

Apéndice 02. Householder por Bloques

Gregorio Quintana ©

Departamento de Ingeniería y Ciencia de Computadores
Universidad Jaume I

Curso 2023–24

Contenido

Apéndice 02.
Householder
por Bloques

Transform. de
Householder

1 Transformaciones de Householder

Transformaciones de Householder

Transformaciones de Householder Escalares

- Una transformación de Householder H se define como:

$$H = I - \beta \mathbf{v} \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} \bullet & & & \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \end{pmatrix} - (\bullet) \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} (\bullet \bullet \bullet \bullet)$$

- Si se elige una transformación de Householder H adecuada, se pueden poner varios ceros en un vector, sin modificar la norma total.

$$H \mathbf{v} = H \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \bullet \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

- A la hora de aplicar las transformaciones de Householder, éstas no se construyen explícitamente. ¿Por qué?

Transformaciones de Householder Escalares (Cont.)

- Las transformaciones de Householder se aplican mediante el empleo de la fórmula anterior:

$$H A = (I - \beta v v^T) A = A - \beta v v^T A$$

- La fórmula anterior se puede desglosar en los siguientes pasos:

$$\textcircled{1} \quad w = v^T A = (\cdot \cdot \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A - \beta v w = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} - (\cdot) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} (\cdot \cdot \cdot)$$

- ¿Son eficientes estas operaciones?

Reflectores de Householder por Bloques

- Muchas veces se desean aplicar varias transformaciones de Householder.

$$H_1 H_2 \cdots H_b A$$

- Si se aplican una a una, las prestaciones no serán muy altas.
- El producto de varias transformaciones se puede reescribir:

$$\begin{aligned} H_1 H_2 \cdots H_b &= (I - \beta_1 v_1 v_1^T)(I - \beta_2 v_2 v_2^T) \cdots (I - \beta_b v_b v_b^T) \\ &= I - Y S^T Y^T, \end{aligned}$$

donde Y tiene b columnas y S es $b \times b$.

Reflectores de Householder por Bloques (Cont.)

- Además, las matrices Y y S tienen una forma especial.
- Por ejemplo, si $n = 11$ y $b = 4$ (se combinan cuatro reflectores), las matrices Y y S tienen la siguiente forma:

$$Y = \left(\begin{array}{cccc|ccccccc} \bullet & & & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right), \quad S = \left(\begin{array}{cccc} \bullet & & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right)$$

Reflectores de Householder por Bloques (Cont.)

- La aplicación de varias transformaciones de Householder a una matriz A se puede reescribir como:

$$H_1 H_2 \cdots H_b A = (I - Y S^T Y^T) A = A - Y S^T Y^T A$$

- La fórmula anterior se puede desglosar en los siguientes pasos:
 - 1 $W = Y^T A$
 - 2 $W = S^T W$
 - 3 $A - Y W$
- ¿Son eficientes estas operaciones?