2.

a) verlet: $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1} + h^2 a_n + O(h^4)$

Sea $\bar{x}$ la solución exacta, ahora definimos

$$x_n = \bar{x}_n + \varepsilon_n$$

- donde ε es el error
- reescribimos nuestra ecuación con esta tal que

$$\bar{x}_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = 2\bar{x}_n + 2\varepsilon_n - \bar{x}_{n-1} - \varepsilon_{n-1} + h^2 a(\bar{x}_n + \varepsilon_n)$$

expandimos en taylor para $a(\bar{x}_n + \varepsilon_n)$ tal que

$$a(\bar{x}_n + \varepsilon_n) \approx a(\bar{x}_n) + \varepsilon_n a'_n$$

Eliminamos los terminos exactos ya que son iguales a cada lado $(\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n-1})$

$$\varepsilon_{n+1} = 2\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n a'_n$$

$$\varepsilon_{n+1} - (2 + h^2 a'_n)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$$

b) Para un oscilador armonico: $a(x) = -w^2 x$ $\quad a'(x) = -w^2$

$$\varepsilon_{n+1} - (2 - h^2 w^2)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$$

$$2\Omega = h^2 w^2$$

$$\varepsilon_{n+1} - 2(1 - \Omega)\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = 0$$

c) $\varepsilon_n = \varepsilon_0 \lambda^n$

- $\varepsilon_0 \lambda^2 - 2(1-R)\varepsilon_0 \lambda + \varepsilon_0 = 0$

$$\lambda^2 - 2(1-R)\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2(1-R)}{2} \pm \frac{\sqrt{4(1-R)^2 - 4}}{2}$$

$$\lambda = 1-R \pm \sqrt{(1-R)^2 - 1}$$

d) Si $|\lambda \pm 1| = 1$

- $1 = 1-R \pm \sqrt{(1-R)^2-1}$

$$R^2 = (1-R)^2 - 1$$

$$R^2 = -2R + R^2$$

$$R = 0$$

- $-1 = 1-R \pm \sqrt{(1-R)^2-1}$

$$(2-R)^2 = (1-R)^2 - 1$$

$$4 - 4R + R^2 = 1 - 2R + R^2 - 1$$

$$4 = 2R$$

$$R = 2$$

Luego $R \leq 2$ $\qquad R = \frac{h^2 w^2}{2}$

$$\frac{h^2 w^2}{2} \leq 2$$

$$h^2 \leq \frac{4}{w^2} \Rightarrow h \leq \frac{2}{w}$$