Proiect la tema "Integrarea numerică. Metode aproximative de evaluare a ariilor trapezelor curbilinii "

Lucrare Nr. 4 "Calculul numeric al integralelor "

Elaborat: elevul clasei a XII-a ”C”, Nume Prenume Elev: Guțu Cătălin

Varianta 15

Obiective:
- Verificarea posibilităţii aplicării metodei în studiu pentru integralele propuse;
- Analiza integralelor propuse, rezolvarea lor analitică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;

Sarcini de realizat:
1) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor de dreapta*** şi ***de stânga*** pentru *n*=10, evaluând precizia prin *compararea rezultatelor obţinute*.
2) Calculaţi integrala după ***metoda dreptunghiurilor medii***, folosind pentru evaluarea preciziei calculul dublu pentru n_1=8 şi n_2=10.
3) Calculaţi integrala cu precizia 10^{-3}, utilizând ***metoda trapezelor***.

<u>Rezolvarea sarcinii 1</u>

1. Calculaţi integrala $I=\int_{1,9}^{2,6} \frac{\sqrt{2x+1,7}}{2,4+\sqrt{1,2x^2+0,6}}dx$ utilizând *metoda dreptunghiurilor de stânga* şi *de dreapta*.

***Soluţie*:**
Pentru a calcula valoarea integralei după formulele dreptunghiurilor de stânga sau de dreapta pentru *n*=10, divizăm intervalul de integrare în 10 părţi cu pasul:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2,6-1,9}{10}=0,07$$

Alcătuim tabelul de valori al funcţiei de sub integrală în punctele de divizare a intervalului:

i	x_i	$2x_i+1,7$	$\sqrt{2x_i+1,7}$	$1,2x_i^2+0,6$	$\sqrt{1,2x_i^2+0,6}$	y_i
0	1,90000	5,50000	2,345208	4,93200	2,221818	0,600524
1	1,97000	5,64000	2,375833	5,26068	2,293620	0,608214
2	2,04000	5,78000	2,404163	5,59552	2,365463	0,615742
3	2,11000	5,92000	2,432053	5,93652	2,436517	0,623116
4	2,18000	6,06000	2,459675	6,28368	2,507724	0,630341
5	2,25000	6,20000	2,489980	6,63750	2,578300	0,637422
6	2,32000	6,34000	2,519920	6,99808	2,648222	0,644363
7	2,39000	6,48000	2,549510	7,36548	2,718580	0,651169
8	2,46000	6,62000	2,573907	7,73992	2,789258	0,657839
9	2,53000	6,76000	2,598076	8,12148	2,859451	0,664378
10	2,60000	6,90000	2,624881	8,51000	2,917748	0,672094
						S_1=6,032108
						S_2=6,204678

În tabel s-au determinat valorile sumelor: $S_1=\sum_{i=0}^{9} y_i=6,032108$ şi $S_2=\sum_{i=1}^{10} y_i=6,204678$
Aflăm valorile aproximative ale integralei. Dacă aplicăm ***formula dreptunghiurilor de stânga***, atunci vom avea:

$$I_{st}=h\cdot\sum_{0}^{9} y_i=0,07\cdot 6,032108=0,42224756$$

Aflăm acum valoarea integralei, utilizând ***formula dreptunghiurilor de dreapta***:

$$I_{dr}=h\cdot\sum_{1}^{10} y_i=0,07\cdot 6,204678=0,43432746$$

Rezultatele obţinute după o formulă sau alta se deosebesc, de aceea în calitate de valoare finală vom lua *semisuma* valorilor determinate, rotunjind rezultatul până la zecimi de miimi:

$$I=\frac{I_{st}+I_{dr}}{2}=0,42828751$$

Răspuns: $\boldsymbol{I\approx 0,42829}$

Rezolvarea sarcinii 2

2. Calculaţi integrala $I = \int_{0,3}^{1,1} \frac{sin(0,6x^2+0,3)}{2,4+cos(x+0,5)} dx$, aplicând *metoda dreptunghiurilor medii*.

***Soluţie*:**

Pentru rezolvare vom folosi ***formula dreptunghiurilor medii* (*de mijloc*)**:

$$I_{med} = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2} \right)$$

Calculele le vom efectua de două ori, pentru n_1=8 şi n_2=10 şi respectiv pentru pasul:

$$h_1 = \frac{b-a}{n_1} = \frac{1,1-0,3}{8} = 0,1 \text{ şi } h_2 = \frac{b-a}{n_2} = \frac{1,1-0,3}{10} = 0,08.$$

Rezultatele le introducem pentru comoditate în tabelele 1 şi 2.

Tabelul 1

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$\boldsymbol{sin(0,6x^2+0,3)}$	$\boldsymbol{2,4+cos(x+0,5)}$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	0,35000	0,4	0,36483	3,057	0,119012
1	0,45000	0,5	0,40919	2,97919	0,137918
2	0,55000	0,6	0,46343	2,89757	0,159798
3	0,65000	0,7	0,525078	2,80848	0,186837
4	0,75000	0,8	0,594820	2,71532	0,220009
5	0,85000	0,9	0,669676	2,619007	0,260681
6	0,95000	1,0	0,746971	2,520502	0,309942
7	1,05000	1,1	0,820027	2,421208	0,368036
					S_1=1,762233

Tabelul 2

i	x_i	$x_i + \frac{h}{2}$	$sin(0,6x^2+0,3)$	$2,4+cos(x+0,5)$	$y \cdot \left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	0,34000	0,38	0,361081	3,066276	0,116012
1	0,42000	0,46	0,394813	3,005186	0,131702
2	0,50000	0,54	0,434966	2,940302	0,150846
3	0,58000	0,62	0,481773	2,871534	0,174946
4	0,66000	0,7	0,532495	2,799339	0,204783
5	0,74000	0,78	0,588633	2,724043	0,241551
6	0,82000	0,86	0,647111	2,86597	0,286149
7	0,90000	0,94	0,708646	2,569967	0,338594
8	0,98000	1,02	0,769394	2,493668	0,398203
9	1,06000	1,1	0,828713	2,51791	0,468439
					S_2=2,511225

Determinăm acum valorile aproximative ale integralei:

$$I_1 = h_1 \cdot S_1 = 0,1 \cdot 1,762233 = 0,1762233;$$
$$I_2 = h_2 \cdot S_2 = 0,08 \cdot 2,511225 = 0,200898$$

Observăm că valorile calculate diferă puţin una de alta, însă valoarea a doua este mai exactă decât prima, de aceea în calitate de valoare finală a integralei vom lua $I \approx 0,20090$

Răspuns: $\boldsymbol{I \approx 0,20090}$

Rezolvarea sarcinii 3

3. Calculaţi integrala $I = \int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$, cu precizia 10^{-3}.

***Soluţie*:**

Pentru atingerea preciziei date (10^{-3}), vom determina valoarea lui n, astfel încât

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < 0,0005.$$

În formula de mai sus, $a = 0{,}8$; $b = 1{,}8$; $M_2 \geq \max\limits_{[0{,}8;1{,}8]} |f''(x)|$, unde $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ este funcţia de sub integrală. Determinăm în continuare derivatele de ordinul unu şi doi:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}} \quad \text{şi} \quad f''(x) = \frac{2x^2-4}{\sqrt{(x^2+4)^5}}.$$

$$\text{Atunci, } \max_{[0{,}8;1{,}8]} |f''(x)| \approx 0{,}09500$$

Determinarea lui $\boldsymbol{n}$: b−a=1,8−0,8=1,00000 $\frac{1^3}{12n^2} * 0{,}09500 \leq 10^{-3}$; $n^2 \geq 7{,}91667$; $n \geq 2{,}82$

Pentru o precizie mai buna voi alege: **n=10**

Calcularea integralei se realizează după formula:

$$I \approx h \cdot \left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{19} \right),$$

unde $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1{,}8-0{,}8}{10} = 0{,}1$; $y_i = y(x_i) = \frac{1}{\sqrt{x_i^2+4}}$; $x_i = 0{,}8 + i \cdot h$, pentru $i = 1{,}2{,}\ldots{,}10$

Pentru comoditate, toate calculele sunt introduse în tabelul ce urmează:

i	x_i	x_i^2	x_i^2+4	$\sqrt{x_i^2+4}$	y_0, y_{10}	$y_1, y_2, \ldots, y_9$
0	0,80000	0,64000	4,64000	2,154066	0,46420	
1	0,90000	0,81000	4,81000	2,192031		0,45620
2	1,00000	1,00000	5,00000	2,236068		0,44721
3	1,10000	1,21000	5,21000	2,284732		0,43763
4	1,20000	1,44000	5,44000	2,332381		0,42888
5	1,30000	1,69000	5,69000	2,385372		0,41935
6	1,40000	1,96000	5,96000	2,441311		0,40943
7	1,50000	2,25000	6,25000	2,500000		0,40000
8	1,60000	2,56000	6,56000	2,561250		0,39036
9	1,70000	2,89000	6,89000	2,624881		0,38100
10	1,80000	3,24000	7,24000	2,690724	0,37139	
					S=0,83559	*S*=3,7706

Astfel, valoarea integralei este $I = 0{,}1 \cdot \left(\frac{0{,}83559}{2} + 3{,}7706 \right) = 0{,}4188395 \approx 0{,}419$.

Răspuns: $\boldsymbol{I \approx 0{,}419}$

Sarcini pentru realizarea proiectului.

Calc.		Calc.		Calc.	
1.	$\int_{0,6}^{1,4} \frac{\sqrt{x^2+5}dx}{2x+\sqrt{x^2+0.5}}$; $\int_{0,2}^{0,8} \frac{\sin(2x+0{,}5)dx}{2+\cos(x^2+1)}$; $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$.	**2.**	$\int_{0,4}^{1,2} \frac{\sqrt{0{,}5x+2}dx}{\sqrt{2x+1}+0{,}8}$; $\int_{0,3}^{0,9} \frac{\cos(0{,}8x+1{,}2)dx}{1{,}5+\sin(x^2+0{,}6)}$; $\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$.	**3.**	$\int_{0,8}^{1,8} \frac{\sqrt{0{,}8x^2+1}dx}{x+\sqrt{1{,}5x^2+2}}$; $\int_{0,4}^{1,0} \frac{\sin(x+1{,}4)dx}{0{,}8+\cos(2x^2+0{,}5)}$; $\int_{1,0}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1{,}3}}$.
4.	$\int_{1,0}^{2,2} \frac{\sqrt{1{,}5x+0{,}6}dx}{1{,}6+\sqrt{0{,}8x^2+2}}$; $\int_{0,6}^{1,0} \frac{\cos(0{,}6x^2+0{,}4)dx}{1{,}4+\sin^2(x+0{,}7)}$;	**5.**	$\int_{1,2}^{2,0} \frac{\sqrt{2x^2+1{,}6}dx}{2x+\sqrt{0{,}5x^2+3}}$; $\int_{0,5}^{1,3} \frac{\sin(0{,}5x+0{,}4)dx}{1{,}2+\cos(x^2+0{,}4)}$;	**6.**	$\int_{1,3}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+0{,}6}dx}{1{,}4+\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}}$; $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\cos(x^2+0{,}6)dx}{0{,}7+\sin(0{,}8+1)}$;

	$\int_{0,2}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.		$\int_{0,8}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$.		$\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$.
7.	$\int_{1,2}^{2,6}\frac{\sqrt{0,4x+1,7}dx}{1,5x+\sqrt{x^2+1,3}}$; $\int_{0,3}^{1,5}\frac{\sin(0,3x+1,2)dx}{1,3+\cos^2(0,5x+1)}$; $\int_{1,4}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$.	**8.**	$\int_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{0,3x^2+2,3}dx}{1,8+\sqrt{2x+1,6}}$; $\int_{0,5}^{1,8}\frac{\cos(x^2+0,6)dx}{1,2+\sin(0,7x+0,2)}$; $\int_{1,2}^{2,4}\frac{dx}{\sqrt{0,5+x^2}}$.	**9.**	$\int_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{0,6x+1,7}dx}{2,1x+\sqrt{0,7x^2+1}}$; $\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sin(1,5x+0,3)dx}{2,3+\cos(0,4x^2+1)}$; $\int_{0,4}^{1,2}\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$.
10.	$\int_{0,8}^{2,4}\frac{\sqrt{0,4x^2+1,5}dx}{2,5+\sqrt{2x+0,8}}$; $\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(x^2+0,8)dx}{1,5+\sin(0,6x+0,5)}$; $\int_{0,6}^{1,5}\frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$.	**11.**	$\int_{1,2}^{2,8}\frac{\sqrt{1,2x+0,7}dx}{1,4x+\sqrt{1,3x^2+0,5}}$; $\int_{0,5}^{1,3}\frac{\sin(0,7x+0,4)dx}{2,2+\cos(0,3x^2+0,7)}$; $\int_{2,0}^{3,5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.	**12.**	$\int_{0,6}^{2,4}\frac{\sqrt{1,1x^2+0,9}dx}{1,6+\sqrt{0,8x^2+1,4}}$; $\int_{0,4}^{1,4}\frac{\cos(0,8x^2+1)dx}{1,4+\sin(0,3x+0,5)}$ $\int_{0;5}^{1,3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$.
13.	$\int_{0,7}^{2,1}\frac{\sqrt{0,6x+1,5}dx}{2x+\sqrt{x^2+3}}$; $\int_{0,2}^{1,0}\frac{\sin(0,8x^2+0,3)dx}{0,7+\cos(1,2x+0,3)}$; $\int_{1,2}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,6}}$.	**14.**	$\int_{0,8}^{2,4}\frac{\sqrt{1,5x+2,3}dx}{3+\sqrt{0,3x+1}}$; $\int_{0,3}^{1,1}\frac{\cos(0,3x+0,5)dx}{1,8+\sin(x^2+0,8)}$; $\int_{1,4}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.	**15.**	$\int_{1,9}^{2,6}\frac{\sqrt{2x+1,7}dx}{2,4+\sqrt{1,2x^2+0,6}}$; $\int_{0,3}^{1,1}\frac{\sin(0,6x^2+0,3)dx}{2,4+\cos(x+0,5)}$; $\int_{0;8}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$.
16.	$\int_{0,5}^{1,9}\frac{\sqrt{0,7x^2+2,3}dx}{3,2+\sqrt{0,8x+1,4}}$; $\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(0,4x+0,6)dx}{0,8+\sin^2(x+0,5)}$; $\int_{1,6}^{2,2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2,5}}$.	**17.**	$\int_{1,0}^{2,6}\frac{\sqrt{0,4x+3}dx}{0,7x+\sqrt{2x^2+0,5}}$; $\int_{0,4}^{1,8}\frac{\sin(0,2x^2+0,7)dx}{1,4+\cos(0,5x+0,2)}$; $\int_{0,6}^{1,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2+0,8}}$.	**18.**	$\int_{0,7}^{2,1}\frac{\sqrt{1,7x^2+0,5}dx}{1,4+\sqrt{1,2x+1,3}}$; $\int_{0,2}^{1,0}\frac{\cos(0,3x+0,8)dx}{0,9+2\sin(0,4x+0,3)}$; $\int_{1,2}^{2,0}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1,2}}$.
19.	$\int_{0,6}^{2,2}\frac{\sqrt{1,5x+1}dx}{1,2x+\sqrt{x^2+1,8}}$; $\int_{0,3}^{1,1}\frac{\sin(0,8x+0,3)dx}{1,2+\cos(x^2+0,4)}$; $\int_{1,4}^{2,0}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,7}}$.	**20.**	$\int_{1,2}^{3,0}\frac{\sqrt{2x^2+0,7}dx}{1,5+\sqrt{0,8x+1}}$; $\int_{0,5}^{1,3}\frac{\cos(x^2+0,2)dx}{1,3+\sin(2x+0,4)}$; $\int_{3,2}^{4,0}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1}}$.	**21.**	$\int_{1,3}^{2,7}\frac{\sqrt{1,3x^2+0,8}dx}{1,7+\sqrt{2x+0,5}}$; $\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sin(0,6x+0,5)dx}{1,5+\cos(x^2+0,4)}$; $\int_{0,8}^{1,7}\frac{dx}{\sqrt{2x^2+0,3}}$.
22.	$\int_{0,6}^{1,4}\frac{\sqrt{x^2+0,5}dx}{2x+\sqrt{x^2+2,5}}$; $\int_{0,2}^{0,8}\frac{\cos(x^2+1)dx}{2+\sin(2x+0,5)}$; $\int_{1,2}^{2,0}\frac{dx}{\sqrt{0,5x^2+1,5}}$.	**23.**	$\int_{0,4}^{1,2}\frac{\sqrt{2x^2+1}dx}{0,8x+\sqrt{0,5x+2}}$; $\int_{0,3}^{0,9}\frac{\sin(x^2+0,6)dx}{1,5+\cos(0,8x+1,2)}$; $\int_{2,1}^{3,6}\frac{dx}{\sqrt{x^2-3}}$.	**24.**	$\int_{0,8}^{1,8}\frac{\sqrt{1,5x^2+2}dx}{x+\sqrt{0,8x^2+1}}$; $\int_{0,4}^{1,0}\frac{\cos(2x^2+0,5)dx}{0,8+\sin(x+1,4)}$; $\int_{1,3}^{2,5}\frac{dx}{\sqrt{0,2x^2+1}}$.

25.	$\int\limits_{1,0}^{2,2}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+2}dx}{1{,}6+\sqrt{1{,}5x+0{,}6}}$; $\int\limits_{0,6}^{1,0}\frac{\sin(x+0{,}7)dx}{1{,}4+\cos(0{,}6x+0{,}4)}$; $\int\limits_{0,6}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{12x^2+0{,}5}}$.	**26.**	$\int\limits_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{0{,}5x^2+3}dx}{2x+\sqrt{2x^2+1{,}6}}$; $\int\limits_{0,5}^{1,3}\frac{\cos(x^2+0{,}4)dx}{1{,}2+\sin(0{,}5x+0{,}4)}$; $\int\limits_{1,3}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{3x^2-0{,}4}}$.	**27.**	$\int\limits_{1,3}^{2,5}\frac{\sqrt{0{,}8x^2+1{,}3}dx}{1{,}4+\sqrt{x^2+0{,}6}}$; $\int\limits_{0,4}^{0,8}\frac{\sin(0{,}8x+1)dx}{0{,}7+\cos(x^2+0{,}6)}$; $\int\limits_{1,4}^{2,6}\frac{dx}{\sqrt{1{,}5x^2+0{,}7}}$.
28.	$\int\limits_{1,2}^{2,6}\frac{\sqrt{x^2+1{,}3}dx}{1{,}5x+\sqrt{0{,}4x+1{,}7}}$; $\int\limits_{0,3}^{1,5}\frac{\cos(0{,}5x^2+1)dx}{1{,}3+\sin(0{,}3x+1{,}2)}$; $\int\limits_{0,6}^{1,4}\frac{dx}{\sqrt{12x^2+0{,}5}}$.	**29.**	$\int\limits_{0,8}^{1,6}\frac{\sqrt{2x+1{,}6}dx}{1{,}8+\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}}$; $\int\limits_{0,5}^{1,1}\frac{\cos(0{,}7x+0{,}2)dx}{1{,}2+\sin(x^2+0{,}6)}$; $\int\limits_{2,3}^{2,5}\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$.	**30.**	$\int\limits_{1,2}^{2,0}\frac{\sqrt{0{,}7x^2+1}dx}{2{,}1x+\sqrt{0{,}6x+1{,}7}}$; $\int\limits_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(0{,}4x^2+1)dx}{2{,}3+\sin(1{,}5x+0{,}3)}$; $\int\limits_{0,32}^{0,66}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2{,}3}}$.