $y \leq x \Rightarrow x = y$;

O_3) tranzitivitatea: $x \leq y$ și $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;

$O_1) \to O_2) \to O_3) \Rightarrow$ „$\leq$" relație de ordine;

O_4) ordine totală: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \leq y$ sau $y \leq x$

$O_1) \to O_4) \Rightarrow$ „$\leq$" – rel. de ordine totală

! $(\mathbb{R}; \leq)$ – mulțime total ordonată;

O_5) legătura cu „+": $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;
$x, y \in \mathbb{R}$;

O_6) legătura cu „$\cdot$": $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$;
$x, y \in \mathbb{R}; z \geq 0$;

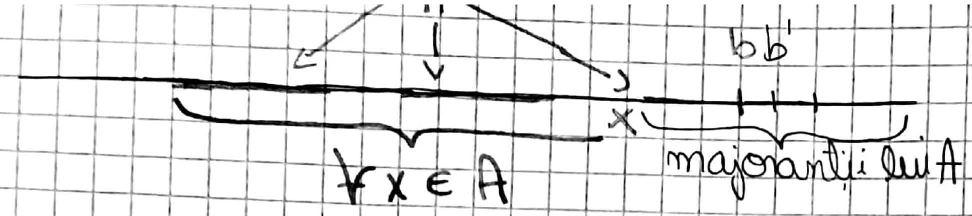
! $(\mathbb{R}; +; \cdot)$
- $A_1 \to A_4$
- $I_1 \to I_4$
- D
- $O_1 \to O_4$

$\Rightarrow$ corp comutativ total ordonat

Axioma de completitudine (Cantor-Dedekind)

Def.: Fie $A \subset \mathbb{R}$. 1) Spunem că A este o mulțime m[ărginită superior]
dacă există $b \in \mathbb{R}$, a.î. $x \leq b, \forall x \in A$;

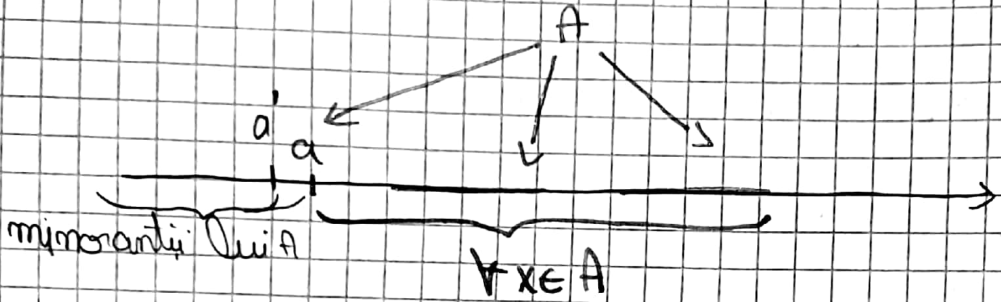
Scanat cu CamScanner



b - majorant

! Obs.: o mulțime poate avea mai mulți majoranți;

2) Spunem că A e o mulțime minorată dacă $\exists\, a \in \mathbb{R}$ a.î. $x \geq a,\ \forall x \in A$



a - minorant

! Obs.: o mulțime poate avea mai mulți minoranți;

EX: 1) $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

minoranții: $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq a_1$

majoranții: $\forall b \in \mathbb{R},\ b \geq a_n$

2) $A = \mathbb{N}$ - minoranții: $\forall a \in \mathbb{R},\ a \leq 0$

- majoranții: nu are;

3) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - nemărginite;

12.09.2022

- Def.: A - mărginită dacă este minorată și majorată

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a \leq x \leq b, \forall x \in A$

Teoremă: A - mărginită $\Leftrightarrow \exists\, M > 0$ a.î. $|x| \leq M, \forall x \in A$

! Obs.: min. A $\to$ minorant ce aparține mulțimii;
max. A $\to$ majorant ce aparține mulțimii;

Supremum și infimum:

Def.: Fie $A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$ este supremum pentru mulțimea A dacă îndeplinește condițiile:

1) M este majorant pentru A;
2) M este cel mai mic majorant;
($\exists\, M'$ alt majorant $\Rightarrow M < M'$)

- Notație: $\sup A = M$

! Obs.: dacă $\sup A \in A \Leftrightarrow \sup A = \max A$;

- Def.: Fie $A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$ este infimum pentru mulțimea A, dacă îndeplinește următoarele condiții:

1) M este minorant pentru A
2) M este cel mai mare minorant;
($\exists\, M'$ alt minorant $\Rightarrow M' < M$)

- Notație: $\inf A = m$

! Obs.: dacă $\inf A \in A \Leftrightarrow \inf A = \min A$;

• Def.: $A \subseteq \mathbb{R}$, A - nemărginită superior $\Rightarrow \nexists$ majorant

A - nemărginită inferior $\Rightarrow \nexists$ minorant;

Axioma de completitudine: orice mulțime nevidă mărginită inferior (minorată) are marginea inferioară în $\mathbb{R}$;

! Obs.: are loc și pentru mulțimea majorată;

Valoarea absolută a nr. real (modulul):

$\rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

Proprietăți:

1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$;

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a, b \in \mathbb{R}$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Ineg. triunghiului), $\forall a, b \in \mathbb{R}$

4) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a, \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ sau $x \geq a$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Dreapta reală încheiată:

A - nemărg. superior: $\nexists b \in \mathbb{R}$ a.î. $x \geq b, x \in A$;

A - nemărg. inferior: $\nexists a \in \mathbb{R}$ a.î. $x \leq a, x \in A$;

A - nem. sup. ($\sup A = +\infty$)

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \rightarrow$ dr. reală încheiată

• **Reguli de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$:**

1)) $x + (+\infty) = +\infty$;
$x + (-\infty) = -\infty$;
$x - (+\infty) = -\infty$;
$x - (-\infty) = +\infty$;

2)) $x \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$

$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & x > 0; \\ +\infty, & x < 0; \end{cases}$

3)) $\frac{x}{\pm\infty} = 0$;

4)) $|\pm\infty| = \infty$

5)) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

NU AU SENS:

1) $\infty - \infty$
2) $\frac{\infty}{0}$
3) $0 \cdot (\pm\infty)$
4) $\frac{0}{0}$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$
5) $1^{\pm\infty}$;
6) 0^0;
7) $(\pm\infty)^0$

• **Relații de ordine în $\overline{\mathbb{R}}$:**

1)) $-\infty < +\infty$
2)) $x < +\infty$; $\forall x \in \mathbb{R}$
3)) $-\infty < x$; $\forall x \in \mathbb{R}$

pag. 156, 157 – ex. ~~1~~, 2, 9 – grup

1 – c, d 3 – b
2 – c, d

majorant, minorant, min max
inf sup

Funcții mărginite. Funcții nemărginite

- $f: D \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D$

$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ → imaginea mulțimii A prin f.d.

$\Leftrightarrow A = D \Rightarrow f(A) = f(D) = Im f$

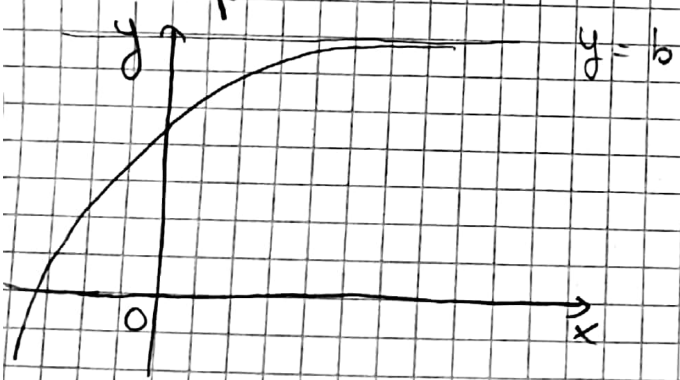
Def.: f.d. f este mărginită dacă imaginea ei ($f(D)$) este o mulțime mărginită;

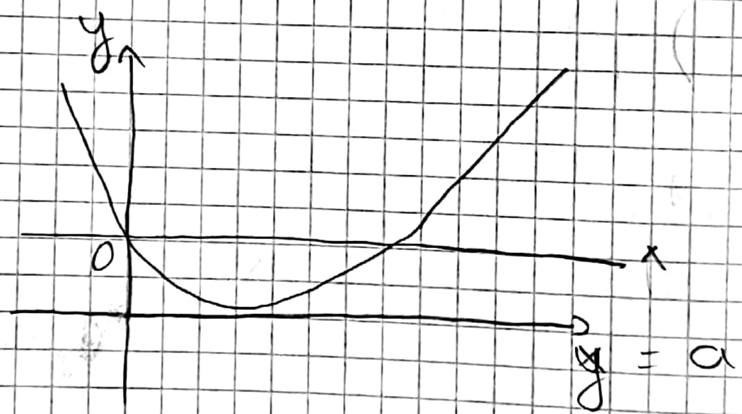
$\Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}$, a.î. $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in D$;

! $\exists\, M > 0$ a.î. $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in D$;

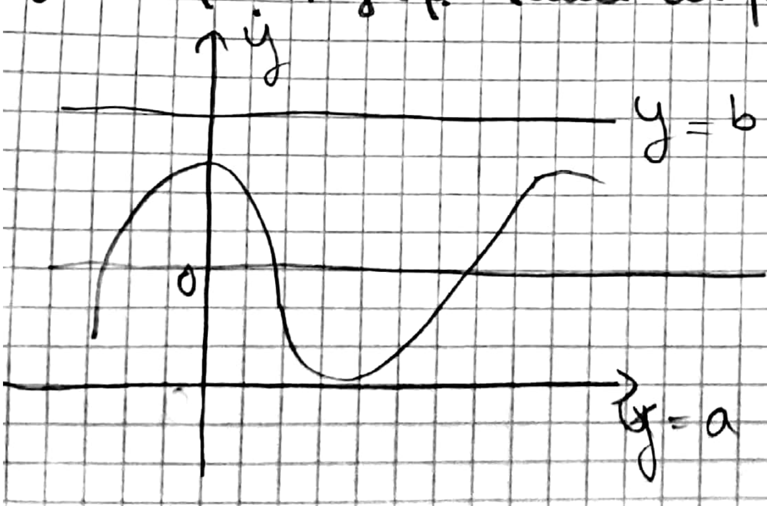
Def.: f.d. f este nemărginită dacă mulțimea $f(D)$ este o mulțime nemărginită;

- Grafic



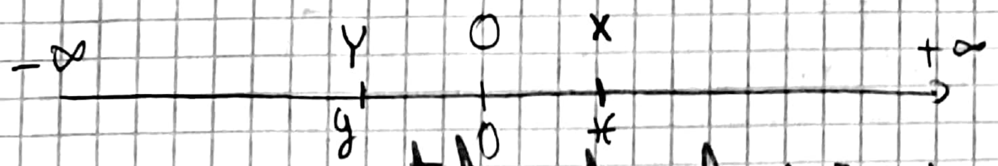


! A4 - f.d. + graf. + tabel cu prop.



Scanat cu CamScanner

• Axa reală:



$X(x) \rightarrow$ punctul X de abscisă x;

$Y(y) \rightarrow$ punctul Y de abscisă y;

$XY = |y - x| \rightarrow$ lungimea seg. $[XY]$;

↳ Intervale:

1. în $\mathbb{R}$:

a) mărginite: $(a;b)$; $[a;b]$; $[a;b)$; $(a;b]$;

b) nemărginite: $(-\infty;a]$; $(-\infty;a)$; $(a;+\infty)$; $[a;+\infty)$;

2. în $\overline{\mathbb{R}}$:

$[-\infty;a)$; $[-\infty;a]$;

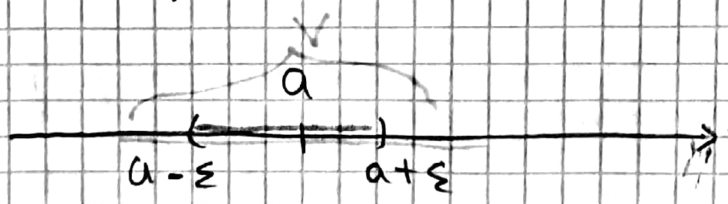
$(a;+\infty]$; $[a;+\infty]$

• Vecinătatea unui punct:

Fie $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in A$ și $V \subset A$,

spunem că V este vecinătatea lui „a" dacă $\exists \varepsilon > 0$ (ε - epsilon) a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq V$

↳ $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ interval centrat în a (simetric);



! **Obs**: - un punct poate avea o infinitate de vecinătăți;
- mulțimea vecinătăților unui punct se notează

$\boxed{\mathcal{V}_a = \mathcal{V}(a)}$

$$\boxed{V \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, \varepsilon > 0 \text{ a.î. } (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \in V}$$

• **Proprietăți**:

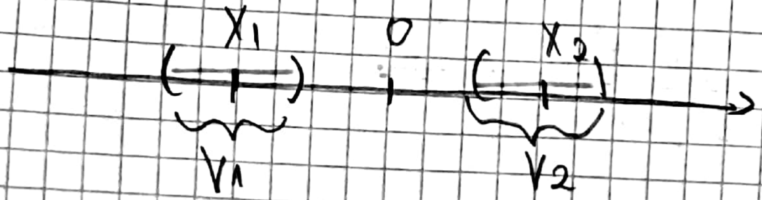
1) orice vecinătate a unui pct. conține punctul:
$a \in \mathbb{R}$ și $V \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow a \in V$

2) dacă o mulțime conține o vecinătate a unui punct, atunci și ea va fi o vecinătate a punctului:
$V \in \mathcal{V}(a)$ și $V \subseteq U \Rightarrow U \in \mathcal{V}(a)$;

3) intersecția a două vecinătăți a unui punct este o vecinătate a pct.
$V, U \in \mathcal{V}(a) \Rightarrow V \cap U \in \mathcal{V}(a)$

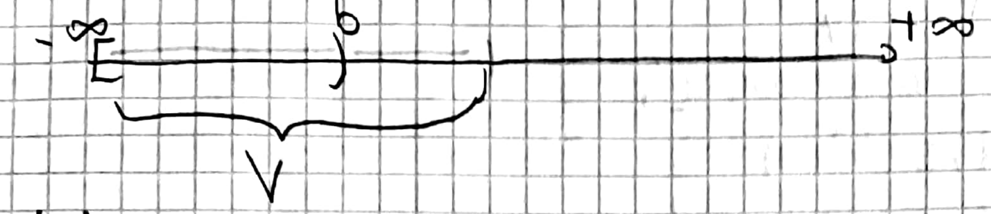
• **Proprietatea de separare în $\mathbb{R}$**

Dacă avem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, atunci $\exists\, V_1 \in \mathcal{V}(x_1)$; $V_2 \in \mathcal{V}(x_2)$ a.î. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

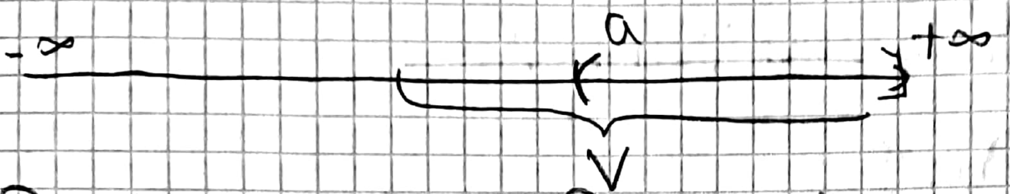


• **Vecinătăți în $\pm\infty$:**

→ V este vecinătate pt. $-\infty$ dacă $\exists\, b \in \mathbb{R}$ a.î. $[-\infty, b) \subset V$;



− V este vecinătate pentru $+\infty$ dacă $\exists\, a \in \mathbb{R}$ a.î. $(a, +\infty] \subset V$



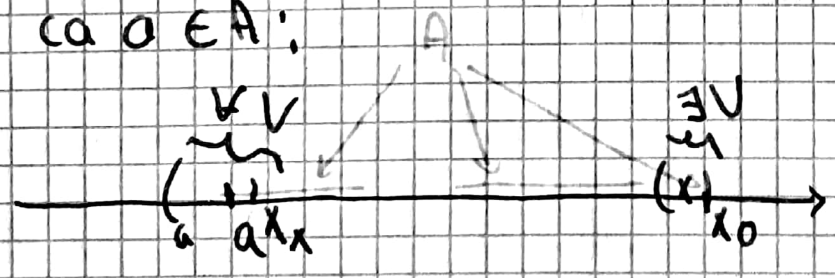
◦ **Punct de acumulare. Punct izolat**

Fie $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$, spunem că $a \in A$ este un punct de acumulare pentru A (punct limită) dacă orice vecinătate a lui a conține și alte puncte din mulțimea A, diferite de a;

→ $\forall V$ o vecinătate a lui A, mulțimea $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

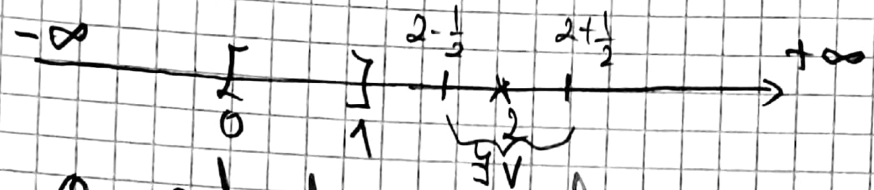
→ mulțimea punctelor de acumulare se notează A' (mulțimea derivată)

!Obs.: dacă a − pct. de acumulare, nu este obligatoriu ca $a \in A$;



Def.: x_0 este un punct izolat dacă există o vecinătate a lui, a.î. să nu conțină niciun alt element din mulțimea A: $\exists\, V \in \mathcal{V}(x_0)$ a.î. $V \cap A = \emptyset$

Ex: $A=[0;1]\cup\{2\}$



0 – pct. de acumulare;

$(0,1; -0,1) \in \mathcal{V}(0)$

$\exists \varepsilon > 0$ a.î. $(-\varepsilon; \varepsilon) \in \mathcal{V}(0)$

2 – pct. izolat;

$\exists V \left(2-\frac{1}{2}; 2+\frac{1}{2}\right) \in \mathcal{V}(2)$; $V \cap A = \emptyset$

$A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = \{+\infty\}$

$A = \mathbb{R} \Rightarrow A' = \overline{\mathbb{R}}$

Funcții elementare

- imaginea fct.
- monotonie;
- concavitate, convexitate;
- continuitate;
- grafic;

∘ funcțiile elementare: polinomială, radical, exponențială, logaritmică, trigonometrice;

Capitolul șiruri

23.09.2022

Șiruri de nr. reale:

Def.: Fie $A = \{0; 1; 2; \dots; k\}$, se nm. <u>șir de nr. reale</u> orice fct. $x : \mathbb{N} / A \to \mathbb{R}$

$x(n) \overset{not.}{=} x_n$ - termenul general al șirului / termenul de rang n;

EX: $0; 1; 2; \dots n \dots$

$\downarrow x_0 \quad \downarrow x_1 \quad \downarrow x_2 \dots \downarrow x_n \dots$

Not.: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}; (x_n)$ → șiruri;

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ → mulțimea termenilor șirului;

! **Obs.:** șirul nu este mulțime;

1) la șir contează ordinea elementelor;

2) în șir elementele se pot repeta;

ex: $(x_n): 1; 3; 5; 7; 9; \dots; 2n+1; \dots$

$(x_n): 1; -1; 1; -1; \dots; (-1)^n; \dots$

Modul de a defini un șir:

1) descriptive: enumerăm elementele;

2) analitic: → <u>printr-o formulă a termenului general</u>

ex: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = n^2 - 5n$

→ <u>relație de recurență</u>;

ex: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $x_{n+1} = x_n + r$, r = constanta

x_1

- **șirul lui Fibonacci**:

(x_n): $x_0 = x_1 = 1$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x \geq 1$

Subșir:

$\underline{x_1}$; $\underline{x_2}$; $\underline{x_3}$; ......; $\underline{x_{2n}}$; $\underline{x_{2n+1}}$; ....

$\rightarrow$ 2 subșiruri: (x_{2n+1}): x_1; x_3; .....; x_{2n+1}; ....

(x_{2n}): x_2; x_4; .....; x_{2n}; ....

$x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, subșir a lui x este orice compunere cu un șir crescător $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$;

$(x \circ k)(n) = x(k_n) \overset{not}{=} x_{k_n}$

Operații cu șiruri:

1) adunarea: $(x_n) + (y_n) = x_0 + y_0$; $x_1 + y_1$; .....

2) scăderea: $(x_n) - (y_n) = x_0 - y_0$; $x_1 - y_1$; .....

3) înmulțirea: $(x_n) \cdot (y_n) = x_0 \cdot y_0$; $x_1 \cdot y_1$; .....

4) câtul: $\frac{(x_n)}{(y_n)}$: $\frac{x_0}{y_0}$; $\frac{x_1}{y_1}$; .....;

exerciții:

ex. 1/ pag. 104

g) $x_n = C_{n+1}^{n}$, $n \geq 1$

$x_1 = C_2^1 = \frac{2!}{1!} = 2$

$x_2 = C_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$

$x_3 = C_4^3 = \frac{4!}{3!} = \frac{3! \cdot 4}{3!} = 4$

$\cancel{x_4 = \frac{6!}{}}$

$x_4 = \frac{5!}{4!} = 5$

$x_5 = \frac{6!}{5!} = 6$

Șiruri monotone și mărginite

Def.: (x_n), $n \geq 1$

1. (x_n) s. ↗ dacă $x_n < x_{n+1}, \forall n \geq 1$

$$x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} \ldots$$

$\Rightarrow x_1 \leq x_n, \forall n \geq 1$

2. (x_n) s. ↘ dacă $x_n > x_{n+1}, \forall n \geq 1$;

$$x_1 > x_2 > x_3 \ldots > x_n > x_{n+1} \ldots$$

$\Rightarrow x_n \leq x_1, \forall n \geq 1$

3) (x_n) s. monoton dacă este strict crescător sau strict descrescător;

!Obs.: pentru a stabili monotonia putem studia semnul diferenței $x_{n+1} - x_n \Rightarrow \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{s. ↗} \\ < 0 \Rightarrow \text{s. ↘} \end{cases}$

sau $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \Rightarrow \begin{cases} < 1 \Rightarrow \text{s. ↘} \\ > 1 \Rightarrow \text{s. ↗} \end{cases}$

$$\frac{g_n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$$

Def.: 1) Se spune că șirul (x_n) este minorant (sau mărginit inferior) dacă mulțimea termenilor lui este minorantă (mărginită inferior), adică dacă există $m \in \mathbb{R}$ a.î. $m \le x_n, \forall n$.

2) Se spune că șirul (x_n) este majorant (sau mărginit superior) dacă mulțimea termenilor lui este majorată (mărginită superior), adică dacă $\exists\, M \in \mathbb{R}$, a.î. $x_n \le M, \forall n$.

3) Se spune că șirul (x_n) e mărginit dacă mulțimea elementelor lui este mărginită, $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$, a.î. $m \le x_n \le M, \forall n$

11.10.2022

Limita unui șir

Def.: $(x_n)_{n \geq 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Spunem că șirul are limită x, dacă $\forall$ vecinătate a lui x conține toți termenii șirului, exceptând (eventual) un nr. finit de termeni.

Notație: $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ → limită când n tinde la infinit din x_n este egal cu x

! Obs.: Un șir are limita x dacă pentru $\forall$ vecinătate a lui x, în afara ei se află un nr. finit de termeni.

- șir convergent ⇒ șirul care are limită finită;

→ $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $x \in \mathbb{R}$

- șir divergent ⇒ șirul care nu este convergent;

1) nu are limită;
2) limita egală cu $\pm\infty$

! Obs. 1) Limita unui șir este punct de acumulare pentru mulțimea termenilor șirului.

2) șir divergent - $\forall$ $a \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi o vecinătate a lui a, în afara ei se află o infinitate de termeni ai șirului;

Criteriul cu ε:

Teoremă: Fie $(x_n)_{n\geq 1}$:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ - rang ce depinde de ε

a.î. $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ $|x_n - x| < \varepsilon$

Ex: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

$\to$ găsim $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\, \varepsilon>0$ $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{6n+3-6n-4}{9n+6}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\left|\frac{-1}{9n+6}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{9n+6} < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\Big|\ 9+6n>0,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$

$1 < \varepsilon(9n+6) \Leftrightarrow n > \frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$

ε	0							$\frac{1}{6}$					$+\infty$
$1-6\varepsilon$		+	+	+	+	+	+	0	−	−	−	−	−
9ε	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}$	|	+	+	+	+			0	−	−	−	−	−

$\Rightarrow n_\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{1-6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]+1, & \text{dacă } \varepsilon\in\left(0,\frac{1}{6}\right] \\ 1, & \text{dacă } \varepsilon>\frac{1}{6} \end{cases}$

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n\geq n_\varepsilon$ $\left|\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3}$

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$,
$x_n > \varepsilon$

3) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon$
$x_n < -\varepsilon$

- **Șiruri remarcabile**

1) șirul puterilor cu exponent real:
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty; & \alpha > 0 \\ 1; & \alpha = 0 \\ 0; & \alpha < 0 \end{cases}}$$

2) șirul exponențial de bază a, $a \in \mathbb{R}$
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (-1, 1) \\ \nexists, & a \leq -1 \end{cases}}$$

eoremă: orice șir convergent e mărginit,
onsecință: orice șir nemărginit e divergent.

oremă: A - o mulțime nevidă, x - pct. de acumulare pentru A ($x \in A'$) dacă $\exists$ un șir (x_n), $x_n \in A$, $x_n \neq x$ a.î. $x_n \to x$, pt. $n \to +\infty$

Prop. limitei unui șir:

1) dacă un șir are limită, atunci ea este unică;

2) dacă un șir are limită, atunci prin adăugarea sau eliminarea unui nr. finit de termeni, limita va rămâne aceeași;

3) prin schimbarea ordinii termenilor unui șir care are limită, se obține un nou șir care va avea aceeași limită;

4) limita unui șir cu termeni pozitivi va fi pozitivă

$(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x > 0$

$\Rightarrow$ analog pt. ter. negativi;

5) dacă avem un șir care are limita x pozitivă, atunci există un rang de la care toți termenii vor fi pozitivi;

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $x > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ (rang) a.î. $x_n > 0$, $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ analog pt. limite negative;

6) dacă avem un șir crescător cu limita x, atunci toți termenii șirului vor fi mai mici decât limita;

a) $(x_n)_{n\geq 1}$, (x_n) s.î. și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

$\Rightarrow x_n < x$, $\forall n \geq 1$

(5) dacă un șir e descrescător și are limită x, toți termenii vor fi mai mari decât limita:

$(X_n)_{n\geq 1}$, (X_n) s.î. și $\lim_{n\to\infty} X_n = X \Rightarrow$

$X_n > x$, $\forall n \geq 1$

- <u>limita modulului = modulul limitei</u>:

$\lim_{n\to\infty} |x_n| = \left|\lim_{n\to\infty} x_n\right| = |x|$, unde $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

↳ <u>Teoremă</u>: dacă un șir are limită, atunci orice subșir al său va avea aceeași limită;

<u>Consecință</u>: un șir este divergent dacă găsim 2 subșiruri care au limite diferite;

<u>Șirul convergent de la 0</u>:

<u>Proprietăți</u>:

P1) dacă avem un șir de nr. >0 care este s.î. și nemărginit, atunci limita din $\frac{1}{șir} = 0$

$(X_n)_{n\geq 1}$, (X_n) s.î. nemărginit și $X_n > 0$, $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{X_n} = 0$

! <u>Obs.</u>: $\frac{1}{+\infty} = 0$

P_2) - dacă avem un șir cu termeni pozitivi ce tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty, \quad x_n > 0, \forall n \geq 1 \quad x_n \to 0$$

! Obs.: $\frac{1}{0+} = +\infty$

- dacă avem un șir cu termeni negativi ce tinde la 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty, \quad x_n < 0, \forall n \geq 1, x_n \to 0$$

! Obs.: $\frac{1}{0-} = -\infty$

P_3 (Criteriul majorării):

→ Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$ și $x_n \geq 0$ și ∃ un șir $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ a.î. $x_n \leq \alpha_n$, $\forall n \geq 1$ și $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$,

atunci și $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_n \leq \alpha_n \\ \alpha_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \to 0}$$

P_4) operații cu șiruri ce converg la 0:

$(x_n)_{n\geq 1}$; $(y_n)_{n\geq 1}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

și $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$, atunci:

1) suma va converge la 0:

$(x_n + y_n) \to 0$

2) $(\alpha \cdot x_n) \to 0$ 3) $(x_n \cdot y_n) \to 0$

P5) <u>produsul dintre un șir mărginit și unul care tinde la 0, va tinde și el la 0:</u>

$(x_n)_{n \geq 1}$; $(y_n)_{n \geq 1}$

$\left.\begin{array}{l} y_n - \text{șir mărginit} \\ y_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n = 0}$

ex.: $\lim\limits_{n \to \infty} \sin n \cdot \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} \sin n \in [-1, 1] - \text{mărginit} \\ \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \left(\sin n \cdot \frac{1}{n}\right) = 0$

P6) $x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0$

Temă: ex. 3/pag. 200
subl. 2