

Algebra liniară  
Model lucrare

1. a) Să se definească subspațiul unui spațiu vectorial și să se dea un exemplu de subspațiu al  $\mathbb{R}$ -spațiului vectorial  $\mathbb{R}^2$ .  
b) Fie  $V$  un  $K$ -spațiu vectorial și fie  $U_1, U_2 \leq_K V$  două subspații. Să se arate că  $U_1 \cap U_2 \leq_K V$ .  
c) Fie  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 = x_1 - x_2 - x_3\}$ . Să se arate că  $S \leq \mathbb{R}^3$  și să se găsească o bază pentru  $S$ .
2. a) Să se definească dependentă liniară și să se dea un exemplu de 3 vectori liniar dependenți în  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Fie  $V$  un  $K$ -spațiu vectorial și  $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^t \in V^{2 \times 1}$ , cu  $b_1 \neq 0$ . Să se arate că  $\mathbf{b}$  este liniar dependentă dacă și numai dacă  $b_2 \in \langle b_1 \rangle$ .  
c) Să se arate că

$$\mathbf{b} = (b_1 = (1, 2, -1), b_2 = (3, 2, 2), b_3 = (-1, -3, 2))^t$$

este o bază pentru  $\mathbb{R}^3$  și să se determine  $[x]_{\mathbf{b}}$ , unde  $x = (5, 7, -1)$ .

3. a) Fie  $V$  un  $K$ -spațiu vectorial și fie  $v_1, v_2, v_3 \in V$  astfel încât  $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ . Să se arate că dacă  $f, g : V \rightarrow W$  sunt aplicații liniare cu proprietatea că  $f(v_i) = g(v_i)$ , pentru  $i = 1, 2, 3$  atunci  $f = g$ .  
b) Se consideră subspațiile lui  $\mathbb{R}^4$ :

$$S = \langle s_1 = (1, -1, 2, 2), s_2 = (2, 0, 3, 7), s_3 = (1, 1, 2, 4), s_4 = (2, 0, 5, 5) \rangle$$

și

$$T = \langle t_1 = (-2, 4, 7, -3), t_2 = (1, -1, -4, 2), t_3 = (-1, 3, 3, -1) \rangle.$$

Să se determine câte o bază și dimensiunea pentru  $S$ ,  $T$ ,  $S + T$  și  $S \cap T$ .

4. Fie  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 3x_3, x_1 - 2x_2 + 11x_3)$ .  
a) Să se arate că  $f$  este liniară.  
b) Să se determine matricile  $[f]_{\mathbf{e}, \mathbf{e}}$  și  $[f]_{\mathbf{b}, \mathbf{b}}$  unde  $\mathbf{e}$  este baza canonică a lui  $\mathbb{R}^3$  iar  $\mathbf{b}$  este baza de la exercitiul 2 c.  
c) Să se determine câte o bază și dimensiunea pentru  $\text{Ker } f$  și  $\text{Im } f$ .