TUGAS TRU MINGGU 8 (Newton Cartan, Stress-Energy-Momentum Tensor, Einstein Field Equation)

MUHAMMAD YA'MAL AMILUN (10222070)

- Newton Cartan

Newton Cartan sendiri merupakan pembaruan dari model gravitasi Newton dengan menggunakan *curved space,* walau masih menggunakan transformasi Galileo. Sebelumnya, mari mereview sedikit terkait persamaan poisson untuk gravitasi sebagai berikut.

$$g = -\nabla\phi$$

$$\nabla \cdot g = -4\pi G\rho \ didapatkan\ dari\ persamaan\ gravitasi\ newton$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$$

Pada kasus Newton Cartan ini, kita mencari suatu *curved space* di mana jalur tempuh suatu kurva akibat gaya gravitasi merupakan jalur geodesiknya dan bukan akibat covariant derivativenya (perubahan percepatan/ turunan kecepatannya hanya berada pada arah normal terhadap *curved space* tersebut). Hal tersebut dapat terjadi apabila, kita mengatur bentuk percepatan gravitasi sedemikian rupa sehingga menyerupai persamaan geodesik seperti berikut.

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{x^i}}{dt^2} = -\nabla\phi$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{x^i}}{dt^2} + \frac{d\phi}{dx^i} = 0$$

Apabila kita perhatikan, persamaan tersebut lumayan mirip dengan persamaan geodesik seperti berikut

$$\frac{d^2x^\sigma}{d\lambda^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

Sedikit review, persamaan geodesik sendiri membuktikan bahwa perubahan kecepatan/ percepatan $\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)$ hanya ada pada arah normal terhadap manifold dan covariant derivative (percepatan intrinsiknya) bernilai nol. Sehingga apabila kita dapat 'memaksakan' persamaan percepatan gravitasi menjadi persamaan geodesik maka kita dapat memastikan tidak adanya covariant derivative. Apabila kita lihat kedua persamaan di atas, hal tersebut dapat dilakukan dengan cara menggunakan parameter waktu sebagai parameter afin dan mengatur nilai christoffelnya seperti berikut.

$$t = \lambda$$

Mari kita tinjau untuk $\sigma = 0$

$$\frac{d^2t}{dt^2} + \Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$

Sehingga didapatkan bahwa $\Gamma^0_{\mu\nu} = 0$

Kemudian, kita tinjau untuk $\sigma = i = 1, 2, 3$ sebagai berikut

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = \frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{d\phi}{dx^i} = 0$$

$$\Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = \frac{d\phi}{dx^i} = 0$$

Dapat kita lihat, bahwa pada ruas ke dua tidak ada fraksi kecepatan $\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)$. Oleh karena itu, dapat kita simpulkan $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{j0} = \Gamma^i_{0k} = 0\ dengan\ i, j, k = 1{,}2{,}3$. Sehingga, persamaannya sisanya sebagai berikut.

$$\Gamma^i_{00}\frac{dt}{dt}\frac{dt}{dt} = \frac{d\phi}{dx^i} = 0$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{d\phi}{dx^i}$$

Sehingga, dapat kita simpulkan apabila kita memiliki metric sedemikian rupa sehingga nilai Christoffelnya adalah $\Gamma^i_{00} = \frac{d\phi}{dx^i}\ dan\ \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\ lainnya\ bernilai\ 0$. Maka apabila suatu objek bergerak mengikuti geodesiknya dengan parameter afinnya berupa waktu, objek tersebut akan bergerak dengan jalur seperti jalur kurva akibat gaya gravitasi. Sekarang, pertanyaan selanjutnya bagaimana kah Curvature dari *curved space* tersebut lalu apa persamaan yang menjelaskan bagaimana perubahan Curvature ruang waktu akibat suatu medan skalar (pada kasus ini disebabkan oleh massa).

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\beta}$$

$$R^i_{0\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^i_{\nu 0} - \partial_\nu\Gamma^i_{\mu 0} + \Gamma^\alpha_{\nu 0}\Gamma^i_{\mu\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu 0}\Gamma^i_{\nu\beta}$$

Pada ruas kanan, untuk fraksi ke-3 dan ke-4, agar nilainya tidak nol maka $\alpha\ dan\ \beta$ haruslah bernilai nol, tapi hal itu juga akan menyebabkan indeks atas pada Christoffel menjadi nol, sehingga fraksi ke-3 dan ke-4 akan bernilai nol.

$$R^i_{0\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^i_{\nu 0} - \partial_\nu\Gamma^i_{\mu 0}$$

Untuk kasus $\mu, \nu = 0$

$$R^i_{000} = 0$$

Untuk kasus $\mu = j\ dan\ \nu = 0$

$$R^i_{0j0} = \partial_j\Gamma^i_{00} - \partial_0\Gamma^i_{j0}$$

$$R^i_{0j0} = \partial_j\partial_i\phi$$

Untuk kasus $\mu = 0\ dan\ \nu = j$

$$R^i_{00j} = \partial_0\Gamma^i_{j0} - \partial_j\Gamma^i_{00}$$

$$R^i_{00j} = -\partial_j\partial_i\phi$$

Untuk kasus $\mu = j\ dan\ \nu = k$

$$R^i_{jk} = \partial_j\Gamma^i_{k0} - \partial_k\Gamma^i_{jo}$$

$$R^i_{jk} = 0$$

Sehingga, didapatkan Curvature sebagai berikut

$$R^i_{0j0} = -R^i_{00j} = \partial_j \partial_i \phi$$

Dari hubungan di atas, kita telah mengetahui bagaimana pengaruh perubahan medan skalar gravitasi terhadap perubahan kurvature ruang di suatu titik. Akan tetapi, terdapat juga bentuk hubungan yang lebih mudah dibayangkan dengan mengubah bentuk Riemann menjadi Ricci Tensor sebagai berikut.

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030}$$

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = \frac{\partial^2 \phi}{dx^2} + \frac{\partial^2 \phi}{dy^2} + \frac{\partial^2 \phi}{dz^2} = \nabla^2 \phi$$

$$R_{00} = \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Apabila kita ingat kembali, Ricci Tensor menandakan terdapat suatu perubahan nilai volume ruang apabila kita bergerak mengikuti geodesik tersebut. Rumus tersebut menandakan bahwa pada suatu titik, ketika terdapat massa densitas maka nilai 'volume' dari ruang akan lebih dari nol dan ruang waktu 'memuai'. Sedangkan, apabila pada suatu titik tidak memiliki massa densitas, maka tidak terdapat perubahan nilai 'volume' dari ruang waktu. Akan tetapi, hal tersebut tidaklah menandakan bahwa ruang waktu tersebut *flat,* Ricci tensor hanya dapat men*track* perubahan nilai volume dan tidak bisa men*track* perubahan bentuk dari volume. Penentu *flat* atau *curve* nya sebuah ruang dijelaskan oleh Riemann. Pada hubungan Riemann sebelumnya, kita tahu bahwa nilai Riemann tidaklah nol (ruang waktu *curve*) selama turunan dari medan skalar gravitasi terhadap kedua sumbu tidaklah nol dan tidak bergantung pada keberadaan massa pada suatu titik.

- Energy-Momentum Tensor

Pada Newton Cartan, kita telah berhasil mendefinisikan kurva percepatan gravitasi sebagai kurva geodesik dan disebabkan oleh *curved space.* Akan tetapi, Newton Cartan hanya berlaku untuk transformasi Galilean karena pada kenyataannya densitas massa suatu objek berubah-rubah tergantung dari kerangka acuannya. Oleh karena itu, diperlukan sesuatu pegganti untuk densitas tersebut yang invarian terhadap seluruh kerangka acuan (Energy-Momentum Tensor). Sebelum masuk pada penurunan, terdapat konsep penting terlebih dahulu untuk memahami Energy-Momentum Tensor, yaitu Number-Flux 4-Vektor. Number-Flux 4-Vektor sendiri, sebuah matriks, memiliki komponen-komponen yang merupakan jumlah partikel pada suatu unit box ketika salah satu koordinat ruangwaktu ditahan konstan sebagai berikut.

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} N^t \\ N^x \\ N^y \\ N^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\#}{\Delta x \Delta y \Delta z} \\ \frac{\#}{\Delta t \Delta y \Delta z} \\ \frac{\#}{\Delta t \Delta x \Delta z} \\ \frac{\#}{\Delta t \Delta x \Delta y} \end{bmatrix}$$

Interpretasi dari komponen N^t adalah sebagai suatu densitas pada sebuah volume ketika waktu konstan. Kemudian, untuk komponen N^x adalah sebagai banyaknya jumlah sesuatu yang masuk menembus luasan $\Delta y \Delta z$ pada waktu Δt. Begitupula dengan $N^y\ dan\ N^z$ yang serupa dengan N^x. Apabila kita perhatikan, pada suatu unit box tertentu dalam diagram ruang waktu, jumlah 'wordlines' memasuki box haruslah sama dengan jumlah 'wordlines' yang keluar dari box. Hal tersebut dijelaskan dalam persamaan kontinuitas sebagai berikut.

$$\partial_\mu N^\mu = 0$$

$$\frac{\partial N^t}{\partial t} + \frac{\partial N^x}{\partial x} + \frac{\partial N^y}{\partial y} + \frac{\partial N^z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial N^t}{\partial t} + \nabla \cdot \overrightarrow{N^i} = 0$$

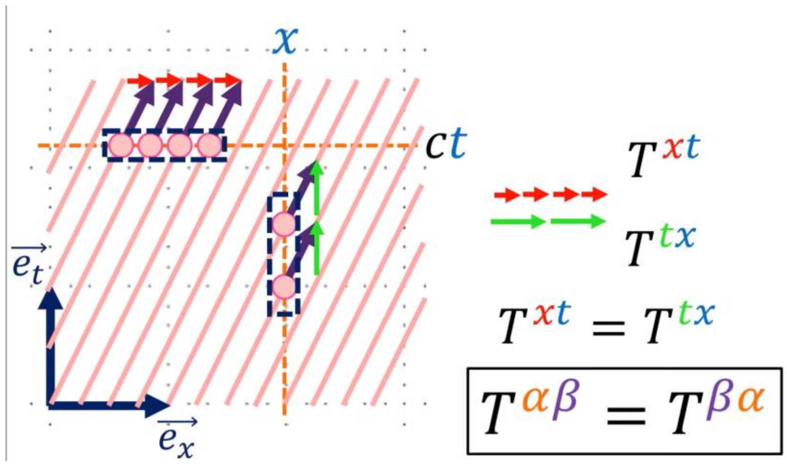
Persamaan di atas, apabila kita perhatikan berarti ketika $\nabla \cdot \overrightarrow{N^i} > 0$, atau terdapat sesuatu (mulai sekarang kita sebut sebagai partikel biar mudah) partikel bergerak keluar dari box, maka densitas partikel dalam box tersebut haruslah berkurang $\frac{\partial N^t}{\partial t} < 0$. Sebaliknya ketika divegensinya negatif, terdapat partikel masuk dalam box, maka densitas partikel dlaam box tersebut akan bertambah. Selain itu, persamaan Number-Flux 4-Vektor di atas juga dapat kita tulis sebagai berikut.

$$N = \begin{bmatrix} N^t \\ N^x \\ N^y \\ N^z \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} 1 \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{bmatrix}$$

Dengan n adalah densitas partikel dalam unit box, dan u^i adalah kecepatan partikel ke arah i. Kajian Number-Flux 4-Vektor di atas, dikhususkan untuk transformasi Galilean, apabila kita ingin densitas $(N^t\ atau\ n)$ tersebut invarian terhadap kerangka acuan maka diperlukan transformasi Lorentz sebagai berikut.

$$N = n\gamma \begin{bmatrix} c \\ u^x \\ u^y \\ u^z \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, Energy-Momentum Tensor sendiri sangat mirip dengan Number-Flux 4-Vektor di atas. Energy-Momentum Tensor terdiri dari 16 komponen dengan 2 indeks. Setiap indeksnya menyatakan arah dari momentum tersebut dan koordinat ruangwaktu yang dibuat konstan. Sebagai contoh, T^{xy} menyatakan bahwa momentum ke arah x ketika sumbu y dibuat konstan (berarti luasannya merupakan $\Delta x \Delta z$) [shear momentum]. Contoh lainnya, T^{tx} berarti momentum ke arah sumbu waktu, ct, (pada diagram ruangwaktu, momentum dapat menuju ke arah x, y, z, bahkan ct) ketika sumbu x dibuat konstan. Selain itu, terdapat sifat lain pada Energy-Momentum Tensor, yaitu $T^{\alpha\beta}$memiliki nilai yang sama dengan $T^{\beta\alpha}$. Gambaran terkait momentum ke arah sumbu waktu dan sifat simetrik tersebut dapat dilihat lebih jelas pada gambar berikut.



Secara total Energy-Momentum Tensor sendiri dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$T^{tt} = \frac{P^t}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad T^{xt} = \frac{P^x}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad T^{yt} = \frac{p^y}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \quad T^{zt} = \frac{p^z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$T^{tx} = \frac{P^t}{\Delta t \Delta y \Delta z}, \quad T^{xx} = \frac{P^x}{\Delta t \Delta y \Delta z}, \quad T^{yx} = \frac{p^y}{\Delta t \Delta y \Delta z}, \quad T^{zx} = \frac{p^z}{\Delta t \Delta y \Delta z}$$

$$dan\ sama\ pula\ untuk\ komponen\ Tensor\ lainnya, sehingga$$

$$T = \begin{bmatrix} T^{tt} & T^{tx} & T^{ty} & T^{tz} \\ T^{xt} & T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yt} & T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zt} & T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{bmatrix}$$

Pada Transformasi Lorentz, kita ketahui bahwa momentum pada sumbu waktu sendiri merupakan energi, sehingga kita tahu bahwa T^{tt} dapat disebut dengan densitas energi dan T^{ti} disebut dengan Flux Energi. Sedangkan, momentum pada sumbu spasial merupakan momentum, sehingga T^{it} dapat disebut dengan densitas momentum dan T^{ij} dapat disebut dengan Flux Momentum. Apabila kita perhatikan pada flux momentum, T^{ii}senilai dengan tekanan pada arah i dan komponen Flux Momentum lainnya merupakan momentum yang arahnya sejajar dengan luasan fluxnya. Sehingga, dapat kita katakan T^{ii} dan $(T^{ij}\ di\ mana\ i \neq j)$ merupakan tekanan dan tegangan shearnya. Energy-Momentum 4-Vektor sendiri merupakan invarian terhadap seluruh kerangka acuan. Akan tetapi, Energy-Momentum ini hanya bersifat konservatif pada daerah lokal karena dalam *curved space* energi dan momentum tidaklah bersifat konservatif (NOTE: ini berkaitan dengan kosmologi dan aku pun kurang/ belum paham terkait bagian ini, jadi ada kemungkinan salah. Mungkin akan dibahas diresume minggu ke-13 atau ke-14). Pada daerah lokal sendiri, sama halnya dengan Number-Flux 4-Vektor, persamaan kontinuitas diberikan sebagi berikut.

$$\frac{\partial \rho_{energy}}{\partial ct} + \nabla \cdot \overrightarrow{T^{ti}} = 0\ (Konservasi\ Energi)$$

$$\frac{\partial T^{it}}{\partial ct} + \nabla \cdot \overrightarrow{T^{ij}} = 0\ (Konservasi\ Momentum)$$

- Einstein Field Equation

Einstein Field Equation serupa dengan persamaan Newton Cartan, merupakan persamaan yang menghubungkan antara mass density dengan Curvature. Akan tetapi, berbeda dengan Newton Cartan, Einstein Field Equation menggunakan transformasi Lorentz sehingga pada daerah lokal, teori relativitas umum akan tereduksi menjadi relativitas khusus. Prinsip penurunan EFE sendiri malah berasal dari persamaan Newton Cartan yang secara singkat sebagai berikut.

$$R_{00} = 4\pi G\rho$$

Kita ketahui bahwa densitas masa sendiri bersifat varian dan berubah-ubah tergangung kerangka acuannya. Sehingga, mungkin ρ tersebut dapat digantikan oleh hal lain dengan sifat invarian, tapi tetap 'menggambarkan' densitas massa. Begitupula dengan R_{00}, untuk menyamai hal lain tersebut tapi tetap menggambarkan Curvature sebuah ruang. Oleh karena itu, Einstein berpikir untuk menggantikan keduanya dengan Energy-Momentum Tensor dan Einstein Tensor seperti berikut.

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}$$

Dari persamaan di atas, pada ruas kiri kita menggunakan Einstein Tensor sebagai 'penggambaran' perubahan curvature akibat perubahan Energy-Momentum pada ruas kanan. Akan tetapi, tentunya dari penurunan singkat tersebut terdapat banyak sekali pertanyaan, seperti 'apa yang memastikan nilai kedua ruas tersebut linear?', 'kenapa digunakan Einstein Tensor dan bukan hanya Riemann Tensor?', 'bagaimana konstanta k diturunkan?' Jawaban lengkap dari seluruh pertanyaan tersebut akan dijawab pada resume minggu ke-11 karena penurunan masing-masingnya cukup panjang.