TRU TUGAS MINGGU 6 (Lie bracket, Torsion, dan Riemann)

Muhammad Ya'mal Amilun (10222070)

Sebelum memasuki materi Riemann, terdapat beberapa konsep penting dalam kalkulus tensor, yaitu parallel transport, covariant derivative, lie bracket, dan torsion tensor. Anggaplah terdapat 2 medan vektor u dan v dalam sebuah koordinat ekstrinsik A.

- Parallel Transport

Anggaplah terdapat sebuah vektor $\vec{u}$ pada suatu titik dalam koordinat A. Kemudian, kita "menggeser" vektor $\vec{u}$ tersebut searah dengan suatu kurva $\vec{v}(\lambda)$. Pergeseran tersebut dilakukan dengan menjaga agar besar/sudut vektornya tidak berubah secara intrinsik (tangensial). Sehingga, pada pergeseran tersebut hanya akan ada perubahan besar/sudut vektor secara ekstrinsik (normal). Pergeseran itulah yang disebut dengan Parallel Transport.

- Covariant Derivative

Sedangkan covariant derivative sendiri hanyalah turunan biasa, tapi secara "intrinsik". Sehingga, dapat kita definisikan covariant derivative sebagai turunan secara ekstrinsik dikurangi perubahan sudut/besar vektor yang memiliki arah normal terhadap permukaannya.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial u^i} - \vec{n}$$

$$= \left[\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\overrightarrow{e^j} + v^j \frac{\partial \overrightarrow{e^j}}{\partial u^i}\right] - \vec{n}$$

$$= \left[\frac{\partial v^j}{\partial u^i}\overrightarrow{e^j} + v^j(\Gamma^k_{ij}\overrightarrow{e^k} + L_{ij}\hat{n})\right] - \vec{n}$$

$$= \left[\frac{\partial v^k}{\partial u^i} + v^j\Gamma^k_{ij}\right]\overrightarrow{e^k}$$

Sehingga, apabila covariant derivative suatu vektor bernilai nol, maka dapat kita katakan bahwa vektor tersebut "bergerak" secara parallel transport.

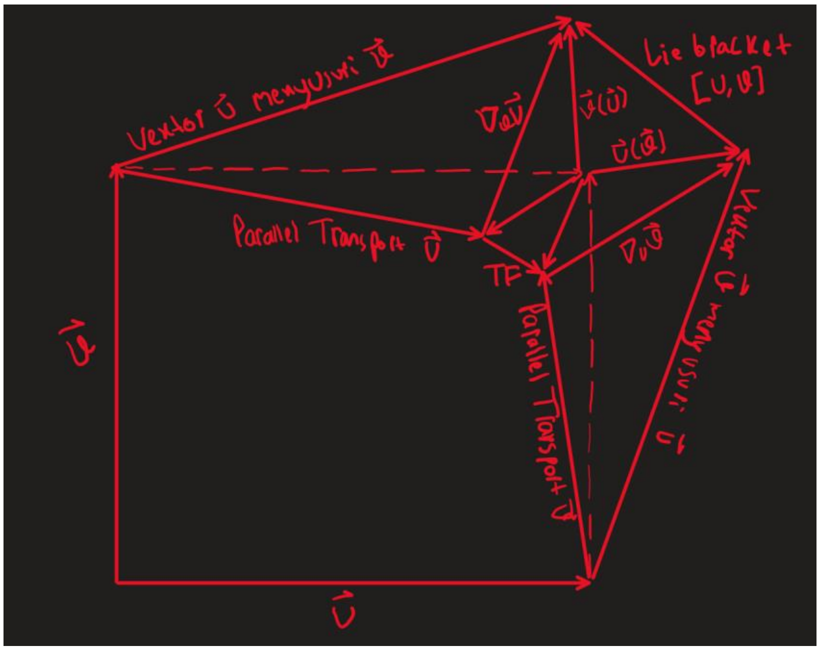
- Lie Bracket

Apabila kita memiliki dua vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ yang nilainya berubah mengikuti medan vektor u dan v. Kemudian, pada suatu titik kita coba mengikuti vektor $\vec{v}$ dan mendapatkan besar juga arah vektor $\vec{u}$ di lokasi akhir vektor $\vec{v}$. Selanjutnya pada titik awal yang sama, apabila kita melakukan sebaliknya, yaitu "mengikuti" vektor $\vec{u}$ dan mendapatkan besar juga arah vektor $\vec{v}$. Dari kedua vektor akhir tersebut $\left(\overrightarrow{u_f}\ dan\ \overrightarrow{v_f}\right)$, terdapat jarak yang memisahkan diantara keduanya dan vektor yang mengubungkan jarak tersebut disebut dengan Lie Bracket. Nilai Lie Bracket tersebut dapat kita tulis sebagai selisih dari turunan ekstrinsik $\vec{u}$ terhadap $\vec{v}$ dengan turunan ekstrinsik $\vec{v}$ terhadap $\vec{u}$, sebagai berikut.

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}(\vec{v}) - \vec{v}(\vec{u})$$

- Torsion Tensor

Pada suatu titik apabila kita melakukan parallel transport vektor $\vec{u}$ terhadap vektor $\vec{v}$. Kemudian, sebaliknya kita melakukan parallel transport vektor $\vec{v}$ terhadap vektor $\vec{u}$. Maka serupa dengan Lie Bracket, Torsion Tensor merupakan vektor yang menghubungkan "gap" dari kedua vektor akhir hasil parallel transport tersebut ($\overrightarrow{u_f}\ dan\ \overrightarrow{v_f}$). Apabila kita perhatikan, terdapat hubungan antara Lie Bracket, Covariant Derivative, dan nilai "gap"/ Torsion Tensor seperti pada gambar berikut.

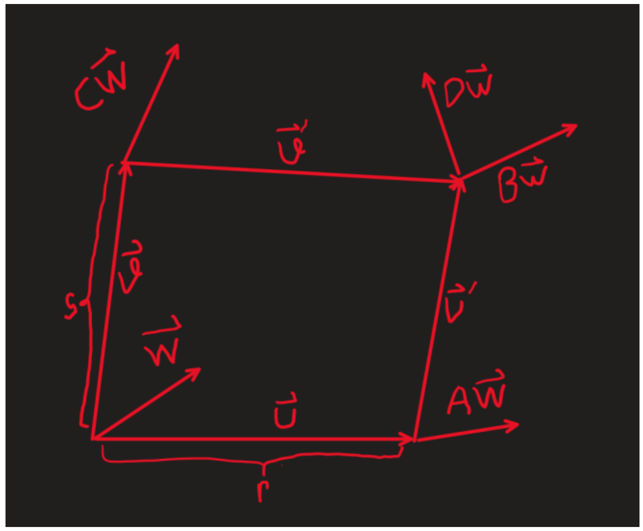


Sehingga pada gambar di atas dapat kita tuliskan nilai gap/ Torsion Tensor tersebut sebagai.

$$Torsion\,Tensor = \nabla_v\vec{u} - [u,v] - \nabla_u\vec{v}$$

- Riemann

Riemann Curvature Tensor sendiri adalah tool yang diciptakan untuk menjawab permasalahan "How can we tell if a space is flat or curve?" Jadi, bagaimana caranya? *Curved space* sendiri memiliki satu sifat khas yang membedakannya dengan *flat space.* Sifat/ ciri tersebut disebut dengan *holonomy,* yaitu apabila kita melakukan paralel transport suatu vektor $\vec{w}$ terhadap vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ secara berurutan sehingga didapatkan vektor $\overrightarrow{w_1}$. Selanjutnya, dari titik awal tersebut juga kita melakukan paralel transport lagi tapi urutannya diganti terhadap vektor $\vec{v}\ lalu\ \vec{u}$ sehingga didapatkn vektor $\overrightarrow{w_2}$. Apabila terdapat perbedaan arah ataupun nilai antara $\overrightarrow{w_1}$ dan $\overrightarrow{w_2}$, maka ruang tersebut merupakan *curved space.* Pada *flat space,* skenario di akan selalu menghasilkan vektor akhir ($\overrightarrow{w_f}$) yang sama terlepas dari lintasan tempuhnya. Hal tersebut karena, pada *flat space* turunan suatu vektor terhadap vektor lain dengan arah normal terhadap permukaan manifold selalu nol sehingga turunan 'total'nya selalu turunan intrinsiknya (covariant derivative). Penurunan secara matematis dari Riemann dapat dilihat pada bagian berikut.



$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}\frac{1}{rs}(DC\vec{w} - BA\vec{w})$$

Dikali dengan konstanta $\frac{1}{rs}$ biar bentuk di atas dapat diubah menjadi bentuk covariant derivative (perkalian tersebut tidak terlalu berpengaruh banyak dan Riemann tetap dapat digunakan untuk penentuan *flat space* $[R = 0]$ atau *curved space* $[R > 0]$).

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}\left[\left(\frac{D}{r}\frac{(C\vec{w} - \vec{w})}{s} + \frac{D\vec{w} - \vec{w}}{rs}\right) - \left(\frac{B}{s}\frac{(A\vec{w} - \vec{w})}{r} + \frac{B\vec{w} - \vec{w}}{rs}\right)\right]$$

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}\left[\left(\frac{D}{r}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} + \frac{\nabla_{\vec{u}}\vec{w}}{s}\right) - \left(\frac{B}{s}\nabla_{\vec{u}}\vec{w} + \frac{\nabla_{\vec{v}}\vec{w}}{r}\right)\right]$$

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}\left[\frac{(D\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\vec{w})}{r} - \frac{(B\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{\vec{u}}\vec{w})}{s}\right]$$

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}\left[\frac{(D\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\vec{w})}{r} - \frac{(B\nabla_{\vec{u}}\vec{w} - \nabla_{\vec{u}}\vec{w})}{s}\right]$$

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} = \lim_{r,s\to 0}[\nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w}]$$

Apabila kita perhatikan, rumus di atas hanya berlaku apabila *Lie Bracket* dari vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ adalah nol. Sehingga, apabila *Lie Bracket* $[\vec{u},\vec{v}]$ tersebut tidak nol, haruslah di tambah suku berikut.

$$R(\vec{u},\vec{v})\vec{w} + \nabla_{[\vec{u},\vec{v}]}\vec{w} = \nabla_{\vec{u}}\nabla_{\vec{v}}\vec{w} - \nabla_{\vec{v}}\nabla_{\vec{u}}\vec{w}$$

Selanjutnya, bentuk Riemann tersebut dapat dirubah menjadi bentuk sederhana lainnya menggunakan identitas *Christoffel* ($\nabla_{\vec{e_i}}\vec{e_j} = \Gamma^k_{ij}\vec{e_k}$). Apabila kita mensubstitusikan $\vec{e_a}, \vec{e_b}, \vec{e_c}$ pada persamaan Riemann akan didapatkan sebagai berikut (Anggaplah *Lie Bracket bernilai nol*).

$$R(\vec{e_a},\vec{e_b})\vec{e_c} = \nabla_{\vec{e_a}}\nabla_{\vec{e_b}}\vec{e_c} - \nabla_{\vec{e_b}}\nabla_{\vec{e_a}}\vec{e_c}$$

$$R(\vec{e_a},\vec{e_b})\vec{e_c} = \nabla_{\vec{e_a}}(\Gamma^d_{bc}\vec{e_d}) - \nabla_{\vec{e_b}}(\Gamma^d_{ac}\vec{e_d})$$

$$R(\overrightarrow{\mathrm{e_a}}, \overrightarrow{e_b})\overrightarrow{e_c} = \nabla_{\overrightarrow{e_a}}(\Gamma^d_{bc}\overrightarrow{e_d}) - \nabla_{\overrightarrow{e_b}}(\Gamma^d_{ac}\overrightarrow{e_d})$$

$$R(\overrightarrow{\mathrm{e_a}}, \overrightarrow{e_b})\overrightarrow{e_c} = \left(\partial_a\Gamma^d_{bc}\overrightarrow{e_d} + \Gamma^d_{bc}\Gamma^e_{ad}\overrightarrow{e_e}\right) - \left(\partial_b\Gamma^d_{ac}\overrightarrow{e_d} + \Gamma^d_{ac}\Gamma^e_{bd}\overrightarrow{e_e}\right)$$

$$R(\overrightarrow{\mathrm{e_a}}, \overrightarrow{e_b})\overrightarrow{e_c} = (\partial_a\Gamma^d_{bc} - \partial_b\Gamma^d_{ac} + \Gamma^e_{bc}\Gamma^d_{ae} - \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{be})\overrightarrow{e_d}$$

Nilai dalam tanda kurung tersebutlah yang merupakan komponen Riemann sebagai berikut.

$$R^d_{abc} = \partial_a\Gamma^d_{bc} - \partial_b\Gamma^d_{ac} + \Gamma^e_{bc}\Gamma^d_{ae} - \Gamma^e_{ac}\Gamma^d_{be}$$

Biasanya untuk menentukkan apakah sebuah ruang itu *flat* atau *curved,* fisikawan menggunakan definisi Komponen Riemann tersebut. Apabila Komponen Riemann tersebut lebih besar dari nol, maka ruang tersebut *curved* dan sebaliknya apabila komponennya sama dengan nol maka ruang tersebut *flat.* Dapat kita lihat juga, untuk memecahkan komponen Riemann kita membutuhkan semua christoffel pada suatu ruang yang juga dapat diperoleh dari metric ruang tersebut dengan definisi Levi-Civita ($\Gamma^d_{ab} = \frac{1}{2}g^{de}(\partial_a g_{eb} + \partial_b g_{ae} - \partial_e g_{ab})$). Dapat kita lihat juga, untuk menyelesaikan komponen Riemann kita harus memecahkan 4 variabel bebas, pada ruang 4-Dimensi berarti terdapat $4^4 = 256$ komponen yang harus diselesaikan. Penyelesaian tersebut dapat dipermudah dengan mengikuti aturan simetri pada komponen Riemann sebagai berikut.

43-Symmetry	$R^d_{abc} = -R^d_{acb}$
Bianchi Identity	$R^d_{abc} + R^d_{cab} + R^d_{bca} = 0$
12-Symmetry	$R_{abcd} = -R_{bacd}$
Flip	$R_{abcd} = R_{cdab}$

Note: Pembuktian dari aturan-aturan tersebut lumayan panjang dan mungkin akan diberikan di resume-resume selanjutnya.