TUGAS TRU MINGGU 10 (Interpretasi Schwarschild)

MUHAMMAD YA'MAL AMILUN (10222070)

Pada resume sebelumnya, kita telah menurunkan solusi dari Einstein Field Equation berupa metric Schwarschild dengan beberapa asumsi. Solusi metric Schwarschild tersebut merupakan jawaban dari ruangwaktu di mana geodesik suatu objek mengikuti percepatan gravitasi akibat dari kelengkungan ruangwaktu. Pada resume kali ini, saya akan membahas lebih kepada interpretasi/ akibat fisis dari metric Schwarschild tersebut. Interpretasi Schwarschild tersebut akan difokuskan kepada dua hal, yaitu terkait dilatasi waktu dan panjang propper akibat gravitas sebagai berikut.

- Dilatasi Waktu

Metric sendiri adalah suatu objek matematis yang berfungsi untuk mendefinisikan geometri sebuah ruangwaktu. Metric mendefinisikan bagaimana basis-basis geometri dalam suatu ruang berperilaku dan berubah. Oleh karena itu, sebelumnya mari kita lihat terlebih dahulu solusi metric Schwarschild yang didapatkan pada resume ke-9.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Agar mempermudah penyelesaian, mari hiraukan sumbu $d\theta \; dan \; d\phi$ terlebih dahulu dan anggaplah suatu 4-Vektor pada diagram Minkowski hanya dapat bergerak pada arah radialnya secara spasial dan arah sumbu waktu, sehingga metricnya dapat disederhakan menjadi seperti berikut.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2$$

Apabila kita perhatikan, pada nilai metric dari $g_{tt} = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)$, hal tersebut menandakan ketika r menuju tak hingga maka nilai g_{tt} akan mendekati 1 seperti pada metric Minkowski. Kemudian, ketika $r_s < r \ll \infty$, maka nilai dari g_{tt} akan berada di antara 0 dan 1. Kita ketahui sendiri, bahwa g_{tt} merupakan perkalian antara $\vec{e_t} \; dengan \; \vec{e_t}$. Sehingga, dari beberapa fakta di atas dapat kita simpulkan bahwa nilai dari basis waktu $\vec{e_t}$ sendiri makin berkurang seiring dengan r mendekati r_s. Perubahan dari basis waktu tersebut akan membuat komponen waktu masing-masingnya berubah dan menandakan perbedaan waktu/ dilatasi waktu antar tiap posisi bergantung dengan radiusnya. Sebelumnya, pada relativitas khusus salah satu cara untuk mendeteksi dilatasi waktu adalah dengan melihat pada *distance* dari 4-Vektor atau melihat *spacetime interval*nya yang invarian terhadap transformasi Lorentz (transformasi untuk mengubah basis koordinat dengan mempertahankan konstanta kecepatan cahaya, c). *Distance/ spacetime interval* tersebut didefinisikan sebagai berikut.

$$\left|\left|\vec{V}\right|\right|^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = S^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 \tau^2$$

Apabila kita perhatikan, *spacetime interval* hanyalah *distance* atau perkalian dot product dari basis-basis pada metric Minkowski. Selain itu juga, kita ketahui juga bahwa *spacetime interval* senilai dengan $(c\tau)^2$ $(propper \; time)$. Sebelumnya, propper time sendiri merupakan waktu terpendek antara dua buah event ketika kedua buah event tersebut terjadi pada lokasi yang sama $dx = 0$. Nilai propper time tersebut tentunya bersifat invarian dan diakui oleh semua kerangka acuan, karena kedua kejadian terjadi pada kerangka acuan spesifik sehingga seluruh kerangka acuan lainnya memiliki waktu berjalan yang lebih lambat. Sehingga, kita ketahui $c\tau$ senilai dengan akar dari *interval spacetime* yang juga senilai dengan akar dari *distance* 4-Vektor. Maka, apabila kita bisa mengetahui *distance* tersebut, kita bisa mengetahui hubungan antara propper time dengan metric solusi Schwarschild. Nilai dari *distance* suatu vektor sendiri bisa didapatkan dengan mengintegralkan vektor tangensial (atau basis vektor tangensial) terhadap vektor tangensial dari vektor itu sendiri seperti berikut (*Arc Length*).

$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = \int \left\|\frac{d}{d\lambda}\right\| d\lambda$$

Sehingga, apabila kita memilihi vektor yang sejajar dengan sumbu ct, maka akan didapatkan sebagai berikut.

$$c\tau = \int \left\|\frac{d}{dct}\right\| dct$$

$$c\tau = \int \sqrt{\frac{d}{dct}\cdot\frac{d}{dct}}\, dct$$

$$c\tau = \int \sqrt{\left(\frac{dct}{dct}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{dr}{dct}\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot\left(\frac{dct}{dct}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{dr}{dct}\frac{\partial}{\partial r}\right)}\, dct$$

$$\frac{dr}{dct} = 0 \;\;\rightarrow\;\; c\tau = \int \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial ct}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial ct}\right)}\, dct$$

$$c\tau = \int \sqrt{g_{tt}}\, dct$$

$$c\tau = \sqrt{g_{tt}}\, ct$$

$$c\tau = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}\, ct$$

Kita ketahui pada relativitas khusus, kerangka acuan ditentukan oleh kecepatan relatif kerangka tersebut. Akan tetapi, pada metric solusi Schwarschild ini, ‘kerangka acuan’ ditentukan oleh jarak radius dari pusat massa. Sekarang, bayangkan beberapa posisi di mana semua posisi tersebut tidak bergerak relatif terhadap pusat massa, sehingga jari-jarinya tetap. Hal tersebut juga membuat tidak adanya hukum relativitas khusus dan waktu bagi setiap posisi berjalan sama (kita sebut waktu universal). Kemudian, apabila kita perhatikan ketika r menuju tak hingga, maka nilai propper time pada posisi tersebut akan sama dengan waktu universal. Selanjutnya, apabila kita tinjau saat r senilai $2r_s$, maka nilai propper time pada posisi tersebut akan seperti berikut.

$$c\tau_{2r_s} = \sqrt{\frac{1}{2}}\, ct.$$

$$\tau_{2r_s} = 0.7t$$

Kita ketahui sebelumnya, bahwa waktu universal memiliki nilai yang sama dengan nilai propper time saat r menuju tak hingga ($t = \tau_\infty$). Sehingga, waktu propper pada $r = 2r_s$ akan berjalan lebih cepat dari waktu propper pada $r = \infty$. Sebagai contoh, misalkan waktu di $r = \infty$ sudah berjalan 100 tahun, maka di $r = 2r_s$ sendiri waktu tersebut ditempuh hanya dalam 70 tahun.

$$\tau_{2r_s} = 0.7\tau_{r_\infty}$$

$$\tau_{2r_s} = 0.7(100\ tahun)$$

$$\tau_{2r_s} = 70\ tahun$$

Kasus di atas sendiri, hanya dapat terjadi apabila $r, \theta, dan\ \phi$ dibuat konstan. Secara fisis, radius r tersebut hanya dapat dibuat konstan apabila objek pada posisi tersebut memberikan gaya dorongan menuju keluar dari pusat massa masif (black hole, bintang, dkk). Hal tersebut karena suatu objek secara otomatis akan tertarik menuju pusat massa masif akibat lengkungan ruangwaktu.

- Propper Length

Selanjutnya, apabila kita tinjau pada sumbu r dengan $ct, \theta, dan\ \phi$ dibuat konstan, maka kita bisa mendapatkan propper lengthnya. Propper Length sendiri merupakan jarak sebenarnya ketika suatu objek pada kerangka acuan diukur secara simultan pada kerangka acuannya. Propper Length sendiri merupakan panjang terpanjang, karena seluruh kerangka acuan lain akan melihat panjang objek tersebut semakin berkontraksi/ mengecil. Propper Length juga bersifat invarian karena objek tersebut 'milik' suatu kerangka acuan dan semua kerangka acuan dapat setuju terkait panjang objek tersebut sebenarnya (panjang ketika diukur di kerangka acuannya). Karena propper length diukur secara simultan, sehingga apabila kita dapat menemukan koordinat di mana $c\widetilde{dt} = 0$, akan menghasilkan persamaan sebagai berikut.

$$S^2 = c^2\widetilde{dt}^2 - \tilde{x}^2, \qquad \tilde{y}\ dan\ \tilde{z}\ dihilangkan\ untuk\ simplifikasi$$

$$s^2 = -\tilde{x}$$

$$\tilde{x} = L_0 = \sqrt{-S^2}$$

Kemudian, sama seperti section time dilatation kita juga dapat mendefinisikan *spacetime interval* sebagai *distance,* sehingga persamaan di atas dapat dirubah menjadi seperti berikut.

$$\left\|\vec{V}\right\| = S = \int \sqrt{\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}}\ d\lambda$$

$$L_0 = \sqrt{-S^2} = \sqrt{-1}S = \sqrt{-1}\int \sqrt{\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}}\ d\lambda$$

$$L_0 = \int \sqrt{-\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}}\ d\lambda$$

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(\frac{dct}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{dr}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{dct}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{dr}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial r}\right)}\, d\lambda$$

Anggaplah 4-Vektor tersebut sejajar dengan sumbu x sehingga $cdt = 0$, maka persamaannya akan menjadi berikut.

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)}\, dr$$

$$L_0 = \int \sqrt{-g_{rr}}\, dr$$

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}}\, dr$$

$$L_0 = \int \sqrt{\frac{r}{r - r_s}}\, dr$$

Sama seperti kasus dilatasi waktu, anggaplah terdapat beberapa titik-titik tertentu dengan kecepatan nol relatif terhadap pusat massa masif sehingga tidak adanya efek relativitas khusus. Karena hal tersebut, tidak ada juga efek kotraksi panjang. Sehingga pada waktu simultan, perbedaan panjang sama untuk setiap posisi (kita sebut dengan r universal). Selanjutnya apabila kita perhatikan, ketika r menuju tak hingga maka panjang propper pada titik tersebut akan mendekati nilai $r\ universal$nya. Sedangkan ketika, r mendekati nilai r_s, maka komponen pada dr akan menjadi besar dan Panjang propper/ panjang sebenarnya akan menjadi lebih besar dari nilai r universal. Sehingga, semakin dekat dengan radius Schwarshild, maka panjang suatu objek akan semakin membesar. Dapat diperhatikan juga, ketika nilai $r < r_s$, maka komponen dr akan berupa bilangan kompleks yang menandakan nilainya tidak rel (tidak bisa dijelaskan dengan persamaan di atas, butuh cara lain). Selain itu, nilai integral dari persamaan di atas sangatlah kompleks dan sulit sekali dipecahkan, tapi sebagai referensi solusi hasil akhirnya sebagai berikut.

$$L_0 = \sqrt{r}\sqrt{r - r_s} + r_s \ln\left(\sqrt{r} + \sqrt{r - r_s}\right) + C$$

Hal menarik lainnya terjadi apabila kita menahan sumbu $cdt, r, dan\ \theta$ konstan, dengan ϕ bebas maka melalui cara yang sama kita akan dapatkan panjang propper melingkar sebagai berikut.

$$L_0 = \int \sqrt{-\frac{d}{d\lambda} \cdot \frac{d}{d\lambda}}\, d\lambda$$

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(\frac{dct}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{d\phi}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cdot \left(\frac{dct}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial ct} + \frac{d\phi}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)}\, d\lambda$$

$$L_0 = \int \sqrt{-\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)}\, d\phi$$

$$L_0 = \int \sqrt{-g_{\phi\phi}}\, d\phi$$

$$L_0 = \int \sqrt{-(-r^2 \sin^2 \theta)}\, d\phi, \qquad dengan\ \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$L_0 = \int \sqrt{r^2}\, d\phi$$

$$L_0 = r\phi$$

Menariknya, apabila kita perhatikan panjang keliling lingkaran di sekitar pusat massa memiliki rumus yang sama dengan rumus ‘umum’ $(r\phi)$. Pada rumus tersebut, digunakan radius universalnya dan bukan radius hasil panjang proppernya. Sehingga, keliling lingkaran di posisi radius tertentu akan lebih kecil dari keliling lingkaran yang ‘seharusnya’. Atau sebaliknya, jarak dari titik massa ke lingkarannya lebih besar dari radius yang ‘seharusnya’. Agar lebih mudah dibayangkan dapat dilihat pada ilustrasi berikut.