Краткое введение в лямбда исчисление

Д. Белкин В. Бертыш

17 января 2016 г.

Section 1

Теория

Формальное определение

Множество лямбда-термов строится из бесконечного множества переменных $\mathcal{V}$ использованием аппликации и абстракции:

$$\mathcal{V} = \{v, v', v'', v''' \dots\}$$

$$x \in \mathcal{V} \implies x \in \Lambda \qquad \text{(Переменная является } \lambda\text{-термом)}$$

$$M, N \in \mathcal{V} \implies M\ N \in \Lambda \qquad \text{(Аппликация является } \lambda\text{-термом)}$$

$$M \in \mathcal{V}, v \in \mathcal{V} \implies \lambda v.M \in \Lambda \qquad \text{(Абстракция является } \lambda\text{-термом)}$$

Свободные и связанные переменные

Множество свободных переменных терма N обозначается $FV(N)$

$$
\begin{aligned}
FV(x) &\equiv \{x\} \\
FV(M\ N) &\equiv FV(M) \cup FV(N) \\
FV(\lambda x.N) &\equiv FV(N) \setminus \{x\}
\end{aligned}
$$

Множество связанных переменных терма N принято обозначать как $BV(N)$. Заметим, что переменная связана, если она образует абстракцию. Мы будем называть терм M закрытым (или комбинатором), если $FV(M) \equiv \varnothing$. Множество комбинаторов обозначим как Λ°.

Подстановки

Результат подстановки N вместо всех свободных вхождений x в M обозначим $M[x := N]$ и определим как:

$$
\begin{aligned}
x[x := N] &\equiv N \\
y[x := N] &\equiv y \text{ (если } x \neq y) \\
(M_1\ M_2)[x := N] &\equiv ((M_1[x := N])\ (M_2[x := N])) \\
(\lambda y.M)[x := N] &\equiv (\lambda y.M[x := N])
\end{aligned}
$$

Также приведем лемму о изменении порядка подстановок

$$M[x := N_1][y := N_2] \equiv M[y := N_2][x := N_1[y := N_2]]$$

α-конверсия

Введем на Λ отношение эквивалентности, задаваемое следующим образом:

$$\forall P \; P =_\alpha P$$

$$\lambda x.P =_\alpha \lambda y.P[x := y], \text{ если } y \notin FV(P)$$

Это отношение назвается α-эквивалентностью.
Все термы дальше рассматриваются с точностью до α-эквивалентности.
Если $M =_\alpha N$, иногда также пишут $\lambda \models M =_\alpha N$

β-редукция
η-редукция

Основная схема λ-исчисления

$$\forall M, N \in \Lambda : (\lambda x.M)\ N = M[x := N] \qquad (\beta)$$

Кроме того, дополним наше λ-исчисление еще одной аксиомой

$$\lambda x.M\ x \equiv M \text{ если } x \notin FV(M) \qquad (\eta)$$

Теорема о неподвижной точке

$(i)\ \ \forall F\ \exists X\ (F\ X = X)$

Более того, существует комбинатор, находящий X

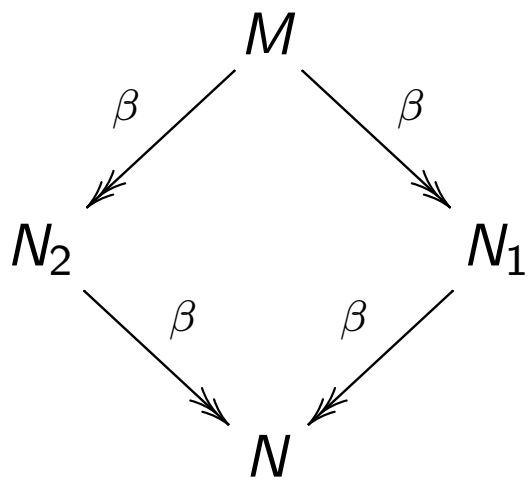
$$\boldsymbol{Y} = \lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))(\lambda x.f\ (x\ x))$$

$(ii)\ \forall F\ \ \boldsymbol{Y}\ F = F\ (\boldsymbol{Y}\ F)$

Теорема Чёрча-Россера

$$\forall M, N_1, N_2 : M \twoheadrightarrow_\beta N_1, M \twoheadrightarrow_\beta N_2 \implies \exists N : N_1 \twoheadrightarrow_\beta N, N_2 \twoheadrightarrow_\beta N$$

Иначе говоря, для β-редукции выполняется свойство ромба



Section 2

Практика

Логические значения

Пусть **True** и **False** некие лямбда термы, при этом **True** $\neq_\beta$ **False**. Один из возможных способов сделать это следующий

$$\textbf{True} = \lambda ab.a$$

$$\textbf{False} = \lambda ab.b$$

Логические операции

Определим термы **and**, **or** и **not**, представляющие соответствующие логические операции

$$\begin{aligned}\textbf{and} &= \lambda t_1\, t_2\, a\, b.(t_1\ (t_2\ a\ b)\ b)\\ \textbf{or} &= \lambda t_1\, t_2\, a\, b.(t_1\ a\ (t_2\ a\ b))\\ \textbf{not} &= \lambda f\, a\, b.f\ \ b\ a\end{aligned}$$

Ветвление

Условную конструкцию if можно определить следующим образом

$$\textbf{if} = \lambda t.t$$

$$\textbf{if}\ \textbf{True}\ a\ b \twoheadrightarrow_\beta a$$

$$\textbf{if}\ \textbf{False}\ a\ b \twoheadrightarrow_\beta b$$

Натуральные числа

Определим натуральные числа следующим образом:

$$\overline{\mathbf{0}} = \lambda fx.x = \mathbf{const}$$
$$\overline{\mathbf{1}} = \lambda fx.f\ x = \mathbf{id}$$
$$\ldots$$
$$\overline{\boldsymbol{n}} = \lambda f.\lambda x.f^n x$$
$$\text{Где } f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(}_{n \text{ раз}} x))))$$

Такое представление чисел называется нумералами Чёрча.

Простые арифметические операции

Определим инкремент следующим образом:

$$\mathbf{succ}\ \overline{\boldsymbol{n}} \equiv \overline{\boldsymbol{n+1}}$$
$$\mathbf{succ} = \lambda nfx.f\ (n\ f\ x)$$

Сложение, умножение и возведение в степень определяются так:

$$\mathbf{add} = \lambda abfx.(b\ f\ (a\ f)\ x)$$
$$\mathbf{mul} = \lambda abf.a\ (b\ f)$$
$$\mathbf{pow} = \lambda ab.b\ a$$

Сложные арифметические операции

Вычитание – сложно. Нужно для индуктивно построенного $\overline{\boldsymbol{n}}$ найти $\overline{\boldsymbol{n-1}}$.
Решение – пары.

$$\begin{aligned}\textbf{mkPair} &= \lambda abf.f\ a\ b\\ \textbf{fst} &= \lambda p.p\ \textbf{True}\\ \textbf{snd} &= \lambda p.p\ \textbf{False}\end{aligned}$$

Здесь **mkPair** создает пару, а **fst** и **snd** получают первый и второй элементы пары соответственно.
Далее определим “инкремент” пары

$$\textbf{succP} = \lambda p.\textbf{mkPair}\ (\textbf{snd}\ p)\ (\textbf{succ}\ (\textbf{fst}\ p))$$

Вычитание

Теперь можно определить декремент

$$\textbf{prev} = \lambda n.\textbf{fst}\ (n\ \textbf{succP}\ (\textbf{mkPair}\ \overline{\textbf{0}}\ \overline{\textbf{0}}))$$

и вычитание

$$\textbf{sub} = \lambda ab.b\ \textbf{prev}\ a$$

Проверка на ноль

Попробуем написать терм, вычисляющий факториал. Для начала нужно определять, что $\overline{\boldsymbol{n}} = \overline{\mathbf{0}}$. Напишем терм, выполняющий эту проверку:

$$\textbf{isZero} = \lambda n.n\ (\lambda x.\textbf{False})\ \textbf{True}$$

Определение факториала

Следующим шагом, уже в практически естественном виде мы можем определить факториал как

$$\mathbf{fact} = \lambda n.\mathbf{if}\ (\mathbf{isZero}\ n)\ \overline{1}\ (\mathbf{mul}\ \overline{\boldsymbol{n}}\ (\mathbf{fact}\ (\mathbf{prev}\ \overline{\boldsymbol{n}})))$$

Но неверно, потому что зациклились. Выделим всё из рекурсивного вызова.

$$\mathbf{T} = \lambda fn.\mathbf{if}\ (\mathbf{isZero}\ n)\ \overline{1}\ (\mathbf{mul}\ \overline{\boldsymbol{n}}\ (f\ (\mathbf{prev}\ \overline{\boldsymbol{n}})))$$

Тогда факториал определяется как

$$\mathbf{fact} = \mathbf{T}\ \mathbf{fact}$$

Избавимся от зацикливания при помощи $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{fact} = \mathbf{Y}\ \mathbf{T}$$