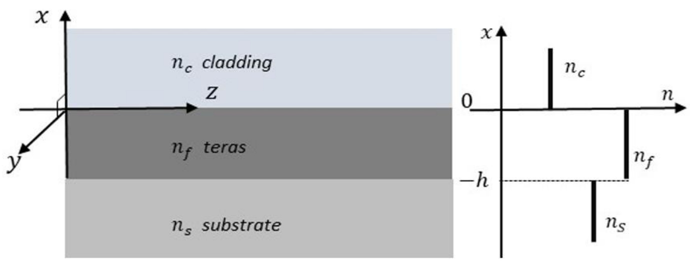
# TUGAS 2 TAF

Nama : Muhammad Ya'mal Amilun

NIM : 10222070

- ❖ Mencari nilai eigen dari $k_x$ dan $k_z$ pada kasus TM

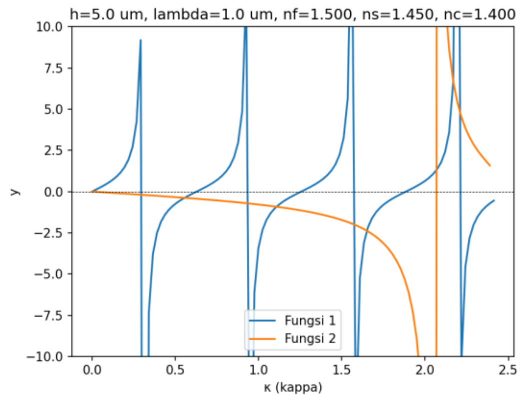



Pada penurunan $E(r)$ untuk kasus TM di soal 2, telah didapatkan fungsi $E(r)$ untuk setiap region (*cladding, teras, substrate*). Namun, masih terdapat 1 syarat batas lagi yang harus dipenuhi $\left(\frac{dH_t(-h)}{dx} = \frac{ds(-h)}{dx}\right)$. Untuk kasus TM, syarat batas tersebut dapat kita sederhanakan sebagai berikut.

$$\tan(hk_{xt}) = \frac{k_{xt}\left(\frac{n_f^2}{n_s^2}\gamma_s + \frac{n_f^2}{n_c^2}\gamma_c\right)}{k_{xt}^2 - \frac{n_f^4}{n_c^2 n_s^2}\gamma_c\gamma_s}$$

Apabila kita perhatikan, $h, n_f, dan\ n_c$ hanyalah konstanta dan $\gamma_{s,c}$ merupakan fungsi $k_{xt}$ sehingga kedua ruas merupakan fungsi terhadap $k_{xt}$. Oleh karena itu, kita dapat menyelesaikan persamaan di atas dengan metode numerik. Code akan dilampirkan beserta komentarnya. Secara singkat isi codenya berupa deklarasi seluruh konstanta dan fungsi ruas kiri juga kanannya. Setelah itu, kedua fungsi akan diplot terhadap $k_{xt}$ dari 0 sampai min $(k_0\sqrt{n_t^2 - n_s^2}, k\sqrt{n_t^2 - n_c^2})$ dengan jumlah dx 100. Terakhir, seluruh titik perpotongan antara kedua fungsi dari $k_{xt} = 0$ sampai $k_{xt} = (k_0\sqrt{n_t^2 - n_s^2}, k\sqrt{n_t^2 - n_c^2})$ akan dicariin menggunakan metode newton raphon (menggunakan library *scipy* → *fsolve*). Contoh hasil solusi $k_{xt}$ dan grafiknya sebagai berikut.

```
Akar K: [0.         0.55595303 1.10800766 1.65046806 2.16939757 2.39893996
 2.41310311]
```




Apabila kita perhatikan, untuk setiap konfigurasi $h, n_f, n_c, dan\ n_t$ maka hanya akan ada beberapa solusi $k_{xt}$ yang mungkin (tidak kontinue). Sebagai contoh, untuk konfigurasi di atas apabila kita substitusikan $k_{xt}$ ke persamaan $E(x)$ maka akan ada 6 solusi cara $E(x)$ berubah terhadap $x$. Interpretasi lainnya, kita dapat bilang agar syarat batas terpenuhi maka nilai $k_{xt}$ atau bagaimana cahaya merambat pada teras terbatas untuk $k_{xt}$ tertentu. Hal tersebut berarti, tentunya awal-awal penetrasi cahaya kita dapat membuat $k_x$ berapapun yang kita inginkan. Akan tetapi, ketika cahaya memasuki teras lebih dalam maka $k_x$ tidak lagi kontinue dan hanya bernilai solusi $k_{xt}$ (hal tersebut dilakukan untuk memenuhi syarat batas). Oleh karena itu, dapat kita simpulkan untuk kasus pandu gelombang kita harus melakukan penetrasi cahaya dengan $k_x$ tertentu atau sudut tertentu untuk meminimalkan cahaya tereduksi oleh syarat batas.

❖ Penurunan $E(x)$ pada kasus TM

Untuk menurunkan persamaan $E(x)$ pada kasus TM, kita harus terlebih dahulu menentukan $H(x)$ nya. Hal tersebut karena nilai amplitudo ($H_0$) dari $H(r)$ hanya bergantung pada x saja sehingga memudahkan penyelesaian. Selanjutnya, kita tahu fungsi $E(x)$ akan berubah-rubah tergantung dari nilai *x*-nya. Untuk mengetahui bagaimana perubahan fungsi tersebut, maka kita perlu suatu persamaan penghubung antara $K(k_x)$ dan $\beta\ (k_z)$ (menggunakan konstanta gelombang karena frekuensi gelombang selalu konstan). Persamaan penghubung tersebut dapat diturunkan dari persamaan gelombang.

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H(r,t) = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H(r)e^{iwt} = 0$$

$$\left(\nabla^2 H(r)e^{iwt} + \mu\epsilon w^2 H(r)e^{iwt}\right) = 0$$

$$(\nabla^2 + k_n^2)H(r) = 0\ dengan\ k_n^2 = \mu\epsilon w^2 = \left(\frac{nw}{c}\right)^2$$

$k_n$ pada persamaan di atas merupakan bilangan gelombang dengan arah rambat gelombang. Karena kita sudah tahu hubungan antara $k_n$ dengan $k_x$ dan $k_z$ ($k_n = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$), kita hanya perlu menambahkan $k_z$ pada persamaan agar mendapat hubungan antara $k_z$ dan $k_x$. Pertama, kita definisikan fungsi $H(x)$ dengan arah rambat *z* agat medapatkan $k_z$ sebagai berikut.

$$H(r) = H(x)e^{-i\beta z}\hat{y}, \qquad minus\ karena\ penetrasi$$

$$\nabla^2 H(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)H(x)e^{-i\beta z}$$

$$\nabla^2 H(r) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right)H(x)e^{-i\beta z}$$

Kita substitusi ke persamaan $k_n$ di atas sebagai berikut.

$$(\nabla^2 + k_n^2)H(r) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \beta^2\right)H(x)e^{-i\beta z} + k_n^2 H(x)e^{-i\beta z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k_n^2 - \beta^2)\right)H(x) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_x^2\right)H(x) = 0$$

Pada persamaan di atas kita menyederhanakan persamaan umum $k_n$. Perhatikan pada persamaan di atas, nilai $H(x)$ hanya akan berubah ketika *x*-nya berubah dan perubahan tersebut hanya menentukan nilai $k_x$ (tidak menentukan $\beta$). Singkatnya, dari persamaan umum $k_n$ dan persamaan $k_x$ di atas, kita tahu bahwa $k_n$ dan $k_x$ berubah sedangkan $\beta$ konstan. Hal tersebut membuat kita dapat menyelesaikan persamaan $H(x)$ untuk tiap region sebagai berikut.

$$H(x) = \begin{Bmatrix} De^{-ik_{xc}x}, & x \geq 0 \\ Acos(k_{xt}x) + Bsin(k_{xt}x), & 0 > x > -h \\ Ce^{ik_{xs}(x+h)}, & -h > x \end{Bmatrix}$$

Karena $\beta_c = \beta_s = \beta_t$, maka dengan mengenalkan variabel baru $\gamma_{s,c} = \sqrt{\beta^2 - k_{ns,nc}^2}$ kita dapat menuliskan persamaan di atas menjadi berikut.

$$H(x) = \begin{Bmatrix} De^{-\gamma_c x}, & x \geq 0 \\ Acos(k_{xt}x) + Bsin(k_{xt}x), & 0 > x > -h \\ Ce^{\gamma_s(x+h)}, & -h > x \end{Bmatrix}$$

Selanjutnya, dengan menerapkan syarat batas $H_1(0) = H_2(0)\ dan \frac{dH_1(0)}{dx} = \frac{dH_2(0)}{dx}$, didapatkan.

$$H_s(0) = H_t(0)$$

$$D = Acos(0) + Bsin(0)$$

$$D = A$$

$$H_t(-h) = H_c(-h)$$

$$Acos(k_{xt}h) - Bsin(k_{xt}h) = C$$

$$A\left[\cos(k_{xt}h) - \left(\frac{\gamma_c}{k_{xt}}\right)\sin(k_{xt}h)\right] = C$$

$$\frac{dH_s(0)}{dx} = \frac{dH_t(0)}{dx}$$

$$-\gamma_c D = k_{xt}B$$

$$B = -\frac{\gamma_c}{k_{xt}}B$$

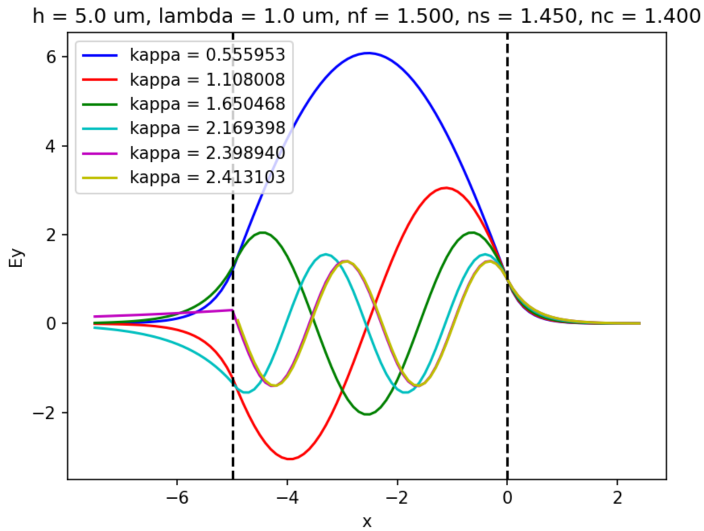
Kita dapat tulis seluruh solusinya dalam bentuk $A$ sebagai berikut.

$$H(x) = \left\{\begin{matrix} Ae^{-\gamma_c x}, & \\ Acos(k_{xt}x) - \frac{\gamma_c}{k_{xt}}sin(k_{xt}x), & \begin{matrix} x \geq 0 \\ 0 > x > -h \\ -h > x \end{matrix} \\ A\left[\cos(k_{xt}h) - \left(\frac{\gamma_c}{k_{xt}}\right)\sin(k_{xt}h)\right]e^{\gamma_s(x+h)}, & \end{matrix}\right\}$$

Untuk mengubahnya ke dalam bentuk medan listrik $E(x)$ cukup kalikan dengan impendansinya $\left(\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\right)\ atau \frac{Z_0}{n}$ $(Z_0\ adalah\ impendansi\ vakum)$ sebagai berikut.

$$E(x) = \left\{\begin{matrix} \frac{Z_0}{n_c}Ae^{-\gamma_c x}, & \\ \frac{Z_0}{n_t}Acos(k_{xt}x) - \frac{\gamma_c}{k_{xt}}sin(k_{xt}x), & \begin{matrix} x \geq 0 \\ 0 > x > -h \\ -h > x \end{matrix} \\ \frac{Z_0}{n_s}A\left[\cos(k_{xt}h) - \left(\frac{\gamma_c}{k_{xt}}\right)\sin(k_{xt}h)\right]e^{\gamma_s(x+h)}, & \end{matrix}\right\}$$

Setelah kita menurunkan fungsi $E(x)$, terakhir kita akan membuat plot fungsi $E(x)$ terhadap $x$ dengan $k_{xt}$ merupakan solusi syarat batas dari soal pertama. Codenya akan dilampirkan pada file terpisah. Secara singkat cara kerja programnya, kita hanya perlu menentukan setiap parameter dan buat fungsi $E(x)$ untuk setiap region. Setelahnya, kita buat for loop untuk melakukan plot fungsi untuk setiap solusi $k_{xt}$ (dilakukan semacam operasi boolean terlebih dahulu untuk membedakan setiap fungsi untuk setiap x). Setelahnya kita hanya perlu melakukan plot dan memberikan keterangan tambahan lainnya. Hasil grafik profil $E(x)$ terhadap x untuk setiap solusi $k_{xt}$ diberikan oleh grafik berikut.




Apabila kita perhatikan, untuk $kappa = 2.413$ memiliki hasil berbeda dengan grafik lainnya dengan kurva yang terputus. Hal tersebut karena apabila kita lihat pada gambar pertama di soal pertama, solusi $k_{xt}$ ke-6 tidaklah ada (tidak ada titik potong ke-6). Error tersebut dapat disebabkan oleh banyak hal terutama apabila kita melakukan perhitungan secara numerik.