

2º Relatório - Controlo Óptimo

Instituto Superior Técnico
MEMec

Maio 2021



Grupo 10

Catarina Pires, N° 90230

Mª Sofia Canas, N° 90323

Mariana Semião, N° 90328

Ricardo Henriques, N° 90349

Professores: Miguel Ayala Botto, Rui Moura Coelho

Índice

1	Introdução	3
2	Resultados Relevantes da Fase 1	3
2.1	Subsistemas Linearizados	3
2.2	Obtenção de Variáveis	4
3	Observador	5
4	Controlador Ótimo	6
5	Implementação	7
5.1	Observador	8
5.2	Controlador	11
5.3	Perturbações	13
6	Análise de Resultados	14
6.1	Referência Constante	14
6.1.1	Modelo Linear	14
6.1.2	Modelo Não Linear	16
6.2	Referência Variável	18
6.2.1	Modelo Linear	19
6.2.2	Modelo Não Linear	20
7	Conclusões	22
	Bibliografia	23

Tabela de Símbolos

Símbolo	Nome
u	Ação de controlo
ψ	Ângulo de guinada
θ	Ângulo de picada
ϕ	Ângulo de rolamento
g	Aceleração gravítica
L_k	Matriz de ganhos de Kalman-Bucy
K	Matriz de ganhos do LQR
R	Matriz de peso referente à energia associada à ação de controlo
Q	Matriz de peso referente à energia associada a cada estado
Q_0	Matriz de variância do ruído do processo
R_0	Matriz de variância do ruído dos sensores
p	Posição do centro de massa
Σ ou P	Solução da equação algébrica de Riccati
Ω	Velocidade angular das hélices
ω	Vetor de velocidade angular
v	Vetor de velocidade linear

1 Introdução

O objectivo deste projecto, no âmbito da unidade curricular Controlo Óptimo, é controlar o drone *Parrot Mambo Fly*, através de um controlador autónomo, de forma a que o drone siga uma trajectória pré-definida. Previamente, foram estudados os subsistemas que compõem o drone, analisou-se a sua linearidade, estabilidade, controlabilidade e observabilidade, e criaram-se dois modelos de *Simulink*, um linear e um não linear, que descrevem a sua dinâmica. Neste relatório serão projetados e implementados, nos modelos linear e não linear, um observador e controlador ótimos que permitem ao drone seguir uma referência. Estes deverão ser robustos às perturbações que afetariam o drone na vida real, como ruído nas medições de sensores e perturbações exteriores.

2 Resultados Relevantes da Fase 1

Nesta secção serão lembrados alguns pontos abordados no relatório da fase 1 deste projeto, que serão importantes tanto nos cálculos como na escolha de parâmetros na fase 2.

2.1 Subsistemas Linearizados

Em seguida estão apresentados os subsistemas linearizados do drone, que constituem o seu sistema de movimento. Estas equações serão referenciadas ao longo do relatório, tanto no cálculo do ganho do observador, como do controlador.

- **Eixo vertical** As variáveis ω e p_D correspondem à velocidade e posição verticais, respetivamente.

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{\tilde{p}_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{p}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_z \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_z \quad (1a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{p}_D = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{p}_D \end{bmatrix} \quad (1b)$$

- **Eixo de guinada:** A este subsistema correspondem as variáveis relativas a este eixo que são a razão de guinada r e o ângulo de guinada ψ .

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}} \\ \dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_r \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_r \quad (2a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\psi} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} \quad (2b)$$

- **Eixo de picada + eixo longitudinal:** As variáveis relativas a este eixo são a razão de picada, q , o ângulo de picada, θ , a velocidade longitudinal, u , e a posição longitudinal p_n .

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{p}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{u} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_q \quad (3a)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{u} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} \quad (3b)$$

- **Eixo de rolamento + eixo lateral:** A este subsistema correspondem as variáveis relativas a este eixo que são a razão de rolamento, p , e o ângulo de rolamento, ϕ , a velocidade lateral, v , juntamente com a posição lateral p_e .

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \dot{\tilde{\phi}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{p}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_p \quad (4a)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} \quad (4b)$$

2.2 Obtenção de Variáveis

No relatório da fase 1 deste projeto foram apresentados os sensores que constituem o sistema de instrumentação do quadri-rotor. Nesse relatório foi feita uma análise detalhada de como estes sensores colaboram entre si para obter as medições das acelerações, velocidades e posição do drone, a qual não será reproduzida neste relatório, mas os pontos mais importante serão lembrados de seguida.

O drone em estudo está equipado com três sensores:

- **Inertial Measurement Unit (IMU):** Permite calcular a aceleração linear em relação ao referencial inercial, e a velocidade angular no referencial local.
- **Sonar:** Calcula uma estimativa da altitude do drone medindo o intervalo e tempo que demora a receber de volta um sinal sonoro.
- **Sensor de pressão:** Calcula uma estimativa da altitude do drone medindo variações de pressão em relação a um ponto de referência, serve de apoio ao sonar.

A partir dos sensores disponíveis é possível obter directamente as velocidades lineares em x , u , em y , v , e em z , w , as velocidades angulares de rolamento, p , de picada, q , e de guinada, r , e altitude, z , do drone. Neste relatório assumiu-se também que o drone tem à sua disposição uma câmara que permite obter as coordenadas inerciais x e y , e o ângulo de guinada ψ . Contudo, outros estados utilizados para modelar o quadri-rotor, nomeadamente os ângulos de rolamento, ϕ , e de picada, θ têm de ser obtidos indirectamente.

A obtenção dos ângulos de rolamento e picada é feita utilizando o IMU, que permite combinar as medidas do acelerómetro e do giroscópio de forma a que uma complemente a outra, melhorando a qualidade da medição. As medições do giroscópio são maioritariamente afetadas por ruído e por *bias*, os quais também são amplificados quando se integra a velocidade para obter a rotação, criando acumulação do erro e, portanto, é válido em curtos intervalos de tempo mas não em medições mais prolongadas. As medições do acelerómetro são maioritariamente afetadas por ruído, e por outras acelerações a que o drone poderá estar sujeito, não sendo por isso precisas para curtas medições. Por outro lado, a aceleração da gravidade é constante, o que torna o método estável para longos períodos de tempo.

3 Observador

Os observadores recebem o *input* e o *output* do sistema, e fazem uma estimativa dos seus estados. Estes devem ser implementados quando os estados com significado físico não são medidos diretamente, quando as medições não são completamente fidedignas, ou quando os estados não têm significado físico, e o sistema tem de ser completamente observável.

Tal como foi referido na secção anterior, os sensores permitem obter uma medição dos estados, contudo estas medições estão sujeitas a erros. Desta forma, foi implementado um observador Kalman-Bucy o qual tem em consideração as perturbações, com o objectivo de minimizar o efeito do ruído e, consequentemente, o erro da estimativa dos estados, $\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$.

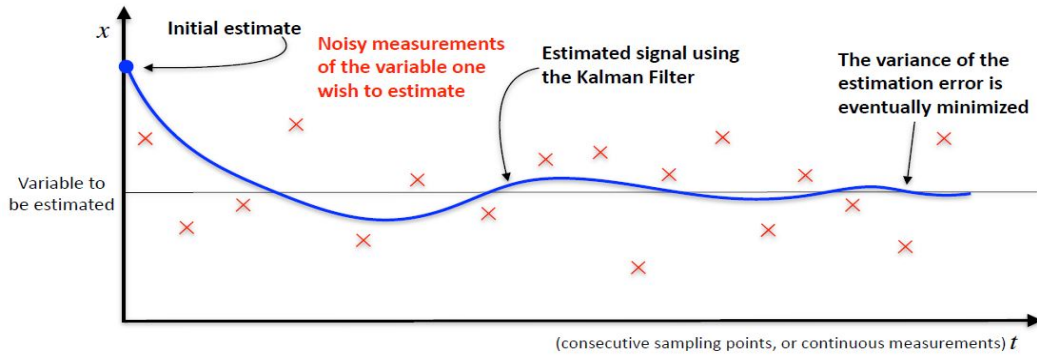


Figura 1: Processo do Filtro de Kalman

Este observador baseia-se no filtro de Kalman, cujo princípio consiste em juntar a informação conhecida sobre o modelo do sistema com a informação recebida pelos sensores, num processo recursivo, sendo que se verifica que o valor converge para o valor verdadeiro. O algoritmo consiste em duas etapas: primeiro, na etapa de previsão, o filtro de Kalman faz uma estimativa dos estados e das suas incertezas, e na seguinte etapa, após receber a próxima medição do sensor corrompida por ruído, actualiza as estimativas dos estados utilizando uma média ponderada.

Assim, considerando agora um sistema corrompido por ruído, tem-se as equações de estado genéricas:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (5)$$

sendo $w(t)$ ruído no processo, com distribuição normal $w \sim N(0, Q_0)$ e $v(t)$ ruído na medição, com distribuição normal $v \sim N(0, R_0)$. Desta forma, Q_0 representa a matriz de variância do ruído do processo, e R_0 a matriz de variância do ruído das medições. Tanto Q_0 como R_0 são matrizes positivas definidas, sendo que Q_0 está ligada à confiança que se tem no modelo e R_0 à fidelidade das medições. Se se tiver pouca confiança no modelo (perturbações de processo altas), Q_0 toma valores mais altos e, consequentemente, a convergência da estimativa do erro diminui (e se os valores de Q_0 diminuïrem ocorre o contrário). Se as medições forem pouco fiáveis (muito ruído nos sensores), R_0 toma valores mais altos e a velocidade da convergência da estimação do erro diminui (e se os valores de R_0 diminuïrem ocorre o contrário). O observador proposto é dado por:

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + Bu(t) + L_K(y(t) - C\hat{X}(t)) \quad , \quad \hat{Y}(t) = C\hat{X}(t) \quad (6)$$

Desta forma, o erro da estimativa é dado por:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \implies \dot{e}(t) = (A - L_K C) e(t) + w(t) - L_K v(t) \quad (7)$$

O ganho de Kalman-Bucy é dado pela equação 8, onde Σ é a solução simétrica e semi-positiva definida da equação algébrica de Riccati (9):

$$L_K = \Sigma C^T R_0^{-1}, \quad \Sigma \geq 0 \quad (8)$$

$$A\Sigma + \Sigma A^T + Q_0 - \Sigma C^T R_0^{-1} C \Sigma = 0 \quad (9)$$

Para cada subsistema é possível determinar um observador de estados ótimo:

- **Eixo vertical / Eixo de guinada**

As matrizes que caracterizam ambos os sistemas encontram-se representadas nas equações 1 e 2, respetivamente. É possível verificar que estes subsistemas são semelhantes, e portanto, de forma genérica, os cálculos são os mesmos para ambos. Sendo R_0 uma constante e Q_0 uma matriz 2×2 , para o cálculo da solução Σ , começou-se por calcular os termos da equação de Riccati individualmente:

$$A\Sigma + \Sigma A^T = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{11} \\ \Sigma_{11} & \Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (10a)$$

$$\Sigma C^T R_0^{-1} C \Sigma = R_0^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma_{12}\Sigma_{21} & \Sigma_{12}\Sigma_{22} \\ \Sigma_{22}\Sigma_{21} & \Sigma_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (10b)$$

De seguida, pela equação de Riccati (9) obtem-se a seguinte igualdade.

$$\begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{11} \\ \Sigma_{11} & \Sigma_{12} + \Sigma_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{R_0} \begin{bmatrix} \Sigma_{12}\Sigma_{21} & \Sigma_{12}\Sigma_{22} \\ \Sigma_{22}\Sigma_{21} & \Sigma_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Assim, resolvendo esta equação e de seguida a equação 8, obteve-se a matriz de covariância, Σ e o ganho de Kalman, L_K :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} -Q_{12} + \frac{\sqrt{R_0}\sqrt{Q_{22}+2\sqrt{Q_{11}R_0}}\sqrt{Q_{11}R_0}}{R_0} & \frac{\sqrt{Q_{11}R_0}}{\sqrt{R_0}\sqrt{Q_{22}+2\sqrt{Q_{11}R_0}}} \\ \frac{\sqrt{Q_{11}R_0}}{\sqrt{R_0}\sqrt{Q_{22}+2\sqrt{Q_{11}R_0}}} & \frac{\sqrt{Q_{11}R_0}}{R_0} \end{bmatrix} \quad (12) \quad L_K = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{Q_{11}R_0}}{R_0} \\ \frac{\sqrt{R_0}\sqrt{Q_{22}+2\sqrt{Q_{11}R_0}}}{R_0} \end{bmatrix} \quad (13)$$

- **Eixo de picada + longitudinal / Eixo de rolamento + lateral**

Estes dois subsistemas são representados por espaços de estados pelas equações 3 e 4, respetivamente. Sendo, para estes subsistemas, R_0 uma matriz 2×2 e Q_0 uma matriz 4×4 . Para o cálculo da solução da equação de Riccati Σ , começou-se, também, pelo cálculo dos termos individuais da equação.

De seguida, de forma análoga aos subsistemas anteriores, resolveu-se a equação algébrica de Riccati (9) e a equação 8 por forma a obter matriz de covariância, Σ e o ganho de Kalman, L_K , em função das entradas das matrizes R_0 e Q_0 .

4 Controlador Óptimo

De forma a controlar os diferentes subsistemas, foi implementado um controlador por realimentação de sistemas servo. Com este controlador fez-se o *feedback* do integral do erro para tornar o sistema servo robusto a perturbações. O objectivo do projeto é que o drone siga uma referência,

desta forma, adiciona-se uma nova variável de estado relacionada com o erro, resultando num novo sistema aumentado em anel aberto:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (14a)$$

$$\tilde{y} = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (14b)$$

Este tipo de controlador garante que o erro entre a referência e a saída é nulo para qualquer entrada. É necessário encontrar os ganhos da lei de controlo:

$$u = -[K \quad k_i] \begin{bmatrix} x \\ x_i \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\dot{x}_i(t) = r(t) - y(t) \quad (16)$$

O cálculo de K são feitos através da resolução de um problema de *Linear Quadratic Regulator*, ou LQR.

- **LQR - Linear Quadratic Regulator:**

Este método permite obter os ganhos óptimos minimizando o índice quadrático de performance $J = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$ de um sistema dinâmico $\dot{x} = Ax + Bu$ para obter $u(t) = -Kx(t)$ óptimo. Para obter os ganhos K é necessário seguir os seguintes passos:

1. Definir os pesos Q e R. O peso Q é referente à importância relativa da energia associada a cada estado, afectando cada um individualmente, e R é referente à importância relativa da energia associada à acção de controlo. A matriz Q penaliza desvios dos estados em relação a 0, e R penaliza grandes acções de controlo. A escolha de Q e R é feita tendo em conta os pesos adequados para cada variável.
2. Resolver a *Algebraic Riccati Equation* (ARE) $A^T P + PA - PBR^{-1} B^T P + Q$ em ordem a P
3. Calcular K através da seguinte expressão: $K = R^{-1} B^T P$

5 Implementação

Uma vez definidos o observador e controlador, como descritos nas secções anteriores, passou-se então à sua implementação nos modelos linear e não linear do quadri-rotor, criados na fase 1 deste projeto. Para correr os modelos de simulink é necessário antes correr o script *Drone_Fase_2.m*, o qual define os valores dos parâmetros e características dos subsistemas, do controlador e do observador. Neste ficheiro é também apresentado um conjunto de opções ao utilizador que permitem escolher qual dos modelos correr, e para fechar o programa. Os modelos linear e não linear encontram-se representados nas figuras 2 e 3.

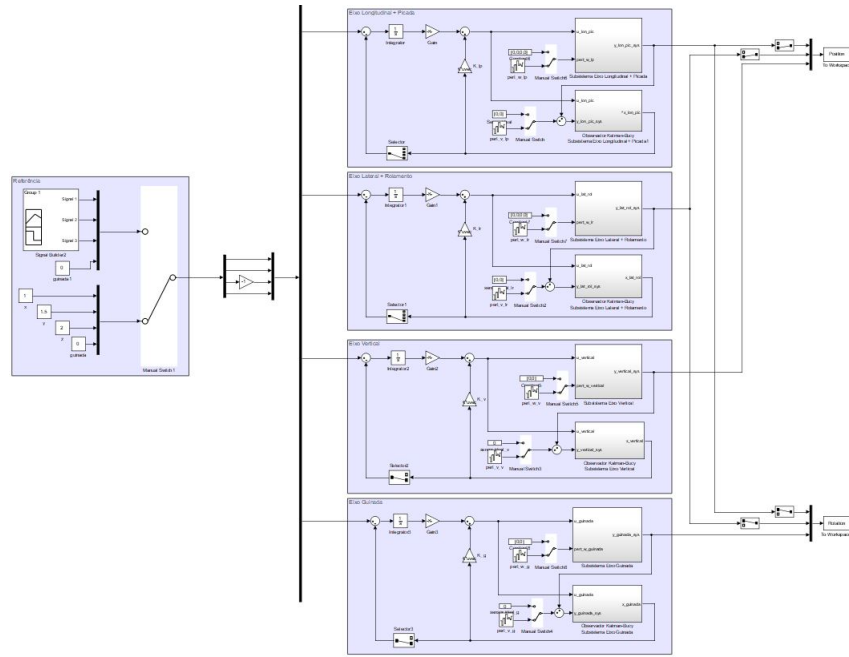


Figura 2: Modelo linear do sistema

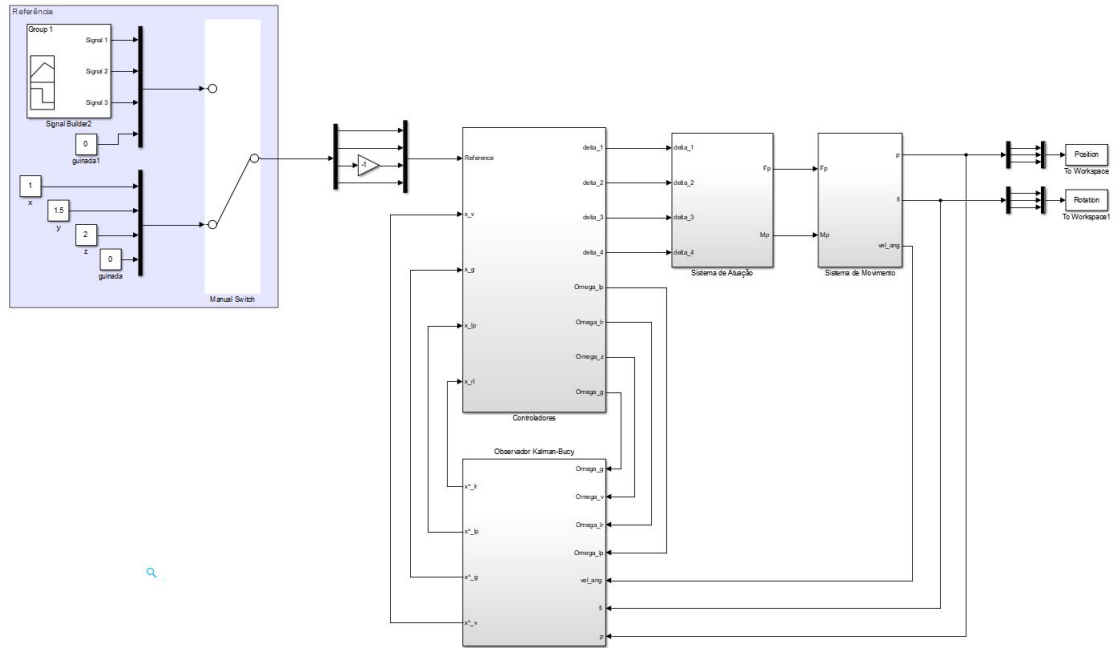


Figura 3: Modelo não linear do sistema

5.1 Observador

Na realidade o sistema do drone é afetado por variadas perturbações: as medições dos sensores são afetadas por ruído, características do espaço que o rodeia como vento, ou outras forças instantâneas repentinas. Como tal, implementou-se um observador Kalman-Bucy, figura 4, abordado anteriormente.

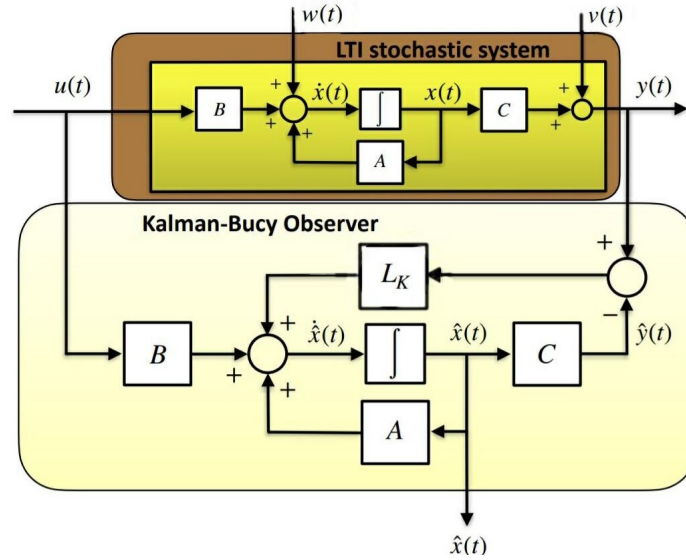


Figura 4: Esquema da Implementação do observador de Kalman-Bucy

A partir de cada um dos subsistemas linearizados foi criado o respectivo observador, implementado de acordo com a figura 4. O parâmetro R_0 , variância do ruído nos sensores, foi obtido experimentalmente e fornecido pelos docentes desta unidade curricular, e o parâmetro Q_0 foi obtido através de perturbações de processo arbitradas para o modelo. Para chegar aos valores dos ganhos L_k usou-se a função *kalman* do *Matlab*. É de salientar que, apenas por se passar do sistema linear para o não linear, haverá ruído de processo. As figuras 5 e 6 apresentam, como exemplo, um *close-up* da implementação do observador no modelo linear, para o subsistema vertical.

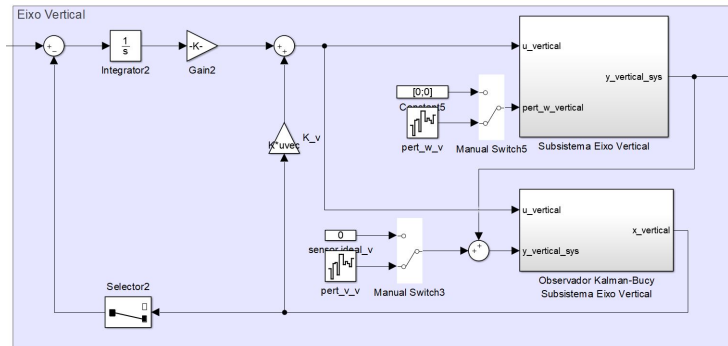


Figura 5: *Close-up* da implementação do observador no modelo linear para o subsistema vertical

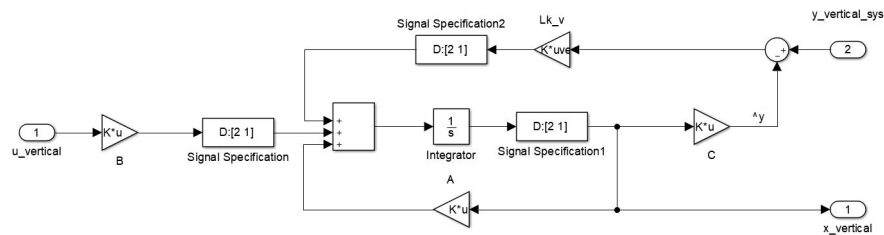


Figura 6: Observador para o subsistema vertical

Na implementação do observador no modelo não linear teve-se uma abordagem um pouco diferente que visa ser mais próxima da realidade. Como discutido anteriormente na secção 2.2, através

dos sensores do drone juntamente com a câmara é possível obter as três velocidades angulares, as três posições inerciais e ainda a rotação de guinada. São estas medições que entram no observador como *outputs* do sistema, sendo que, para se obterem as rotações de rolamento e de picada recorreu-se à integração das respectivas velocidades angulares. A figura 7 mostra esta implementação.

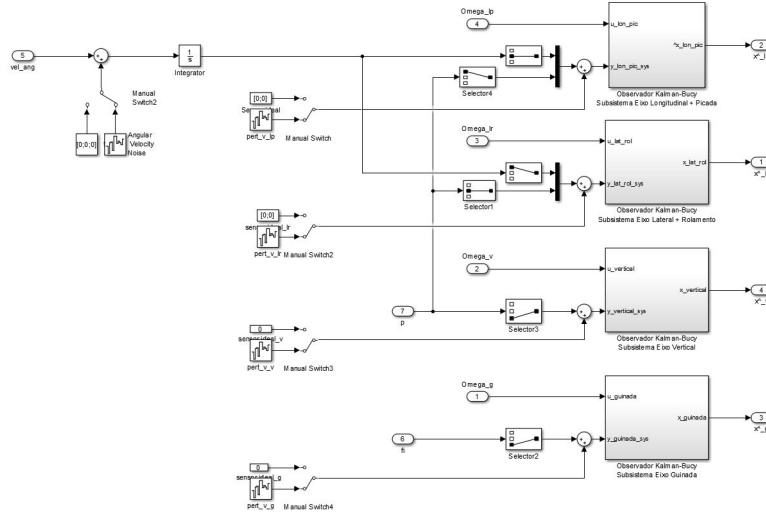


Figura 7: Implementação dos observadores no modelo não linear

Os valores arbitrados para a variância do ruído causado pela resistência do ar são:

$$Wind = 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

As variâncias do ruído nas medições dos sensores encontram-se na tabela 1:

Tabela 1: Variâncias do ruído nas medições

p_x	7.3221×10^{-4}
p_y	4.2829×10^{-4}
p_z	1.8000×10^{-4}
Ângulo de rolamento, ϕ	3.4817×10^{-4}
Ângulo de picada, θ	2.6060×10^{-4}
Ângulo de guinada, ψ	3.8313×10^{-5}
Velocidade angular em x, ω_x	4.9424×10^{-7}
Velocidade angular em y, ω_y	5.2748×10^{-7}
Velocidade angular em z, ω_z	4.2642×10^{-7}

Os valores de Q_0 e R_0 para cada subsistema são:

- **Subsistema Vertical**

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.016 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = 1.8000 \times 10^{-4}$$

- **Subsistema Guinada**

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R_0 = 3.8313 \times 10^{-5}$$

- **Subsistema Longitudinal + Picada**

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 2.6060 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 7.3221 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

- **Subsistema Lateral + Rolamento**

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.016 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 4.2829 \times 10^{-4} & 0 \\ 0 & 3.4817 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

5.2 Controlador

De forma a controlar os diferentes subsistemas para que o drone siga uma referência, foi implementado um controlador por realimentação de sistemas servo que pode ser observado na figura 8.

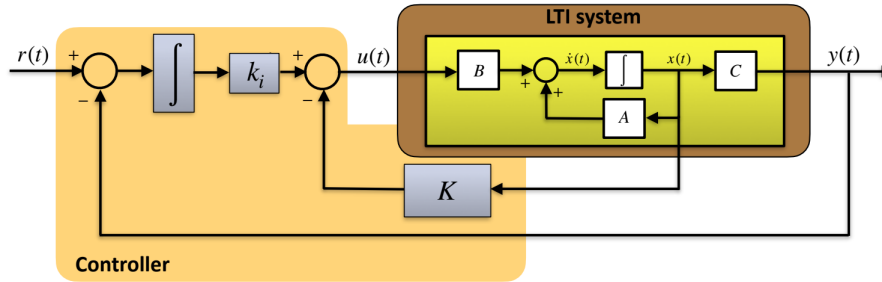


Figura 8: Controlador Servo

Como foi explicado anteriormente, para o cálculo dos ganhos do controlador são utilizadas matrizes aumentadas do sistema. Para chegar aos valores de K usou-se a função *lqr* do *Matlab*. Em seguida são apresentadas estas matrizes para cada subsistema, as matrizes Q e R para cada controlador referente a cada subsistema e os ganhos ótimos obtidos. A atribuição dos pesos Q e R foi feita de acordo com a implementação realizada no *simulink*, isto é, os valores foram sendo alterados mediante os ensaios realizados de forma a que a resposta obtida fosse a melhor possível. Pelo Teorema da Separação tem-se que a alocação dos pólos do controlador e do observador não dependem uma da outra. Desta forma, o controlador e o observador foram sintonizados independentemente.

- **Subsistema do eixo vertical**

O modelo linearizado deste subsistema encontra-se representado em espaço de estados na equação 1. As matrizes aumentadas deste subsistema são as seguintes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} -b_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (18)$$

1. Matrizes Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 8000 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{10000} \quad (19)$$

2. Ganhos ótimos K:

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 1.62 \times 10^4 & 1.8141 \times 10^4 & 7071.1 \end{bmatrix}^T \quad (20)$$

• **Subsistema do eixo de guinada**

O modelo linearizado deste subsistema encontra-se representado em espaço de estados na equação 2. As matrizes aumentadas deste subsistema são as seguintes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

1. Matrizes Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{5000} \quad (22)$$

2. Ganhos ótimos K:

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 695.4155 & 991.6986 & 707.1068 \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

• **Subsistema do eixo longitudinal + picada**

O modelo linearizado deste subsistema encontra-se representado em espaço de estados na equação 3. As matrizes aumentadas deste subsistema são as seguintes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

1. Matrizes Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{100} \quad (25)$$

2. Ganhos ótimos K:

$$K = R^{-1}B^T P = \begin{bmatrix} 217.3060 & 1956.4 & 942.1165 & 1014.8 & 387.2983 \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

• **Subsistema do eixo lateral + rolamento**

O modelo linearizado deste subsistema encontra-se representado em espaço de estados na equação 4. As matrizes aumentadas deste subsistema são as seguintes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

1. Matrizes Q e R:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1500 \end{bmatrix}, \quad R = \frac{1}{100} \quad (28)$$

2. Ganhos ótimos K:

$$K = R^{-1}B^T P = [196.6844 \quad 1854.4 \quad 930.8532 \quad 1010.5 \quad 387.2983]^T \quad (29)$$

A implementação do controlador no modelo linear é exemplificada na figura 5 pelo sistema vertical. No modelo não linear a implementação é semelhante, sendo que a acção de controlo que é o *output* do controlador é a "velocidade angular combinada" das quatro hélices para cada subsistema, a qual é o *input* do sistema linearizado e, portanto, do observador. A transformação destas velocidades para tensões normalizadas, que são o *input* do sistema de atuação, foi abordada no relatório da fase 1.

5.3 Perturbações

Com o objetivo de aproximar ainda mais os modelo projetados à realidade, e testar a robustez dos observadores e controladores, foram implementadas perturbações de processo e perturbações de medições. As perturbações foram maioritariamente implementadas recorrendo ao bloco de *Simulink*, *Band-Limited White Noise*.

No modelo linear, estes blocos foram utilizados com os valores das variâncias do ruído que correspondem às diagonais das matrizes Q_0 , no caso das perturbações de processo, e às variâncias do ruído das medições das posições e rotações no caso do ruído dos sensores. Como exemplo pode-se verificar a figura 5

No modelo não linear, o ruído nos sensores foi implementado de forma semelhante ao que se viu no modelo linear, figura 7, com a adição do ruído da medição das velocidades angulares. Juntou-se ainda um bloco de *white noise* com variância de ruído do vento, equação 17. O *sampling time* utilizado foi de 5ms. No modelo não linear teve-se também em consideração um força instantânea que atua sobre o drone nos diferentes eixos.

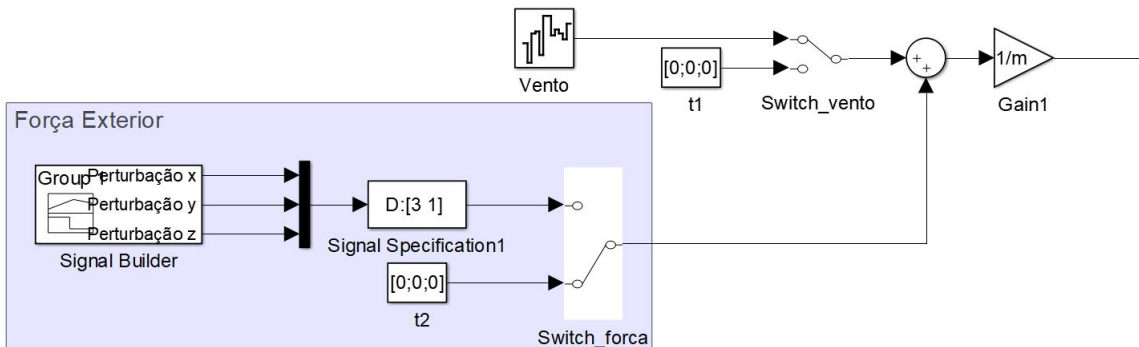


Figura 9: Implementação do ruído do vento e forças instantâneas a atuar sobre o drone

6 Análise de Resultados

6.1 Referência Constante

De forma a testar a implementação dos observadores e controladores referidos nos tópicos anteriores, foi fornecida a seguinte referência ao sistema:

- $x = 1 \text{ m}$;
- $y = 1.5 \text{ m}$;
- $z = 2 \text{ m}$;
- $\psi = 0 \text{ rad}$;

Note-se que se escolheu a referência da guinada, ψ , igual a zero, uma vez que a linearização do sistema foi feita em torno do ponto de equilíbrio em que $\psi = 0$.

6.1.1 Modelo Linear

A primeira análise foi feita no modelo linear uma vez que este é o modelo usado para desenhar os observadores e o controlador. Caso este não esteja bem implementado, não se teria sucesso na implementação do modelo não linear.

• Sem Perturbações

Começou-se por testar o sistema sem perturbações. Assim, para o sistema sem ruído foi obtida a seguinte resposta:

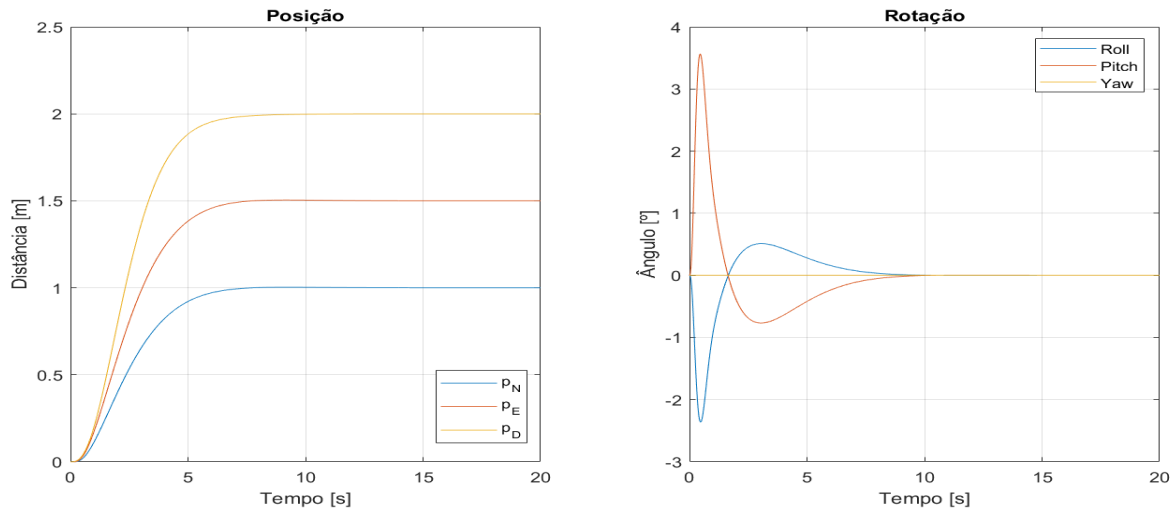


Figura 10: Posição e Rotação linear sem perturbações.

Como se pode observar o sistema atinge o estado estacionário nas posições desejadas com um tempo de resposta igual a 8 segundos para o subsistema longitudinal e para o lateral e 9 segundos para o subsistema vertical. Demora, também, cerca de 10 segundos a estabilizar completamente a sua rotação, sendo que se verifica que os ângulos de rotação são pequenos e que não ultrapassem os 4° .

Nas figuras 11 e 12 estão ilustradas, respectivamente, as tensões normalizadas a entrar em cada motor e as ações de controlo de cada subsistema.

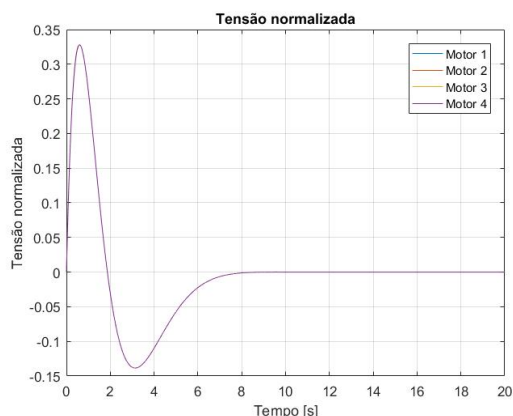


Figura 11: Tensão Normalizada a entrar no sistema de atuação

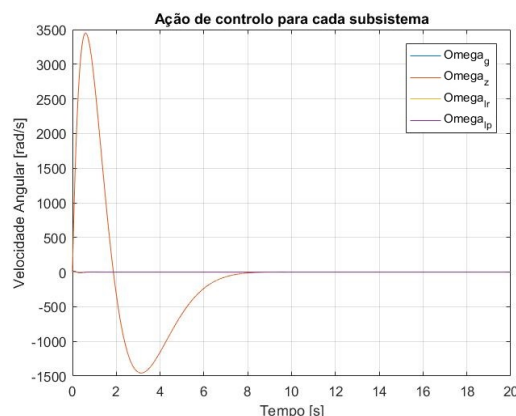


Figura 12: Velocidade angular combinada para cada subsistema

Como se pode observar na figura 12, a ação de controlo para o subsistema vertical é muito mais elevada do que para os outros subsistemas. Isto deve-se ao facto de Ω_z ser a única que é igual ao somatório das velocidades angulares das quatro hélices, o que vai de encontro ao gráfico da figura 11, que mostra que o sistema apresenta tensões normalizadas idênticas para todos os motores.

• Com Perturbações

Para o sistema com o ruído analisado na secção 5.3 obteve-se a seguinte resposta no tempo:

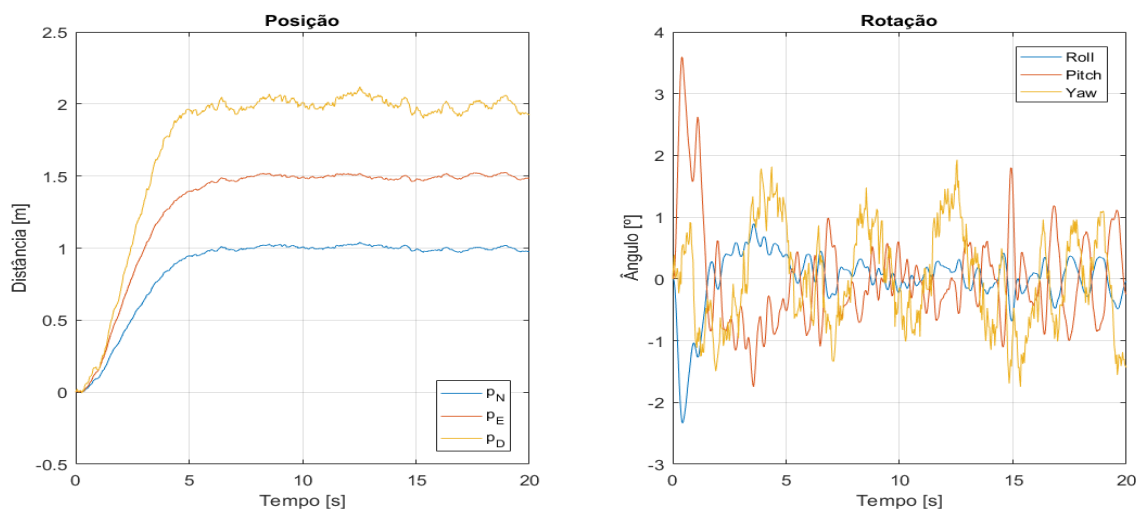


Figura 13: Posição e Rotação linear com perturbações.

Conseguiu-se observar que mesmo com o ruído o sistema atinge o estado estacionário nas posições desejadas com um tempo de resposta aproximadamente igual a 8 segundos para o subsistema longitudinal e para o lateral e 9 segundos para o subsistema vertical. As oscilações existentes na figura 13 devem-se à presença deste mesmo ruído, podendo-se também observar que o subsistema vertical é o mais afectado. Tal como era esperado, verifica-se ainda que, devido ao ruído, embora a amplitude das rotações reduza quando a posição estabiliza, estas vão ser sempre oscilatórias.

Apresenta-se, ainda, os gráficos correspondentes à evolução da tensão normalizada e da ação de controlo no tempo.

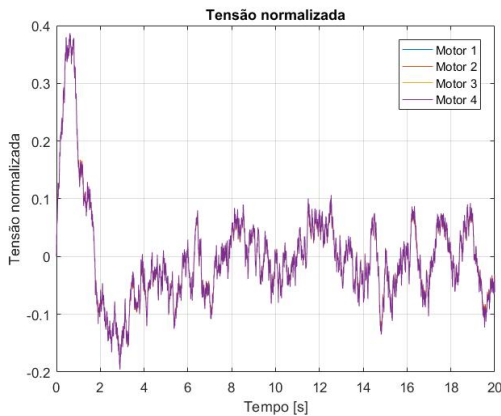


Figura 14: Tensão Normalizada a entrar no sistema de atuação

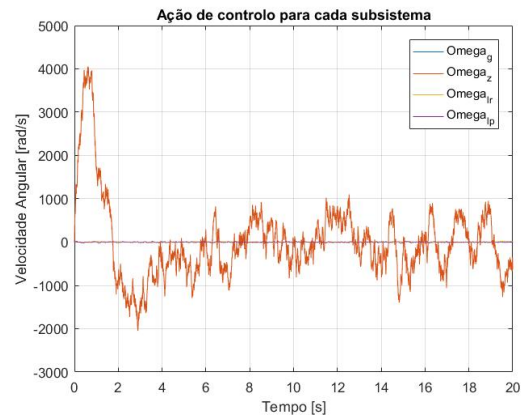


Figura 15: Velocidade angular combinada para cada subsistema

A análise da ação de controlo é semelhante ao caso sem perturbações, contudo é possível observar que a ação de controlo do sistema vertical é fortemente afetada por ruído, o que também se reflete na resposta do sistema, figura 13, onde a resposta em z é a mais afetada por ruído.

6.1.2 Modelo Não Linear

Tendo sido obtidos bons resultados na análise do modelo linear, concluiu-se que os controladores e os observadores foram bem desenhados. Assim, passou-se à testagem da sua implementação no modelo não linear.

• Sem Perturbações

Tal como para o sistema linear, começou-se por analisar este sistema sem perturbações.

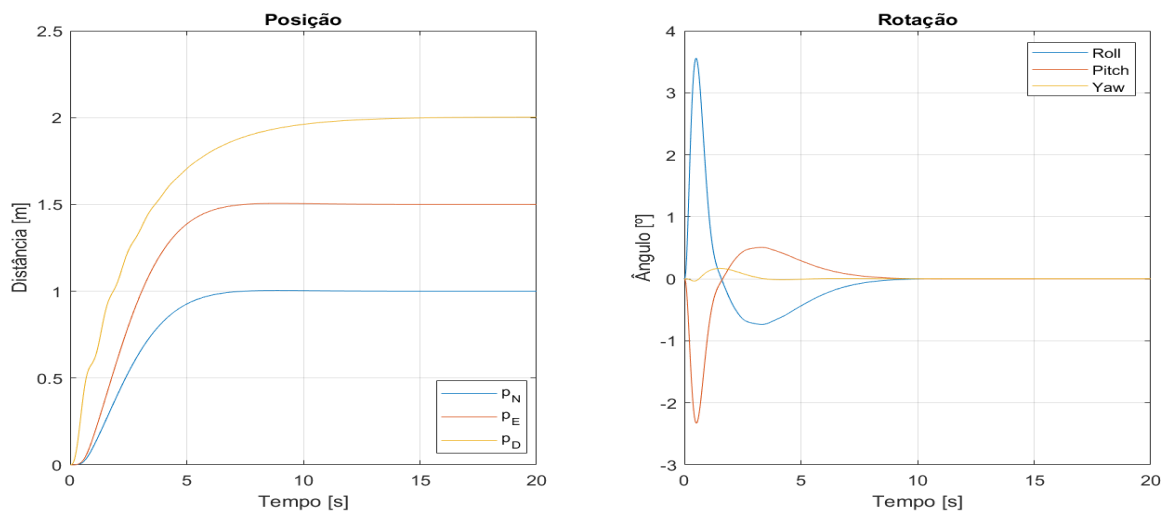


Figura 16: Posição e Rotação não linear sem perturbações.

Pode-se verificar que o sistema atinge o estado estacionário nas posições desejadas com um tempo de resposta igual a 8 segundos para o subsistema longitudinal e para o lateral e 15

segundos para o subsistema vertical. As rotações atingem o estado estacionário ao fim de cerca de 10 segundos.

Comparativamente com o sistema linear, a resposta no tempo do sistema longitudinal e lateral é semelhante em ambos os sistemas e a resposta do sistema vertical é consideravelmente mais lenta no modelo não linear.

À semelhança do modelo linear, também foi feita a análise da ação de controlo e da tensão normalizada do modelo não linear. Estes resultados estão apresentados nas figuras seguintes:

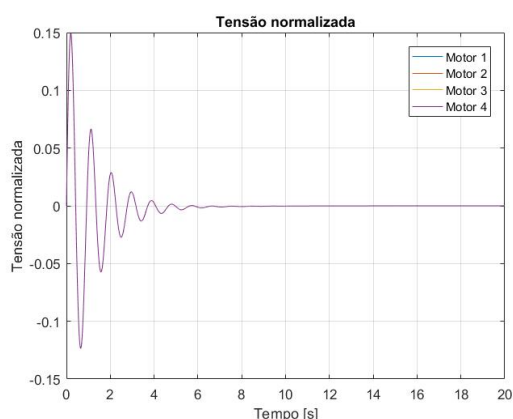


Figura 17: Tensão Normalizada a entrar no sistema de atuação

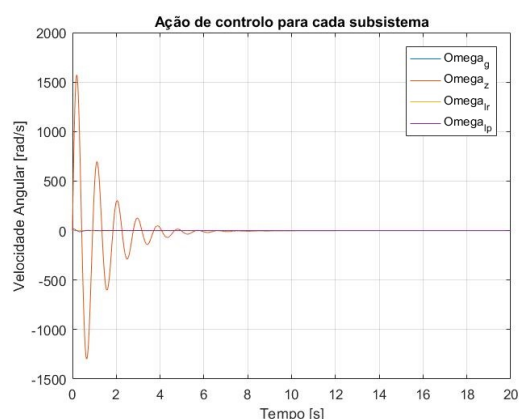


Figura 18: Velocidade angular combinada para cada subsistema

Analisando a ação de controlo, é possível verificar que, mais uma vez, esta é muito maior para o subsistema vertical do que para os restantes. Esta também é significativamente mais oscilatória do que no sistema linear, o que se reflete nas pequenas oscilações observáveis na resposta em z antes desta estabilizar, figura 16.

• Com Perturbações

Para o sistema com ruído, a resposta no tempo do modelo não linear foi a seguinte:

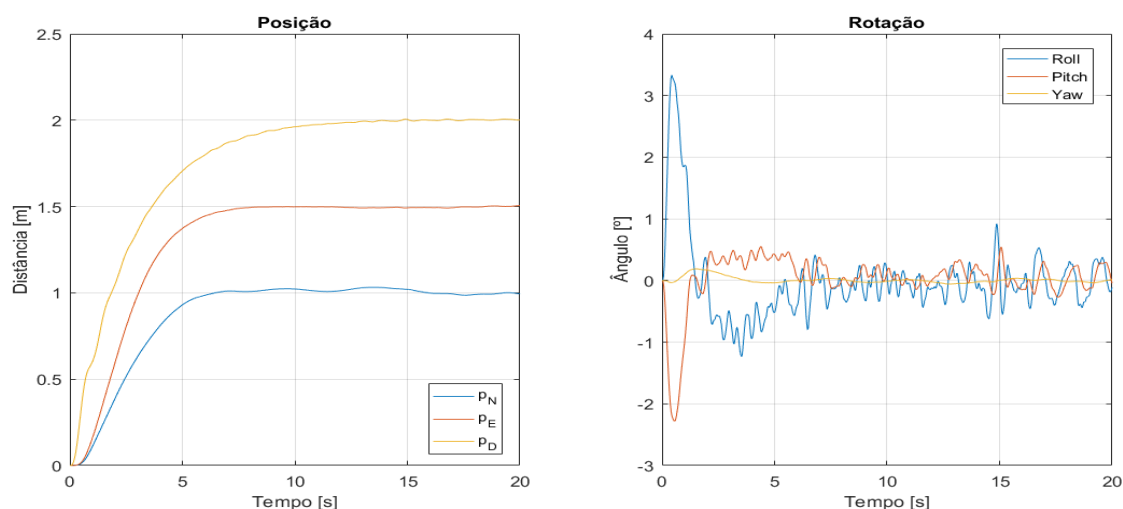


Figura 19: Posição e Rotação não linear com perturbações.

Observou-se que mesmo com a presença de ruído o sistema atinge o estado estacionário nas posições desejadas com um tempo de resposta igual a 7 segundos para o subsistema longitudinal e para o lateral e 15 segundos para o subsistema vertical. As oscilações existentes na figura 19 devem-se à presença deste mesmo ruído.

Comparativamente ao modelo linear com perturbações, observa-se que o modelo não linear tem uma resposta melhor. Este resultado é explicado pela implementação das perturbações uma vez que a variância do ruído das perturbações arbitrada no modelo não linear é menor do que no modelo linear. Este facto é verificável pois quando o sistema estabiliza, as oscilações, quer de posição quer de rotação, são bastante menores.

De seguida, são apresentados os gráficos da tensão normalizada e da ação de controlo do sistema para o caso em estudo.

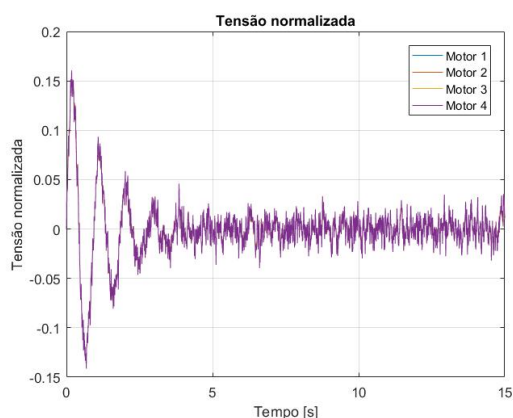


Figura 20: Tensão Normalizada a entrar no sistema de atuação

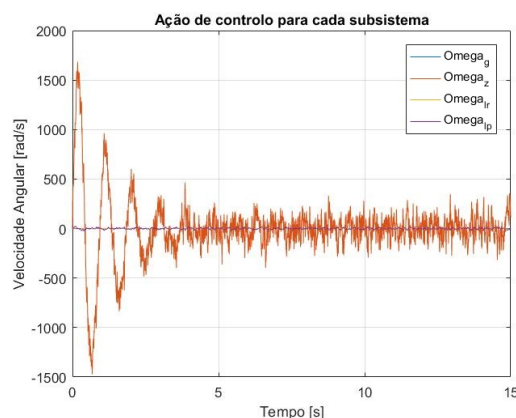


Figura 21: Velocidade angular combinada para cada subsistema

A análise é semelhante à análise da ação de controlo anterior. Tal como se observou no modelo linear, a ação de controlo para o subsistema vertical é muito mais afetada por ruído do as restantes, contudo isto não é tão evidente na resposta do sistema como era no modelo linear.

6.2 Referência Variável

Após a verificação da resposta dos modelos linear e não linear para referências constantes no tempo, analisou-se, também, a resposta do sistema a referências variáveis no tempo. Para este efeito, como referência do sistema, utilizou-se o bloco *signal builder* do *Simulink* com os sinais apresentados na figura 22, que correspondem, respectivamente, às direções x , y e z , sendo que se manteve a referência da guinada, ψ , constante e igual a 0 tal como no caso anterior.

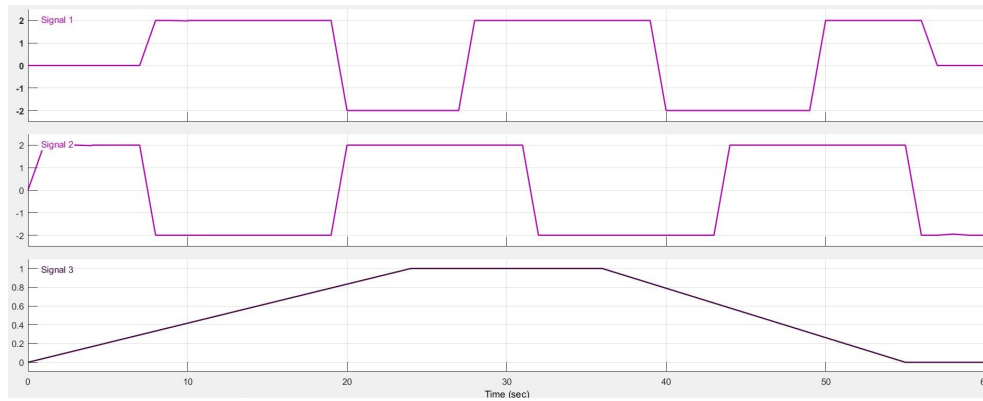


Figura 22: Referência criada com o bloco *signal builder*.

6.2.1 Modelo Linear

De novo, a análise foi feita primeiramente para o modelo linear e seguidamente para o modelo não linear.

• Sem Perturbações

Para o modelo sem perturbações, com a referência introduzida pelo *signal builder* obtiveram-se as seguintes respostas no tempo:

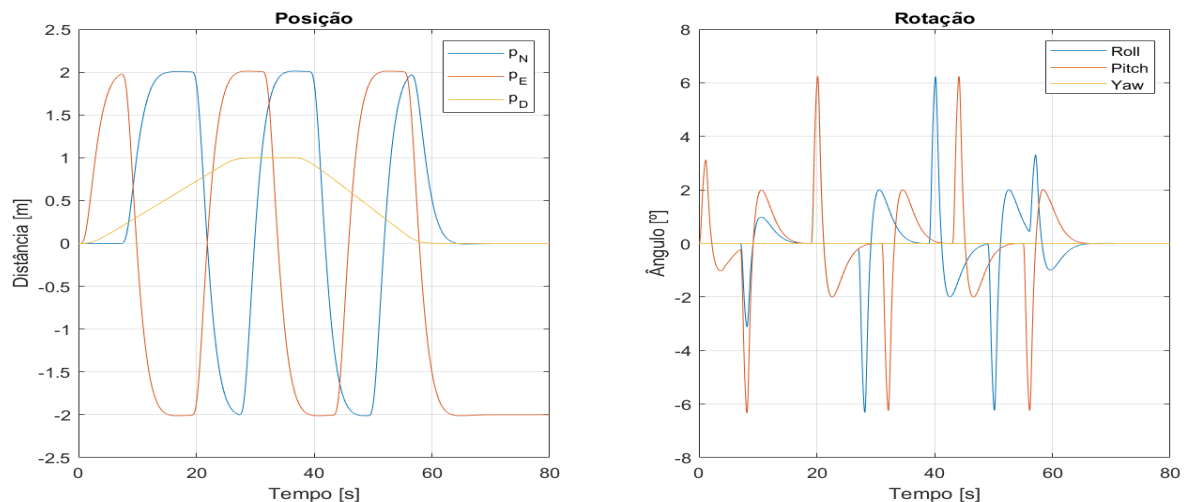


Figura 23: Posição e Rotação linear sem perturbações e referência do *signal builder*.

Como se pode observar na figura 22, a referência varia ao longo de 60 segundos, assim espera-se que o sistema estabilize alguns segundos após $t = 60s$. Os valores finais da referência são, 0 para o subsistema longitudinal e vertical, e -2 para o sistema lateral. Através da figura 23 verificou-se que o sistema estabiliza nestes valores após cerca de 70 segundos. Estes resultados eram os previstos pois seria de esperar que o sistema demorasse o mesmo tempo a estabilizar após o fim do sinal introduzido pela referência, que demora a estabilizar, nos casos anteriores, quando a referencia é constante.

• Com Perturbações

De seguida analisou-se o sistema com ruído, para o qual se obteve as seguintes respostas:

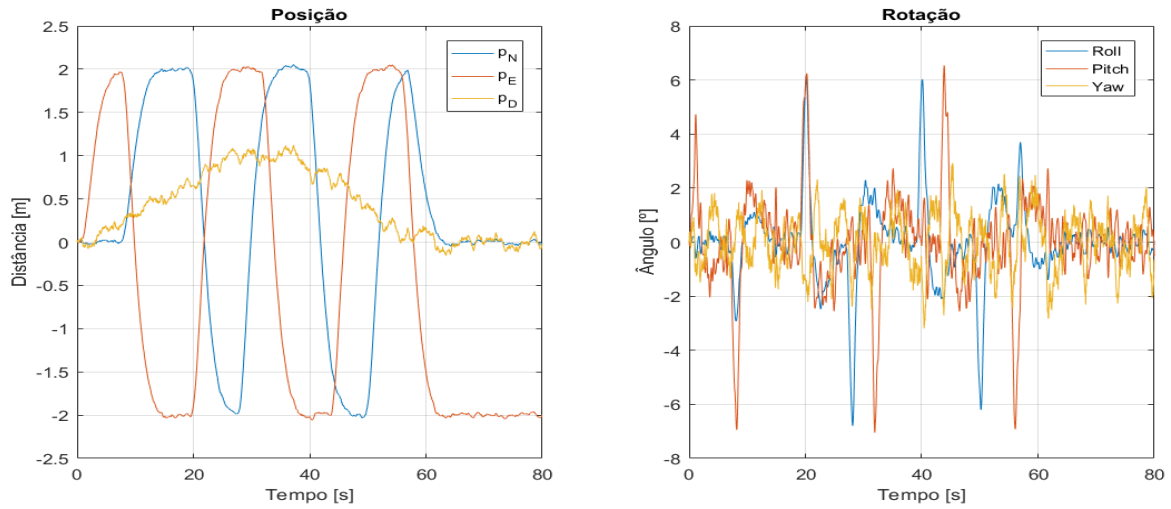


Figura 24: Posição e Rotação linear com perturbações e referência do *signal builder*.

Para este caso, verificou-se que o sistema estabiliza, nos valores finais da referência, após cerca de 70 segundos para o subsistema longitudinal e lateral, mas ligeiramente mais rápido para o subsistema vertical.

• Trajectórias

Obteve-se, ainda, os gráficos da trajectória realizada pelo drone para as duas situações anteriores, com o objectivo de obter uma comparação visual do efeito do ruído no modelo linear.

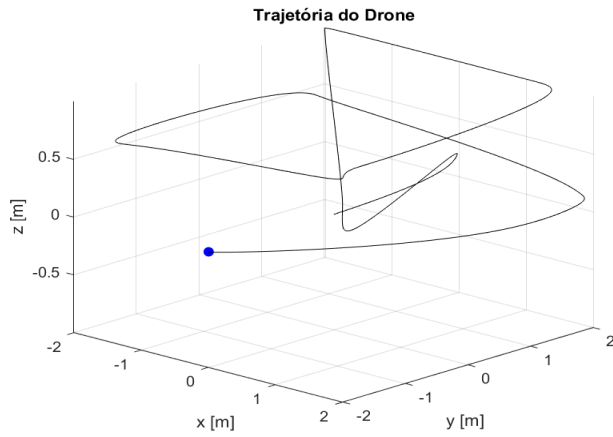


Figura 25: Trajectória sem perturbações - Modelo linear

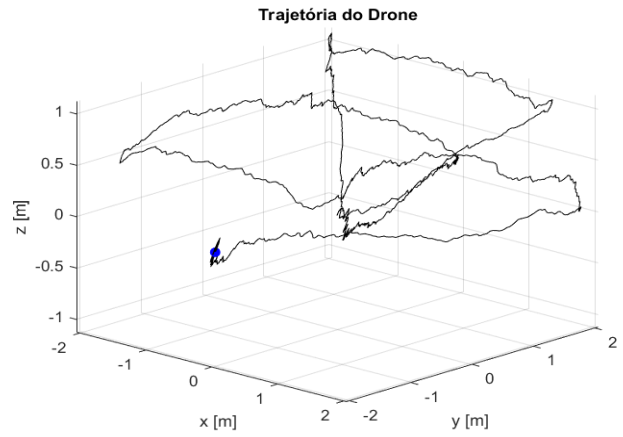


Figura 26: Trajectória com perturbações - Modelo linear

6.2.2 Modelo Não Linear

• Sem Perturbações

De novo, para o modelo não linear testou-se primeiro para o modelo sem ruído, obtendo-se as seguintes respostas:

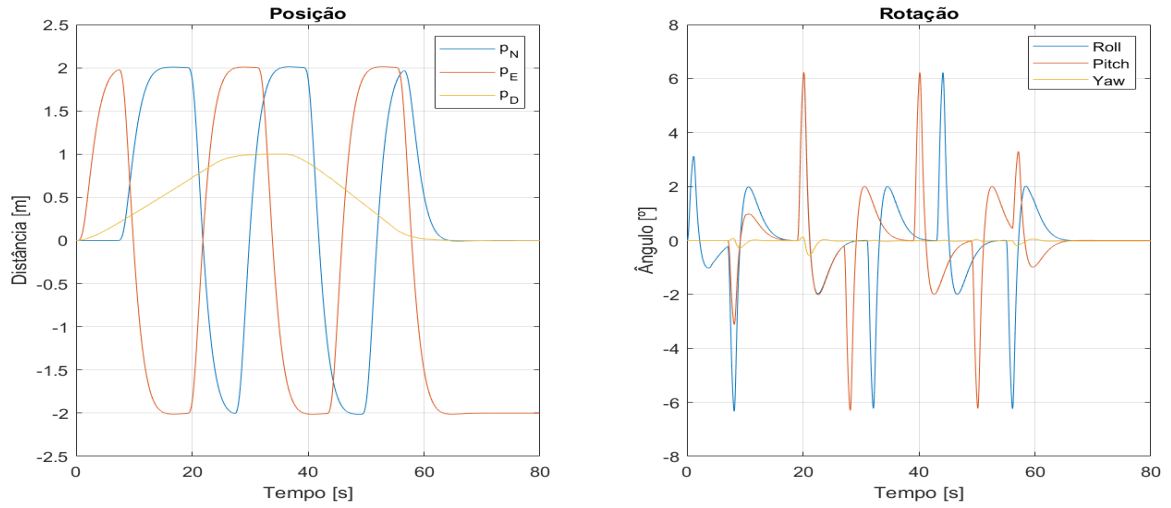


Figura 27: Posição e Rotação não lineares sem perturbações e referência do *signal builder*.

Verifica-se que a resposta é semelhante ao modelo linear, e que as posições e rotações estabilizam nos valores finais da referência, de novo, após cerca de 70 segundos. Verifica-se, ainda, que o modelo suporta variações repentinas de posição, como observado para a direcção longitudinal e lateral, sendo que as rotações não ultrapassam os 7° . Este valor é realista, pois o modelo físico do drone suporta valores de rotação até cerca de 10° .

• Com Perturbações

Por fim, foi testado o modelo não linear, com ruído, tendo como referência um sinal variável no tempo. Para este modelo, obtiveram-se as seguintes respostas:

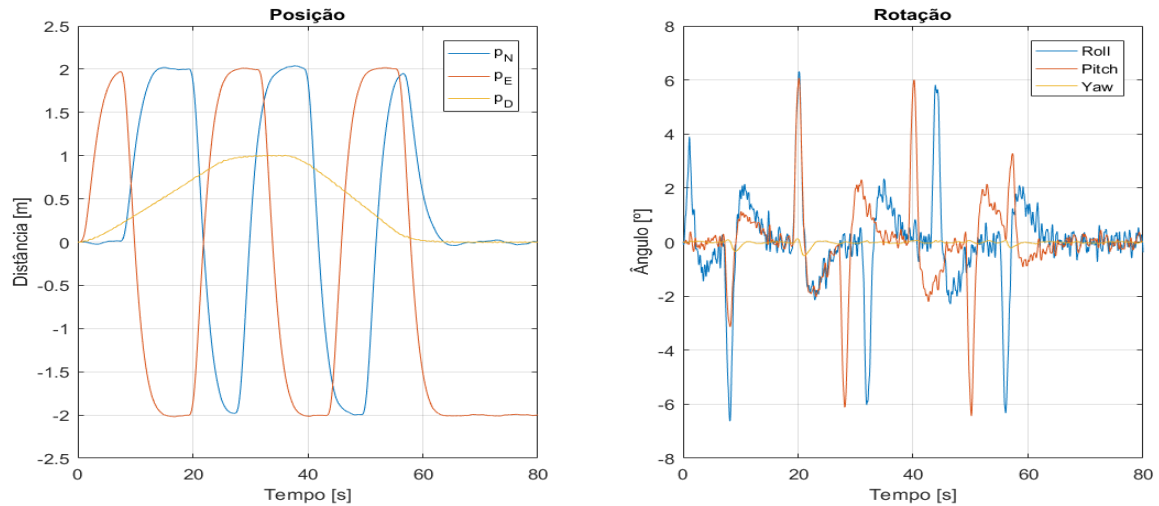


Figura 28: Posição e Rotação não linear com perturbações e referência do *signal builder*.

Para este último modelo verifica-se através da figura 28 que as posições e rotações estabilizam nos valores finais da referência, de novo, após cerca de 70 segundos. Sendo que o subsistema longitudinal apresenta ligeiramente mais ruído que os restantes.

Tal como referido no tópico 5.3, testou-se, ainda, este modelo para a situação de uma força instantânea. A resposta no tempo obtida encontra-se ilustrada na figura 29.

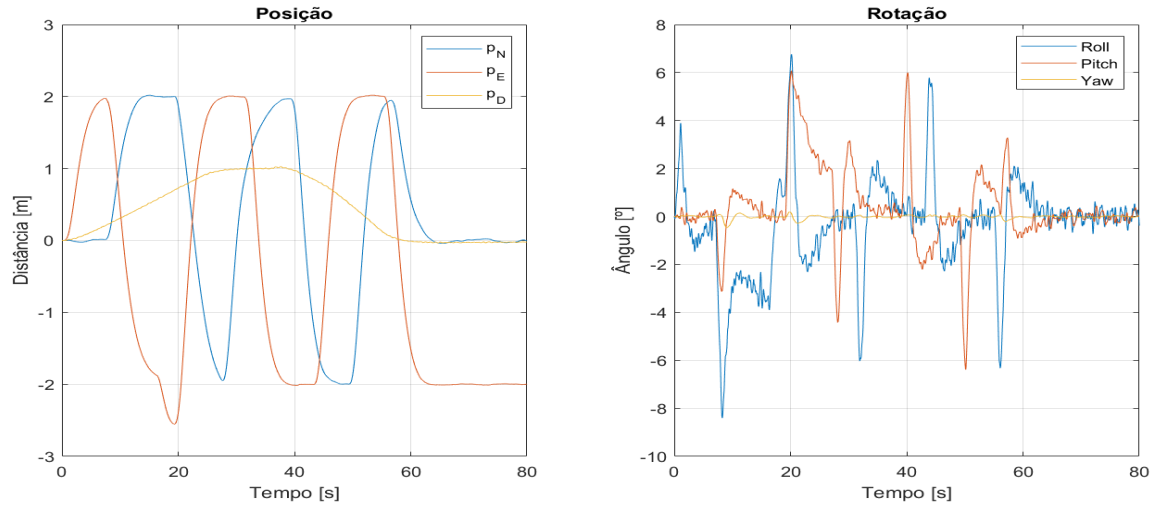


Figura 29: Posição e Rotação não linear com perturbações e aplicação de força instantânea.

Verifica-se, assim, que o modelo é robusto à aplicação de uma força instantânea, sendo capaz de retomar o seguimento da referência.

• Trajectórias

À semelhança do modelo linear, nas figuras 30 e 31 estão ilustradas as trajectórias realizadas pelo drone para o modelo não linear, no caso sem e com perturbações, respectivamente.

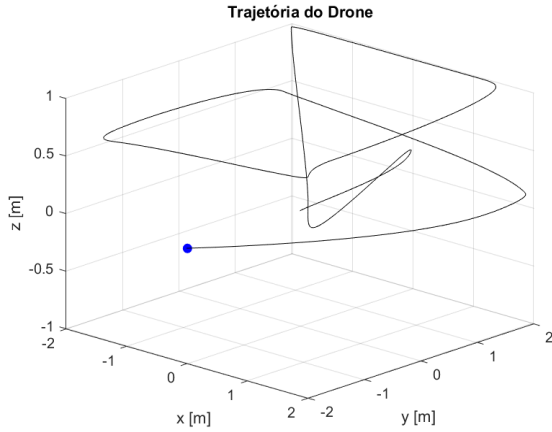


Figura 30: Trajectória sem perturbações - Modelo não linear

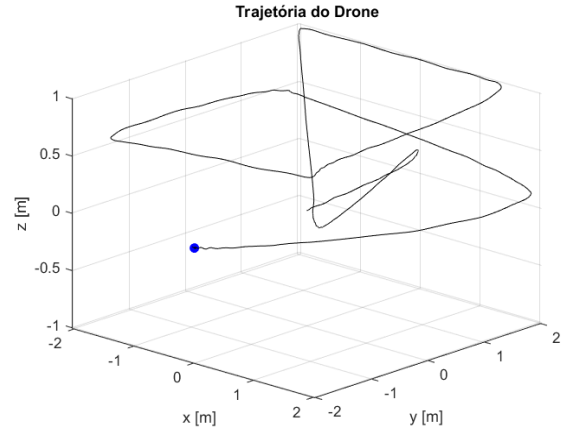


Figura 31: Trajectória com perturbações - Modelo não linear

7 Conclusões

Após os testes efectuados é possível concluir que o observador de Kalman-Bucy e o controlador obtido foram bem implementados uma vez que o drone segue uma determinada referência, seja ela constante ou variável, e tem uma resposta robusta a perturbações.

Em suma, a segunda fase do projecto permitiu aprofundar conhecimentos sobre o funcionamento autónomo do drone, nomeadamente sobre a importância da acção de controlo e a necessidade da existência do observador devido à influência das perturbações na acção do drone.

Bibliografia

- [1] Drone Control and the Complementary Filter - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=whSw42XddsU>
- [2] José Sá da Costa, *OPTIMAL CONTROL - State Representation, Modeling and Analysis*, Notas de apoio à unidade curricular Controlo Ótimo, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2012/2013
- [3] Kalman filter - Wikipedia, the free encyclopedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter
- [4] Miguel Ayala Botto, *Control Design in State Space CT Systems*, Apresentação das aulas teóricas da unidade curricular Controlo Ótimo, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa, sem data
- [5] Miguel Ayala Botto, *Optimal Control in CT - LQR and LQG*, Apresentação das aulas teóricas da unidade curricular Controlo Ótimo, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa, sem data
- [6] Understanding Sensor Fusion and Tracking, Part 2: Fusing a Mag, Accel, Gyro Estimate - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=0r1vvYgmTvI>
- [7] What is an Inertial Sensor - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=LXuHWe5W1pc>