3. Evaluarea impreciziei de măsurare

3.1. Definiri şi clasificări

Imprecizia de măsurare este diferenţa dintre valoarea măsurandului obţinută în procesul de măsurare şi valoarea sa reală. Această diferenţă (abatere) provine dintr-un cumul de cauze: modelul asociat procesului fizic care oferă măsurandul, metoda de măsurare, instrumentele utilizate, condiţiile de mediu în care se desfăşoară procesul de măsurare, şi, în unele situaţii, incorecta interpretare din partea operatorului.

$$\Delta X = X_{ind} - X_{real} \tag{3.1}$$

Pentru ca estimarea impreciziei de măsurare să aibă sens, se presupune că valoarea reală a măsurandului se menţine constantă pe durata măsurării. În relaţia (3.1) este definită imprecizia absolută totală de măsurare, exprimată în unităţile de măsură ale măsuranzilor.

Analiza calitativă comparativă a mai multe instrumente sau metode de măsurare se face utilizând imprecizia relativă, definită riguros prin raportarea impreciziei absolute la valoarea reală:

$$\varepsilon_X^{real} = \frac{\Delta X}{X_{real}} \quad \text{(adimensional)} \tag{3.2}$$

Deoarece valoarea reală nu este cunoscută, se defineşte eroarea relativă convenţională, prin raportarea impreciziei absolute la valoarea măsurată:

$$\varepsilon_X^{conv} = \frac{\Delta X}{X_{măs}} \quad \text{(adimensional)} \tag{3.2'}$$

În continuare, vom considera exclusiv imprecizia (incertitudinea) relativă convenţională $\varepsilon_X = \varepsilon_X^{conv}$, exprimată în formă procentuală:

$$\varepsilon_X^{\%} = \varepsilon_X 100 \quad (\%) \tag{3.3}$$

sau în părţi pe milion (ppm):

$$\varepsilon_X^{ppm} = \varepsilon_X 10^6 \quad (ppm) \tag{3.4}$$

Impreciziile de măsurare pot fi estimate prin valorile maxime posibile, rezultând intervalele de existenţă certă a valorilor adevărate (reale) ale măsuranzilor, sau prin valorile probabile, rezultând intervalele de existenţă probabilă (cu probabilitatea P) a valorilor reale.

Clasificarea erorilor de măsurare după provenienţă:
- *subiective*, datorate operatorului (lipsa de experienţă sau de atenţie);
- *obiective*, datorate instrumentaţiei sau ambianţei procesului de măsurare

Clasificarea erorilor după caracterul apariţiei:
- accidentale;
- aberante;
- sistematice

1. *Erorile accidentale* (aleatoare) sunt generate de cauze imprevizibile şi necontrolabile, putând fi puse în evidenţă numai prin măsurări repetate care conduc la diferenţe între valorile măsurate (dacă aceste diferenţe nu apar, înseamnă că mijlocul de măsurat folosit nu are rezoluţie suficientă, erorile accidentale fiind prezente întotdeauna). Erorile accidentale evoluează conform legilor statistice, putându-se evalua frecvenţa de apariţie a oricărei valori posibile a impreciziei; în domeniul măsurărilor electrice, legile de distribuţie a erorilor accidentale mai frecvent acceptate sunt: legea normală de distribuţie (Gauss) şi legea Student (care o aproximează pe prima).

Legea normală de distribuţie a erorilor accidentale la o măsurare repetată descrie densitatea de repartiţie a erorilor, desemnate prin variabila aleatoare continuă "Δ", în forma din fig.3.1 (clopotul lui Gauss):

$$P(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{3.5}$$

în care "σ" este dispersia erorilor (rădăcina pătrată a mediei statistice a pătratelor erorilor "Δ"):

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 P(\Delta)\, d\Delta} \tag{3.6}$$

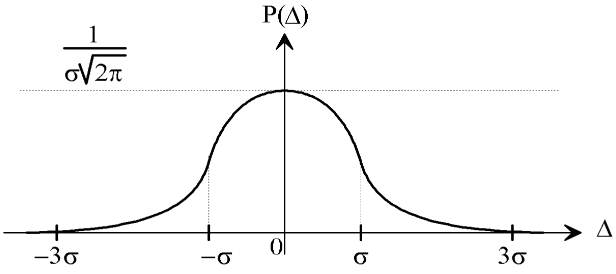

Fig.3.1. Funcţia de repartiţie normală

Relaţia (3.6) evidenţiază proprietăţile esenţiale ale erorilor cu distribuţie normală:
- *simetria* (probabilitatea egală de apariţie a erorilor de acelaşi modul dar de semne contrare);
- *concentrarea* (erorile mai mici sunt mai frecvente);
- *legea 3σ* (frecvenţa erorilor mai mari decât 3σ este, practic, nulă).

Probabilitatea P ca eroarea "Δ" să fie mai mică decât o valoare admisibilă "$\Delta_{max\,adm}$", se numeşte *nivel de încredere* şi se calculează cu formula:

$$P(\Delta_{max\,adm}) = 2\Phi\Delta_{max\,adm}/\sigma \qquad (3.7)$$

în care $\Phi(z)$ este funcţia Laplace, ale cărei valori sunt tabelate. Câteva valori reprezentative ale dependenţei $P(\Delta_{max\,adm})$ sunt redate în tabelul T1.

Tabelul T1

$\Delta_{max\,adm}$	0,1	0,5	1.00	1,5	2.00	2,5	3.00
$P(\Delta_{max\,adm})$	0,08	0,38	0,68	0,86	0,95	0,98	0,996

Legea de distribuţie *Student* (pseudonimul matematicianului englez William Sealey Gosset, 1876 - 1937) este *rectangulară* şi are rezultate foarte bune în practica măsurărilor electronice, care presupun relativ puţine ("n") experimente şi tot atâtea valori măsurate.

Fig.3.2. William Sealey Gosset

Atunci când "n" devine foarte mare (>30..50) rezultatelele sunt aproape identice pentru ambele distribuţii. După legea Student, limita modulului impreciziei $\Delta_{max\,adm}$ este (cu probabilitatea P):

$$\Delta_{max\,adm} = ts \qquad (3.8)$$

în care:
- t (n,P) reprezintă parametrul distribuţiei Student, dependent de numărul n de valori cunoscute ale impreciziei şi de nivelul de încredere P;
- "s" reprezintă *estimarea dispersiei*, numită *abatere standard* şi definită prin relaţia Bessel:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2}{n-1}} \qquad k = \overline{1,n} \tag{3.9}$$

în care Δ_k sunt cele n valori ale şirului de imprecizii absolute.
Câteva valorile reprezentative pentru t(n,P) sunt redate în tabelul T2, din care rezultă că, *pentru a obţine rezultate suficient de precise, sunt necesare cel puţin n=5...10 măsurări corecte*.

Tabelul T2

P	0,99	0,95	0,9	0,8
n	**t**			
1	63,6	12,7	6,3	3,1
3	5,84	3,18	2,35	1,64
5	4,03	2,57	2,02	1,47
10	3,17	2,23	1,81	1,37
15	2,95	2,31	1,75	1,34
20	2,84	2,1	1,72	1,32

2. *Erorile aberante* (greşeli) aparţin experimentatorului, fiind evidenţiate doar prin măsurări repetate, producând valori aberante (mult diferite de restul valorilor) în şirurile valorilor măsurate. Eliminarea valorilor aberante din şirurile de valori se face cu teste de concordanţă elaborate pe baza legilor de distribuţie a erorilor accidentale.

3. *Erorile sistematice* (de tip determinist – cunoscute prin cauze, valori şi semne) pot fi: constante, progresive, periodice și complexe.
Erorile sistematice nu pot fi evidenţiate printr-o măsurare repetată; evaluarea lor este posibilă doar din informaţii suplimentare vizând: specificaţile tehnice ale instrumentelor folosite, condiţiile de mediu, modelele proceselor fizice analizate şi metodele de măsurare folosite, fiecare categorie de cauze generând câte o categorie de erori sistematice asociate: de instrumentaţie, de influenţă, de model, de metodă.
Datorită evoluţiei complicate a unor erori sistematice, în special a celor de instrumentaţie, erorile sistematice se împart în două categorii: *complet definite* şi *incomplet definite*.
Erorile complet definite sunt cele cărora li se pot determina valorile, semnele şi legile de variaţie. Erorilor incomplet definite li se pot preciza doar valorile maxime !

<u>*Observaţie*</u>: În calculul impreciziei pentru măsurări repetate, se recomandă tratarea erorilor sistematice incomplet definite ca erori aleatoare (***aleatorizarea erorilor sistematice incomplet definite***), astfel: dacă α_k (k=1...n) sunt limitele maxime ale acestor erori (separate considerând cauzele lor), erorilor sistematice incomplet definite li se asociază valorile probabile (cu nivelul de încredere P):

$$\Delta_{p\,rob} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, t\,(\infty, P)\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \tag{3.10}$$

în care: t este parametrul distribuţiei Student pentru n=∞
După aleatorizare, se verifică îndeplinirea condiţiei:

$$\Delta_{prob} \le \sum \alpha_k \tag{3.11}$$

Dacă această condiţie nu este îndeplinită, erorile respective au valori dominante şi trebuie sumate aritmetic:

$$\Delta_{prob} = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k + \frac{1}{\sqrt{3}}\, t(\infty, P)\sqrt{\sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k^2} \tag{3.12}$$

În relaţia (3.12) "i" reprezintă numărul erorilor cu valori dominante iar "n" – numărul total al erorilor considerate.
Suma tuturor erorilor sistematice complet definite se numeşte *eroare de justeţe*; eliminarea impreciziei de justeţe este obligatorie, fiind posibilă fie prin calcul, fie prin eliminarea surselor generatoare şi repetarea experimentelor.

3.2. Estimarea impreciziei de măsurare (calculul erorilor)

Imprecizia de măsurare se estimează prin valorile absolută şi relativă în funcţie de tipul măsurării (repetată, izolată) şi de metoda de măsurare folosită (directă, indirectă). În cazul unei măsurări izolate, se pot estima numai erorile sistematice; eroarea totală (care include şi erorile aleatoare) se poate estima numai în cazul unei măsurări repetate.
Evaluarea impreciziei de măsurare are următoarele obiective:
- determinarea *intervalului de existenţă a valorii adevărate* a mărimii măsurate, prin precizarea valorii maxime sau probabile a impreciziei absolute totale;
- determinarea *preciziei* caracteristice a unui instrument sau a unei metode de măsurare, pentru comparaţia cu un alt instrument sau o altă metodă, când este necesară estimarea valoarea maximă sau probabilă a impreciziei relative.

3.2.1. Evaluarea impreciziei care afectează o măsurare izolată

O măsurare izolată poate evidenţia doar erorile sistematice. Dacă o parte din impeciziile sistematice (de metodă, de model) pot fi complet definite, exprimate prin eroarea de justeţe (cu semn precizat), impreciziile de instrumentaţie şi de influenţă sunt, de obicei, incomplet definite, putând fi cunoscute (pe baza preciziei constructive a instrumentaţiei folosite) doar limitele lor (posibile sau probabile).

3.2.1.1. Erori de instrumentaţie la măsurarea izolată directă

O metodă directă de măsurare presupune utilizarea unui singur mijloc de măsurare; impreciziile sistematice de instrumentaţie incomplet definite, în exprimare absolută şi în exprimare relativă, se evaluează în funcţie de descrierea preciziei instrumentale a mijlocului de măsurare folosit.
Pentru instrumentaţia analogică, se determină impreciziile sistematice (incomplet definite) prin *erorile instrumentale de bază* (constructive), evaluate pe baza indicilor de precizie ai mijloacelor de măsurare. Domeniile de măsurare sunt intervale de valori ale măsuranzilor de forma $[0,X_n]$, precizate, de obicei, prin valoarile maxime X_n, cărora le corespund indicaţiile y_n. Δy_{adm} reprezintă abaterile maxime garantate (de producătorii de instrumente de măsurare) ale indicaţiilor instrumentelor analogic.
Din relaţiile de definiţie a indicilor de precizie, se pot deduce limitele maxime ale impreciziilor constructive absolute şi relative care afectează o măsurare.

$$\Delta X_c = c\,\frac{X_n}{100}\quad (a)\qquad \Delta X_c = c\,\frac{X_{ind}}{100}\quad (b)\qquad \Delta X_c = c\,\frac{f^{-1}(Y_n)}{100}\quad (c) \tag{3.13}$$

$$\varepsilon_X^c = c\,\frac{X_n}{X_{ind}}\quad (a)\qquad \varepsilon_X^c = c\quad (b)\qquad \varepsilon_X^c = c\,\frac{f^{-1}(Y_n)}{f^{-1}(Y_{ind})}\quad (c) \tag{3.14}$$

Precizări: Pentru mijloacele de măsurare pentru care indicii de precizie se specifică în formele (a) şi (b), impreciziile constructive pot fi evaluate direct.
Pentru mijloacele de măsurare pentru care indicii de precizie se specifică prin raportări la deschiderile domeniilor de ieșire (c), impreciziile constructive pot fi determinate doar dacă se cunosc caracteristicile de transfer Y=f(X).
Pentru indicatoarele uzuale (ampermetre, voltmetre, wattmetre), preciziile măsurărilor sunt mai mari când valoarea măsurată X_{ind} este apropiată de X_n (fig.3.3). De aceea aparatele de măsurare se realizează cu mai multe domenii de măsurare. Cu un instrument uzual ale cărui domenii nominale adiacente X_n^k, X_n^{k+1} (k=1...n-1), se află în raport 1/2, oricare măsurand care nu depășește limita oricărui domeniu de măsurare se poate evalua (folosind domeniile nominale X_n^k (k=2...n) doar în jumătățile superioare) cu imprecizia constructivă inferioară valorii:

$$(\varepsilon^c{}_X)_{max} = 2c \tag{3.15}$$

Face excepție primul (cel mai mic) domeniu de măsurare(fig.3.4).

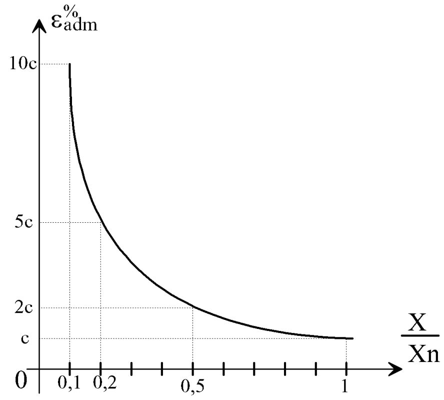

Fig.3.3. Variaţia impreciziei admisibile în domeniul de măsurare

Pentru contoare și sumatoare preciziile de măsurare nu depind de valorile măsurate X_{ind};

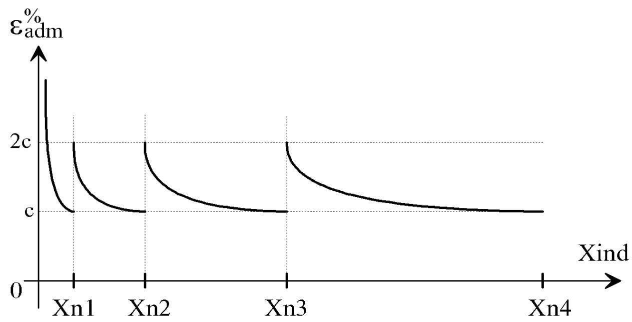

Fig.3.4.Incertitudinea de măsurare a instrumentelor cu domenii de măsurare multiple

- <u>pentru instrumentaţia numerică</u> erorile sistematice de construcţie ΔX_{sist} şi ε_X^{sist} sunt:

a) - dacă precizia instrumentală este exprimată prin componente separate de câştig (proporţionale cu indicaţiile) şi de offset (procente din domenii):

$$\Delta X_{sist} = 0,01(aX_{ind} + bX_n) \tag{3.16}$$

eroarile relative corespunzătoare fiind:

$$\varepsilon_X^{sist} = a + b\frac{X_n}{X_{ind}} \tag{3.17}$$

b) - dacă precizia instrumentală este exprimată conform normelor americane, atunci:

$$\Delta X_{sist} = 0,01aX_{ind} + Nr_a \tag{3.18}$$

şi:

$$\varepsilon_X^{sist} = a + \frac{N \times r_a}{X_{ind}} \times 100 \quad (\%) \tag{3.19}$$

în care "r_a" este rezoluţia absolută a domeniului de măsurare(semnificaţia LSD al afisajului digital), iar N - un multiplicator întreg sau zecimal.

<u>*Observaţii*</u>:

1. Relaţiile anterioare evidenţiază creşterea preciziei de măsurare atunci când valorile măsurate se apropie de capetele de scală ale domeniilor (confirmând necesitatea mai multor subdomenii de măsurare).
2. Evaluările de mai sus sunt complete doar în condiţii normate de mediu; pentru fiecare abatere de la acestea trebuie evaluate şi erorile de influenţă (sistematice incomplet definite).

Pentru calculul impreciziei totale, se recomandă sumarea pătratică a diverselor erori sistematice incomplet definite, sau aleatorizarea şi folosirea relaţiilor (3.10), notându-se cu $\Delta^T X$ şi ε^T_X valorile practice (obţinute prin sumare pătratică) şi cu $\Delta^P X$ şi ε^P_X valorile probabile (obţinute după aleatorizare); în aceste condiţii rezultă:

- intervalul de existenţă certă: $D_X=[X_{ind}-\Delta^T X,\ X_{ind}+\Delta^T X]$ sau probabilă:

$$D_X = [X_{ind} - \Delta^P X,\ \ X_{ind} + \Delta^P X] \tag{3.20}$$

a valorii adevărate a mărimii măsurate;

- precizia măsurării descrisă prin $\varepsilon^T{}_X$ sau prin $\varepsilon^P{}_X$.

3.2.1.2. Erori de instrumentaţie la măsurarea izolată indirectă

Metodele de măsurare indirecte presupun evaluarea unei mărimi inaccesibile X_0 prin intermediul altor mărimi direct măsurabile X_{k0} (k=1...m), pe baza unei dependenţe teoretice:

$$X_0 = f(X_{10},X_{20},...,X_{m0}) \tag{3.21}$$

Dacă $X_{kmăs}$ (k=1...m) sunt valorile măsurate ale mărimilor X_k, se consideră că valoarea măsurată a mărimii X are expresia:

$$X_{măs} = f(X_{1măs},X_{2măs},...,X_{mmăs}) \tag{3.22}$$

Abaterea valorii $X_{măs}$ faţă de valoarea X_0 se estimează prin erorile absolută şi relativă obţinute din erorile individuale ΔX_k şi/sau $\varepsilon^k{}_X$ care afectează mărimile direct măsurate.

Dezvoltând funcţia (3.21) în serie Taylor în jurul punctului M corespunzător valorii măsurate a măsurandului X=($X_{1măs}$,$X_{2măs}$,...,$X_{mmăs}$, $X_{măs}$), se obţine:

$$X_0 = f\left(X_{1ind}, X_{2ind},..., X_{mind}\right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial X_{k0}}\left(X_{k0} - X_{kind}\right) + R \tag{3.23}$$

Considerând că abaterile absolute $\Delta X_k=X_{k0}-X_{kmăs}$, care afectează mărimile măsurate direct, sunt suficient de mici, reziduul "R", care include termeni cu ranguri (puteri) superioare ale acestor abateri, se poate neglija. Considerând: $\Delta X=X_0-X_{măs}$, se obţine:

$$\Delta X = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial X_{k0}}\right|_M \left(X_{k0} - X_{kind}\right) = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial X_{k0}}\right|_M \Delta X_k \tag{3.24}$$

Definind erorile relative prin raportare la valorile măsurate:

$$\varepsilon_X = \frac{\Delta X}{X_{ind}} \qquad \text{şi} \qquad \varepsilon_X^k = \frac{\Delta X_k}{X_{k\,ind}} \tag{3.25}$$

se obţine imprecizia relativă care afectează măsurarea indirectă a mărimii X:

$$\varepsilon_X = \sum_{k=1}^{m} \left.\frac{\partial f}{\partial X_{k0}}\right|_M \frac{X_{kind}}{X_{ind}} \varepsilon_X^k \tag{3.26}$$

Calculul impreciziei relative care afectează o măsurare indirectă poate fi efectuat aplicând **algoritmul logaritmare-diferenţiere** (avantajos când funcţia f are formă de produs sau raport), cu următoarele etape:

- logaritmarea expresiei (3.21) şi prelucrarea rezultatului, utilizând proprietăţile logaritmilor, până la o formă avantajoasă etapei următoare;
- diferenţierea în punctul "M" (definit prin (3.23)) a expresiei obţinute anterior;
- înlocuirea diferenţialelor prin diferenţe finite ($\partial \to \Delta$);
- gruparea termenilor după fiecare diferenţă finită;
- evidenţierea erorilor relative definite prin (3.25).

În urma unei măsurări izolate a mărimii X, pentru ansamblul de mărimi X_k (k=1...m), se cunosc doar limitele maximă sau probabilă ale erorilor sistematice incomplet definite (de instrumentaţie, de influenţă, etc). Limita maxim-posibilă (teoretică) pentru ΔX şi/sau ε_X se obţine dacă în relaţiile (3.24) şi (3.26) se acceptă sumarea simplă considerând combinarea catastrofică a abaterilor reale $\Delta X_{k\,max\,pos}$ şi/sau $\varepsilon^k{}_{X\,max\,pos}$ cu semnele derivatelor parţiale, (toate ΔX_k maxime cu acelaşi semn) iar $\Delta X^T{}_k$ şi/sau $\varepsilon_X{}^{kT}$ sunt valori maxime posibile obţinute tot prin sumare simplă:

$$\Delta X_{\max pos} = \sum_{k=1}^{m} \left|\left.\frac{\partial f}{\partial X_{k0}}\right|_M\right| \Delta X^T_{k\max pos} \tag{3.27}$$

$$\varepsilon_{X\ \max pos} = \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial X_{k0}} \right|_{M} \left| \varepsilon_{X\ \max pos}^{Tk} \right| \tag{3.28}$$

Limitele *practice* (probabile) pentru erorile absolută şi relativă se obţin acceptând sumarea pătratică în relaţiile (3.24) şi (3.26):

$$\Delta_{X\ prob}^{T} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial X_{k0}} \right|_{M} \left| \Delta_{X\ prob}^{Tk} \right| \right)^2} \tag{3.29}$$

$$\varepsilon_{X\ prob}^{T} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial X_{k0}} \right|_{M} \left| \varepsilon_{X\ prob}^{Tk} \right| \right)^2} \tag{3.30}$$

Pentru valoarea adevărată a mărimii măsurate pot fi obţinute: intervalul de existenţă *cu certitudine* a valorii adevărate X_0, utilizând relaţia (3.27), sau intervalul de existenţă *probabilă* a valorii adevărate (cu probabilitatea P), utilizând relaţia (3.29). Ambele intervale au forma (3.20). De regulă, intervalul de existenţă cu certitudine a valorii adevărate este foarte larg şi nu e util în calcule. În majoritatea situaţiilor practice se preferă determinarea intervalului de existenţă probabilă, adoptând pentru calcul un nivel de încredere peste 95%.
Determinarea intervalului de existenţă probabilă a valorii adevărate a mărimii măsurate indirect presupune considerarea erorilor de apreciere care afectează măsurarea fiecărei mărimi măsurate direct cu aparate analogice, sumând pătratic erorile respective cu erorile instrumentale.

3.2.2. Evaluarea incertitudinii care afectează o măsurare repetată

Măsurarea repetată oferă informaţii necesare evaluării tuturor categoriilor de erori prezente: aberante, aleatoare şi sistematice.

3.2.2.1. Erori la măsurarea repetată directă

Rezultatul măsurării repetate a mărimii X printr-o metodă directă este şirul de valori măsurate: $\{X_{1măs}\ ,\ X_{2măs}\ ,\ldots,\ X_{nmăs}\}$, care poate cuprinde atât valori posibile (acceptabile) cât şi valori aberante (rezultate în urma unor măsurări greşite).
Evaluarea erorilor de măsurare presupune parcurgerea următoarelor etape:

- eliminarea valorilor aberante din şirul valorilor măsurate;
- calculul erorilor accidentale;
- calculul erorilor sistematice complet şi incomplet definite.

În calculele următoare, pentru un şir de "n" valori măsurate: $\{X_{kmăs},\ k = 1...n)$, se definesc:

- valoarea medie a şirului valorilor măsurate: $X_{med} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_{kind}$

(3.31)

- abaterea standard a valorilor şirului faţă de X_{med}:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} \left(X_{k\ ind} - \bar{X} \right)^2}{n-1}} \qquad k = \overline{1,n} \tag{3.32}$$

Eliminarea valorilor măsurate aberante
Valorile aberante se elimină din şirul valorilor obţinute experimental printr-un test de concordanţă. Există mai multe variante de teste pentru eliminarea valorilor aberante, dar algoritmul este comun, cu *etapele*:

- ordonarea crescătoare a valorilor şirului şi testarea valorilor de la extremităţile şirului, acestea fiind primele suspectate ca aberante;
- eliminarea din şir a valorii X_{ab} confirmată ca aberantă şi repetarea algoritmului pentru valorile rămase, până când valorile de la

extremităţile şirului îndeplinesc relaţia de concordanţă pe care se bazează testul.

Cele mai frecvent utilizate teste de concordanţă sunt:

Testul Romanovski *(https://en.wikipedia.org/wiki/Vsevolod_Ivanovich_Romanovsky)*
Fie X_{test} valoarea care trebuie testată (o extremă a şirului de valori măsurate). Pentru şirul celor (n-1 valori rămase, se calculează media şi abaterea standard $s_{(n-1)}$. Se verifică dacă valoarea X_{test} îndeplineşte condiţia:

$$\frac{\left|X_{test}-\bar{X}_{(n-1)}\right|}{s_{(n-1)}}>a \tag{3.33}$$

în care "a" este o valoare tabelată, în funcţie de numărul "n" de măsurări efectuate şi de nivelul de încredere "P" ales. Dacă relaţia (3.33) este îndeplinită, X_{test} este o valoare aberantă şi se elimină.

***Testul Grubbs* (https://en.wikipedia.org/wiki/Frank_E._Grubbs)**, analog testului Romanovski, consideră media şi abaterea standard utilizate în relaţia de testare (3.33) utilizând toate cele "n" elemente iniţiale ale şirului de valori:

$$\frac{\left|X_{test}-\bar{X}_{(n)}\right|}{s_{(n)}}>b \tag{3.34}$$

Dacă (3.34) este îndeplinită, valoarea X_{test} este aberantă şi se elimină din şir. Tabelul T3 cuprinde câteva valori pentru parametrii "a" şi "b" corespunzătoare nivelului de încredere P=0,95 , în funcţie de numărul "n" al valorilor din şir.

Tabelul T3. Valori reprezentative ale valorilor limită pentru testele Romanovski şi Grubs

n	3	4	5	6	7	8	9	10
a	4,93	3,56	3,04	2,78	2,62	2,51	2,43	3,37
b	1,41	1,71	1,92	2,07	2,18	2,27	2,35	2,41

Calculul erorilor aleatoare

Pentru un şir de valori afectat doar de erori accidentale cu o distribuţie Student (lege acceptată de obicei în cazul măsurărilor electrice uzuale, când numărul determinărilor nu este mare, se consideră că:

- valoarea probabilă (cu nivelul de încredere P) a impreciziei aleatoare care afectează oricare din valorile şirului este:

$$\Delta X_{prob} = s\ t(n,P) \tag{3.35}$$

unde: t(n,P) - parametrul distribuţiei Student;
s - abaterea standard a şirului de valori măsurate, calculată cu (3.32);

- valoarea adevărată X_0 a mărimii de măsurat se găseşte (cu nivelul de încredere P) în intervalul:

$$\left[\bar{X}-\Delta X_p,\ \ \bar{X}+\Delta X_p\right] \tag{3.36}$$

unde ΔX_p se calculează cu formula:

$$\Delta X_p=\frac{s\,t(n,P)}{\sqrt{n}} \tag{3.37}$$

Calculul erorilor sistematice

Se calculează valoarea totală probabilă a erorilor sistematice incomplet definite (de instrumentaţie, influenţă, etc.) ΔX_{sist} şi εX_{sist}, aplicând metodele prezentate în paragraful 2.1.1, considerând valoarea măsurată ca medie aritmetică a şirului de valori măsurate din care s-au eliminat valorile aberante. În funcţie de condiţiile concrete în care s-a efectuat măsurarea, se poate evalua şi eroarea de justeţe ΔX^J (cu valoare constantă şi semn cunoscut), ca sumă a erorilor sistematice complet definite.

Combinarea erorilor parţiale

Calculul impreciziei totale în vederea obţinerii intervalului de existenţă a valorii adevărate presupune combinarea erorilor aleatoare cu erorile sistematice incomplet definite. Erorile sistematice incomplet definite vor avea aceeaşi natură cu cele aleatoare, fiind necesară aleatorizarea acestor erori.

Notând ΔX_{prob} valoarea probabilă a impreciziei sistematice determinată de relaţiile (3.10) sau (3.12), valoarea probabilă (cu nivelul de încredere P) a erorilor cu semn neprecizat $\Delta X^{\pm}$ se obţine sumând pătratic ΔX_{prob} cu erorile aleatoare calculate cu (3.39):

$$\Delta X^{\pm} = \sqrt{\Delta X_{prob}^{2} + \Delta X_{p}^{2}} \tag{3.38}$$

Intervalul de existenţă probabilă (cu probabilitatea P) a valorii adevărate:

$$X_0 \in \left[\bar{X} - \Delta X^{J} - \Delta X^{\pm}, \bar{X} - \Delta X^{J} + \Delta X^{\pm} \right] \tag{3.39}$$

Imprecizia relativă de măsurare:

$$\varepsilon_X^{\pm} = \frac{\Delta X^{\pm}}{\bar{X} - \Delta X^{J}} \tag{3.40}$$