LC_Curs3.

Echivalențe logice în logica propozițională

- Legile lui **DeMorgan**:

$$\neg (U \wedge V) \equiv \neg U \wedge \neg V$$

- Legile de **absorbție**:

$$U \wedge (U \vee V) \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee (U \wedge V) \equiv U$$

- Legile de **comutativitate**:

$$U \wedge V \equiv V \wedge U \quad \text{și} \quad U \vee V \equiv V \vee U$$

- Legile de **asociativitate**:

$$U \wedge (V \wedge Z) \equiv (U \wedge V) \wedge Z \quad \text{și} \quad U \vee (V \vee Z) \equiv (U \vee V) \vee Z$$

- Legile **distributivității**:

$$U \wedge (V \vee Z) \equiv (U \wedge V) \vee (U \wedge Z) \quad \text{și} \quad U \vee (V \wedge Z) \equiv (U \vee V) \wedge (U \vee Z)$$

- Legile de **idempotență**:

$$U \wedge U \equiv U \quad \text{și} \quad U \vee U \equiv U$$

O formulă se numește **consistentă** dacă și numai dacă are cel puțin un model, deci poate fi evaluată ca adevărată.

O formulă se numește **validă** dacă și numai dacă formula este evaluată ca adevărată în orice interpretare (toate interpretările sunt modele ale formulei).

O formulă se numește **inconsistentă** dacă și numai dacă formula este falsă în orice interpretare (nu are niciun model).

O formulă se numește **contingentă** dacă și numai dacă este consistentă, dar nu este validă.

Forme normale în logica propozițiilor

1. Un **literal** este o variabilă propozițională sau negația sa.
   $Ex.: \ p, \neg q$
2. O **clauză** este disjuncția unui număr finit de literali.
   $Ex.: p \vee \neg q \vee r$
3. Un **cub** este conjuncția unui număr finit de literali.
   $Ex.: p \wedge \neg q \wedge r$
4. **Clauza vidă** (□) este clauza fără literali, fiind clauza vidă inconsistentă.
5. O formulă este în **formă normală disjunctivă (FND)**, dacă aceasta este scrisă ca o disjuncție de cuburi.
   $Ex.: (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
6. O formulă este în **formă normală conjunctivă (FNC)**, dacă aceasta este scrisă ca o conjuncție de clauze.
   $Ex.: (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q)$

Algoritmul de normalizare:

Pas 1: Înlocuire $\rightarrow, \leftrightarrow, \leftarrow$.

Pas 2: Legile lui DeMorgan

Pas 3: Legile distributivității

Pas 4: Simplificarea folosind legile de simplificare, legile absorbției, legile de idempotență.

LC_Curs4.

Axiome și reguli de inferență

- $A1: U \to (V \to U)$
- $A2: \big(U \to (V \to Z)\big) \to (U \to V) \to (U \to Z)$
- $A3: (U \to V) \to (\neg V \to \neg U)$
- Modus Ponens: $U, U \to V \vdash V$

O formulă $U \in F_P$, astfel încât $\emptyset \vdash U$ se numește **teoremă**.

Consecințele teoremei de deducție

- $\vdash U \to ((U \to V) \to V)$
- $\vdash (U \to V) \to ((V \to Z) \to (U \to Z))$ – legea silogismului
- $\vdash (U \to (V \to Z)) \to (V \to (U \to Z))$ – legea permutării premizelor
- $\vdash (U \to (V \to Z)) \to (U \wedge \mathrm{V} \to Z)$ – legea reuniunii premizelor
- $\vdash (U \wedge \mathrm{V} \to Z) \to (U \to (V \to Z))$ – legea separării premizelor

Teorema de **corectitudine**:

<u>Dacă $\vdash U$, atunci $\vDash U$.</u>

(Validitatea sintactică implică validitatea semantică)

Teorema de **completitudine**:

<u>Dacă $\vDash U$, atunci $\vdash U$.</u>

(Validitatea semantică implică validitatea sintactică)

LC_Curs5.

Metoda tabelelor semantice

clasa α – formule de tip conjunctiv	clasa β – formule de tip disjunctiv
$A \wedge B$	$A \vee B$
$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
$\neg(A \rightarrow B)$	$A \rightarrow B$

- O ramură se numește **închisă**(⊗) dacă ea conține o formulă și negație ei, în caz contrar, se numește **deschisă**.
- O ramură se numește **completă** dacă ea fie este închisă, fie toate formulele de pe acea ramură au fost descompuse.
- O tabelă se numește **închisă** dacă toate ramurile sale sunt închise.
- O tabelă se numește **deschisă** dacă are cel puțin o ramură deschisă.
- O tabelă se numește **completă** dacă toate ramurile ei sunt complete.

Teorema de **corectitudine și completitudine** a metodei tabelelor semantice:

O formulă U este **teoremă (tautologie)** dacă și numai dacă există o tabelă semantică închisă pentru formula $\neg U$.

LC_Curs6.

Metoda rezoluției (*sintactică, prin respingere*)

Teorema de **corectitudine și completitudine**:

Mulțimea S este inconsistentă dacă și numai dacă $S \vdash_{Res} \square$.

U este **tautologie** dacă și numai dacă $FNC(\neg U) \vdash_{Res} \square$.

Strategii:

- Strategia eliminării

Pas 1: Eliminarea clauzelor tautologice

Pas 2: Eliminarea clauzelor subsumate de alte clauze din S

Pas 3: Eliminarea clauzelor care conțin literali puri în S

- Strategia saturării pe nivele

$$S_1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$$

1. *Res: C1-C2; C1-C3; C1-C4; C2-C3; C2-C4; C3-C4 ->* $S_2 = \{C_5, C_6\}$
2. *Res: C5-C1; C5-C2; C5-C3; C5-C4; C5-C6; C6-C1; C6-C2; C6-C3; C6-C4; C6-C5 -> una dintre acestea va ieși clauza vidă, altfel se continuă!*

- Strategia mulțimii suport

$S_2 = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$, $Y = \{C_6\}$, $S_2 \backslash Y = S_1$, S_1 – consistentă

Res: Luăm clauza din Y și o clauză din S_2. Încercăm să rezolvăm. Dacă nu iese cu nicio clauză din S_2, atunci este consistentă.

LC_Curs7.

Rafinările rezoluției

- Rezoluția blocării

Teorema de **completitudine și corectitudine**:

Fie S o mulțime de clauze în care fiecare literal este indexat în mod arbitrar cu un întreg.

S este inconsistentă dacă și numai dacă din S se deduce prin rezoluția blocării clauza vidă.

- Rezoluția liniară

Teorema de **completitudine și corectitudine**:

Mulțimea S de clauze este inconsistentă dacă și numai dacă
$$S \vdash_{Res}^{lin} \square.$$

Cazuri particulare: Rezoluția unitară (*unit*) – clauzele centrale au *cel puțin o clauză părinte unitară* (conține un singur literal)

Rezoluția de intrare (*input*) – clauzele laterale sunt clauze *inițiale* (de intrare)

Teorema de echivalență input - unit:

$$S \vdash_{Res}^{input} \square \text{ dacă și numai dacă } S \vdash_{Res}^{unit} \square.$$

Tipuri de metode

	Semantice	Sintactice
Directe	Tabela de adevăr FNC	Deducția (*mp*)
prin **Respingere**	FND Tabele semantică	Rezoluția (generală, strategia eliminării, strategia saturării pe nivele, strategia mulțimii suport, rafinarea rezoluției blocării, rafinarea rezoluției liniare, cazuri particulare: input și unit)

LC_Curs8.

Logica predicatelor de ordinul I

- $A1: U \to (V \to U)$
- $A2: \left(U \to (V \to Z)\right) \to (U \to V) \to (U \to Z)$
- $A3: (U \to V) \to (\neg V \to \neg U)$
- $A4: (\forall x)U(x) \to U(t)$, unde t este un termen arbitrar
- $A5: \left(U \to V(y)\right) \to \left(U \to (\forall x)V(x)\right)$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U, iar x nu este variabilă liberă nici în U, nici în V.
- Modus Ponens: $U, U \to V \vdash_{mp} V$
- Regula generalizării: $U(x) \vdash_{gen} (\forall x)U(x)$

(x era o variabilă liberă în U)

Variabilele din formulele predicative care se află sub incidența unui cuantificator se numesc ***variabile legate***, în caz contrar, ele se numesc ***variabile libere***.

O formulă predicativă se numește ***închisă***, dacă toate variabilele sale sunt legate, iar, în caz contrar, se numește ***deschisă***.

O formulă $U \in F_{Pr}$, astfel încât $\emptyset \vdash U$ se numește **teoremă**.

- *O formulă A* este *realizabilă (consistentă)* dacă şi numai dacă există o interpretare I şi o funcţie $a \in As(I)$ astfel încât $v^I_a(A)=T$. În caz contrar formula se numeşte *nerealizabilă (inconsistentă)*.
- Formula A este *adevărată în interpretarea I* dacă şi numai dacă pentru orice funcţie $a \in As(I)$ de asignare avem $v^I_a(A)=T$ şi notăm $\models_I A$, iar I se numeşte *model* al lui A.
- Interpretarea I se numește *anti-model* al formulei predicative A dacă A este evaluată ca falsă în I, adică: $\forall\ a \in As(I)$ are loc $v^I_a(A)=F$.
- *Formula* A este *validă (tautologie)* dacă şi numai dacă A este adevărată în orice interpretare şi se notează: $\models A$.
- Două *formule A* şi *B* sunt *logic echivalente* dacă $v^I_a(A)= v^I_a(B)$ pentru orice interpretare I şi funcţie a de asignare. Notaţie $A \equiv B$.
- O mulţime S de formule *implică logic* o formulă A dacă toate modelele mulţimii (adică modelele conjuncţiei formulelor din S) sunt modele ale formulei. Spunem că A este o *consecinţă logică* a mulţimii de formule S şi notăm $S \models A$.
- O *mulţime de formule* predicative este *consistentă* dacă formula obţinută prin conjuncţia elementelor sale este consistentă, adică are cel puţin un model.
- O *mulţime de formule* este *inconsistentă* dacă nu există nici un model pentru formula obţinută prin conjuncţia elementelor sale.

Legile distributivității:

- $\exists$ față de $\vee$:

$$(\exists x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \equiv (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$$

- $\forall$ față de $\wedge$:

$$(\forall x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \equiv (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$$

Legile semidistributivității:

- $\exists$ față de $\wedge$:

$$\vDash (\exists x)\big(A(x) \wedge B(x)\big) \rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$$

- $\forall$ față de $\vee$:

$$\vDash (\forall x)\big(A(x) \vee B(x)\big) \rightarrow (\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x)$$

Algoritmul de aducere la forma normală clauzală:

<u>Pas 1</u>: Se înlocuiesc $\rightarrow, \leftrightarrow$.

<u>Pas 2</u>: Se aplică legile lui DeMorgan.

<u>Pas 3</u>: Se redenumesc variabilele legate.

<u>Pas 4</u>: Se extrag cuantificatorii în fața formulei. (forma prenexă)

<u>Pas 5</u>: Eliminarea cuantificatorilor existențiali. (forma Skolem)

<u>Pas 6</u>: Eliminarea cuantificatorilor universali. (forma Skolem)

<u>Pas 7</u>: Distributivitatea lui $\vee$ față de $\wedge$. (forma normală clauzală)

Teorema de **completitudine şi corectitudine**:

Fie S o mulțime de formule predicative, iar A o formulă predicativă.

$$S \vDash A \text{ dacă și numai dacă } S \vdash A.$$

LC_Curs9.

Metoda tabelelor semantice în calculul predicatelor

clasa γ – formule cuantificate universal:

$$
\begin{array}{lcl}
(\forall x)A(x) & \qquad & \neg(\exists x)A(x) \\
| & & | \\
A(c_1) & & \neg A(c_1) \\
| & & | \\
A(c_2) & & \neg A(c_2) \\
| & & | \\
\ldots & & \ldots
\end{array}
$$

$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n - toate\ constantele\ existente\ pe\ ramur$ă

clasa δ – formule cuantificate existențial:

$$
\begin{array}{lcl}
(\exists x)A(x) & \qquad & \neg(\forall x)A(x) \\
| & & | \\
A(a) & & \neg A(a)
\end{array}
$$

$a - constant$ă $nou\ introdus$ă

LC_Curs11.

Algebre Booleene

O conjuncție de variabile se numește **monom.**

Un monom care conține toate cele n variabile se numește **monom canonic** sau **minterm** de n variabile.

Disjuncția care conține toate cele n variabile se numește **maxterm** de n variabile.

Metoda diagramelor **Veitch**

$$max_1 = m_{13} \vee m_{12} \vee m_8 \vee m_9 = x_1\overline{x}_3$$

$$max_2 = m_{10} \vee m_{11} \vee m_8 \vee m_9$$

$$= x_1\overline{x}_2$$

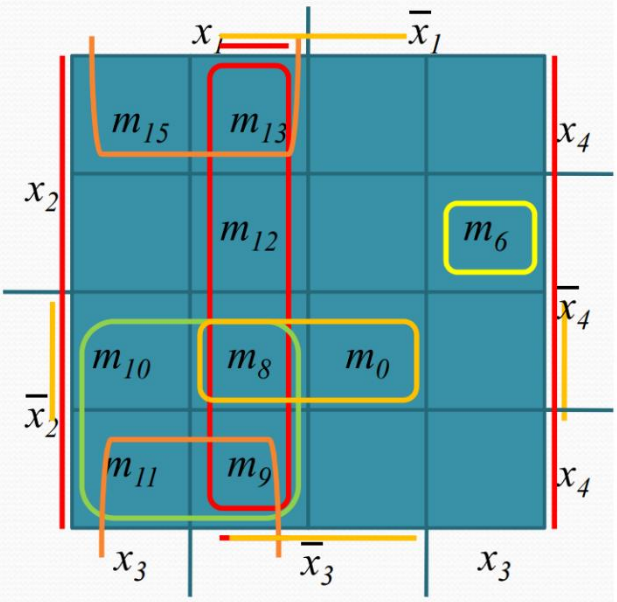
$$max_3 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{15} \vee m_{13}$$

$$= x_1x_4$$

$$max_4 = m_8 \vee m_0$$

$$= \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

$$max_5 = m_6 = \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$$



Forma simplificată:

$$f^s(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$$

Metoda diagramelor **Karnaugh**

$x_1 \backslash x_2x_3$	00	01	11	10
0				
1				

Metoda analitică a lui **Quine-Mc'Clusky**

Pas 1: Ordonarea mulțimii suport a funcției cu n variabile, după numărul de valori 1 conținut de fiecare n-uplu.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = m_4 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_8 \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_{11} \vee m_{12}$$

$$S_f = \{(0,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,1,1), (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,0,1,1), (1,1,0,0)\}$$

$$S_f = \{(0,1,1,1), (1,0,1,1), (0,1,1,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0)\}$$

Pas 2:

Grupul	x_1	x_2	x_3	x_4	
I	0	1	1	1	m_7
	1	0	1	1	m_{11}
II	0	1	1	0	m_6
	1	0	0	1	m_9
	1	0	1	0	m_{10}
	1	1	0	0	m_{12}
III	0	1	0	0	m_4
	1	0	0	0	m_8

Pas 3: Factorizare

Grupul		x_1	x_2	x_3	x_4	
I	√	0	1	1	1	m_7
	√	1	0	1	1	m_{11}
II	√	0	1	1	0	m_6
	√	1	0	0	1	m_9
	√	1	0	1	0	m_{10}
	√	1	1	0	0	m_{12}
III	√	0	1	0	0	m_4
	√	1	0	0	0	m_8
IV=I+II		0	1	1	-	$m_7 \vee m_6$
Factorizare	√	1	0	-	1	$m_{11} \vee m_9$
simplă	√	1	0	1	-	$m_{11} \vee m_{10}$
V=II+III		0	1	-	0	$m_6 \vee m_4$
	√	1	0	0	-	$m_9 \vee m_8$
	√	1	0	-	0	$m_{10} \vee m_8$
		-	1	0	0	$m_{12} \vee m_4$
		1	-	0	0	$m_{12} \vee m_8$
VI=IV+V Factorizare dublă		1	0	-	-	$m_{11} \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_8$

Mulțimea monoamelor maximale este formată din <u>toate monoamele</u> corespunzătoare liniilor <u>nebifate</u> din tabel.

$max_1 = m_7 \vee m_6 = \overline{x}_1 x_2 x_3$

$max_2 = m_6 \vee m_4 = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4$

$max_3 = m_{12} \vee m_4 = x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$

$max_4 = m_{12} \vee m_8 = x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4$

$max_5 = m_{11} \vee m_9 \vee m_{10} \vee m_8 = x_1 \overline{x}_2$

$$M(f) = \{\overline{x}_1 x_2 x_3, \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4, x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4, x_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4, x_1 \overline{x}_2\} = \{max_1, max_2, max_3, max_4, max_5\}$$

Pas 4: Identificarea monoamelor centrale

	max_1	max_2	max_3	max_4	max_5
m_7	$\circledast$				
m_{11}					$\circledast$
m_6	*	*			
m_9					$\circledast$
m_{10}					$\circledast$
m_{12}			*	*	
m_4		*	*		
m_8				*	*

$C(f) = \{max_1, max_5\}$

Suntem în cazul II.

Cazuri:

- Cazul I: $M(f) = C(f) \Rightarrow f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$
- Cazul II: $M(f) \neq C(f), C(f) \neq \emptyset \Rightarrow$
  $$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1, x_2, x_3, x_4) \vee h(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
  Cazul III: $M(f) \neq C(f), C(f) = \emptyset \Rightarrow$
  $$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = h(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Pas 5: Indentificarea formelor simplificate

$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = max_1 \vee max_5 = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2$

În tabelul de mai sus:

Se hașurează coloanele care conțin $\circledast$.

Se hașurează liniile ce conțin * hașurate anterior.

Se observă că cel mai simplu mod de a acoperi tot tabelul este:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = max_3$$

Rezultă că <u>forma simplificată</u> este:

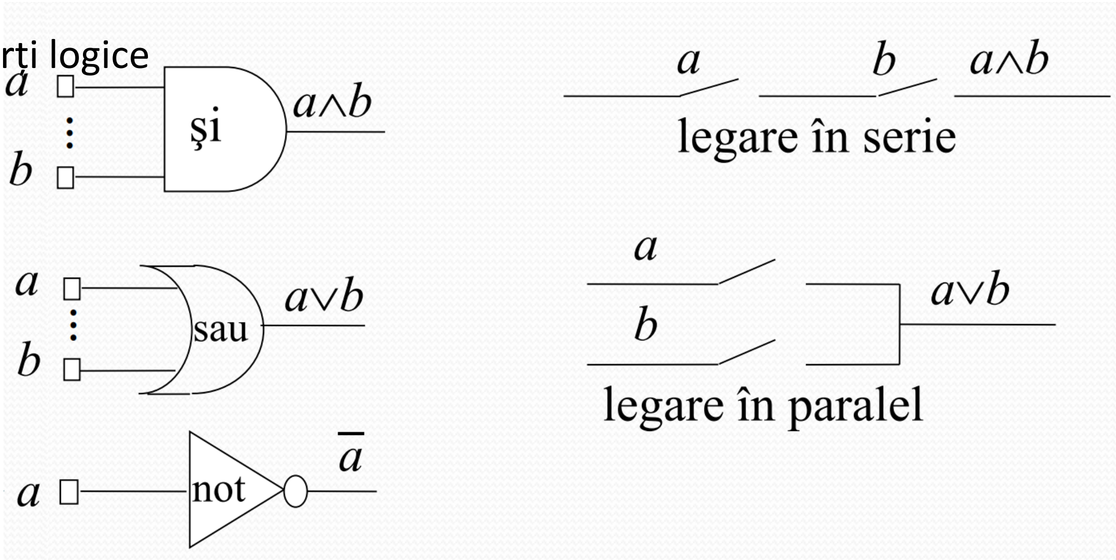
$$f'(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1, x_2, x_3, x_4) \vee h(x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$= \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$$

LC_Curs13.

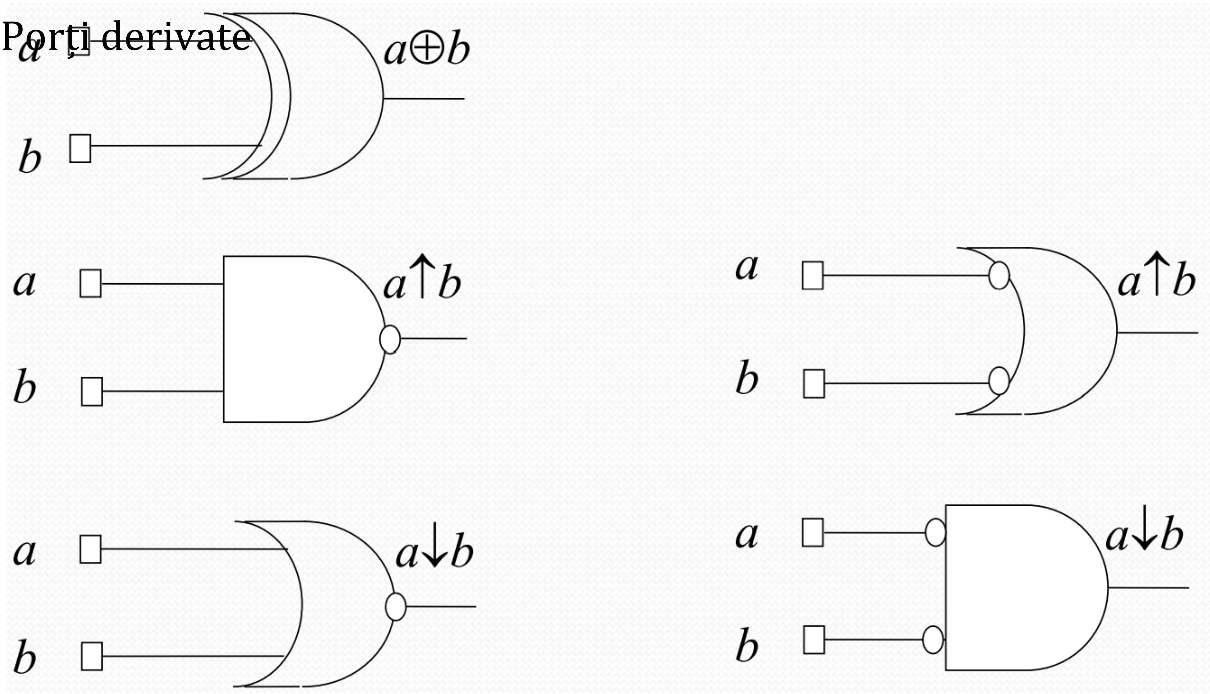
Circuite logice

O **poartă** este un minicircuit logic care realizează una dintre operațiile logice de bază: ∧, ∨, ¯.

Porți logice



Porți derivate



Pasul 1: Identificarea intrărilor (variabilelor) și ieșirilor (funcțiilor)

- intrare: 4 cifre binare: x_1, x_2, x_3, x_4.
- ieșire: $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ pentru $x_1x_2x_3x_{4_{(2)}} = i_{(10)}, i = \overline{0,9}$

Pasul 2: Construirea tabelei de valori asociate

x_1	x_2	x_3	x_4	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	FCD (cu un singur element)
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$
0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4$
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4$
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	$f_7(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1x_2x_3x_4$
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	$f_8(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$f_9(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$

Pasul 3: Obținerea expresiilor funcțiilor (FCD de mai sus)

Pasul 4: Simplificarea funcțiilor

Pasul 5: Desenarea circuitului

...