Proiect la tema "Metode de rezolvare a ecuaţiilor neliniare"

Lucrare Nr. 3 "Precizarea rădăcinii. Metoda încercărilor. Metoda înjumătăţirii (bisecţiei)"

Elaborat: elevul clasei a XII-a "___", Nume Prenume Elev ?????

Varianta ___

Ecuația I: ___________________________
Ecuația II: __________________________
Ecuația III: __________________________
Ecuația IV: __________________________

Scop lucrare:

- Verificare a posibilităţii aplicării metodelor în studiu pentru ecuaţiile propuse;
- Analiza ecuaţiilor propuse, rezolvarea analitică, grafică, alcătuirea programelor care realizează metodele în studiu;
- Estimarea erorilor metodelor în studiu (opţional).

Sarcini de realizat:

1) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic;*
2) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod analitic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător;*
3) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic;*
4) *De separat rădăcinile ecuaţiilor date în mod grafic şi de precizat una din ele prin metoda încercărilor sau metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01, utilizând programul corespunzător.*

Exemplu de realizare a sarcinii:

Sunt date ecuaţiile:

a) $5^x-6x-3=0$;
b) $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;
c) $2\cos(x+\pi/6)+x^2=3x-2$;
d) $x^2\log_{0,5}(x+1)=1$.

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor.***

Este dată ecuaţia: $5^x-6x-3=0$;

1. Notăm funcţia $f(x)=5^x-6x-3$.
2. Determinăm derivata de ordinul întâi $f'(x)=5^x\ln5-6$.
3. Calculăm rădăcinile derivatei:

$5^x\ln5-6=0$; $5^x=6/\ln5$; $x\lg5=\lg6-\lg(\ln5)$;

$$x=\frac{\lg 6-\lg(\ln 5)}{\lg 5}=\frac{0,7782-0,2065}{0,6990}=\frac{0,5717}{0.6990}\approx 0,82$$

4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x), stabilind valorile lui x egale cu:

a) cu punctele critice a valorilor funcţiei (rădăcinile ecuaţiei) sau cu valori apropiate de ele;
b) cu valorile de graniţă (reieşind din domeniul de valori admisibile ale lui x)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Semnul f(x)	+	–	+

Deoarece se observă două schimbări de semn, rezultă că ecuaţia are două rădăcini reale. Pentru a încheia operaţia de separare a rădăcinilor, trebuie de îngustat intervalele care conţin rădăcinile, astfel ca lungimea lor să nu depăşească 1. În acest caz vom alcătui un alt tabel cu variaţiile de semne ale funcţiei:

x	–1	0	1	2
Semnul f(x)	+	–	–	+

Din tabel observăm, că rădăcinile se află în intervalele: $x_1\in[-1,0]$ şi $x_2\in[1,2]$.

- ***Realizarea separării analitice a rădăcinilor cu precizarea ei prin metoda înjumătăţirii.***

Este dată ecuaţia: $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$;

1. Notăm funcţia $f(x)= x^4-x^3-2x^2+3x-3$;
2. Determinăm derivata de ordinul întâi $f'(x)=4x^3–3x^2–4x+3$;
3. Calculăm rădăcinile derivatei:
   $4x^3–3x^2–4x+3=0$; $4x(x^2–1)-3(x^2–1)=0$; $(x^2–1)(4x–3)=0$; $x_1=–1$; $x_2=2$; $x_3=3/4$;
4. Alcătuim tabelul semnelor funcţiei f(x):

x	$-\infty$	-1	3/4	1	$+\infty$
Semnul f(x)	+	–	–	–	+

Din tabel se vede că avem două schimbări de semn, deci ecuaţia are două rădăcini reale:

$x_1\in]-\infty,–1]$ şi $x_2\in[1,+\infty[$

Îngustăm intervalele care conţin rădăcinile. Atunci vom căpăta:

x	–2	–1	1	2
Semnul f(x)	+	–	–	+

Rezultă deci, că $x_1\in[–2,–1]$ şi $x_2\in[1,2]$

Precizăm una din rădăcini, de exemplu cea care se găseşte pe intervalul $x_1\in[–2,–1]$, utilizând metoda înjumătăţirii cu precizia ε=0.01.

Datele calculate le vom introduce pentru comoditate în tabel (semnele "–" şi "+" semnifică faptul că $f(a_i)<0$ şi $f(b_i)>0$.

Pas *i*	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	x_i^4	$-x_i^3$	$-2x_i^2$	$3x_i$	$f(x_i)$
0	–2	–1	–1,5	5,0625	3,375	–4,5	–4,5	–3,5625
1	–2	–1,5	–1,75	9,3789	5,3594	–6,125	–5,25	0,3633
2	–1,75	–1,5	–1,63	7,0591	4,3307	–5,3138	–4,89	–1,8140
3	–1,75	–1,63	–1,69	8,1573	4,8268	–5,7122	–5,07	–0,7981
4	–1,75	–1,69	–1,72	8,7521	5,0884	–5,9168	–5,16	–0,2363
5	–1,75	–1,72	–1,73	8,9575	5,1777	–5,9858	–5,19	–0,0406
6	–1,75	–1,73	–1,74	9,1664	5,2680	–6,0552	–5,22	0,1592
7	–1,74	–1,73						

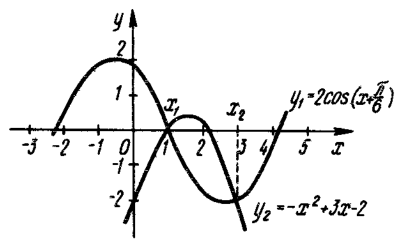
Răspuns: Rădăcina cea mai mică ecuaţiei este: $\mathbf{x_1\approx–1,73}$

- ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei***

Este dată ecuaţia: $2\cos(x+\pi/6)+x^2=3x-2$. O aducem la forma $y_1=f_1(x)$ şi $y_2=f_2(x)$, adică:

$2\cos(x+\pi/6)=–x^2+3x-2$.

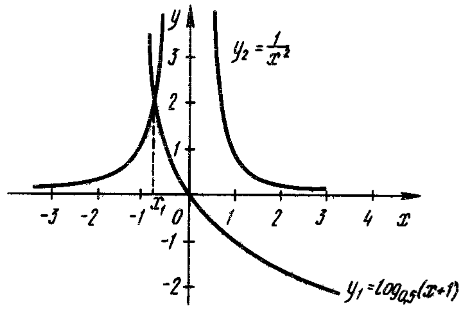
Notând prin $y_1=2\cos(x+\pi/6)$ şi prin $y_2 =–x^2+3x-2$, construim graficele acestor funcţii (figura 1.). Din grafic se observă că ecuaţia $2\cos(x+\pi/6)+x^2=3x-2$ are două rădăcini: $\mathbf{x_1 \approx 1,1}$ şi $\mathbf{x_2 \approx 2,9}$.



Figură 1 Graficul funcţiilor y_1=2cos(x+π/6) şi y_2 =–x^2+3x-2

- ***Realizarea separării grafice a rădăcinilor ecuaţiei cu precizarea ei prin metoda înjumătăţirii.***

Este dată ecuaţia: $x^2\log_{0,5}(x+1)=1$. O rescriem într-o formă mai comodă: $\log_{0,5}(x+1)=1/x^2$. Notăm prin $y_1= \log_{0,5}(x+1)$ şi $y_2 =1/x^2$, apoi construim graficele acestor funcţii (figura 2.).



Figură 2 Graficul funcţiilor y_1= $\log_{0,5}$(x+1) şi y_2 =1/x^2

Din grafic se observă că ecuaţia are o singură rădăcină $\mathbf{x_1 \approx -0,8}$. Pentru precizarea rădăcinii prin metoda înjumătăţirii alegem intervalele la capetele cărora funcţia f(x)= $x^2\log_{0,5}(x+1)-1$ are semne diferite. Alcătuim tabelul variaţiilor de semn.

x	–0,5	–0,8
Semnul f(x)	–	+

Pentru comoditatea calculelor trecem la logaritmul zecimal:

$$f(x)=x^2\frac{\lg(x+1)}{\lg 0,5}-1=x^2\frac{\lg(x+1)}{-0.301}-1$$

Rezultatele calculelor le includem pentru comoditate în tabel:

Pas *i*	a_i^+	b_i^-	$x_i=(a_i+b_i)/2$	x_i^2	$lg(x_i+1)$	$f(x_i)$
0	–0,8	–0,5	–0,65	0,4225	–0,4559	–0,360
1	–0,8	–0,65	–0,73	0,5329	–0,5686	0,0067
2	–0,73	–0,65	–0,69	0,4761	–0,5086	–0,196
3	–0,73	–0,69	–0,71	0,5041	–0,5376	–0,099
4	–0,73	–0,71	–0,72	0,5184	–0,5528	–0,048
5	–0,73	–0,72				

Răspuns: Soluţia ecuaţiei cu precizia $\varepsilon=10^{-2}$ este $\mathbf{x_1 \approx -0,73}$

SARCINI INDIVIDUALE

	ECUAŢII		ECUAŢII
1.	$2^x+5x-3=0$; $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$; $0,5^x+1=(x-2)^2$; $(x-3)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$.	2.	$\operatorname{arctg} x-\frac{1}{3x^3}=0$; $2x^3-9x^2-60x+1=0$; $[\log_2(-x)]\cdot(x+2)=-1$; $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-0,5x=0$.
3.	$5^x+3x=0$ $x^4-x-1=0$ $x^2-2+0,5^x=0$ $(x-1)^2\cdot\lg(x+11)=1$	4.	$2e^x-5x-2=0$ $2x^4-x^2-10=0$ $x\cdot\log_3(x+1)=1$ $\cos(x+0,5)=x^3$
5.	$3^{x-1}-2-x=0$ $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$ $(x-4)^2\cdot\log_{0,5}(x-3)=-1$ $5\cdot\sin x=x$	6.	$2\cdot\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2x^3}=0$ $x^4-18x^2+6=0$ $x^2\cdot 2^x=1$ $\operatorname{tg} x=x+1,-\pi/2\le x\le\pi/2$
7.	$e^{-2x}-2x+1=0$ $x^4+4x^3-8x^2-17=0$ $0,5^x-1=(x+2)^2$ $x^2\cdot\cos 2x=-1$	8.	$3^x+5x-2=0$ $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$ $0,5^x+1=(x-2)^2$ $(x+3)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$
9.	$\operatorname{arctg}(x-1)+2x=0$ $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$ $(x-2)^2\cdot 2^x=1$ $x^2-20\cdot\sin x=0$	10.	$2\cdot\operatorname{arcctg} x-x+3=0$ $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$ $2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0,5x^2-1$ $2\cdot\lg x-\frac{x}{2}+1=0$
11.	$3^x+2x-2=0$ $2x^4-8x^3+8x^2-1=0$ $[(x-2)^2-1]\cdot 2^x=1$ $(x-2)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$	12.	$2\cdot\operatorname{arctg} x-3x+2=0$ $2x^4+8x^3+8x^2-1=0$ $[\log_2(x+2)]\cdot(x-1)=1$ $\sin(x-0,5)-x+0,8=0$

13.	$3^x+2x-5=0$ $x^4-4x^3-8x^2+1=0$ $x^2-3+0{,}5^x=0$ $(x-2)^2\cdot\lg(x+11)=1$	14.	$2e^x+3x+1=0$ $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$ $x\cdot\log_3(x+1)=2$ $\cos(x+0{,}3)=x^2$
15.	$3^{x-1}-4-x=0$ $2x^3-9x^2-60x+1=0$ $(x-3)^2\cdot\log_{0,5}(x-2)=-1$ $5\cdot\sin x=x-1$	16.	$\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{3x^3}=0$ $x^4-x-1=0$ $(x-1)^2\cdot 2^x=1$ $\operatorname{tg}^3 x=x-1,\ -\pi/2\le x\le\pi/2$
17.	$e^x+x+1=0$ $2x^4-x^2-10=0$ $0{,}5^x-3=(x+2)^2$ $x^2\cdot\cos 2x=-1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$	18.	$3^x-2x+5=0$ $3x^4+8x^3+6x^2-10=0$ $2x^2-0{,}5^x-2=0$ $x\cdot\lg(x+1)=1$
19.	$\operatorname{arctg}(x-1)+3x-2=0$ $x^4-18x^2+6=0$ $(x-2)^2\cdot 2^x=1$ $x^2-20\cdot\sin x=0$	20.	$2\cdot\operatorname{arcctg} x-x+3=0$ $x^4+4x^3-8x^2-17=0$ $2\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=x^2-0{,}5$ $2\cdot\lg x-\dfrac{x}{2}+1=0$
21.	$2^x-3x-2=0$; $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$; $(0{,}5)^x+1=(x-2)^2$; $(x-3)\cdot\cos x=1,\ -2\pi\le x\le 2\pi$.	22.	$\operatorname{arcctg} x+2x-1=0$ $3x^4+4x^3-12x^2+1=0$ $(x+2)\cdot\log_2 x=1$ $\sin(x+1)=0{,}5\cdot x$
23.	$3^x+2x-3=0$ $3x^4-8x^3-18x^2+2=0$ $x^2-4+0{,}5^x=0$ $(x-2)^2\cdot\lg(x+11)=1$	24.	$2\cdot e^x-2x-3=0$ $3x^4+4x^3-12x^2-5=0$ $x\cdot\log_3(x+1)=1$ $\cos(x+0{,}5)=x^3$
25.	$3^x+2+x=0$ $2x^3-9x^2-60x+1=0$ $(x-4)^2\cdot\log_{0,5}(x-3)=-1$ $5\cdot\sin x=x-0{,}5$	26.	$\operatorname{arcctg}(x-1)+2x-3=0$ $x^4-x-1=0$ $(x-1)^2\cdot 2^x=1$ $\operatorname{tg}^3 x=x+1,\ -\pi/2\le x\le\pi/2$
27.	$e^{-2x}-2x+1=0$ $2x^4-x^2-10=0$ $0{,}5^x-3=-(x+1)^2$ $x^2\cdot\cos(2\cdot x)=-1$	28.	$3^x-2x-5=0$ $3x^4-8x^3+6x^2-10=0$ $2x^2-0{,}5^x-3=0$ $x\cdot\lg(x+1)=1$
29.	$\operatorname{arctg}(x-1)+2x=0$ $x^4-18x^2+6=0$ $(x-2)^2\cdot 2^x=1$ $x^2-10\cdot\sin x=0$	30.	$5^x-6x-3=0$ $x^4-x^3-2x^2+3x-3=0$ $2x^2-0{,}5^x-3=0$ $x\cdot\lg(x+1)=1$