CURS 6

Rangul unei matrice

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$, $A \neq O_{m,n}$. Reamintim:
• $\operatorname{rang} A = r$, dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. (Prin definiţie, $\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$.)
• Pentru $A \in M_n(K)$, $\operatorname{rang} A = n$ dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.
• $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.
• Rangul matricei A este numărul maxim de coloane (linii) liniar independente ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui A.
• $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toate celelalte linii (coloane) ale lui A sunt combinaţii liniare de liniile (coloanele) matricii A ale căror elemente formează pe d.

Corolarul 1. Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ (K corp comutativ), atunci $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

Dacă vreuna dintre cele două matrici este nulă, proprietatea este evidentă. Putem, aşadar, să considerăm că ambele matrici sunt nenule şi că

$$\min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\} = \operatorname{rang} B = r \in \mathbb{N}^*$$

şi că un minor nenul al lui B „se decupează” din coloanele $j_1, \ldots, j_r$ cu $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$. (Pentru celălalt caz, reformulăm proprietatea pentru transpuse şi aceeaşi soluţie va conduce la rezultatul dorit.) Coloanele lui AB sunt

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \ldots,\ A\begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix}.$$

Pentru orice $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$, există $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{rk} \in K$ astfel ca

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k}\begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k}\begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk}\begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$A\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k} \cdot A\begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k}A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk} \cdot A\begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix},$$

adică în AB toate coloanele $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ sunt combinaţii liniare de coloanele $j_1, \ldots, j_r$. Prin urmare, rangul matricii AB este cel mult r.

Corolarul 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi K un corp comutativ. O matrice $A \in M_n(K)$ este inversabilă (în inelul $(M_n(K), +, \cdot)$) dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

Corolarul 3. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$. Rangul matricii A este r dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ obţinuţi prin bordarea acestuia (dacă există) sunt nuli.

Procedeu pentru determinarea rangului unei matrici:

Corolarul 3 ne arată că $\operatorname{rang} A$ cu $A \neq O_{m,n}$ se poate determina astfel: se porneşte de la un minor nenul d al lui A şi se calculează minorii care îl bordează pe d până se găseşte unul nenul căruia i se aplică acelaşi procedeu şi se continuă aşa mai departe. După un număr finit de paşi se ajunge la un minor de ordinul r nenul cu proprietatea că toţi minorii care îl bordează sunt zero. Rezultă $r = \operatorname{rang} A$.

Sisteme de ecuaţii liniare

Considerăm un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

unde $a_{ij}, b_j \in K$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ şi } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Reamintim că matricea $A \in M_{m,n}(K)$ se numeşte **matricea sistemului**, iar matricea $\overline{A}$ de tipul $(m, n+1)$ obţinută din A prin adăugarea coloanei B formată din termenii liberi se numeşte **matricea extinsă a sistemului**. Dacă toţi termenii liberi sunt zero, adică $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, atunci sistemul (1) se numeşte **sistem liniar şi omogen**. Notând

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

sistemul (1) se scrie sub formă de ecuaţie matriceală, astfel:

$$AX = B \tag{2}$$

Sistemul de ecuaţii $AX = O_{m,1}$ se numeşte **sistemul omogen asociat** sistemului $AX = B$.

Definiţia 4. Un n-uplu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ se numeşte **soluţie a sistemului** (1) dacă înlocuind în (1) pe x_i cu α_i $(i = 1, \ldots, n)$ egalităţile obţinute sunt adevărate. Un sistem de ecuaţii care are cel puţin o soluţie se numeşte **compatibil**. Un sistem de ecuaţii care are o singură soluţie respectiv mai multe soluţii se numeşte **compatibil determinat** respectiv **compatibil nedeterminat**. Un sistem de ecuaţii care nu are soluţii se numeşte **incompatibil**.

Observaţiile 5. a) Regula lui Cramer afirmă că în cazul $m = n$ şi $\det A \neq 0$ sistemul (1) este compatibil determinat şi unica sa soluţie poate fi găsită cu formulele lui Cramer.
b) Dacă sistemul (1) este omogen, atunci $(0, 0, \ldots, 0) \in K^n$ este soluţie a sistemului numită **soluţia nulă** sau **soluţia banală**. Deci orice sistem liniar şi omogen este compatibil.

Teorema următoare este un instrument important în studiul compatibilităţii unui sistem de ecuaţii liniare.

Teorema 6. (Kronecker-Capelli) Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse, adică $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$.

Demonstraţie.

Definiţia 7. Fie sistemul (1). Dacă $\operatorname{rang} A = r$ atunci există în A un minor de ordinul r nenul şi toţi minorii din A de ordin mai mare decât r sunt nuli. Un minor al lui A de ordinul r nenul se numeşte **minor principal**. Dacă d_p este un minor principal, atunci minorii de ordinul $r + 1$ ai lui $\overline{A}$ obţinuţi prin bordarea lui d_p cu coloana termenilor liberi şi cu câte o linie care nu intervine în d_p (dacă astfel de minori există) se numesc **minori caracteristici**.

Observaţia 8. Numărul minorilor caracteristici corespunzător unui minor principal este $m - r$.

Teorema 9. (Rouché) Sistemul (1) este compatibil dacă şi numai dacă toţi minorii caracteristici corespunzători unui minor principal, dacă există, sunt nuli.

Corolarul 10. a) Un sistem liniar şi omogen are numai soluţia nulă dacă şi numai dacă numărul necunoscutelor este egal cu rangul sistemului.
b) Un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute are numai soluţia nulă dacă şi numai dacă determinantul matricei sistemului este diferit de zero.
c) Dacă sistemul (1) este compatibil, atunci acesta are soluţie unică dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = n$, adică rangul sistemului coincide cu numărul necunoscutelor.

În continuare descriem o metodă de rezolvare a sistemului (1) bazată pe teorema lui Rouché.

O metodă de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare:
Cu ajutorul teoremei lui Rouché studiem compatibilitatea sau incompatibilitatea sistemului (1). Pentru aceasta începem prin a identifica un minor principal d_p. Dacă există un minor caracteristic nenul corespunzător lui d_p, atunci sistemul este incompatibil şi procedeul se încheie. Dacă nu există minori caracteristici sau toţi minorii caracteristici corespunzători lui d_p sunt nuli, atunci sistemul este compatibil. Dacă ordinul lui d_p este r atunci cele r ecuaţii care ne dau liniile lui d_p se numesc **ecuaţii principale**, iar necunoscutele ale căror coeficienţi intervin în d_p se numesc **necunoscute principale**. Celelalte $m-r$ ecuaţii şi $n-r$ necunoscute se numesc **secundare**. Din $\operatorname{rang} \overline{A} = \operatorname{rang} A = r$ rezultă că ecuaţiile secundare sunt combinaţii liniare a ecuaţiilor principale.

Prin urmare sistemul (1) are aceleaşi soluţii ca şi sistemul format numai din ecuaţiile principale, adică cele două sisteme sunt echivalente. Pentru simplificarea scrierii **presupunem că primele** r **ecuaţii şi** r **necunoscute sunt principale**. Deci sistemul (1) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + x_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + x_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + x_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases} \tag{3}$$

Dacă $n = r$, adică toate necunoscutele sunt principale, atunci sistemul (3) are numărul ecuaţiilor egal cu numărul necunoscutelor şi determinantul $d_p \neq 0$. În acest caz sistemul are o soluţie unică, care se poate determina cu formulele lui Cramer.

Dacă $n > r$, atunci necunoscutele secundare $x_{r+1}, \ldots, x_n$ iau valori arbitrare $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ în K, iar necunoscutele principale se obţin, în funcţie de acestea, rezolvând cu ajutorul regulii lui Cramer sistemul de r ecuaţii cu r necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}\alpha_{r+1} - \cdots - a_{rn}\alpha_n \end{cases}$$

cu determinantul $d_p \neq 0$.

Transformări elementare asupra unei matrici. Aplicaţii

Fie K un corp comutativ, $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

Definiţia 11. Vom numi **transformări elementare asupra liniilor (coloanelor)** matricii A următoarele:

I) permutarea a două linii (coloane) ale lui A;

II) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element nenul din K;

III) înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un element din K (scalar) şi adunarea la alta.

Aplicaţia 1. Calculul determinanţilor: vezi seminarul anterior.

Să reamintim că aceste transformări pot fi folosite în calculul determinanţilor şi că nici una dintre ele nu anulează un determinant nenul şi nici nu transformă un determinant nul într-unul nenul. E uşor de dedus de aici că prin aplicarea acestor transformări asupra unei matrici A rezultă o matrice B pentru care numărul maxim de coloane (linii) liniar independente ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui B este acelaşi ca pentru A, adică A şi B au acelaşi rang.

Pe baza acestei observaţii se poate formula un alt procedeu pentru determinarea rangului unei matrici şi, astfel, ajungem la:

Aplicaţia 2. Calculul rangului unei matrice:

Pentru a determina rangul unei matrice $A \in M_{m,n}(K)$ putem începe prin efectuarea de transformări elementare asupra liniilor şi coloanelor lui A şi a matricelor obţinute succesiv din A cu scopul de a obţine o matrice B ale cărei singure elemente nenule, dacă există, să apară pe primele poziţii ale diagonalei principale. Astfel, din A rezultă o matrice B de forma

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cu a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{rr}$ nenule. Matricele A şi B au acelaşi rang, şi anume r.

Exemple - la seminar

Aplicaţia 3. Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare prin **Metoda (eliminării a) lui Gauss.** Fie K un corp comutativ şi sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

cu coeficienţi în K şi $\overline{A}$ matricea extinsă a sistemului. Această metodă se bazează pe faptul că

(i) permutarea a două ecuaţii ale sistemului (1),

(ii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ nenul,

(iii) înmulţirea unei ecuaţii din (1) cu un (scalar) $\alpha \in K$ şi adunarea la altă ecuaţie,

sunt transformări ale sistemului care conduc la sisteme echivalente cu (1). Cum toate aceste transformări acţionează, de fapt, asupra coeficienţilor şi termenilor liberi ai ecuaţiilor sistemului, se constată imediat că acestor transformări le corespund transformări elementare asupra liniilor matricei extinse a sistemului.

Aşadar, putem trage concluzia ca efectuând transformări elementare asupra liniilor matricii extinse a sistemului (1) se obţine matricea extinsă a unui sistem echivalent cu (1). **Metoda lui Gauss** (numită şi **metoda eliminării parţiale**) constă în efectuarea de tranformări elementare succesive asupra liniilor unor matrici rezultate din matricea extinsă $\overline{A}$ a sistemului (1), cu scopul de a obţine o matrice în care ,,coborând" găsim din ce în ce mai multe zerouri la început de linie, matrice numită **matrice sau formă eşalon**. (Situaţia este similară cu cea din **metoda reducerii** pe care o foloseam în gimnaziu pentru a rezolva sisteme de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute, doarece creşterea numărului de zerouri la început de linie înseamna lipsa (reducerea) numărului de necunoscute în ecuaţia corespunzătoare din sistemul aferent.)

Definiţia 12. O matrice de tipul (m, n) este într-o **formă eşalon** cu $k \leq m$ linii nenule dacă este o matrice pentru care:
a) dacă $n_0(i)$ este numărul elementelor nule de la începutul liniei i, atunci

$$0 \leq n_0(1) < n_0(2) < \dots < n_0(k);$$

b) dacă $k < m$, atunci liniile $k+1, \dots, m$ sunt nule.

O formă eşalon cu k linii nenule pentru care

$$n_0(1) = 0,\ n_0(2) = 1,\ n_0(3) = 2, \dots,\ n_0(k) = k - 1$$

se numeşte **formă trapezoidală**.

Observaţiile 13. a) Orice matrice poate fi adusă la o formă eşalon exclusiv prin transformări elementare de linii.

b) O matrice pătratică de ordinul n este inversabilă dacă şi numai dacă poate fi adusă (exclusiv) prin transformări elementare de linii la o formă trapezoidală cu n linii nenule (pe care o numim **formă (matrice) triunghiulară**).

c) O matrice pătratică de ordinul n este inversabilă dacă şi numai dacă poate fi adusă (exclusiv) prin transformări elementare de linii la matricea unitate I_n.

În unele forme ale sale, inclusiv cea folosită de noi, **Metoda lui Gauss** constă în a aduce matricea $\overline{A}$ chiar la o formă trapezoidală B.

Observaţiile 14. a) Pentru a obţine forma trapezoidală B poate fi necesar uneori să permutăm câte 2 coloane ale matricii obţinute din matricea sistemului, ceea ce corespunde permutării a câte doi termeni în fiecare din ecuaţiile sistemului corespunzător, fapt care nu alterează sistemul deoarece adunarea în corpul K este comutativă.
b) Dacă pe parcursul acestui procedeu, apare într-o linie a unei matrici 0 în toate poziţiile corespunzătoare matricii sistemului şi un element nenul în ultima poziţie, adică în coloana corespunzătoare termenilor liberi atunci sistemul dat este incompatibil, ecuaţia corespunzătoare din sistemul echivalent corespunzător fiind $0 = a$, cu a nenul.

Elementele nenule $a'_{11}, \ldots, a'_{kk}$ de pe diagonala formei trapezoidale (cu k linii nenule)

$$B = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \ldots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \ldots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

furnizează necunoscutele principale. Sistemul echivalent cu (1) de matrice extinsă B se rezolvă (după ce considerăm necunoscutele secundare ca parametri) începând cu ultima ecuaţie.

Observaţia 15. a) O ,,rafinare” a metodei lui Gauss este aşa numita **metodă Gauss-Jordan** sau **metoda eliminării totale**. Prin această metodă, $\overline{A}$ se aduce prin transformări elementare de linii şi, eventual, permutări de coloane diferite de coloana termenilor liberi la o formă trapezoidală

$$B = \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{1,k+1} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & a''_{22} & 0 & \dots & 0 & a''_{2,k+1} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a''_{kk} & a''_{k,k+1} & \dots & a''_{kn} & b''_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

cu $a''_{11}, a''_{22}, \dots, a''_{kk}$ nenule. (Evident, dacă sistemul este compatibil, altfel, în ultima coloană, sub linia k, vor apărea elemente nenule.)

b) Mai mult, putem aduce matricea extinsă a sistemului la forma

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{1,k+1} & \dots & a'''_{1n} & b'''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a'''_{2,k+1} & \dots & a'''_{2n} & b'''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a'''_{k,k+1} & \dots & a'''_{kn} & b'''_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ceea ce permite exprimarea imediată a necunoscutelor principale cu ajutorul necunoscutelor secundare.

Aplicaţia 4. Calculul inversei unei matrice: Fie K un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ o matrice cu $d = \det A \neq 0$. Reamintim că ecuaţia matriceală

$$A \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \tag{2}$$

este forma matriceală a unui sistem compatibil determinat şi că soluţia sa este

$$\begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm $j = 1$ şi $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Atunci $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$ e prima coloană a matricii A^{-1}, adică

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1}\alpha_{11} \\ d^{-1}\alpha_{12} \\ \vdots \\ d^{-1}\alpha_{1n} \end{pmatrix}$$

(reamintim că cu α_{ij} am notat în cursurile anterioare complementul algebric al elementului a_{ij}). Desigur,

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = I_n \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

Trecând această rezolvare prin metoda Gauss-Jordan, se deducem că matricea extinsă a sistemului (2) poate fi adusă prin transformări elementare asupra liniilor sale la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{1n} \end{pmatrix}.$$

Considerăm, pe rând, $j = 2$ şi $\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, apoi $j = 3$ şi $\begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ \vdots \\ b_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,..., $j = n$ şi $\begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, formăm sistemele (2) şi folosim metoda Gauss-Jordan pentru a le rezolva. Aplicăm exact aceleaşi tranformări elementare ca în cazul $j = 1$ asupra liniilor matricei extinse a fiecărui sistem rezultat cu scopul de a aduce matricea sistemului la forma I_n, şi se obţine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{21} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{2n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{31} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{32} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{3n} \end{pmatrix}, \dots, \text{ respectiv } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

coloana termenilor liberi şi, implicit, soluţia fiecărui sistem fiind coloana 2, coloana 3,..., respectiv coloana n a matricei A^{-1}.

Cum efectuăm aceleaşi transformări de linii asupra tuturor celor n sisteme, putem să abordăm rezolvarea lor într-un acelaşi algoritm, Astfel, obţinem un (nou) algoritm de calcul al inversei matricei A: pornim de la matricea de tipul $(n, 2n)$ obţinută alăturând matricele A şi I_n

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \in M_{n,2n}(K)$$

şi efectuăm succesiv transformări elementare exclusiv asupra liniilor acestei matrici şi a celor rezultate din ea pentru a transforma blocul din stânga al acestei matrici în I_n. Observaţia 13 c) ne asigură că acest lucru este posibil (dacă şi numai dacă matricea A e inversabilă). Matricea rezultată va fi

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{11} & d^{-1}\alpha_{21} & \dots & d^{-1}\alpha_{n1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d^{-1}\alpha_{12} & d^{-1}\alpha_{22} & \dots & d^{-1}\alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d^{-1}\alpha_{1n} & d^{-1}\alpha_{2n} & \dots & d^{-1}\alpha_{nn} \end{array}\right) = (I_n \mid A^{-1})$$

Prin umare, blocul din dreapta al matricei rezultate este chiar inversa matricei A.

Apendice

Definiţia 16. Orice matrice pătratică rezultată din matricea unitate prin aplicarea unei transformări elementare se numeşte **matrice elementară**.

Observaţiile 17. (şi exemple ...)
a) Matricile elementare ce se obţin prin permutări de linii (coloane):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

au determinantul -1.
b) Matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

au determinantul α.

c) Matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K$ şi adunarea la alta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

au determinantul 1.

Pentru matricile elementare rezultate prin permutări de linii (coloane), avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu un $\alpha \in K^*$, avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha^{-1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru matricile elementare ce se obţin prin înmulţirea unei linii (coloane) cu $\alpha \in K$ şi adunarea la alta, avem:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & -\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Rezultă imediat că:

Lema 18. Inversa unei matrici elementare este tot o matrice elementară.

Lema 19. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Orice transformare elementară asupra unei matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ este rezultatul înmulţirii lui A cu o matrice elementară. Mai precis, orice transformare elementară asupra liniilor (coloanelor) matricei A se obţine prin înmulţirea lui A la stânga (dreapta) cu matricea elementară rezultată prin efectuarea aceleiaşi transformări elementare asupra matricei I_m (respectiv I_n).

Demonstraţie. Noi probăm această proprietate pentru linii. Pentru coloane — TEMĂ.

Să permutăm liniile i şi j ale matricei I_m şi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A. Rezultatul înmulţirii

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

care este chiar matricea obţinută din A prin permutarea liniilor i şi j.

Fie $\alpha \in K^*$. Să înmulţim linia i a matricei I_m cu α şi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A. Rezultatul înmulţirii

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \alpha & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{ii} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

care este chiar matricea obţinută din A prin înmulţirea liniei i cu α.

Fie $\alpha \in K$. Să înmulţim linia j a matricei I_m cu α şi să o adunăm la linia i, apoi să înmulţim matricea elementară obţinută cu A. Rezultatul înmulţirii

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \alpha a_{j1} & \dots & a_{ii} + \alpha a_{ji} & \dots & a_{ij} + \alpha a_{jj} & \dots & a_{in} + \alpha a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jj} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

care este matricea obţinută din A după înmulţirea liniei j a matricei cu α şi adunarea la linia i.

Din lema 19 şi observaţia 13 c) rezultă:

Corolarul 20. Orice matrice inversabilă este un produs de matrici elementare.

Teorema 21. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice matrice $A, B \in M_n(K)$ avem $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Demonstraţie.