

Complementul față de 2. Discuție și exemple.

Matematic, REPREZENTAREA unui număr NEGATIV în complement față de doi este valoarea $2^n - V$, unde V este valoarea absolută a numărului reprezentat.

Motto:

Cu complementul față de 2, “Interpretăm reprezentări și reprezentăm interpretări”

Obs. Notățiile din acest document care se referă la configurații în baza 2 NU vor conține sufixul b, deoarece această cerință există doar la nivel de sintaxă a limbajului de asamblare. Acest material nu conține cod sursă în limbaj de asamblare. În schimb, referirea la baza 16 va conține sufixul h pentru a se distinge de valorile din baza 10 (ex: 93h vs. 93).

Complementul față de 2. Discuție și exemple.

Matematic, reprezentarea unui număr NEGATIV în complement față de doi este valoarea $2^n - V$, unde V este valoarea absolută a numărului reprezentat.

1001 0011 (= 93h = 147), deci în interpretarea FARA SEMN 1001 0011 = 147

Fiind un număr care începe cu 1, în interpretarea CU SEMN, acest număr este unul negativ. Cât este valoarea lui ?

Răspuns: Valoarea sa este: $-(\text{complementul față de 2 al configurației binare inițiale}) = -(2^n - V)$

Ca urmare trebuie să determinăm complementul față de 2 al configurației 1001 0011

Cum se obține complementul față de 2 al unui număr (reprezentat în memorie, deci reprezentat în baza 2) ?

Varianta 1 (Oficială): Se scade binar conținutul (evident binar) al locației de complementat din 100 ...00, unde numărul de după cifra binară 1 are atâtea zerouri câți biți are locația de complementat.

$$\begin{array}{r} 1\ 0000\ 0000 - \\ \underline{1001\ 0011} \\ 0110\ 1101 \end{array} = 2^n - V$$

= 6Dh = 96+13 = 109 (deci complementul față de 2 pe 8 biți al numărului 147 este 109)

Ca urmare, valoarea în interpretarea CU SEMN a numărului 1001 0011 este -109

Varianta 2 (derivată din definiția complementului față de 2 – mai rapidă dpdv practic): se inversează valorile tuturor biților (valoarea 0 devine 1 și valoarea 1 devine 0) din locația de reprezentare, după care se adaugă 1 la valoarea obținută.

Cf acestei reguli, plecăm deci de la 1001 0011 și inversăm valorile tuturor biților, obținând 0110 1100 după care adăugăm 1 la valoarea obținută: $0110\ 1100 + 1 = 0110\ 1101 = 109$; Ca urmare, valoarea în interpretarea CU SEMN a numărului 1001 0011 este -109

Varianta 3 (MULT mai rapidă dpdv practic, cea mai rapidă pt obținerea configurației binare a complementului față de 2): Se lasă neschimbați biții începând din dreapta reprezentării binare până la primul bit 1 inclusiv, iar restul biților se inversează.

Aplicând această regulă, plecăm de la 1001 0011 și lăsăm neschimbați biții din dreapta până la primul bit 1 inclusiv (în cazul nostru asta înseamnă doar primul bit 1 din dreapta – care rămâne așadar neschimbat), iar restul biților se inversează, deci obținem... 0110 1101 = 6DH = 109

Deci, valoarea în interpretarea CU SEMN a numărului 1001 0011 este -109

Varianta 4 (CEA mai rapidă dpdv practic, dacă ne interesează doar valoarea absolută în baza 10 a complementului față de 2):

Regulă derivată din definiția complementului față de 2: Suma valorilor absolute a celor două valori complementare este cardinalul mulțimii reprezentabile pe acea dimensiune.

- Pe 8 biți se pot reprezenta 2^8 valori = 256 valori ([0..255] sau [-128..+127])
- Pe 16 biți se pot reprezenta 2^{16} valori = 65536 valori ([0..65535] sau [-32768,+32767])
- Pe 32 biți se pot reprezenta 2^{32} valori = 4.294.967.296 valori (...)

Deci pe 8 biți, complementul față de 2 al lui 1001 0011 (= 93h = 147) este $256 - 147 = 109$, ca urmare valoarea în interpretarea CU SEMN pentru 1001 0011 este -109

[0..255] – interval de reprezentare admisibil pt “întreg FARA semn reprezentat pe 1 octet” (UNSIGNED BYTE)
[-128..+127] – interval de reprezentare admisibil pt “întreg CU semn reprezentat pe 1 octet” (SIGNED BYTE)

[0..65535] – interval de reprezentare admisibil pt “întreg FARA semn repr. pe 1 Word = 2 octeți” (UNSIGNED WORD)
[-32768..+32767] – interval de reprezentare admisibil pt “întreg CU semn repr. pe 1 Word = 2 octeți” (SIGNED WORD)

La ce ne trebuie complementul față de 2 nouă ca programatori în ASM ?

1001 0011 (= 93h = 147), deci în interpretarea FARA SEMN 1001 0011 = 147

Care este valoarea în interpretarea cu semn a lui 1001 0011 ? a). 01101101 b). -109 c). 6Dh d). +147

Care este valoarea în interpretarea cu semn a lui 93h ? a). 01101101 b). -109 c). 6Dh d). +147

Care este valoarea în interpretarea cu semn a lui 147 din baza 10 ? a). 01101101 b). -109 c). 6Dh d). +147 (nici unul dintre răspunsuri, deoarece întrebarea este un nonsens – pentru că 147 **ESTE DEJA O INTERPRETARE !!!**)

1 0000 0000 –

1001 0011

01101101

= 6Dh = 96+13 = 109 (deci complementul față de 2 pe 8 biți al numărului 147 este 109)

Ca urmare, valoarea în interpretarea CU SEMN a numărului 1001 0011 este... -109

Deci 147 și 109 sunt 2 valori complementare, în sensul că 1001 0011 = fie 147, fie -109 în funcție de interpretare.

Deci complementul lui 147 este -109. Este valabil oare și invers ? Este -147 complementul lui 109 ?... **NU !!!!!!!**

Și dacă nu, care este complementul lui 109 atunci ?

Să verificăm... 109 = 01101101, complementul față de 2 a lui 01101101 este 10010011 = 147, deci.... Ce facem dpdv practic cu informația aceasta ? ...și care este concluzia atunci ?...

Matematic, reprezentarea unui număr NEGATIV în complement față de doi este valoarea $2^n - V$, unde V este valoarea absolută a numărului reprezentat. Deci toată discuția despre complementul față de 2 are sens dpdv practic DOAR ATUNCI când ne referim la REPREZENTAREA BINARA a unui număr NEGATIV din baza 10 !!! Adică la INTERPRETAREA CU SEMN a unui număr binar care începe cu 1 !! Adică DOAR atunci când discutăm despre INTERPRETAREA de numere care încep cu 1 în baza 2 !!!!! Atunci când avem un număr binar care începe cu 0, INTERPRETAREA lui VA FI ACEEASI atât în CU SEMN cât și fără semn, adică 01101101 = 109 IN AMBELE INTERPRETARI !! Ca urmare, faptul că 147 este în sine "complementul lui 01101101 (109 în baza 10) față de 2 ca valoare absolută" nu ne ajută la nimic și nu are nici o urmare practică pentru nimic într-un astfel de context.

Deci: toată discuția despre valori complementare are sens doar dacă atenția noastră se concentrează pe problematica NUMERELOR NEGATIVE !! Ex: se pleacă de la o reprezentare în baza 2 care începe cu 1 și ne întrebăm care va fi numărul negativ asociat în interpretarea CU SEMN !! Sau: plecăm de la o valoare absolută (109 sau 147) și ne întrebăm care este reprezentarea în baza 2 pentru numărul -109 sau pentru -147 !! Deci totul se învâрте in jurul numerelor NEGATIVE !!

O abordare care pleacă de la o reprezentare în baza 2 care începe cu 0 și se întreabă sec DOAR care va fi “valoarea complementară a acelei reprezentări” (fără ca această valoare complementară să fie folosită apoi la ceva concret) nu își are sensul scoasă din contextul interpretării unui număr CU SEMN ca negativ.

Faptul că există un interval de valori pentru care interpretarea unei configurații binare este aceeași în ambele interpretări se întâmplă (luăm ca exemplu dimensiunea unui octet) deoarece $[0..255] \cap [-128..+127] = [0..+127]$ și astfel orice număr din intervalul $[0..+127]$ va reprezenta atât varianta CU SEMN cât și cea FARA SEMN a configurației binare date ! Aceasta REPRESENTARE în baza 2 va fi o secvență de biți care începe cu 0, o astfel de secvență fiind caracterizată de faptul că în baza 10 valoarea sa va fi aceeași (pozitivă!) în ambele interpretări. Aceste numere fac parte din intersecția interpretării fără semn $[0..255]$ cu cea cu semn $[-128 ..+127]$.

Deci intersecția intervalelor de reprezentare admisibile pe dimensiunea N este constituită DOAR din valorile care în binar încep cu bitul 0 ! Ca urmare, valorile binare care încep cu bitul 1 NU sunt comune acestor intervale “complementare”, ceea ce înseamnă că interpretările cu semn și fără semn ale oricărei configurații binare care începe cu 1 VOR FI INTOTDEAUNA DIFERITE și ele NU vor fi NICIODATA părți ale aceluiași interval de reprezentare admisibil !!! Valorile absolute ale celor două interpretări reprezintă două valori complementare. Ex: -128, 128; 147, -109; -1, 255; -3, 253; -127, 129 NU vor face parte niciodată din același interval de reprezentare admisibil. (NU se aplică însă și pentru 127, -129 !!! – explicațiile urmează... ☺)

Așadar... care este reprezentarea binară pt -147 ? Sau cât este 10010011 în interpretarea cu semn (= -109) ?
147 = 10010011, deci ... cum îl obținem pe -147 ?

Mai concret, hai să vedem care sunt tipurile de întrebări pe care le putem pune plecând de la o configurație binară dată și să fixăm astfel care sunt situațiile în care apare necesitatea utilizării complementului față de 2:

a) Dacă avem o REPRESENTARE în baza 2 de tip $\overline{0xxx\dots}$ de valoare $+\overline{abc}$ în interpretarea FARA semn, ce valoare va avea această REPRESENTARE în interpretarea CU SEMN din BAZA 10 ? $(b2 - b10)$

R: Tot atâta ! Un număr care începe cu 0 în baza 2 are aceeași valoare atât în interpretarea cu semn cât și în cea fără semn, fiind un număr pozitiv (109 este tot 109 în ambele interpretări).

b). Dacă avem o REPRESENTARE de forma $\overline{0xxx\dots}$ de valoare $+\overline{abc}$, care va fi REPRESENTAREA binară a valorii $-\overline{abc}$? (Ex: dacă plecăm de la 109, cum se reprezintă binar -109 ?) $(b2 - b2)$

R: De abia într-o astfel de întrebare începe “complementul față de 2 să joace un rol”, iar răspunsul este: REPRESENTAREA sa va fi “complementul față de 2 al configurației binare inițiale”. Pentru valoarea 109 = 01101101, complementul față de 2 a lui 01101101 este 10010011, deci $-109 = 10010011$

Ca urmare putem concluziona că valoarea complementară a unui întreg care începe cu 0, va începe cu 1 (excepție făcând doar valoarea 0) și va încăpea ca valoare complementară în interpretarea CU SEMN pe aceeași dimensiune de reprezentare ca și valoarea inițială !! (-109 este tot un byte ca și 109).

c). Dacă avem o REPRESENTARE de tip $\overline{1xxx\dots}$ de valoare $+\overline{abc}$ în interpretarea FĂRĂ semn, ce valoare va avea această REPRESENTARE în interpretarea CU SEMN din baza 10 ? $(b2 - b10)$

R: Valoarea sa este: $-(\text{complementul față de 2 al configurației binare inițiale})$. Pentru exemplul nostru, avem: $10010011 = 147$ (fără semn) = $-(\text{complementul față de 2 al configurației } 10010011) = -(01101101) = -109$.

d). Dacă avem o REPRESENTARE de forma $\overline{1xxx\dots}$ de valoare $+\overline{abc}$, care va fi REPRESENTAREA binară a valorii $-\overline{abc}$? (Ex: dacă plecăm de la $10010011 = +147$, cum se reprezintă binar -147 ?) $(b2 - b2)$

R: Răspunsul nu poate fi decât unul similar cu cel de la b) : REPRESENTAREA sa va fi "complementul față de 2 al configurației binare inițiale". Numai că: dacă un număr începe cu 1 în reprezentarea lui în baza 2 și are valoarea $+\overline{abc}$ în interpretarea FARA SEMN, atunci tot cu 1 va trebui să înceapă și varianta lui negativă $-\overline{abc}$ ca REPRESENTARE (pentru că în caz contrar nu ar mai fi un număr negativ în interpretarea CU SEMN). Dar, complementarea unei valori binare de forma $\overline{1xxx}....$ va furniza prin complementare în mod natural o valoare binară CARE INCEPE CU 0 pe o dimensiune de reprezentare identică cu cea de pornire !!! - excepție făcând DOAR valorile de forma $\overline{100}....$ (-128, +128, -32768, +32768 etc).

Ca urmare, concluzionăm că dacă plecăm de la o reprezentare de forma $\overline{1xxx}....$ de valoare $+\overline{abc}$ NU PUTEM OBȚINE valoarea $-\overline{abc}$ PE O ACEEAȘI DIMENSIUNE DE REPRESENTARE !!!!!

Dovada : $147 = 10010011$ ($147 \in [0..255]$, însă $-147 \notin [-128..+127]$, deci -147 NU este reprezentabil pe un octet chiar dacă +147 este !!!!!)

Deci nu numai că, complementarea nu poate fi făcută corect pe aceeași dim. de reprezentare ca a val. inițiale ca METODOLOGIE, dar și analiza intervalelor de reprezentare admisibile ne confirmă asta dpdv SEMANTIC !!!!

Ca urmare, obținerea lui -147 plecând de la $147 = 10010011$, se face astfel:

i). Reprezentarea binară a lui 147 începe cu 1, dar trebuie să ținem cont și că $-147 \notin [-128..+127]$, însă $-147 \in [-32768..+32767]$ de unde rezultă că -147 NU este reprezentabil ca octet CI DOAR CA ȘI CUVÂNT !!

ii). Pe o dimensiune de tip WORD, $147 = 00000000\ 10010011$ (deci un număr binar care începe cu 0) și conform răspunsului de la b), avem că $-147 =$ "complementul față de 2 al configurației binare inițiale".

Complementul față de 2 a configurației $00000000\ 10010011$ este $11111111\ 01101101$, deci
 $-147 = 11111111\ 01101101 = \text{FF6Dh}$

Verificare: 11111111 01101101 = FF6Dh = 65389 în interpretarea FĂRĂ semn, suma valorilor absolute a celor două valori complementare fiind $65389 + 147 = 65536 = \text{cardinalul mulțimii numerelor reprezentabile pe 1 WORD}$, deci cele 2 interpretări ale configurației binare 11111111 01101101 sunt corecte și consistente !!

Ca urmare, putem deduce că implicarea “complementului față de 2” se manifestă în **3 cazuri** :

| Format binar nr | Interpretare | Valoare zecimală | În ce fel este implicat “complementul față de 2” | Răspuns |
|-----------------|--------------|------------------|--|---|
| 0xxx | Fără semn | +abc | - | - |
| | Cu semn | +abc | Cum se reprezintă -abc ? (b) | Compl față de 2 a lui 0xxx |
| 1xxx | Fără semn | +def | - | - |
| | Cu semn | | Ce valoare va avea 1xxx în interpretarea cu semn ? (c) | -(compl față de 2 a lui 1xxx) |
| | Cu semn | | Cum se reprezintă -def ? (d) | Compl față de 2 a lui 1xx extins fără semn pe $2 * \text{sizeof}(1xxx)$ |

(excepție fac reprezentările de forma de forma $\overline{100}...$ (-128, +128, -32768, +32768 etc).

Noțiunea de “complement față de 2” NU este implicată în nici un fel atunci când abordăm doar reprezentările fără semn ! Exemplu:

| Nr binar | Interpretare | Valoare | Implicare “complement față de 2” | Răspuns |
|----------|--------------|---------|--|--|
| 01101101 | Fără semn | +109 | - | - |
| | Cu semn | +109 | Cum se reprezintă -109 ? (b) | 10010011 |
| 10010011 | Fără semn | +147 | - | - |
| | Cu semn | | Ce valoare va avea 10010011 în interpretarea cu semn ? (c) | - (01101101) = -109 |
| | Cu semn | | Cum se reprezintă -147 ? (d) | Complementul față de 2 a lui 00000000 10010011 care este 11111111 01101101 |

Coloanele 3 și 4 de mai sus pot fi rezumate astfel:

| Numărul X în reprezentare binară începe cu | -X începe cu | -X se reprezintă LA NIVELUL ARHITECTURII și al LIMBAJULUI DE ASAMBLARE: | Exemple: |
|--|--------------|---|--|
| 0 | 1 | Pe aceeași dimensiune ca X | $109 = 01101101$; $-109 = 10010011$ |
| 1 | 1 | $2 * \text{sizeof}(X)$ | $147 = 10010011$; $-147 = 11111111\ 01101101$ |

(excepție fac reprezentările de forma de forma $\overline{100}....$ (-128 , $+128$, -32768 , $+32768$ etc).

Ca și concluzii:

* pentru o configurație binară de valoare VAL care începe cu **0** în baza 2, -VAL se va reprezenta pe aceeași dimensiune de reprezentare ca și reprezentarea inițială (109 și -109 se REPREZINTĂ pe aceeași dimensiune de reprezentare - 1 octet).

* pentru o configurație binară de valoare VAL care începe cu **1** în baza 2, -VAL se va reprezenta pe o dimensiune de reprezentare MAI MARE decât cea inițială - de dimensiune DUBLĂ ca tip de dată în limbaj de asamblare (147 reprezentabil pe 1 octet, -147 reprezentabil pe 1 WORD), dar în fapt doar cu 1 bit mai mult “pe hârtie” dpdv al “teoriei” regulilor de complementare ($147 = 10010011 = 8$ biți, $-147 = 1\ 01101101 = 9$ biți necesari MINIMAL pentru reprezentare). Deci -147 nu se poate reprezenta pe octet !!

Care este nr MINIM de biți pe care se poate reprezenta -147 ?

- Pe n biți se reprezintă 2^n valori:
 - fie valorile $[0..2^n - 1]$ în interpretarea FARA SEMN
 - fie valorile $[-2^{(n-1)}, 2^{(n-1)}-1]$ în interpretarea CU SEMN

Pe 8 biți astfel se pot reprezenta 2^8 valori (=256 valori), fie $[0..2^8-1] = [0..255]$ în interpretarea FARA SEMN, fie valorile $[-2^{(8-1)}, 2^{(8-1)}-1] = [-2^7, 2^7-1] = [-128..+127]$ în interpretarea CU SEMN

Pe 9 biți... $[0..511]$ sau $[-256..+255]$ și cum $-147 \in [-256..+255]$ rezulta că numărul MINIM de biți pe care se poate reprezenta -147 este 9, iar reprezentarea lui -147 este:

(...Pe 9 biți se pot reprezenta 512 numere, $512-147 = 365 = 1\ 6Dh = 1\ 0110\ 1101$...)

Deci $1\ 0110\ 1101 = 16Dh = 256 + 6*16 + 13 = 256 + 96 + 13 = 365$ în interpretarea FARA SEMN !

$1\ 0110\ 1101 = -(\text{complementul față de 2 a lui } 1\ 0110\ 1101) = -(0\ 1001\ 0011) = -(093h) = -147$

Ca și TD în ASM, evident că avem byte, word sau dword, deci $-147 \in [-32768..+32767]$ și cf. celor de mai sus avem $-147 = 11111111\ 01101101 = FF6Dh$ ca valoare reprezentată pe cuvânt (word) = 2 octeți.

Care este numărul minim de biți pe care se poate reprezenta 3 ?

Răspuns: pe 2 biți; $3 = 11b$

Pe 2 biți se pot reprezenta 2^2 valori (=4 valori), fie $[0..2^2-1] = [0..3]$ în interpretarea FARA SEMN, fie valorile $[-2^{(2-1)}, 2^{(2-1)}-1] = [-2^1, 2^1-1] = [-2..+1]$ în interpretarea CU SEMN

Care este numărul minim de biți pe care se poate reprezenta -3 ?

Răspuns: pe 3 biți; deoarece pe 2 biți NU se poate datorită explicației de mai sus și pe 3 biți avem că:

Pe 3 biți se pot reprezenta 2^3 valori (=8 valori), fie $[0..2^3-1] = [0..7]$ în interpretarea FARA SEMN, fie valorile $[-2^{(3-1)}, 2^{(3-1)}-1] = [-2^2, 2^2-1] = [-4..+3]$ în interpretarea CU SEMN

Ca urmare, cum

(...Pe 3 biți se pot reprezenta 8 numere, $8-3 = 5 = 101b...$) - deci 101b este reprezentarea lui -3 pe 3 biți

101b = 5 în interpretarea FARA SEMN !

101b = -(complementul față de 2 a lui 101) = -(011) = -3

De lămurit: Cine este “complementul față de 2” pentru cine ? Și față de cine ?...

O configurație binară față de alta ? Sau un număr zecimal cu semn față de unul fără semn ? **Sau două valori absolute una față de alta ?...** Vom vedea că se folosesc în practică toate cele 3 exprimări...

“Complementul față de 2” se referă la REPRESENTĂRI sau la INTERPRETĂRI... ?

Pt că este “FAȚĂ DE 2” se refera LA BAZA 2, deci ne referim în primul rând ca definiție la REPRESENTĂRI

- complementul față de 2 a lui 01101101 este 10010011 (asta mă ajută să răspund la întrebarea “care este reprezentarea lui -109 ?”) (b)
- complementul față de 2 a lui 10010011 este 01101101 (asta mă ajută să răspund la întrebarea “care este valoarea în interpretarea CU SEMN a lui 10010011”) (c)

Pe de altă parte ne referim ȘI LA INTERPRETĂRI, mai exact la INTERPRETĂRILE FĂRĂ SEMN ale celor două reprezentări binare complementare - 01101101 și 10010011 de exemplu – spunând că “109 și 147 sunt 2 valori complementare” (echivalent semantic și cu “Valorile absolute ale celor două interpretări ale unui număr binar ce începe cu 1 reprezintă două valori complementare”). Adică 147 și 109 sunt 2 valori complementare, în sensul că REPRESENTAREA 1001 0011 = fie +147, fie -109 în funcție de interpretare. INSA NU există o reprezentare care să aibă fie valoarea -147, fie 109 !!

De aceea, pentru a distinge claritatea a ceea ce se vrea a fi subliniat, se forțează de multe ori exprimarea într-un sens poate incorect cumva relativ la definiție dar relevant ca și concluzie în cazuri ca cel de mai sus, astfel: 147 și 109 sunt 2 valori complementare, în sensul că “-109 este complementul lui +147”, însă “-147 NU este complementul lui +109” !!! Forțarea aici este reprezentată de apariția semnului MINUS în exprimare... însă pe de altă parte devine clar ceea ce se vrea exprimat.

Deci... NU are sens discuția despre valori complementare în baza 10 pornind de la o REPRESENTARE care începe cu 0 în baza 2 !! ... de exemplu în sensul că pornind de la 01101101 (109) valoarea sa complementară este 10010011 (147). Ca aceste concepte să aibă sens trebuie să fie implicate în discuție DIN START “reprezentarea unui număr negativ” sau “interpretarea unei configurații binare CE INCEPE CU BITUL 1 ca număr cu semn”.

Deci implicarea “complementului față de 2” este una UNIDIRECȚIONALĂ !!! având sens doar pornind dinspre interpretarea CU SEMN și a reprezentării numerelor negative ! Asta exprima de fapt “forțarea” de mai sus...