Proiect la tema "Integrarea numerică. Metode aproximative de evaluare a ariilor trapezelor curbilinii "

Lucrare Nr. 4 "Calculul numeric al integralelor "

Elaborat: elevul clasei a XII-a ”___”, Nume Prenume Elev ????

Varianta ___

Obiective:
- Verificarea posibilităţii aplicării metodei în studiu pentru integralele propuse;
- Analiza integralelor propuse, rezolvarea lor analitică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;

Sarcini de realizat:
1) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor de dreapta*** şi ***de stânga*** pentru n=10, evaluând precizia prin *compararea rezultatelor obţinute*.
2) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor medii***, folosind pentru evaluarea preciziei calculul dublu pentru n_1=8 şi n_2=10.
3) Calculaţi integrala cu precizia 10^{-3}, utilizând ***metoda trapezelor***.

Rezolvarea sarcinii 1

1. Calculaţi integrala $I = \int_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0,3x+1,2}}{1,6x+\sqrt{x^2+0,5}}dx$, utilizând *metoda dreptunghiurilor de stânga* şi *de dreapta*.

***Soluţie*:**
Pentru a calcula valoarea integralei după formulele dreptunghiurilor de stânga sau de dreapta pentru n=10, divizăm intervalul de integrare în 10 părţi cu pasul:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2,3-1,5}{10} = 0,08.$$

Alcătuim tabelul de valori al funcţiei de sub integrală în punctele de divizare a intervalului:

i	x_i	$0,3x_i+1,2$	$\sqrt{0,3x_i+1,2}$	$\sqrt{x_i^2+0,5}$	$1,6x_i+\sqrt{x_i^2+0,5}$	y_i
0	1,5	1,65	1,2845	1,6583	4,0583	0,3165
1	1,58	1,674	1,2938	1,7310	4,2590	0,3037
2	1,66	1,698	1,3031	1,8043	4,4603	0,2922
3	1,74	1,722	1,3122	1,8782	4,6622	0,2815
4	1,82	1,746	1,3214	1,9525	4,8545	0,2716
5	1,90	1,77	1,3304	2,0273	5,0673	0,2626
6	1,98	1,794	1,3394	2,1025	5,2705	0,2541
7	2,06	1,818	1,3483	2,1780	5,4740	0,2463
8	2,14	1,842	1,3572	2,2538	5,6778	0,2390
9	2,22	1,866	1,3660	2,3299	5,8819	0,2322
10	2,30	1,89	1,3748	2,4062	6,0862	0,2259
						S_1=2,6997
						S_2=2,6091

În tabel s-au determinat valorile sumelor: $S_1 = \sum_{i=0}^{9} y_i = 2,6997$ şi $S_2 = \sum_{i=1}^{10} y_i = 2,6091$.

Aflăm valorile aproximative ale integralei. Dacă aplicăm ***formula dreptunghiurilor de stânga***, atunci vom avea:

$$I_{st} = h \cdot \sum_{0}^{9} y_i = 0,08 \cdot 2,6997 = 0,2158.$$

Aflăm acum valoarea integralei, utilizând ***formula dreptunghiurilor de dreapta***:

$$I_{dr} = h \cdot \sum_{1}^{10} y_i = 0,08 \cdot 2,6091 = 0,2087.$$

Rezultatele obţinute după o formulă sau alta se deosebesc, de aceea în calitate de valoare finală vom lua *semisuma* valorilor determinate, rotunjind rezultatul până la zecimi de miimi:

$$I = \frac{I_{st}+I_{dr}}{2} = 0,212.$$

Răspuns: $\boxed{I \approx 0{,}212}$

Rezolvarea sarcinii 2

2. Calculaţi integrala $I = \int_{0,4}^{1,2} \frac{\sin(0{,}6x + 0{,}3)}{1{,}7 + \cos(x^2 + 1{,}2)} dx$, aplicând *metoda dreptunghiurilor medii*.

***Soluţie*:**
Pentru rezolvare vom folosi ***formula dreptunghiurilor medii* (*de mijloc*)**:

$$I_{med} = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$$

Calculele le vom efectua de două ori, pentru n_1=8 şi n_2=10 şi respectiv pentru pasul:

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = \frac{1{,}2 - 0{,}4}{8} = 0{,}1 \text{ şi } h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{1{,}2 - 0{,}4}{10} = 0{,}08.$$

Rezultatele le introducem pentru comoditate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$\sin(0{,}6x + 0{,}3)$	$1{,}7 + \cos(x^2 + 1{,}2)$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$
0	0,4	0,45	0,53963	1,86750	0,28896
1	0,5	0,55	0,58914	1,76824	0,33318
2	0,6	0,65	0,63654	1,64832	0,38618
3	0,7	0,75	0,68164	1,50947	0,45158
4	0,8	0,85	0,72429	1,35550	0,53433
5	0,9	0,95	0,76433	1,19300	0,64068
6	1,0	1,05	0,80162	1,03186	0,77687
7	1,1	1,15	0,83603	0,88559	0,94404
					S_1=4,35582

Tabelul 2

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$\sin(0{,}6x + 0{,}3)$	$1{,}7 + \cos(x^2 + 1{,}2)$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$
0	0,4	0,44	0,53457	1,87627	0,28491
1	0,48	0,52	0,57451	1,80022	0,31913
2	0,56	0,60	0,61312	1,71080	0,35838
3	0,64	0,68	0,65032	1,60852	0,40430
4	0,72	0,76	0,68602	1,49467	0,45898
5	0,80	0,84	0,72014	1,37142	0,52511
6	0,88	0,92	0,75260	1,24212	0,60590
7	0,96	1,00	0,78333	1,11150	0,70475
8	1,04	1,08	0,81225	0,98571	0,82403
9	1,12	1,16	0,83930	0,87241	0,96205
					S_2=5,44754

Determinăm acum valorile aproximative ale integralei:

$$I_1 = h_1 \cdot S_1 = 0{,}1 \cdot 4{,}35582 = 0{,}43558;$$

$$I_2 = h_2 \cdot S_2 = 0{,}08 \cdot 5{,}44754 = 0{,}43580.$$

Observăm că valorile calculate diferă puţin una de alta (ordinul zecimilor de miimi), însă valoarea a doua este mai exactă decât prima, de aceea în calitate de valoare finală a integralei vom lua $I \approx 0{,}4358$.

Răspuns: $\boxed{I \approx 0{,}4358}$

Rezolvarea sarcinii 3

3. Calculaţi integrala $I = \int_{0,7}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0{,}3}}$, cu precizia 10^{-3}.

***Soluţie*:**
Pentru atingerea preciziei date (10^{-3}), vom determina valoarea lui n, astfel încât

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 < 0{,}0005. \qquad (*)$$

În formula de mai sus, $a = 0{,}7; b = 1{,}3; M_2 \geq \max_{[0,7;1,3]}|f''(x)|$, unde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+0{,}3}}$ este funcţia de sub integrală.

Determinăm în continuare derivatele de ordinul unu şi doi:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{(2x^2+0{,}3)^3}} \text{ şi } f''(x) = \frac{8x^2-0{,}6}{\sqrt{(2x^2+0{,}3)^5}}.$$

$$\text{Atunci, } \max_{[0,7;1,3]}|f''(x)| < \frac{8\cdot 1{,}3^2-0{,}6}{\sqrt{(2\cdot 0{,}7^2+0{,}3)^5}} \approx 6{,}98.$$

Dacă vom lua valoarea lui $M_2 = 7$, atunci inegalitatea (*) va avea forma $\frac{0{,}6^3\cdot 7}{12n^2} < 0{,}0005$, de unde $n^2 > 252$, adică n>16. Pentru o precizie mai bună, vom stabili valoarea finală a lui n=20.

Calcularea integralei se realizează după formula:

$$I \approx h\cdot\left(\frac{y_0+y_{20}}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{19}\right),$$

unde $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1{,}3-0{,}7}{20} = \frac{0{,}6}{20} = 0{,}03$; $y_i = y(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2x_i^2+0{,}3}}$; $x_i = 0{,}7 + i\cdot h$, pentru $i = 1,2,\ldots,20$.

Pentru comoditate, toate calculele sunt introduse în tabelul ce urmează:

i	x_i	x_i^2	$2x_i^2+0{,}3$	$\sqrt{2x_i^2+0{,}3}$	y_0, y_{20}	$y_1, y_2,\ldots,y_{19}$
0	0,700	0,4900	1,2800	1,1314	0,88388	
1	0,730	0,5329	1,3658	1,1687		0,85567
2	0,760	0,5776	1,4552	1,2063		0,82897
3	0,790	0,6241	1,5482	1,2443		0,80369
4	0,820	0,6724	1,6448	1,2825		0,77973
5	0,850	0,7225	1,7450	1,3210		0,75701
6	0,880	0,7744	1,8488	1,3597		0,73545
7	0,910	0,8281	1,9562	1,3986		0,71498
8	0,940	0,8836	2,0672	1,4378		0,69552
9	0,970	0,9409	2,1818	1,4771		0,67701
10	1,000	1,0000	2,3000	1,5166		0,65938
11	1,030	1,0609	2,4218	1,5562		0,64259
12	1,060	1,1236	2,5472	1,5960		0,62657
13	1,090	1,1881	2,6762	1,6359		0,61128
14	1,120	1,2544	2,8088	1,6759		0,59668
15	1,150	1,3225	2,9450	1,7161		0,58272
16	1,180	1,3924	3,0848	1,7564		0,56936
17	1,210	1,4641	3,2282	1,7967		0,55657
18	1,240	1,5376	3,3752	1,8372		0,54431
19	1,270	1,6129	3,5258	1,8777		0,53256
20	1,300	1,6900	3,6800	1,9183	0,52129	
					S=1,40517	S=12,77004

Astfel, valoarea integralei este $I = 0{,}03\cdot\left(\frac{1{,}40517}{2}+12{,}77004\right) = 0{,}40418 \approx 0{,}404$.

Răspuns: $\boxed{I \approx 0{,}404}$

Sarcini pentru realizarea proiectului.

Calc.		Calc.		Calc.	
1.	$\int_{0{,}6}^{1{,}4}\frac{\sqrt{x^2+5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+0.5}}$; $\int_{0{,}2}^{0{,}8}\frac{\sin(2x+0{,}5)dx}{2+\cos(x^2+1)}$; $\int_{0{,}8}^{1{,}6}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$.	**2.**	$\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\sqrt{0{,}5x+2}\,dx}{\sqrt{2x+1}+0{,}8}$; $\int_{0{,}3}^{0{,}9}\frac{\cos(0{,}8x+1{,}2)dx}{1{,}5+\sin(x^2+0{,}6)}$; $\int_{1{,}2}^{2{,}7}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$.	**3.**	$\int_{0{,}8}^{1{,}8}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+1}\,dx}{x+\sqrt{1{,}5x^2+2}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}0}\frac{\sin(x+1{,}4)dx}{0{,}8+\cos(2x^2+0{,}5)}$; $\int_{1{,}0}^{2{,}0}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+1{,}3}}$.
4.	$\int_{1{,}0}^{2{,}2}\frac{\sqrt{1{,}5x+0{,}6}\,dx}{1{,}6+\sqrt{0{,}8x^2+2}}$; $\int_{0{,}6}^{1{,}0}\frac{\cos(0{,}6x^2+0{,}4)dx}{1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)}$; $\int_{0{,}2}^{1{,}2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.	**5.**	$\int_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{\sqrt{2x^2+1{,}6}\,dx}{2x+\sqrt{0{,}5x^2+3}}$; $\int_{0{,}5}^{1{,}3}\frac{\sin(0{,}5x+0{,}4)dx}{1{,}2+\cos(x^2+0{,}4)}$; $\int_{0{,}8}^{1{,}4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.	**6.**	$\int_{1{,}3}^{2{,}5}\frac{\sqrt{x^2+0{,}6}\,dx}{1{,}4+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}}$; $\int_{0{,}4}^{0{,}8}\frac{\cos(x^2+0{,}6)dx}{0{,}7+\sin(0{,}8+1)}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$.
7.	$\int_{1{,}2}^{2{,}6}\frac{\sqrt{0{,}4x+1{,}7}\,dx}{1{,}5x+\sqrt{x^2+1{,}3}}$; $\int_{0{,}3}^{1{,}5}\frac{\sin(0{,}3x+1{,}2)dx}{1{,}3+\cos^2(0{,}5x+1)}$; $\int_{1{,}4}^{2{,}1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$.	**8.**	$\int_{0{,}8}^{1{,}6}\frac{\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}\,dx}{1{,}8+\sqrt{2x+1{,}6}}$; $\int_{0{,}5}^{1{,}8}\frac{\cos(x^2+0{,}6)dx}{1{,}2+\sin(0{,}7x+0{,}2)}$; $\int_{1{,}2}^{2{,}4}\frac{dx}{\sqrt{0{,}5+x^2}}$.	**9.**	$\int_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{\sqrt{0{,}6x+1{,}7}\,dx}{2{,}1x+\sqrt{0{,}7x^2+1}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\sin(1{,}5x+0{,}3)dx}{2{,}3+\cos(0{,}4x^2+1)}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$.
10.	$\int_{0{,}8}^{2{,}4}\frac{\sqrt{0{,}4x^2+1{,}5}\,dx}{2{,}5+\sqrt{2x+0{,}8}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\cos(x^2+0{,}8)dx}{1{,}5+\sin(0{,}6x+0{,}5)}$; $\int_{0{,}6}^{1{,}5}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.	**11.**	$\int_{1{,}2}^{2{,}8}\frac{\sqrt{1{,}2x+0{,}7}\,dx}{1{,}4x+\sqrt{1{,}3x^2+0{,}5}}$; $\int_{0{,}5}^{1{,}3}\frac{\sin(0{,}7x+0{,}4)dx}{2{,}2+\cos(0{,}3x^2+0{,}7)}$; $\int_{2{,}0}^{3{,}5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.	**12.**	$\int_{0{,}6}^{2{,}4}\frac{\sqrt{1{,}1x^2+0{,}9}\,dx}{1{,}6+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}4}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}4}\frac{\cos(0{,}8x^2+1)dx}{1{,}4+\sin(0{,}3x+0{,}5)}$ $\int_{0;5}^{1{,}3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$.
13.	$\int_{0{,}7}^{2{,}1}\frac{\sqrt{0{,}6x+1{,}5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+3}}$; $\int_{0{,}2}^{1{,}0}\frac{\sin(0{,}8x^2+0{,}3)dx}{0{,}7+\cos(1{,}2x+0{,}3)}$; $\int_{1{,}2}^{2{,}6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0{,}6}}$.	**14.**	$\int_{0{,}8}^{2{,}4}\frac{\sqrt{1{,}5x+2{,}3}\,dx}{3+\sqrt{0{,}3x+1}}$; $\int_{0{,}3}^{1{,}1}\frac{\cos(0{,}3x+0{,}5)dx}{1{,}8+\sin(x^2+0{,}8)}$; $\int_{1{,}4}^{2{,}2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.	**15.**	$\int_{1{,}9}^{2{,}6}\frac{\sqrt{2x+1{,}7}\,dx}{2{,}4+\sqrt{1{,}2x^2+0{,}6}}$; $\int_{0{,}3}^{1{,}1}\frac{\sin(0{,}6x^2+0{,}3)dx}{2{,}4+\cos(x+0{,}5)}$; $\int_{0;8}^{1{,}8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.
16.	$\int_{0{,}5}^{1{,}9}\frac{\sqrt{0{,}7x^2+2{,}3}\,dx}{3{,}2+\sqrt{0{,}8x+1{,}4}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\cos(0{,}4x+0{,}6)dx}{0{,}8+\sin^2(x+0{,}5)}$; $\int_{1{,}6}^{2{,}2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2{,}5}}$.	**17.**	$\int_{1{,}0}^{2{,}6}\frac{\sqrt{0{,}4x+3}\,dx}{0{,}7x+\sqrt{2x^2+0{,}5}}$; $\int_{0{,}4}^{1{,}8}\frac{\sin(0{,}2x^2+0{,}7)dx}{1{,}4+\cos(0{,}5x+0{,}2)}$; $\int_{0{,}6}^{1{,}6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0{,}8}}$.	**18.**	$\int_{0{,}7}^{2{,}1}\frac{\sqrt{1{,}7x^2+0{,}5}\,dx}{1{,}4+\sqrt{1{,}2x+1{,}3}}$; $\int_{0{,}2}^{1{,}0}\frac{\cos(0{,}3x+0{,}8)dx}{0{,}9+2\sin(0{,}4x+0{,}3)}$; $\int_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1{,}2}}$.

19.	$\int\limits_{0{,}6}^{2{,}2}\frac{\sqrt{1{,}5x+1}\,dx}{1{,}2x+\sqrt{x^2+1{,}8}}$; $\int\limits_{0{,}3}^{1{,}1}\frac{\sin(0{,}8x+0{,}3)dx}{1{,}2+\cos(x^2+0{,}4)}$; $\int\limits_{1{,}4}^{2{,}0}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0{,}7}}$.	**20.**	$\int\limits_{1{,}2}^{3{,}0}\frac{\sqrt{2x^2+0{,}7}\,dx}{1{,}5+\sqrt{0{,}8x+1}}$; $\int\limits_{0{,}5}^{1{,}3}\frac{\cos(x^2+0{,}2)dx}{1{,}3+\sin(2x+0{,}4)}$; $\int\limits_{3{,}2}^{4{,}0}\frac{dx}{\sqrt{0{,}5x^2+1}}$.	**21.**	$\int\limits_{1{,}3}^{2{,}7}\frac{\sqrt{1{,}3x^2+0{,}8}\,dx}{1{,}7+\sqrt{2x+0{,}5}}$; $\int\limits_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\sin(0{,}6x+0{,}5)dx}{1{,}5+\cos(x^2+0{,}4)}$; $\int\limits_{0{,}8}^{1{,}7}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0{,}3}}$.
22.	$\int\limits_{0{,}6}^{1{,}4}\frac{\sqrt{x^2+0{,}5}\,dx}{2x+\sqrt{x^2+2{,}5}}$; $\int\limits_{0{,}2}^{0{,}8}\frac{\cos(x^2+1)dx}{2+\sin(2x+0{,}5)}$; $\int\limits_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{dx}{\sqrt{0{,}5x^2+1{,}5}}$.	**23.**	$\int\limits_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\sqrt{2x^2+1}\,dx}{0{,}8x+\sqrt{0{,}5x+2}}$; $\int\limits_{0{,}3}^{0{,}9}\frac{\sin(x^2+0{,}6)dx}{1{,}5+\cos(0{,}8x+1{,}2)}$; $\int\limits_{2{,}1}^{3{,}6}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$.	**24.**	$\int\limits_{0{,}8}^{1{,}8}\frac{\sqrt{1{,}5x^2+2}\,dx}{x+\sqrt{0{,}8x^2+1}}$; $\int\limits_{0{,}4}^{1{,}0}\frac{\cos(2x^2+0{,}5)dx}{0{,}8+\sin(x+1{,}4)}$; $\int\limits_{1{,}3}^{2{,}5}\frac{dx}{\sqrt{0{,}2x^2+1}}$.
25.	$\int\limits_{1{,}0}^{2{,}2}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+2}\,dx}{1{,}6+\sqrt{1{,}5x+0{,}6}}$; $\int\limits_{0{,}6}^{1{,}0}\frac{\sin(x+0{,}7)dx}{1{,}4+\cos(0{,}6x+0{,}4)}$; $\int\limits_{0{,}6}^{1{,}4}\frac{dx}{\sqrt{12x^2+0{,}5}}$.	**26.**	$\int\limits_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{\sqrt{0{,}5x^2+3}\,dx}{2x+\sqrt{2x^2+1{,}6}}$; $\int\limits_{0{,}5}^{1{,}3}\frac{\cos(x^2+0{,}4)dx}{1{,}2+\sin(0{,}5x+0{,}4)}$; $\int\limits_{1{,}3}^{2{,}1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-0{,}4}}$.	**27.**	$\int\limits_{1{,}3}^{2{,}5}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}\,dx}{1{,}4+\sqrt{x^2+0{,}6}}$; $\int\limits_{0{,}4}^{0{,}8}\frac{\sin(0{,}8x+1)dx}{0{,}7+\cos(x^2+0{,}6)}$; $\int\limits_{1{,}4}^{2{,}6}\frac{dx}{\sqrt{1{,}5x^2+0{,}7}}$.
28.	$\int\limits_{1{,}2}^{2{,}6}\frac{\sqrt{x^2+1{,}3}\,dx}{1{,}5x+\sqrt{0{,}4x+1{,}7}}$; $\int\limits_{0{,}3}^{1{,}5}\frac{\cos(0{,}5x^2+1)dx}{1{,}3+\sin(0{,}3x+1{,}2)}$; $\int\limits_{0{,}6}^{1{,}4}\frac{dx}{\sqrt{12x^2+0{,}5}}$.	**29.**	$\int\limits_{0{,}8}^{1{,}6}\frac{\sqrt{2x+1{,}6}\,dx}{1{,}8+\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}}$; $\int\limits_{0{,}5}^{1{,}1}\frac{\cos(0{,}7x+0{,}2)dx}{1{,}2+\sin(x^2+0{,}6)}$; $\int\limits_{2{,}3}^{2{,}5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.	**30.**	$\int\limits_{1{,}2}^{2{,}0}\frac{\sqrt{0{,}7x^2+1}\,dx}{2{,}1x+\sqrt{0{,}6x+1{,}7}}$; $\int\limits_{0{,}4}^{1{,}2}\frac{\cos(0{,}4x^2+1)dx}{2{,}3+\sin(1{,}5x+0{,}3)}$; $\int\limits_{0{,}32}^{0{,}66}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2{,}3}}$.