Proiect la tema "Metode de rezolvare a ecuaţiilor neliniare"

Lucrare Nr. 3 "Precizarea rădăcinii. Metoda încercărilor. Metoda înjumătăţirii (bisecţiei)"

Elaborat: elevul clasei a XII-a ”C”, Nume Prenume Elev Guțu Cătălin

Varianta 15

Ecuația I: 3^(x-1)-4-x=0
Ecuația II: 2*x^3-9*x^2-60*x+1=0
Ecuația III: (x-3)^2*log$_{0,5}$(x-2)=-1
Ecuația IV: 5*sin(x)=x-1

Scop lucrare:
- Verificare a posibilităţii aplicării metodelor în studiu pentru ecuaţiile propuse;
- Analiza ecuaţiilor propuse, rezolvarea analitică, grafică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;
- Estimarea erorilor metodelor în studiu (opţional).

Sarcini de realizat:
1) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic;*
2) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător;*
3) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic;*
4) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător.*

Realizarea sarcinilor:
Sunt date ecuaţiile:
a) **3^(x-1)-4-x=0**
b) **2*x^3-9*x^2-60*x+1=0**
c) **(x-3)^2*log$_{0,5}$(x-2)=-1**
d) **5*sin(x)=x-1**

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor.***

e) Este dată ecuaţia: **3^(x-1)-4-x=0**
   1. Notăm funcţia f(x)= **3^(x-1)-4-x**
   2. Determinăm derivata de ordinul întâi **f '(x)=3^(x-1)*ln(3)-1**
   3. Calculăm rădăcinile derivatei:

3^(x-1)*ln(3)-1=0
x=1-log$_3$(ln(3)); x=0,914

   4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x), stabilind valorile lui x egale cu:

a) cu punctele critice a valorilor funcţiei (rădăcinile ecuaţiei) sau cu valori apropiate de ele;
b) cu valorile de graniţă (reieşind din domeniul de valori admisibile ale lui x)
c) **3^(x-1)-4-x=0 => x=2,74**

x	–∞	2,74	+∞
Semnul f(x)	-	0	+

Deoarece se observă **o singură schimbare de semn**, rezultă că ecuația are **o singură rădăcină reală**.
Pentru a încheia operația de separare a rădăcinilor, trebuie de îngustat intervalul care conține rădăcina, astfel ca lungimea lui să nu depășească 1. În acest caz vom alcătui un alt tabel al variației de semne ale funcției:

x	2	2,74	3
Semnul f(x)	-	0	+

Din tabel observăm, că rădăcinile se află în intervalele: x∈[2;3]

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor cu precizarea ei prin metoda înjumătățirii.***

Este dată ecuaţia: **2*x^3-9*x^2-60*x+1=0**

1. Notăm funcţia f(x)= **2*x^3-9*x^2-60*x+1**
2. Determinăm derivata de ordinul întâi f'(x)= 6*x^2−18*x−60
3. Calculăm rădăcinile derivatei:
   6*x^2−18*x−60=0; (x−5)(x+2)=0; x_1=–2; x_2=5;
4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x):

x	–∞	-2	5	+∞
Semnul f(x)	-	+	-	+

Din tabel se vede că avem două schimbări de semn, deci ecuaţia are două rădăcini reale:

$x_1 \in (-\infty;-2]$ şi $x_2 \in [5;+\infty)$

Îngustăm intervalele care conţin rădăcinile. Atunci vom căpăta:

x	–4	–3	-2
Semnul f(x)	-	+	+

Rezultă deci, că $x \in [-4;-3]$

Precizăm una din rădăcini, de exemplu cea care se găseşte pe intervalul $x_1 \in [-4;-3]$, utilizând metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01.

Datele calculate le vom introduce pentru comoditate în tabel (semnele "–" şi "+" semnifică faptul că $f(a_i)<0$ şi $f(b_i)>0$.

Pas i	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	$2x_i^3$	$-9x_i^2$	$-60x_i$	$f(x_i)$
0	-4,0000	-3,0000	-3,5000	−85,7500	−110,2500	210,0000	14,0000
1	-4,0000	-3,5000	-3,7500	-105,4688	-126,5625	225,0000	-6,0313
2	-3,7500	-3,5000	-3,6250	-95,6602	-118,5234	217,5000	3,3164
3	-3,7500	-3,6250	-3,6875	-100,5400	-122,6328	221,2500	-0,9228
4	-3,6875	-3,6250	-3,6563	-98,0617	-120,5740	219,3750	1,7393
5	-3,6875	-3,6563	-3,6719	-99,2976	-121,6033	220,3125	0,4116
6	-3,6875	-3,6719	-3,6797	-99,9176	-122,1180	220,7813	-0,2543
7	-3,6797	-3,6719	-3,6758	-99,6073	-121,8606	220,5469	0,0790
8	-3,6797	-3,6758	-3,6777	-99,7624	-121,9892	220,6641	-0,0875
9	-3,6777	-3,6758	-3,6768	-99,6848	-121,9249	220,6055	-0,0042
10	-3,6768	-3,6758	-3,6763	-99,6460	-121,8928	220,5762	0,0374
11	-3,6900	-3,6800	-3,6850	-100,12	-122,14	221,10	-0,156
12	-3,6850	-3,6800	-3,6825	-100,03	-121,99	220,95	0,018
13	-3,6850	-3,6825	-3,6838	-100,07	-122,06	221,03	-0,069
14	-3,6838	-3,6825	-3,6831	-100,05	-122,02	220,99	-0,026
15	-3,6831	-3,6825	**-3,6828**	-100,04	-122,01	220,97	-0,000

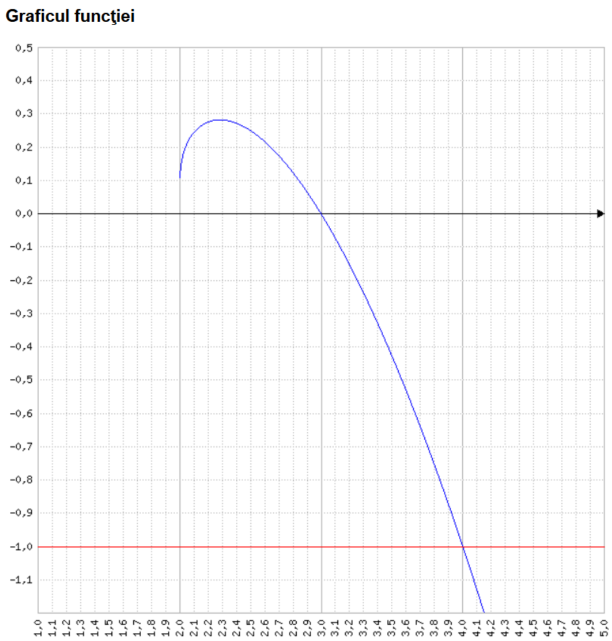
Răspuns: Rădăcina cea mai mică ecuaţiei este: **$x_1 \approx$ -3,6828**

Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuației

Este dată ecuaţia: **$(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2)=-1$**. O aducem la forma $y_1=f_1(x)$ şi $y_2=f_2(x)$, adică:

$$(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2)=-1.$$

Notând prin $y_1=$**$(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2)$** şi prin $y_2 = -1$, construim graficele acestor funcţii (figura 1.). Din grafic se observă că ecuaţia **$(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2)=-1$** are o rădăcina: **$x \approx 4$**

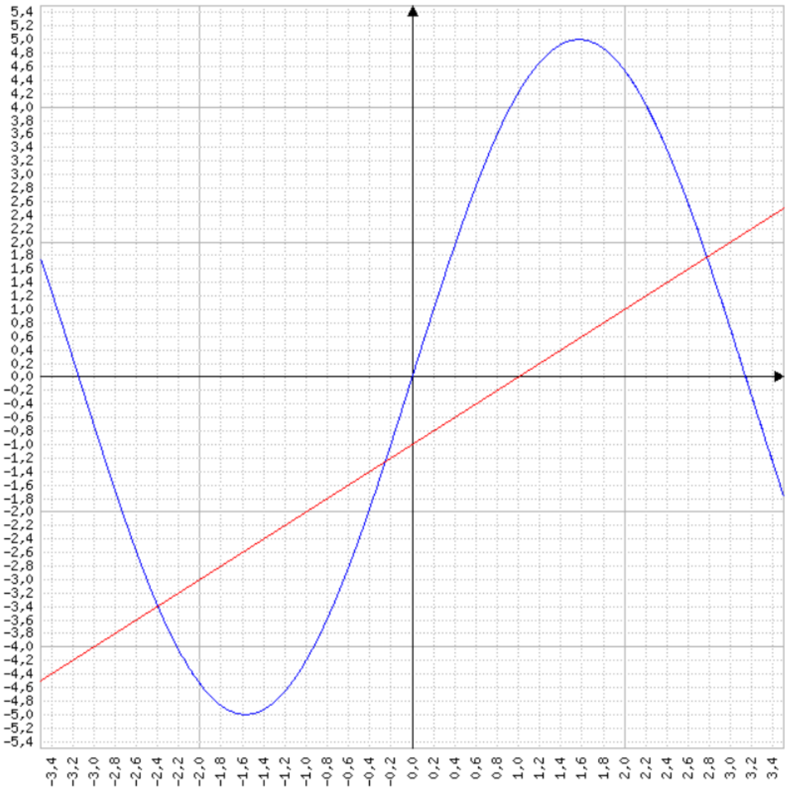


Figură 1 Graficul funcţiilor $y_1=(x-3)^2 \cdot \log_{0,5}(x-2)$ şi $y_2 = -1$

Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei cu precizarea ei prin metoda înjumătăţirii.

Este dată ecuaţia: **5*sin(x)=x-1**. Notăm prin y_1**= 5*sin(x)** şi y_2 **=x-1**, apoi construim graficele acestor funcţii (figura 2.).

Graficul funcţiei



Figură 2 Graficul funcţiilor y_1= 5*sin(x) şi **y_2 =x-1**

Din grafic se observă că ecuaţia are trei rădăcini **$x_1 \approx -2{,}4$**; **$x_2 \approx -0{,}28$**; **$x_3 \approx 2{,}78$.** Pentru precizarea rădăcinii prin metoda înjumătăţirii alegem intervalele la capetele cărora funcţia f(x)= $x^2\log_{0,5}(x+1)-1$ are semne diferite. Alcătuim tabelul variaţiilor de semn.

x	–0,5	0
Semnul f(x)	–	+

Pentru comoditatea calculelor trecem la logaritmul zecimal:

$$f(x) = x^2\,\frac{\lg(x+1)}{\lg 0{,}5} - 1 = x^2\,\frac{\lg(x+1)}{-0.301} - 1$$

Rezultatele calculelor le includem pentru comoditate în tabel:

Pas i	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	$5*sin(x)$	x_i-1	$f(x_i)$
0	-0,50	0,00	-0,25	-1,237	-1,25	0,013
1	-0,50	-0,25	-0,375	-1,830	-1,375	-0,455
2	-0,375	-0,25	-0,3125	-1,538	-1,3125	-0,226
3	-0,3125	-0,25	-0,2813	−1,386	-1,2813	-0,105
4	-0,2813	-0,25	−0,2656	−1,312	-1,2656	−0,046
5	−0,2656	−0,25	−0,2578	−1,275	-1,2578	−0,017
6	−0,2578	−0,25	−0,2539	−1,2567	−1,2539	−0,0028
7	−0,2539	−0,25	−0,2520	−1,2476	−1,2520	0,0044
8	−0,2539	−0,2520	−0,2530	−1,2522	−1,2530	0,0008
9	−0,2539	−0,2530	−0,2535	−1,2544	−1,2535	−0,0009
10	−0,2535	−0,2530	**−0,2533**	−1,2533	−1,2533	−0,0000

Răspuns: Soluţia ecuaţiei cu precizia $\varepsilon=10^{-2}$ este **$x_1 \approx -0{,}2533$**

SARCINI INDIVIDUALE

	ECUAȚII		ECUAȚII
1.	$2^x+5x-3=0$; $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$; $0{,}5^x+1=(x-2)^2$; $(x-3)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$.	2.	$\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3x^3}=0$; $2x^3-9x^2-60x+1=0$; $[\log_2(-x)]\cdot(x+2)=-1$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0{,}5x=0$.
3.	$5^x+3x=0$ $x^4-x-1=0$ $x^2-2+0{,}5^x=0$ $(x-1)^2\cdot\lg(x+11)=1$	4.	$2e^x-5x-2=0$ $2x^4-x^2-10=0$ $x\cdot\log_3(x+1)=1$ $\cos(x+0{,}5)=x^3$
5.	$3^{x-1}-2-x=0$ $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$ $(x-4)^2\cdot\log_{0,5}(x-3)=-1$ $5\cdot\sin x=x$	6.	$2\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2x^3}=0$ $x^4-18x^2+6=0$ $x^2\cdot 2^x=1$ $\operatorname{tg} x=x+1, -\pi/2\le x\le\pi/2$
7.	$e^{-2x}-2x+1=0$ $x^4+4x^3-8x^2-17=0$ $0{,}5^x-1=(x+2)^2$ $x^2\cdot\cos 2x=-1$	8.	$3^x+5x-2=0$ $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$ $0{,}5^x+1=(x-2)^2$ $(x+3)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$
9.	$\operatorname{arctg}(x-1)+2x=0$ $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$ $(x-2)^2\cdot 2^x=1$ $x^2-20\cdot\sin x=0$	10.	$2\cdot\operatorname{arcctg} x-x+3=0$ $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$ $2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0{,}5x^2-1$ $2\cdot\lg x-\frac{x}{2}+1=0$
11.	$3^x+2x-2=0$ $2x^4-8x^3+8x^2-1=0$ $\left[(x-2)^2-1\right]\cdot 2^x=1$ $(x-2)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$	12.	$2\cdot\operatorname{arctg} x-3x+2=0$ $2x^4+8x^3+8x^2-1=0$ $[\log_2(x+2)]\cdot(x-1)=1$ $\sin(x-0{,}5)-x+0{,}8=0$
13.	$3^x+2x-5=0$ $x^4-4x^3-8x^2+1=0$ $x^2-3+0{,}5^x=0$ $(x-2)^2\cdot\lg(x+11)=1$	14.	$2e^x+3x+1=0$ $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$ $x\cdot\log_3(x+1)=2$ $\cos(x+0{,}3)=x^2$
15.	$3^{x-1}-4-x=0$ $2x^3-9x^2-60x+1=0$ $(x-3)^2\cdot\log_{0,5}(x-2)=-1$ $5\cdot\sin x=x-1$	16.	$\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3x^3}=0$ $x^4-x-1=0$ $(x-1)^2\cdot 2^x=1$ $\operatorname{tg}^3 x=x-1,\ -\pi/2\le x\le\pi/2$
17.	$e^x+x+1=0$ $2x^4-x^2-10=0$ $0{,}5^x-3=(x+2)^2$ $x^2\cdot\cos 2x=-1, -2\pi\le x\le 2\pi$	18.	$3^x-2x+5=0$ $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$ $2x^2-0{,}5^x-2=0$ $x\cdot\lg(x+1)=1$
19.	$\operatorname{arctg}(x-1)+3x-2=0$ $x^4-18x^2+6=0$	20.	$2\cdot\operatorname{arcctg} x-x+3=0$ $x^4+4x^3-8x^2-17=0$

	$(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$ $x^2 - 20 \cdot \sin x = 0$		$2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = x^2 - 0{,}5$ $2 \cdot \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0$
21.	$2^x - 3x - 2 = 0$; $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$; $(0{,}5)^x + 1 = (x-2)^2$; $(x-3) \cdot \cos x = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$.	22.	$\mathrm{arcctg}\, x + 2x - 1 = 0$ $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ $(x+2) \cdot \log_2 x = 1$ $\sin(x+1) = 0{,}5 \cdot x$
23.	$3^x + 2x - 3 = 0$ $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$ $x^2 - 4 + 0{,}5^x = 0$ $(x-2)^2 \cdot \lg(x+11) = 1$	24.	$2 \cdot e^x - 2x - 3 = 0$ $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$ $x \cdot \log_3(x+1) = 1$ $\cos(x+0{,}5) = x^3$
25.	$3^x + 2 + x = 0$ $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$ $(x-4)^2 \cdot \log_{0,5}(x-3) = -1$ $5 \cdot \sin x = x - 0{,}5$	26.	$\mathrm{arcctg}(x-1) + 2x - 3 = 0$ $x^4 - x - 1 = 0$ $(x-1)^2 \cdot 2^x = 1$ $\mathrm{tg}^3 x = x + 1,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$
27.	$e^{-2x} - 2x + 1 = 0$ $2x^4 - x^2 - 10 = 0$ $0{,}5^x - 3 = -(x+1)^2$ $x^2 \cdot \cos(2 \cdot x) = -1$	28.	$3^x - 2x - 5 = 0$ $3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$ $2x^2 - 0{,}5^x - 3 = 0$ $x \cdot \lg(x+1) = 1$
29.	$\mathrm{arctg}(x-1) + 2x = 0$ $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$ $(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$ $x^2 - 10 \cdot \sin x = 0$	30.	$5^x - 6x - 3 = 0$ $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ $2x^2 - 0{,}5^x - 3 = 0$ $x \cdot \lg(x+1) = 1$