TUGAS RESUME TEORI RELATIVITAS UMUM MINGGU KE-5

MUHAMMAD YA'MAL AMILUN (10222070)

Medan gravitasi lemah adalah medan gravitasi ketika jarak antara sumber medan dengan titik tinjauh sangatlah jauh. Ketika hal tersebut terjadi maka persamaan jarak ruang-waktunya menjadi seperti berikut (limit medan gravitasi).

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$dengan\ \phi = -\frac{GM}{r}\ dan\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hitunglah nilai Christoffel dan persamaan geodesicnya!

A. **Nilai Christoffel**

Kita ketahui bahwa jarak antara 2 koordinat pada tensor space merupakan perkalian antara metric tensor ruang koordinat tersebut dengan kuadrat dari setiap differentials tiap sumbunya $ds^2 = X_{ij}\left(du^{ij}\right)^2$. Sehingga kita dapat mengetahui metric pada persamaan di atas sebagai berikut.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GM}{c^2r}(c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(c^2du^\mu du^\nu)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2GM}{c^2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2GM}{c^2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2GM}{c^2r} \end{bmatrix}$$

Pada persamaan Christoffel kita butuh $g^{\mu\nu}$ yang nilainya dapat diturunkan sebagai berikut. Sebelumnya, karena jarak sumber medan gravitasi sangat jauh jadi kita dapat mengasumsikan bahwa metric h sangatlah kecil $h_{\mu\nu} \ll 1$.

$$kita\ definisikan\ metric\ k\ sehingga\ g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu$$

$$\delta_\mu^\nu = \eta_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu}$$

$$\delta_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + \eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} + h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu} + 0\ , (karena\ nilai\ k\ sangatlah\ kecil\ k \ll 1)$$

$$\eta_{\mu\sigma}k^{\sigma\nu} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}$$

$$k^{\sigma\nu}\delta_\sigma^\rho = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\mu\rho}$$

$$k^{\rho\nu} = -h_{\mu\sigma}\eta^{\sigma\nu}\eta^{\mu\rho} \equiv -h^{\rho\nu}$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Perlu dipahami bahwa $h^{\mu\nu}$ bukanlah sepenuhnya invers dari $h_{\mu\nu}$ karena perkalian dari keduanya bukanlah matriks identitas (δ_μ^ν). Kemudian, apabila kita masukkan pada persamaan christoffel sebagai berikut.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$$

Apabila kita perhatikan, bahwa nilai η selalu tetap dan h sangatlah kecil sheingga kita dapat mengasumsikan sebagai berikut.

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu(\eta_{\alpha\mu} + h_{\alpha\mu}) = \partial_\nu h_{\alpha\mu}$$

$$g^{\sigma\mu} = \eta^{\sigma\mu} - h^{\sigma\mu} \equiv \eta^{\sigma\mu}$$

Sehingga persamaan Christoffel menjadi seperti berikut.

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}(\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu})$$

Apabila kita perhatikan, metric h hanya akan memiliki nilai ketika kedua indeksnya sama. Selain itu, turunan dari nilai metric h tersebut terhadap suatu indeks akan memiliki pola tetap sebagai berikut.

$$\partial_\mu h_{\nu\sigma} = 0\ untuk\ \nu \neq \sigma$$

$$\partial_\mu h_{\nu\nu} = 0\ untuk\ \mu = 0$$

$$\partial_\mu h_{\nu\nu} = \frac{\partial}{\partial_\mu}\left(\frac{2GM}{\sqrt{{x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2}}\right) = -\frac{2GMx^\mu}{({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)^{\frac{3}{2}}}\ untuk\ \mu = 1, 2, 3$$

Mari kita definisikan sebuah metric baru yaitu γ sebagai berikut.

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2GMx^1}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^1}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^1}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^1}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{2GMx^2}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^2}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^2}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^2}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ -\frac{2GMx^3}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^3}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^3}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\frac{2GMx^3}{\left({x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$

Kita substitusikan metric tersebut ke dalam persamaan Christoffel sehingga didapatkan sebagai berikut.

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}\left(\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\sigma}\left(\partial_\nu h_{\sigma\mu} + \partial_\mu h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}\right)$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\sigma}\gamma_{\nu\sigma}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\sigma}\gamma_{\mu\sigma}$$

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\sigma}\gamma_{\sigma\mu}$$

Permulaan kita memiliki 4 indeks $\sigma, \alpha\ , \mu, dan\ \nu$ sehingga secara total ada $4^4 = 256$ persamaan. Apabila kita perhatikan $\gamma_{\mu\nu} = 0\ untuk\ \mu = 0$. Sehingga, sekarang secara total ada $(4 \times 3) + (4 \times 3) + (4 \times 3) = 36$ persamaan bernilai tidak nol dan sisa persamaan lainnya bernilai nol.

B. Persamaan Geodesik

Sehingga apabila kita substitusikan persamaan Christoffel tersebut ke persamaan geodesik maka akan kita dapatkan sebagai berikut.

Untuk $\sigma = 0$

$$\left(\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} - \gamma_{l0}\frac{du^0}{d\lambda}\frac{du^l}{d\lambda}\right) = 0$$

Untuk $\sigma = 1, 2, 3$

$$\left(\frac{d^2u^k}{d\lambda^2} + \gamma_{l\sigma}\frac{du^\sigma}{d\lambda}\frac{du^l}{d\lambda} + \frac{1}{2}\gamma_{\sigma i}\frac{du^i}{d\lambda}\frac{du^\sigma}{d\lambda} - \gamma_{\sigma\sigma}\right) = 0$$

Pengurangan oleh $\gamma_{\sigma\sigma}$ karena terdapat tiga kali penambahan persamaan Christoffel ketika ketiga indeks $\sigma, \mu, dan\ \nu$ sama.