TRU TUGAS MINGGU 7

Muhammad Ya'mal Amilun (10222070)

- Solusi Reissner-Nordstrom

Pada resume kali ini pembahasan akan difokuskan kepada penurunan ricci tensor dan skalar, walaupun pembahasan di kelas lebih kepada pengenalan solusi Reissner-Nordstrom, skalar Kretschman, black hole, dan horizon. Sebelum masuk ke ricci, solusi Reissner-Nordstrom sendiri merupakan solusi dari Einstein Field Equation untuk black hole bermassa dan bermuatan. Solusi tersebut merupakan bentuk umum dari solusi Schwarschild yang hanya mempertimbangkan massa. Sebenarnya, black hole bermuatan sendiri tidaklah ada di dunia ini (setidaknya menurut teori) karena muatan-muatan pada black hole akan saling tarik menarik dan menjadi netral. Sehingga, solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi untuk black hole imajiner dengan mengasumsikan muatan dapat juga berprilaku layaknya massa dan dapat membelokkan ruang waktu. Untuk memecahkan solusi Reissner-Nordstrom, mari tinjau gaya gravitasi dan coloumb secara klasik.

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon 4\pi r^2}\ (gaya\ coloumb) \qquad F = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\ (gaya\ gravitasi\ newton)$$

Coloumb sendiri dapat dirubah menjadi massa dengan menbahkan konstanta G, seperti berikut

$$\frac{C}{\sqrt{4\pi\epsilon G}} \approx 1.16 \times 10^{10} Kg$$

Sehingga, gaya coloumb dapat ditulis menjadi berikut.

$$F = \frac{q_1 q_2}{\epsilon 4\pi r^2}\frac{G}{G}$$

$$F = G\frac{q_1 q_2}{\sqrt{\epsilon 4\pi G}\sqrt{\epsilon 4\pi G} r^2}$$

$$F = \frac{Gm_{q1}m_{q2}}{r^2}$$

Sehingga, total gaya gabungan akibat gaya coloumb dan gravitasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$F = \frac{Gm_{q1}m_{q2}}{r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

Dari prinsip tersebut, terdapat turunan lanjutnya sehingga diperolehlah metric Reissner-Nordstrom yang tidak jauh berbeda dengan metric Schwarschild sebagai berikut.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$$

$$dengan\ r_s = \frac{2GM}{c^2}\ dan\ r_q = \frac{Q^2 G}{4\pi\epsilon_0 c^4}$$

- Skalar Kretschmann

Selanjutnya, skalar Kretschmann atau biasa disebut dengan invarian Kretschmann adalah skalar yang biasanya digunakan untuk menentukan singularitas dari suatu titik pada *curved space.* Skalar Kretschmann ini bersifat invarian, sehingga nilainya akan selalu sama pada suatu titik terlepas dari kerangka acuan mana pun. Ketika nilai skalar Kretschmann ini menuju tak hingga, maka menandakan pada titik tersebut terdapat singularitas. Nilai Skalar Kretschmann sendiri didefinisikan sebagai berikut.

$$K = R_{abcd}R^{abcd}$$

Secara definisi awal, komponen Riemann sendiri memiliki indeks sebagai berikut $R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$. Cara menaikkan dan menurunkan indeksnya agar dapat digunakan untuk mencari solusi Kretschmann dapat dengan mengalikannya dengan metric sebagai berikut.

$$R_{\lambda\mu\nu\sigma} = g_{\lambda\alpha}R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma}$$

$$R^{\lambda\mu\nu\sigma} = g^{\mu\gamma}g^{\nu\rho}g^{\sigma\beta}R^{\lambda}_{\gamma\rho\beta}$$

$$Sehingga, K = (g_{\lambda\alpha}R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma})(g^{\mu\gamma}g^{\nu\rho}g^{\sigma\beta}R^{\lambda}_{\gamma\rho\beta})$$

Nilai tersebut biasanya dilakukan dengan menggunakan komputasi, untuk solusi Schawrschild sendiri konstanta tersebut senilai dengan $K = \frac{48G^2M^2}{c^4r^6}$

- Tensor Ricci

Tensor Ricci sendiri diciptakan untuk men*track* apakah suatu volume berubah ketika bergerak mengikuti geodesiknya? Perlu diperhatikan, tensor Ricci hanya men*track* perubahan nilai volume, tapi tidak men*track* perubahan bentuk/ *shape* dari volume tersebut. Sebelumnya terdapat konsep penting terkait cara lain untuk menentukan apakah suatu ruang itu *flat* atau *curve* dengan cara geodesik deviation. Geodesik sendiri merupakan jalur di mana hanya ada percepatan ke arah normal terhadap manifold atau tidak adanya kovariant derivative terhadap kurva geodesik itu sendiri, secara persamaan dapat ditulis sebagai berikut ($\nabla_{\vec{v}}\vec{v} = 0$) [dengan $\vec{v}$ merupakan kurva geodesik]. Sebagai contoh pada *flat space,* ketika suatu kurva bergerak secara geodesik maka akan terbentuk lintasan berupa garis lurus. Sedangkan pada *curved space,* kurva-kurva geodesiknya akan berbentuk konvergen atau divergen ke suatu titik dengan percepatan tertentu. Selanjutnya, apabila kita definisikan suatu kurva lain sebagai penghubung antara kurva-kurva geodesik (biasa disebut dengan kurva separasi), maka kita bisa dapatkan sebagai berikut.

$$\nabla_{\vec{v}}\vec{v} = 0$$

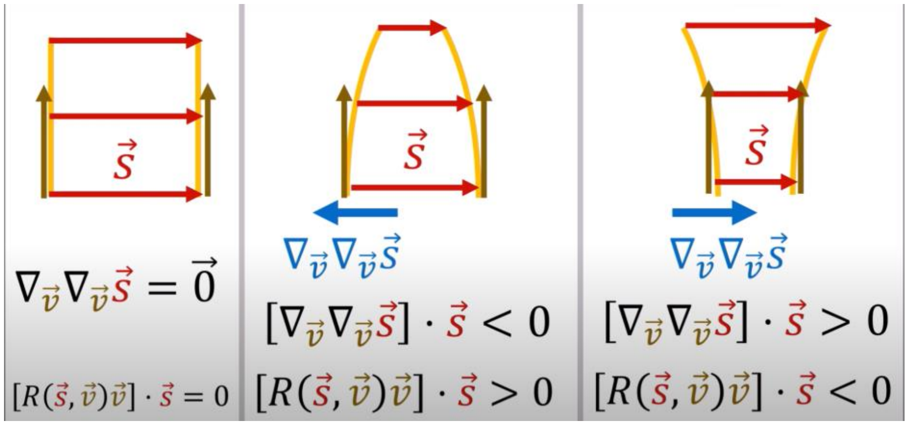
$$\nabla_{\vec{s}}\nabla_{\vec{v}}\vec{v} = 0$$

$$\nabla_{\vec{s}}\nabla_{\vec{v}}\vec{v} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{s}}\vec{v} + \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{s}}\vec{v} = 0$$

$$R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} + \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{s}}\vec{v} = 0$$

$$\nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{v}}\vec{s} = -R(\vec{s},\vec{v})\vec{v}$$

Pada kasus ini, kita menganggap Torsion Tensor bernilai nol, sehingga $\nabla_{\vec{v}}\vec{s} = \nabla_{\vec{s}}\vec{v}$ (karena turunan ‘total’ nya hanya bergantung pada covariant derivativenya).



Dapat kita lihat pada gambar di atas, ketika $\nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{v}}\vec{s}$ senilai dengan nol maka geodesik-geodesiknya berupa garis lurus dan ruangnya *flat.* Kemudian, pada *curved space* nilai $\nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{v}}\vec{s} \cdot \vec{s}$ tidak sama dengan nol dan apabila nilainya kurang dari nol maka geodesiknya menyusut (konvergen), sebaliknya apabila nilainya lebih besar dari nol maka geodesiknya akan memuai (divergen). Dari nilai-nilai tersebut juga, dapat dicari *sectional curvature,* dengan cara menormalisasikan nilai $R(\vec{s},\vec{v})\vec{v}.\vec{s}$ tersebut (kita ketahui, nilai tersebut bergantung dari kurva $\vec{s}$ dan $\vec{v}$ dan harus dinormalisasikan dengan cara membaginya dengan kuadrat dari parallelogram kurva $\vec{s}$ dan $\vec{v}$).

$$K(\vec{s},\vec{v}) = \frac{R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} \cdot \vec{s}}{(Area\ of\ parallelogram)^2}$$

$$K(\vec{s},\vec{v}) = \frac{R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} \cdot \vec{s}}{||\vec{s} \times \vec{v}||^2}$$

$$K(\vec{s},\vec{v}) = \frac{R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} \cdot \vec{s}}{\left|\left|\vec{s}\right|\right|^2 \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 \sin^2\theta}\ K(\vec{s},\vec{v})$$

$$K(\vec{s},\vec{v}) = \frac{R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} \cdot \vec{s}}{\left|\left|\vec{s}\right|\right|^2 \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 - \left|\left|\vec{s}\right|\right|^2 \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 \cos^2\theta}$$

$$K(\vec{s},\vec{v}) = \frac{R(\vec{s},\vec{v})\vec{v} \cdot \vec{s}}{(\vec{s} \cdot \vec{s})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{s} \cdot \vec{v})^2}$$

Dengan normalisasi, nilai *Sectional Curvature* tersebut akan sama walaupun menggunakan koordinat yang berbeda. Ketika *Sectional Curvature* lebih besar dari nol maka geodesiknya akan konvergen, sebaliknya ketika *Sectional Curvature* lebih kecil dari nol maka geodesiknya akan divergen. Selanjutnya, Ricci Curvature sendiri merupakan penjumlahan dari seluruh Sectional Kurve antara geodesik dengan seluruh basis-basis Orthonormalnya seperti pada berikut.

$$R(\vec{v},\vec{v}) = \sum K(\vec{e_i},\vec{v})$$

Dengan begitu, kita memastikan perubahan 'nilai' volume ketika mengikuti geodesik. Ketika Ricci Curvaturenya bernilai nol, bukan berarti ruangannya *flat,* karena bisa jadi semua *Sectional Curvaturenya* tidak bernilai nol hanya saja penjumlahan dari semuanya bernilai nol (Ricci Curvature bernilai nol). Apabila kasus tersebut terjadi, maka 'nilai' volumenya tidak berubah, tapi bentuk volumenya sendirilah yang berubah. Kemudian, kita akan bahas bagaimana bentuk Ricci Curvature di atas memiliki hubungan dengan komponen Ricci Tensor sebagai berikut

$$R(\vec{v},\vec{v}) = \sum K(\vec{e_i},\vec{v})$$

$$R(\vec{v},\vec{v}) = \frac{R(\vec{e_i},\vec{v})\vec{v}\cdot\vec{e_i}}{(\vec{e_i}\cdot\vec{e_i})(\vec{v}\cdot\vec{v}) - (\vec{e_i}\cdot\vec{v})^2}$$

Apabila kita menggunakan curva geodesik dengan nilai 1 dan seluruh kurva $\vec{e_i}$ dan $\vec{v}$ selalu orthogonal satu sama lain, maka persamaan di atas dapat dituliskan sebagai berikut.

$$R(\vec{v},\vec{v}) = \frac{R(\vec{e_i},\vec{v})\vec{v}\cdot\vec{e_i}}{(1)(1) - (0)^2}$$

$$R(\vec{v},\vec{v}) = \frac{R\left(\vec{e_i},v^j\vec{e_j}\right)v^k\vec{e_k}\cdot\vec{e_i}}{1}$$

$$R(\vec{v},\vec{v}) = v^j v^k R\left(\vec{e_i},\vec{e_j}\right)\vec{e_k}\cdot\vec{e_i}$$

$$R(\vec{v},\vec{v}) = v^i v^i R^i_{kij}$$

$$R(\vec{v},\vec{v}) = v^i v^i R_{kj}$$

- Ricci Scalar

Selanjutnya, berbeda dengan Ricci Tensor sebagai pengukur perubahan volume, Ricci Scalar sendiri berfungsi untuk men*track* perubahan/perbandingan luasan antara *curved space* dengan *flat space.* Saya sendiri belum menemukan penurunan lengkapnya, tapi dapat dilihat pada kasus berikut. Anggaplah kita ingin menentukan rasio antara suatu luasan lingkaran pada *curved space* dan *flat space* dengan jari-jari sama, luasan lingkaran pada *curved space sphere* sendiri sebagai berikut.

$$Area = \int 2\pi\rho ds$$

$$Area = \int 2\pi(Rsin\theta)Rd\theta$$

$$Area = 2\pi R^2[1 - \cos\phi]$$

$$Area = 2\pi R^2\left[1 - \cos\frac{r}{R}\right] karena\ kita\ tahu\ r = R\phi$$

Kemudian, kita mencari rasio antara area luasan antara *curved space* dengan *flat space* sebagai berikut

$$\frac{Area_{sphere}}{Area_{flat}} = \frac{2\pi R^2\left[1 - \cos\frac{r}{R}\right]}{\pi r^2}$$

Selanjutnya menggunakan Taylor Series menjadi seperti berikut

$$\frac{Area_{sphere}}{Area_{flat}} = \frac{2R^2}{r^2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{r}{R}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{r}{R}\right)^6 + \cdots\right)\right]$$

$$\frac{Area_{sphere}}{Area_{flat}} = 1 - \frac{1}{24}\frac{2}{R^2}r^2 + 2\left[-\frac{1}{6!}\left(\frac{r}{R}\right)^4 + \cdots\right]$$

Kemudian, mari kita lihat nilai dari Ricci Scalar untuk *curved space sphere* sebagai berikut

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(Rsin(u^1))^2} \end{bmatrix} \quad R_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & sin(u^1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R} = g^{ij} R_{ij}$$

$$\mathrm{R} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22}$$

$$\mathrm{R} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2}$$

$$\mathrm{R} = \frac{2}{R^2}$$

Dapat kita lihat, Ricci Scalar memiliki peran pada perbandingan di atas, ketika Ricci Scalar bernilai positif maka rasionya akan kurang dari satu sehingga luasan pada *flat space* lebih besar dari luasan pada *curved space* untuk jari-jari yang ‘sama’. Sebaliknya, apabila nilai Ricci Scalar bernilai negatif, maka rasionya akan lebih besar dari satu sehingga luasan pada *flat space* lebih kecil dari luasan pada *curved space.*