CURS 4 + 5

Inelul matricilor pătrat(ic)e cu elemente într-un corp comutativ

Fie K o mulţime şi $m, n \in \mathbb{N}^*$. O funcţie

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to K$$

se numeşte **matrice** de tipul (m, n) cu elemente din K. Când $m = n$ matricea A se numeşte **matrice pătratică** de ordinul n. Notând pentru toţi $i = 1, \dots, m$ şi $j = 1, \dots, n$ pe $A(i, j)$ cu $a_{ij} (\in K)$, putem scrie pe A sub formă de tabel dreptunghiular cu m linii şi n coloane în care trecem imaginea fiecărei perechi (i, j) în linia i şi coloana j

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pentru acest tabel vom folosi notaţia

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

sau, mai simplu, $A = (a_{ij})$. Mulţimea matricelor de tipul (m, n) cu elemente din K o vom nota cu $M_{m,n}(K)$, iar când $m = n$ cu $M_n(K)$.

Fie $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ. Atunci $+$ din K determină o operaţie $+$ în $M_{m,n}(K)$ definită astfel: dacă $A = (a_{ij})$ şi $B = (b_{ij})$ sunt două matrice de tipul (m, n) atunci

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Se verifică uşor că această operaţie este asociativă, comutativă, are ca element neutru (element nul) matricea $O_{m,n}$ care are pe 0 în toate poziţiile (numită **matricea nulă**) şi fiecare element $A = (a_{ij})$ din $M_{m,n}(K)$ are un opus (pe matricea $-A = (-a_{ij})$, numită **opusa matricei** A). Aşadar,

Teorema 1. $(M_{m,n}(K), +)$ este un grup abelian.

Înmulţirea unei matrici $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ cu un scalar $\alpha \in K$ este definită astfel:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}).$$

Se verifică uşor că aceasta are următoarele proprietăţi:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \ \forall \alpha \in K, \ \forall A, B \in M_{m,n}(K)$;

ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall A \in M_{m,n}(K)$;

iii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \ \forall \alpha, \beta \in K, \ \forall A \in M_{m,n}(K)$;

iv) $1 \cdot A = A, \ \forall A \in M_{m,n}(K)$.

Înmulţirea matricelor este definită astfel: dacă $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$, atunci

$$AB = (c_{ij}) \in M_{m,p}, \text{ cu } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \ (i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}.$$

Să considerăm pentru $n \in \mathbb{N}^*$ matricea (pătratică) de tipul (n, n):

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$, atunci:

1) $(AB)C = A(BC)$, pentru orice matrice $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,p}(K),\ C \in M_{p,q}(K)$;

2) $I_m A = A = A I_n,\ \forall A \in M_{m,n}(K)$;

3) $A(B + C) = AB + AC$ pentru orice matrice $A \in M_{m,n}(K),\ B, C \in M_{n,p}(K)$;

3') $(B + C)D = BD + CD$, pentru orice $B, C \in M_{n,p}(K),\ D \in M_{p,q}(K)$;

4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B),\ \forall \alpha \in K,\ \forall A_{m,n}(K),\ \forall B \in M_{n,p}(K)$.

Demonstrăm ca exemplu pe 1). Celelalte egalităţi fiind mai uşor de demonstrat rămân TEMĂ. Într-adevăr, dacă $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K),\ B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K),\ C = (c_{ij}) \in M_{p,q}(K)$, atunci elementul din linia $i \in \{1, \dots, m\}$ şi coloana $l \in \{1, \dots, q\}$ a produsului $(AB)C$ este

$$\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) c_{jl} = \sum_{j=\overline{1,p}, k=\overline{1,n}} (a_{ik} b_{kj})\, c_{jl} = \sum_{j=\overline{1,p}, k=\overline{1,n}} a_{ik}\, (b_{kj} c_{jl}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} c_{jl} \right),$$

care este elementul din linia $i \in \{1, \dots, m\}$ şi coloana $l \in \{1, \dots, q\}$ a produsului $A(BC)$.

Dacă lucrăm cu matrici pătratice de acelaşi ordin n, înmulţirea $\cdot$ de mai sus devine o lege de compoziţie (operaţie) pe $M_n(K)$, iar din egalităţile 1)–3') deducem că $\cdot$ este asociativă, că I_n este element neutru (unitate) faţă de $\cdot$ (motiv pentru care o şi numim **matricea unitate** de ordinul n) şi că $\cdot$ este distributivă faţa de $+$. Aşadar,

Teorema 2. $(M_n(K), +, \cdot)$ este un inel cu unitate numit **inelul matricelor pătrat(ic)e de ordinul** n **cu elemente din** K.

Observaţiile 3. a) Dacă $n \geq 2$ atunci inelul $M_n(K)$ nu este comutativ şi are divizori ai lui zero. Dacă $a, b \in K^*$, atunci matricele nenule

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

pot fi folosite atât pentru a demonstra că $M_n(K)$ are divizori ai lui zero, cât şi pentru a arăta că semigrupul $(M_n(K), \cdot)$ nu este comutativ.

b) Din proprietăţile adunării, înmulţirii şi înmulţirii cu scalari a matricelor, rezultă că funcţia

$$f : K \to M_n(K),\ f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix} = aI_n$$

este un omomorfism injectiv de inele.

Transpusa unei matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$ de tipul (m, n) este matricea de tipul (n, m),

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji}).$$

Modul în care transpusa se comportă faţa de adunare, înmulţire şi înmulţirea cu scalari rezultă din egalităţile:

$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB,\ \forall A, B \in M_{m,n}(K)$;
$^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA,\ \forall A \in M_{m,n}(K),\ \forall B \in M_{n,p}(K)$;
$^t(\alpha A) = \alpha \cdot {}^tA,\ \forall A \in M_{m,n}(K)$.

Fie K un corp comutativ. Mulţimea elementelor inversabile ale inelului $M_n(K)$ este

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \exists B \in M_n(K) : AB = BA = I_n\}.$$

Mulţimea $GL_n(K)$ e stabilă în $(M_n(K), \cdot)$ şi $(GL_n(K), \cdot)$ e un grup numit **grupul general liniar de gradul** n peste K. Se ştie că dacă K este unul dintre corpurile numerice ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) atunci $A \in M_n(K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$. Prin urmare,

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\},$$

şi analog se pot redefini şi $GL_n(\mathbb{R})$ şi $GL_n(\mathbb{Q})$. Vom vedea că la fel se întâmplă în orice inel $M_n(K)$ cu K corp comutativ. Ca atare, urmează să discutăm despre **determinantul unei matrice pătratice cu elemente într-un corp comutativ** K.

Determinanţi

Fie $(K, +, \cdot)$ este un corp comutativ, $n \in \mathbb{N}^*$ şi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

Definiţia 4. Determinantul matricei A este

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} (\in K).$$

Funcţia $M_n(K) \to K$, $A \mapsto \det A$ se numeşte **(funcţia) determinant**.

Observaţia 5. În nici unul dintre produsele care apar în egalitatea de mai sus nu apar 2 elemente din A care să fie situate în aceeaşi linie sau aceeaşi coloană.

Lema 6. Determinantul matricei A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$.

Demonstraţie.

Observaţia 7. Orice proprietate a determinantului unei matrici A care se refară la liniile lui A poate fi formulată şi pentru coloanele lui A şi viceversa.

Propoziţia 8. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ şi $i \in \{1, \dots, n\}$ atunci

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,n} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Proprietatea poate fi generalizată şi reformulată pentru coloane (temă).

Demonstraţie.

Peste tot în cele ce urmează în această secţiune vom considera $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ, $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ şi $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

Propoziţia 9. Dacă matricea B se obţine din A prin înmulţirea fiecărui element dintr-o linie (coloană) a lui A cu un $\alpha \in K$ atunci $\det B = \alpha \det A$.

Demonstraţie.

Propoziţia 10. Dacă toate elementele unei linii (coloane) ale lui A sunt 0, atunci $\det A = 0$.

Demonstraţie.

Propoziţia 11. Dacă matricea B se obţine din A prin permutarea a două linii (coloane) ale lui A atunci $\det B = -\det A$.

Demonstraţie.

Propoziţia 12. Dacă A are două linii (coloane) egale, atunci $\det A = 0$.

Demonstraţie.

Să notă cu $l_1, l_2, \cdots, l_n$ liniile şi cu $c_1, c_2, \cdots, c_n$ coloanele matricii A. Spunem că **liniile (coloanele)** i **şi** j ($i, j \in \{1, \dots, n\}$ diferite) **sunt proporţionale** dacă există un $\alpha \in K$ pentru care toate elementele uneia să se obţină din elementele celeilalte prin înmulţire cu α. Scriem, după caz, $l_i = \alpha l_j$ sau $l_j = \alpha l_i$ sau $c_i = \alpha c_j$ sau $c_j = \alpha c_i$.

Corolarul 13. Dacă A are două linii (coloane) proporţionale, atunci $\det A = 0$.

Definiţia 14. Fie $A \in M_{mn}(K)$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$. Spunem că linia i a matricei A **este o combinaţie liniară a celorlalte linii** ($i \in \{1, \dots, m\}$) dacă există $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m \in K$ astfel încât

$$a_{ij} = \alpha_1 a_{1j} + \dots + \alpha_{i-1} a_{i-1,j} + \alpha_{i+1} a_{i+1,j} + \dots + \alpha_m a_{mj}, \ \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Scriem

$$l_i = \alpha_1 l_1 + \dots + \alpha_{i-1} l_{i-1} + \alpha_{i+1} l_{i+1} + \dots + \alpha_m l_m.$$

Considerăm $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m$ şi liniile $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$ ale lui A. Spunem că liniile $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$ sunt **liniar dependente** dacă există (cel puţin) una între ele care este o combinaţie liniară a celorlalte. În caz contrar (adică dacă nu există niciuna între ele care să fie o combinaţie liniară a celorlalte), spunem că liniile $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$ sunt **liniar independente**.

Definiţii analoage se poate da pentru coloane (temă).

Proprietatea din corolarul anterior poate fi generalizată:

Corolarul 15. Dacă o linie (coloană) a lui A este o combinaţie liniară a celorlalte linii (coloane), atunci $\det A = 0$.

Corolarul 16. Dacă matricea B se obţine din A prin adunarea la linia (coloana) i a liniei (coloanei) j, cu $i \neq j$, înmulţită cu un $\alpha \in K$, atunci $\det B = \det A$.

Definiţia 17. Fie $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $n \geq 2$ şi $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Fie $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ matricea obţinută din A prin eliminarea liniei i şi coloanei j, adică aliniei şi coloanei lui a_{ij}. Determinantul

$$d_{ij} = \det A_{ij}$$

se numeşte **minorul lui** a_{ij} şi

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$$

se numeşte **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Avem:

Teorema 18. (dezvoltarea determinantului $\det(A)$ **după linia** i**)**

$$\det(A) = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in}, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Demonstraţie (facultativă)**.** Să notăm

$$S_i = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + \dots + a_{in}\alpha_{in}. \qquad (*)$$

(A) Pentru $i = 1$, avem $S_1 = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n}$. Considerăm termenul $a_{11}\alpha_{11} = a_{11}d_{11}$ şi observăm că d_{11} este o sumă in care apar toate produsele de forma

$$a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n} \text{ cu } \{k_2,\ldots,k_n\} = \{2,\ldots,n\},$$

fiecare cu semnul $(-1)^{Inv\,\tau}$ unde $\tau = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \ldots & n \\ k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$. Fiecare termen al lui S_1 ce conţine pe a_{11} provine din $a_{11}\alpha_{11}$. Aşadar, aceşti termeni sunt produsele de forma

$$(-1)^{Inv\,\tau}a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n}.$$

Pe de altă parte, termenii lui $\det A$ care conţin pe a_{11} sunt toate produsele de forma

$$a_{11}a_{2k_2}a_{3k_3}\cdots a_{nk_n} \text{ cu } \{k_2,\ldots,k_n\} = \{2,\ldots,n\},$$

fiecare termen având semnul $(-1)^{Inv\,\sigma}$, unde $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_n \end{pmatrix}$.

Dar $1 < k_2$, …, $1 < k_n$, prin urmare $Inv\,\sigma = Inv\,\tau$ şi putem conchide că termenii ce conţin pe a_{11} sunt aceiaşi atât în S_1 şi în $\det A$ (şi când spunem aceasta ne referim, desigur, şi la faptul că apar cu acelaşi semn în ambele scrieri).

(B) Să considerăm cazul general. Fie $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, iar în scrierea $(*)$ să considerăm termenul

$$a_{ij}\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij}.$$

Acesta ne va furniza toţi termenii lui S_i care conţin pe a_{ij}. Pe de altă parte, să rescriem $\det A$ procedând astfel: prin permutări scuccesive de linii vecine aducem a_{ij} pe prima linie, apoi prin permutări succesive de coloane vecine, îl aducem în poziţia $(1,1)$. Notăm cu D determinantul rezultat. Deoarece au fost i pemutări de linii şi j permutări de coloane, putem scrie

$$\det A = (-1)^{i+j}D.$$

În baza acestei egalităţi, toţi termenii care conţin pe a_{ij} din $\det A$ rezultă raţionând ca la (A) asupra lui D. Aşa cum am văzut, în poziţia $(1,1)$ a lui D este a_{ij}; având în vedere modul în care s-a format D, minorul corespunzător este chiar d_{ij}, iar complementul său algebric este $(-1)^{1+1}d_{ij} = d_{ij}$. Se deduce imediat că termenii care îl conţin pe a_{ij} sunt aceiaşi cu termenii din

$$(-1)^{i+j}a_{ij}d_{ij} = a_{ij}\alpha_{ij},$$

adică exact termenii care conţin pe a_{ij} din S_i.

Raţionamentul este completat de faptul că suma S_i are n termeni şi fiecare termen este o sumă de $(n-1)!$ produse de elemente ale lui A (cu semnul corespunzător), prin urmare S_i are $(n-1)!n = n!$ termeni care sunt chiar cei din $\det A$. □

De asemenea, avem:

Teorema 18'. (dezvoltarea determinantului $\det(A)$ **după coloana** j**)**

$$\det A = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj},\ \forall j \in \{1,\ldots,n\}.$$

Corolarul 19. Dacă $i, k \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq k$, atunci

$$a_{i1}\alpha_{k1} + a_{i2}\alpha_{k2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = 0.$$

De asemenea, dacă $j, k \in \{1,\ldots,n\}$, $j \neq k$ atunci

$$a_{1j}\alpha_{1k} + a_{2j}\alpha_{2k} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nk} = 0.$$

Corolarul 20. Dacă $d = \det A \neq 0$ atunci A este inversabilă în inelul $M_n(K)$ şi

$$A^{-1} = d^{-1} \cdot A^*,$$

unde A^* este matricea

$$A^* = {}^t(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

(numită **adjuncta matricei** A).

Observaţia 21. Vom vedea mai târziu că şi reciproca acestei afirmaţii este adevărată, adică *dacă A este inversabilă atunci* $\det A \neq 0$, ceea ce va completa caracterizarea elementelor inversabile ale inelului $M_n(K)$ cu ajutorul determinanţilor.

Corolarul 22. (Regula lui Cramer) Fie sistemul de n ecuaţii cu n necunoscute

$$(S) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \ a_{ij}, b_i \in K \ (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Notăm cu d determinantul $d = \det A$ al matricei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ şi d_j determinantul matricei obţinute din A prin înlocuirea coloanei j cu coloana

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dacă $d \neq 0$ atunci sistemul (S) are o soluţie unică, dată de egalităţile

$$x_i = d_i \cdot d^{-1}, \ i = 1, \dots, n.$$

Rangul unei matrice

Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$.

Definiţia 23. Fie $i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \in \mathbb{N}^*$ cu $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ şi $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$. O matrice

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_lj_1} & a_{i_lj_2} & \dots & a_{i_lj_k} \end{pmatrix}$$

formată din elementele matricei A situate la intersecţiile liniilor $i_1, \ldots, i_k$ cu coloanele $j_1, \ldots, j_l$ se numeşte **submatrice a matricei** A de tipul (k, l). Determinantul unei submatrice de tipul (k, k) se numeşte **minor de ordinul** k **al matricei** A. Formarea unui minor de ordinul $k+1$ prin adăugarea unei linii şi unei coloane la un minor de ordinul k se numeşte **bordare**.

Definiţia 24. Fie $A \in M_{m,n}(K)$. Dacă A este nenulă, adică $A \neq O_{m,n}$, spunem că **rangul matricei** A este r, şi scriem $\operatorname{rang} A = r$, dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli. Prin definiţie, $\operatorname{rang} O_{m,n} = 0$.

Observaţia 25. a) $\operatorname{rang} A \leq \min\{m, n\}$.
b) Dacă $A \in M_n(K)$ atunci $\operatorname{rang} A = n$ dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.
c) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$.

În continuare vom considera $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$.

Determinarea rangului matricei A după definiţie necesită, în general, calculul unui număr mare de minori. Teorema următoare este un prim pas pentru a reduce numărul acestor calcule.

Teorema 26. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor de ordinul r al lui A nenul şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ (dacă există) sunt nuli.

Demonstraţie.

Teorema 27. Rangul matricei A este numărul maxim de coloane (linii) liniar independente ce se pot alege dintre coloanele (liniile) lui A.

Demonstraţie. A. Să considerăm că matricea A are rangul r. Atunci A un minor de ordinul r nenul. Pentru a nu complica notaţiile, putem presupunem că

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

şi orice minor de ordinul $r+1$ este zero. (Demonstraţia cazului general nu prezintă alte dificultăţi decât, eventual, de notaţie.) Prin urmare, determinantul

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

de ordinul $r+1$, obţinut prin adăugarea la d a liniei i şi a coloanei j, cu $1 \leq i \leq m$ şi $r < j \leq n$, este zero, adică $D_{ij} = 0$. Să observăm că dacă $1 \leq i \leq r$ atunci D_{ij} are două linii egale, iar dacă $r < i \leq m$ şi $r < j \leq n$, atunci D_{ij} se obţine din d prin bordarea lui d cu linia i şi coloana j. Dezvoltând determinantul D_{ij} după linia $r+1$ primim

$$a_{i1}d_1 + a_{i2}d_2 + \cdots + a_{ir}d_r + a_{ij}d = 0$$

unde complemenţii algebrici $d_1, d_2, \ldots, d_r$ nu depind de linia adăugată. Rezultă

$$a_{ij} = -d^{-1}d_1 a_{i1} - d^{-1}d_2 a_{i2} - \cdots - d^{-1}d_r a_{ir}$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $j = r+1, \ldots, n$ ceea ce ne arată că

$$c_j = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \cdots + \alpha_r c_r \text{ pentru } j = r+1, \ldots, n,$$

unde $\alpha_k = -d^{-1}d_k$, $1 \leq k \leq r$, adică c_j este combinaţie liniară de $c_1, c_2, \ldots, c_r$. Astfel am arătat că numărul maxim de coloane ce se pot alege dintre coloanele lui A astfel încât nici una să nu fie o combinaţie liniară a celorlalte este cel mult r, adică numărul maxim de coloane liniar independente ce se pot alege dintre coloanele lui A este cel mult r.

B. Dacă acest număr ar fi strict mai mic decât r, ar rezulta că una dintre coloanele $c_1, \ldots, c_r$ ar fi o combinaţie liniară a celorlalte, ceea ce ar implica $d = 0$ ceea ce este fals. Aşadar, numărul maxim de coloane liniar independente ce se pot alege dintre coloanele lui A este egal cu r.

C. Reciproc, dacă numărul maxim de coloane liniar independente ce se pot alege dintre coloanele lui A este egal cu r atunci orice minor de ordin $r+1$ provine din coloane dintre care una este o combinaţie liniară a celorlalte, ca urmare, orice minor de ordinul $r+1$ este nul.

Dacă luăm r coloane liniar independente din A, atunci sigur putem ,,decupa” un minor nenul de ordin r din aceste coloane. În caz contrar, pornim de la submatricea B de tip (m, r) formată de aceste coloane a lui A. Odată găsit un minor d' de ordin $s = r-1$ (sau chiar $s \leq r-1$) astfel ca toţi minorii de ordin $s+1$ ai lui B sunt 0, deducem ca în partea **A.** a demonstraţiei că celelalte coloane ale căror elemente nu formează coloanele lui d' sunt combinaţii liniare de cele s coloane din care a fost scos d', ceea ce contrazice faptul că niciuna dintre coloanele din B nu este o combinaţie liniară a celorlalte.

Corolarul 28. $\operatorname{rang} A = r$ dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toate celelalte linii (coloane) ale lui A sunt combinaţii liniare de liniile (coloanele) matricii A ale căror elemente formează pe d.

Corolarul 29. Dacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ (K corp comutativ), atunci $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

Dacă vreuna dintre cele două matrici este nulă, proprietatea este evidentă. Putem, aşadar, să considerăm că ambele matrici sunt nenule şi că

$$\min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\} = \operatorname{rang} B = r \in \mathbb{N}^*$$

şi că un minor nenul al lui B ,,se decupează” din coloanele $j_1, \ldots, j_r$ cu $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$. (Pentru celălalt caz, reformulăm proprietatea pentru transpuse şi aceeaşi soluţie va conduce la rezultatul dorit.) Coloanele lui AB sunt

$$A\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \ldots,\ A\begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix}.$$

Conform corolarului 28, pentru orice $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$, există $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{rk} \in K$ astfel ca

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k} \begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k} \begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk} \begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix}.$$

Rezultă că

$$A \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \alpha_{1k} \cdot A \begin{pmatrix} b_{1j_1} \\ b_{2j_1} \\ \vdots \\ b_{nj_1} \end{pmatrix} + \alpha_{2k} A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j_2} \\ b_{2j_2} \\ \vdots \\ b_{nj_2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{rk} \cdot A \begin{pmatrix} b_{1j_r} \\ b_{2j_r} \\ \vdots \\ b_{nj_r} \end{pmatrix},$$

adică în AB toate coloanele $k \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{j_1, \ldots, j_r\}$ sunt combinaţii liniare de coloanele $j_1, \ldots, j_r$. Prin urmare, rangul matricii AB este cel mult r.

Corolarul 30. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi K un corp comutativ. O matrice $A \in M_n(K)$ este inversabilă (în inelul $(M_n(K), +, \cdot)$) dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$.

Corolarul 31. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ şi $A \neq O_{m,n}$. Rangul matricii A este r dacă şi numai dacă există un minor nenul d de ordinul r al lui A şi toţi minorii lui A de ordinul $r+1$ obţinuţi prin bordarea acestuia (dacă există) sunt nuli.

Procedeu pentru determinarea rangului unei matrici:

Corolarul 31 ne arată că $\operatorname{rang} A$ cu $A \neq O_{m,n}$ se poate determina astfel: se porneşte de la un minor nenul d al lui A şi se calculează minorii care îl bordează pe d până se găseşte unul nenul căruia i se aplică acelaşi procedeu şi se continuă aşa mai departe. După un număr finit de paşi se ajunge la un minor de ordinul r nenul cu proprietatea că toţi minorii care îl bordează sunt zero. Rezultă $r = \operatorname{rang} A$.