Tugas Resume Teori Relativitas Umum

Minggu Ke-4 (Penurunan Persamaan Geodesik)

Semua titik-titik koordinat di dunia ini berada pada kerangka yang non-inertial karena pasti terpengaruhi oleh gravitasi suatu massa baik itu yang besar maupun yang kecil. Kerangka non-inertial sendiri adalah kerangka dimana terdapat percepatan terhadap titik tertentu. Apabila kita tinjau suatu kerangka mengikuti suatu sistem bermassa tertentu, maka sistem tersebut memiliki percepatan akibat pengaruh gravitasi. Apabila kita tinjau suatu kerangka mengikuti suatu sistem bermuatan tertentu, maka sistem tersebut memiliki percepatan akibat pengaruh gaya coloumb. Bahkan, apabila kita tinjau suatu kerangka mengikuti trajektori suatu cahaya, maka cahaya itu sendiri memiliki arah yang tidak flat/ lurus seakan-akan memiliki suatu percepatan akibat ruang-waktu itu sendiri tidaklah flat. Teori Relativitas Khusus sendiri menjelaskan bagaimana dunia ini bekerja dengan mengasumsikan ruang-waktu flat. Konsep ruang-waktu flat ini bertolak belakang dengan beberapa kasus fenomenal pada waktu itu, yaitu tentang lintasan orbit saturnus yang tidak hanya berbentuk elips tetapi juga elipsnya berputar. Beberapa orang mungkin tidak merasakan adanya hubungan antara keduanya, tapi bagi Einstein fenomena orbit Saturnus dapat dijelaskan apabila ruang-waktu itu sendiri tidaklah flat. Sehingga, Einstein merumuskanlah teori relativitas umum untuk menjelaskan bagaimana ruang-waktu yang kita tempati bukan hanya bersifat relativistik tetapi juga memiliki bentuk geodesik tidak flat.

Untuk memecahkan permasalahan orbit saturnus, ruang-waktu itu sendiri haruslah tidak flat. Oleh karena itu, Einstein merumuskan persamaan geodesik untuk menentukkan lintasan terpendek/ minimum yang dapat ditempuh apabila permukaan ruang itu sendiri tidaklah flat. Perumusan asli Einstein sendiri menggunakan kalkulus variansi (penurunan informal), tapi pada resume kali ini persamaan geodesik tersebut akan diturunkan dengan menggunakan kalkulus tensor.

Kurva geodesik sendiri adalah sebuah kurva yang memiliki lintasan “terlurus” pada ruang tidak flat. Sebelumnya bahkan bagaimana kita mendefinisikan lintasan “terlurus” suatu kurva? Apabila kita melihat pada ruang flat, maka lintasan “suatu” suatu kurva adalah ketika kurva tersebut tidak memiliki percepatan tangensial atau $a = 0$. Dalam ruang non-flat sendiri percepatan suatu kurva dapat dibagi dua jenis, yaitu percepatan tangensial yang mengarah pada permukaan itu sendiri (intrinsik) dan percepatan yang memiliki arah normal terhadap permukaan (ekstrinsik). Maka, dalam ruang non-flat sendiri lintasan “terlurus” suatu kurva adalah ketika percepatan suatu kurva hanya mengarah pada percepatan ekstrinsik atau yang memiliki arah normal terhadap permukaan dan percepatan intrinsik atau percepatan tangensialnya haruslah nol.

Pertama, kita ketahui bahwa kecepatan sebuah kurva tidak mungkin memiliki arah normal dengan permukaan karena kurva tersebut tidak mungkin keluar dari permukaan. Akan tetapi, sebuah kurva dapat memiliki percepatan dengan arah normal terhadap permukaan untuk mengubah arah dan besar kecepatan kurva (walau arah kecepatan kurvanya tetap intrinsik). Permulaan kita definisikan sebuah permukaan 2D yang berada pada ruang 3D. Sehingga kita definisikan kecepatan tangensial kurva dan percepatannya sebagai berikut.

$$\frac{d\vec{R}}{d\lambda}=\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}+\frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d\vec{R}}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}+\frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{d\vec{R}}{d\lambda}=\frac{d^2u}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}+\frac{du}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\right)+\frac{d^2v}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}+\frac{dv}{d\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\right)$$

Selanjutnya, kita ketahui juga dapat mengurai turunan parsial terhadap lambda sebagai berikut.

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}=\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial\vec{R}}{\partial u}=\frac{du\partial^2\vec{R}}{d\lambda\partial u^2}+\frac{dv\partial^2\vec{R}}{d\lambda\partial v\partial u}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}=\left(\frac{du}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{dv}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial\vec{R}}{\partial v}=\frac{du\partial^2\vec{R}}{d\lambda\partial u\partial v}+\frac{dv\partial^2\vec{R}}{d\lambda\partial v^2}$$

Kemudian, apabila kita mensubtitusikan kedua persamaan tersebut dan juga menggunakan notasi Einstein maka dapat kita dapatkan persamaan percepatan kurva secara umum sebagai berikut.

$$\frac{d^2\vec{R}}{d\lambda^2}=\frac{d^2u^i}{d\lambda^2}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^i}+\frac{du^idu^j}{d\lambda^2}\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i\partial u^j}$$

Dari persamaan di atas, kita dapat tahu dengan pasti bahwa fraksi pertama yang memiliki turunan parsial terhadap $\partial u^i$ adalah percepatan tangensialnya. Akan tetapi, kita tidak tahu arah dari percepatan pada fraksi kedua yang memiliki turunan parsial terhadap $\partial u^i\partial u^j$. Oleh karena itu, kita anggap saja arah dari percepatan tersebut terdiri dari arah tangensial dan arah normalnya dengan komponen terntentu sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i\partial u^j}=\Gamma_{ij}^1\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^1}+\Gamma_{ij}^2\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^2}+L_{ij}\hat{n}=\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^k}+L_{ij}\hat{n}$$

Simbol $\Gamma_{ij}^k$ sendiri disebut dengan simbol Christoffel dan merupakan komponen dari percepatan ke arah tangensial. Sedangkan, $L_{ij}$ disebut dengan Second Fundamental Form dan merupakan komponen dari percepatan ke arah normal dari permukaan. Untuk menentukkan nilai dari simbol Christoffel sendiri dapat dengan melakukan dot product kan dengan basis tangensial sehingga basis normal pada persamaan akan bernilai nol. Sebaliknya, untuk menentukkan nilai dari Second Fundamental Form dapat dengan mengalikan dengan basis normal sehingga basis tangensial pada persamaan bernilai nol seperti pada berikut.

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i\partial u^j}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^l}=\left(\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^k}+L_{ij}\hat{n}\right)\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^l}$$

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i\partial u^j}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^l}=\left(\Gamma_{ij}^k\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^k}\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^l} g^{lm} = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^m$$

Kemudian, nilai untuk $L_{ij}$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \hat{n} = \left(\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij} \hat{n}\right) \cdot \hat{n}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \hat{n} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\hat{e_i} \times \hat{e_j}}{\left\|\hat{e_i} \times \hat{e_j}\right\|} = L_{ij}$$

Sehingga, akhirnya kita dapatkan percepatan kurva tersebut dengan basis-basis terpecahkan antara tangensial dan normal basis sebagai berikut.

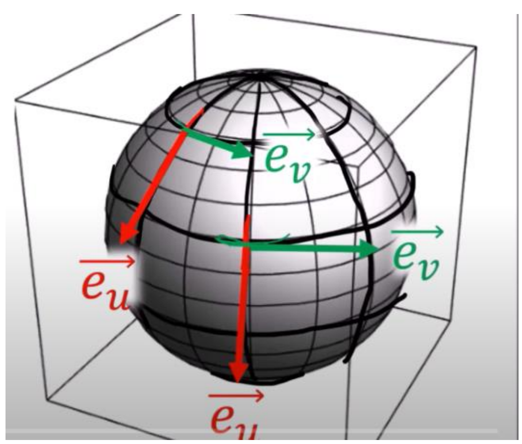
$$\frac{d^2 \vec{R}}{d\lambda^2} = \left(\frac{d^2 u^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda}\right) \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^k} + L_{ij} \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda} \hat{n}$$

Kemudian, kita ketahui juga bahwa lintasan "terlurus" pada permukaan non-flat adalah ketika percepatan tangensialnya sama dengan nol. Sehingga, apabila kita dapat memastikan komponen dari basis percepatan tangensial nol maka akan didapatkan lintasan telurus tersebut.

$$\left(\frac{d^2 u^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{d\lambda} \frac{du^j}{d\lambda}\right) = 0$$

Persamaan di ataslah yang disebut dengan persamaan Geodesik.

PR! Tentukan persamaan geodesik untuk bola!




Permulaan kita harus menemukan dulu nilai dari simbol christoffel untuk bola yang selanjutnya dapat digunakan untuk menentukan persamaan geodesik bola. Pada kasus ini persamaan geodesik bola kita definisikan suatu permukaan flat dua dimensi dengan basis saling orthogonal, yaitu $\widehat{e_u}$ dan $\widehat{e_v}$. Permukaan flat ini kita ubah ke ruang 3D dengan bentuk permukaan seperti permukaan pada bola. Dapat kita lihat, pada gambar di atas hubungan antara variable x, y, dan z dengan u, dan v memenuhi persamaan sebagai berikut.

$$x = \cos(v)\sin(u)$$

$$y = \sin(v)\sin(u)$$

$$z = \cos(u)$$

Selain itu, untuk menentukan nilai simbol Christoffel diperlukan juga nilai $\frac{\partial\vec{R}}{\partial u^i}, \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^i u^j}, dan\ g_{ij}$ sebagai berikut.

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial\vec{R}}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial\vec{R}}{\partial Z}$$

Substitusikan persamaan x, y, z terhadap u dan v kepada persamaan di atas sehingga didapatkan.

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} = \cos(v)\cos(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} + \sin(v)\cos(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y} - \sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} = -\sin(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} + \cos(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y}$$

Kemudian, dengan menurunkan persamaan-persamaan di atas didapatkanlah sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^2} = -\cos(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} - \sin(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y} - \cos(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial v^2} = -\cos(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} - \sin(v)\sin(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial v\partial u} = -\sin(v)\cos(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial X} + \cos(v)\cos(u)\frac{\partial\vec{R}}{\partial Y}$$

Metric pada permukaan juga dapat kita dapatkan dengan mengalikan tensor basis untuk tiap arah, sehingga kita dapatkan metric tensor dengan inversnya sebagai berikut.

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} \\ \frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial u} & \frac{\partial\vec{R}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\sin(u))^2 \end{bmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(\sin{(u)})^2} \end{bmatrix}$$

Kita dapat melihat bahwa $g^{ij}$ akan bernilai nol ketika $i \neq j$, sehingga simbol Christoffel tersebut dapat kita tuliskan sebagai berikut.

$$\Gamma_{ij}^{1} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^1} g^{11} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^1}$$

$$\Gamma_{ij}^{2} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^2} g^{22} = \frac{\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^2}}{(\sin(u))^2}$$

Dari 2 persamaan di atas, dapat dilihat secara total bahwa terdapat 8 persamaan Christoffel. Untuk memudahkan perhitungan, kita uraikan dulu semua hasil dot produknya sebagai berikut.

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial v^2} = -\cos(u) \sin{(u)}$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u \partial v} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u \partial v} = \cos(u) \sin(u)$$

Sehingga, apabila kita mensubstitusikan persamaan dot product di atas ke persamaan Christoffel, didapatkan persamaan Christoffel sebagai berikut.

$$\Gamma_{22}^{1} = -\cos(u) \sin(u)$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{\cos(u)}{\sin(u)}$$

Kemudian, kita masukkan simbol Christoffel tersebut kedalam persamaan geodesik sehingga didapatkan.

$$\frac{d^2 u^1}{d\lambda^2} + \frac{\Gamma_{22}^{1} du^2}{d\lambda} \frac{du^2}{d\lambda} = \frac{d^2 u}{d\lambda^2} - \cos(u) \sin(u) \frac{dv}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} = 0$$

$$\frac{d^2 u^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{12}^{2} \frac{du^1}{d\lambda} \frac{du^2}{d\lambda} + \Gamma_{21}^{2} \frac{du^2}{d\lambda} \frac{du^1}{d\lambda} = \frac{d^2 v}{d\lambda^2} + 2cot(u) \frac{du}{d\lambda} \frac{dv}{d\lambda} = 0$$