

1º Relatório - Controlo Óptimo

Instituto Superior Técnico
MEMec

Março 2021



Grupo 10

Catarina Pires, N° 90230

Mª Sofia Canas, N° 90323

Mariana Semião, N° 90328

Ricardo Henriques, N° 90349

Professores: Miguel Ayala Botto, Rui Moura Coelho

Índice

1	Introdução	3
2	Configuração do Drone e Referenciais Utilizados	3
3	Modelação do Sistema	5
3.1	Sistema de Actuação	5
3.2	Sistema de Movimento	6
3.2.1	Dinâmica	6
3.2.2	Cinemática	7
3.3	Sistema de Instrumentação	7
4	Linearização	9
4.1	Linearização do Sistema de Actuação	10
4.1.1	Sistema dos Motores	10
4.1.2	Sistema de Movimento	10
5	Análise do Sistema	13
5.1	Estabilidade	13
5.2	Controlabilidade	13
5.3	Observabilidade	13
5.4	Análise dos subsistemas do movimento	14
5.4.1	Eixo vertical	14
5.4.2	Eixo de guinada	14
5.4.3	Eixo de picada e eixo longitudinal	15
5.4.4	Eixo de rolamento e eixo lateral	16
5.5	Perturbações	16
6	Implementação no <i>simulink</i>	16
6.1	Controlador Implementado	17
6.2	Perturbações	19
7	Análise dos resultados obtidos	19
8	Conclusões e considerações finais	22

Tabela de Símbolos

Símbolo	Nome	Valores
ψ	Ângulo de guinada	
θ	Ângulo de picada	
ϕ	Ângulo de rolamento	
g	Aceleração gravítica	9.81 m/s^2
Φ	Atitude do quadri-rotor	
T	Binário	
K_a	Coeficientes aerodinâmicos	
K_T	Coeficiente de binário	$4.72 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot (\text{rad}/s)^{-2}$
K_Q	Coeficiente de momento	$1.1393 \times 10^{-10} \text{ Nm} \cdot (\text{rad}/s)^{-2}$
L	Comprimento do braço de cada rotor	0.0624 m
B_m	Constante de atrito	
K_t	Constante de binário	
K_Ω	Constante de voltagem	$3.8013 \times 10^{-4} (\text{rad}/s)^{-1}$
K_e	Constante contra-eletromotriz	
I	Corrente	
F_a	Força aerodinâmica	
F_g	Força da gravidade	
F_p	Força de propulsão	
L_m	Indutância	
m	Massa do drone	0.063 kg
\mathcal{C}	Matriz de controlabilidade	
K	Matriz de ganhos	
J	Matriz de inércia do drone	
\mathcal{O}	Matriz de observabilidade	
S	Matriz de rotação no referencial inercial	
R	Matriz de rotação no referencial local	
M_a	Momento aerodinâmico	
Q	Momento associado à hélice	
J_{xx}	Momento de inércia	$5.8286 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot m^2$
J_{yy}	Momento de inércia	$7.1691 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot m^2$
J_{zz}	Momento de inércia	$1.0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot m^2$
J_m	Momento polar de inércia	
M_p	Momento de propulsão	
d	Perturbação do vento	
p	Posição do centro de massa	
R_m	Resistência	
V_m	Tensão de alimentação	
V_{bat}	Tensão da bateria	3.7 V
δ	Tensão normalizada	
v_a	Velocidade aerodinâmica	
Ω	Velocidade angular das hélices	
v_w	Velocidade do vento	
ω	Vetor de velocidade angular	
v	Vetor de velocidade linear	

1 Introdução

O objectivo deste projecto, no âmbito da unidade curricular Controlo Óptimo, é controlar o drone *Parrot Mambo Fly*, através de um controlador autónomo, de forma a que o drone siga uma trajectória pré-especificada. Neste relatório será modelado o sistema em estudo e todos os sub-sistemas envolvidos através de um modelo de espaço de estados; será analisada a linearidade, estabilidade, controlabilidade e observabilidade do sistema; implementar-se-ão os modelos encontrados para os subsistemas em *MATLAB* e *Simulink*; e, finalmente, será proposto um controlador retroalimentação de estados, que servirá como regulador do sistema.

2 Configuração do Drone e Referenciais Utilizados

Drones tratam-se de veículos aéreos não tripulados, ou seja, não necessitam de um piloto humano a bordo para o seu normal funcionamento. Os drones multi-rotor são suportados no ar por forças de propulsão, e estes podem ser classificados pelo número de rotores (conjuntos motor-hélice) que possuem. O drone em estudo é um quadri-rotor, isto é, possui quatro braços cada um com um rotor na sua extremidade. Existem dois tipos de rotores, os que giram em sentido horário e os que giram em sentido anti-horário. Os rotores diametralmente opostos giram no mesmo sentido, sendo que, neste drone, os rotores 1 e 3 rodam em sentido horário, e os rotores 2 e 4 giram em sentido anti-horário, ver figura 2.

Para que seja possível descrever o movimento do drone no espaço foram definidos dois referenciais, um referencial local cuja origem se situa no centro de massa do drone, e um referencial inercial cuja origem se situa na superfície da Terra, o qual é considerado fixo em relação ao drone. Este ponto na superfície terrestre corresponde à posição inicial do drone antes da descolagem, e a orientação dos eixos é típica de um referencial *NED*, ou seja, o eixo x aponta para Norte (N-North), o eixo y aponta para Este (E-East), e o eixo z aponta para o centro da Terra (D-Down), figura 1. Relativamente à orientação dos eixos no referencial local, este apresenta uma configuração em "×", isto é, o eixo x aponta em frente, entre os rotores 1 e 2, o eixo y aponta para a direita, entre os rotores 2 e 3, e, pela regra da mão direita, o eixo z aponta para baixo, figura 2.

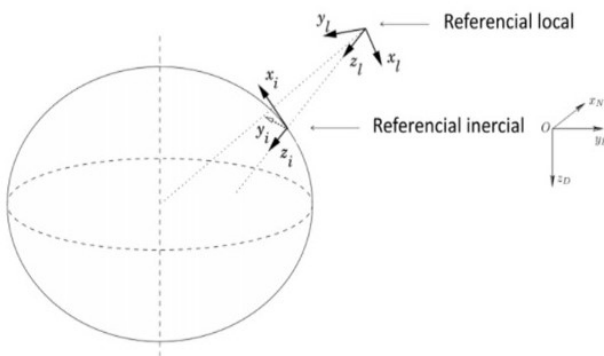


Figura 1: Referenciais inercial e local [1]

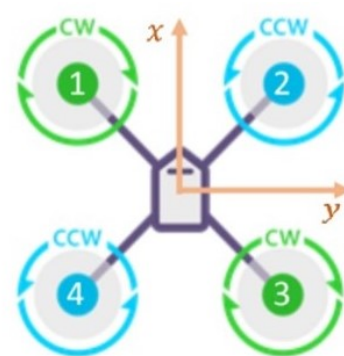


Figura 2: Referencial local

Quando a aeronave se encontra pairada a uma dada altitude diz-se que se encontra em voo pairado. Este é conseguido impondo uma velocidade de rotação igual nos quatro rotores, tal que a força gravítica é completamente compensada pela força de propulsão. Considerando o quadri-rotor em voo pairado (ou seja, em condição estacionária), é possível obter diferentes movimentos da aeronave segundo os eixos através de variações independentes da velocidade de rotação de cada rotor, nomeadamente:

- **Movimento vertical** (ao longo do eixo z):

Ao aumentar a velocidade de rotação de todos os rotores, simultaneamente, o drone sobe.

Ao diminuir a velocidade de rotação de todos os rotores, simultaneamente, o drone desce.

- **Movimento de rolamento** (em torno do eixo x):

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 1 e 4 e diminuindo a velocidade de rotação dos rotores 2 e 3, o drone roda no sentido positivo.

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 2 e 3 e diminuindo a velocidade de rotação dos rotores 1 e 4, o drone roda no sentido negativo.

- **Movimento de picada** (em torno do eixo y):

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 1 e 2 e diminuindo a velocidade de rotação dos rotores 3 e 4, o drone roda no sentido positivo.

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 3 e 4 e diminuindo a velocidade de rotação dos rotores 1 e 2, o drone roda no sentido negativo.

- **Movimento de guinada** (em torno do eixo z):

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 2 e 4 em relação à velocidade de rotação dos rotores 1 e 3, o drone roda no sentido positivo, visto que uma rotação exercida no sentido anti-horário corresponde a um momento no sentido horário.

Aumentando a velocidade de rotação dos rotores 1 e 3 em relação à velocidade de rotação dos rotores 2 e 4, o drone roda no sentido negativo.

Utilizam-se os ângulos de Euler para descrever as rotações associadas a cada eixo do referencial local, definindo o ângulo de rolamento ϕ , o ângulo de picada θ e o ângulo de guinada ψ , para rotações em torno de x , y e z , respectivamente. Se se definir como *frame 0* o referencial local na atitude inicial do drone e *frame 1* o referencial local após o drone ter realizado uma rotação em torno de x de ângulo ϕ , a matriz de transformação de coordenadas da *frame 0* para a *frame 1* é dada por,

$$R(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Utilizando a mesma analogia para rotações em torno do eixo y e eixo z , obtém-se, respectivamente, as seguintes matrizes de transformação:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Finalmente, defini-se a matriz de rotação, R como

$$R = R(\phi)R(\theta)R(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

Onde foi utilizada a notação $s_\alpha = \sin(\alpha)$ e $c_\alpha = \cos(\alpha)$.

3 Modelação do Sistema

O objectivo é controlar o drone, como tal é necessário obter a modelação do seu sistema. A forma mais precisa de o modelar é através da identificação e modelação dos seus subsistemas. De forma a que o controlo exercido seja feito de forma simples, os modelos obtidos para os subsistemas terão de ser simplificados, uma vez que modelos complexos são difíceis de manipular. O *Parrot Mambo Fly* é constituído por três subsistemas:

3.1 Sistema de Actuação

Neste sistema, inclui-se o modelo de cada um dos quatro rotores, constituídos pelos motores e hélices, e o modelo da alocação de controlo. A combinação das forças e binários exercidos por cada um dos quatro rotores resulta na força de propulsão, F_p , e no momento de propulsão, M_p , sendo estes responsáveis pelo movimento do drone. Desta forma, consideramos o modelo do sistema de actuação composto por:

- **Modelo dos Motores:** Os motores são modelados como motores de corrente contínua, sendo controlados pela tensão de alimentação V_m . O estator do motor pode ser modelado como um circuito RL percorrido por uma corrente I , onde as perdas por efeito de Joule são representadas pela resistência R_m , as perdas do campo magnético são representadas pela indutância L_m , e a força eletromotriz produzida é representada pela multiplicação da velocidade angular Ω por uma constante contra-eletromotriz K_e . O rotor (parte móvel do motor) gira a uma velocidade angular Ω e possui um momento polar de inércia J_m , o binário criado é modelado como o produto da velocidade angular por uma constante de binário K_t , e a força de atrito é modelada pelo produto da velocidade angular por uma constante de atrito B_m . Desta forma, as equações que representam o modelo do motor, onde Q representa o momento associado à hélice, são:

$$\dot{I}_n = \frac{1}{L_m}(V_m - R_m I - K_e \Omega_n) \quad (5)$$

$$\dot{\Omega}_n = \frac{1}{J_m}(K_t I - Q - B_m \Omega_n) \quad (6)$$

As equações 5 e 6 representam o sistema em espaço de estados, em que os estados, x , são I e Ω , os *inputs*, u , são V_m e Q , e $\dot{x} = [\dot{I}; \dot{\Omega}] = f(x, u)$. Este é linear e, portanto, pode ser escrito na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_n \\ \dot{\Omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_m}{L_m} & -\frac{K_e}{L_m} \\ \frac{K_t}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ \Omega_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m_n} \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

Assumindo que a tensão recebida em cada motor é igual a V_m , esta pode ser relacionada com a tensão da bateria, V_{bat} , por,

$$\delta_n = \frac{V_{mn}}{V_{bat}} \quad (8)$$

Onde δ_n é a tensão normalizada recebida por cada motor. Tendo em conta que o movimento dos motores é muito mais rápido que o movimento do drone, estes podem ser modelados como um ganho estático. Utilizar-se-á a tensão normalizada para a modelação dos motores através da seguinte relação linear,

$$\delta_n = K_\Omega \Omega_n \quad (9)$$

- **Modelo das Hélices:** O sistema correspondente a cada hélice é modelado através dos coeficientes de força e momento, K_T e K_Q , os quais multiplicados pelo quadrado da velocidade angular da hélice permitem obter o binário, T , e o momento, Q , provenientes do movimento de rotação da mesma. Estes coeficientes são dependentes das características da hélice utilizada. Assim, sendo Ω_n a velocidade de rotação da hélice ligada ao motor n , e T_n e Q_n o binário e o momento resultantes, respectivamente, pode-se escrever as equações:

$$T_n = K_T \Omega_n^2 \quad (10)$$

$$Q_n = K_Q \Omega_n^2 \quad (11)$$

- **Modelo da Alocação de Controlo:** Considerando a configuração em \times do quadri-rotor, e as diferentes manipulações de movimento possíveis previamente descritas (tópico 2), as forças e momentos de propulsão resultantes podem ser obtidos pelas seguintes equações:

$$F_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sum_{n=1}^4 T_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_p = \begin{bmatrix} [(T_1 + T_4) - (T_2 + T_3)]L \cos 45^\circ \\ [(T_1 + T_2) - (T_3 + T_4)]L \sin 45^\circ \\ -Q_1 + Q_2 - Q_3 + Q_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Onde L é o comprimento do braço de cada rotor. É possível observar nas equações 12 e 13 que, dos 6 graus de liberdade que o drone tem (3 direcções de translação e 3 de rotação), apenas 4 estão a ser actuados (uma vez que os binários segundo x e y são 0). Consequentemente, deslocamentos em x e y terão de ser obtidos através de movimento angular de picada ou rolamento, respectivamente.

3.2 Sistema de Movimento

3.2.1 Dinâmica

O sistema do movimento engloba as equações da dinâmica e cinemática do quadri-rotor. As equações da dinâmica relacionam as forças exercidas no corpo com a sua aceleração ou inércia. A dinâmica de translação, equação (14), e de rotação, equação (15), do drone são descritas pelas seguintes equações,

$$m\dot{v} = -\omega \times mv + F_p + F_a + F_g \quad (14)$$

$$J\dot{\omega} = -\omega \times J\omega + M_p \quad (15)$$

Onde m e J são, respectivamente, a massa e a matriz de inércia do drone, v e ω são os vectores de velocidade linear e angular do referencial local em relação ao referencial inercial, expressos no referencial local. As forças e momentos externos a actuar no quadri-rotor provêm da propulsão (vectores F_p e M_p descritos anteriormente nas equações 12 e 13), da aerodinâmica (onde se incluem

as perturbações do vento), F_a , e da gravidade, F_g . Existe também um momento aerodinâmico M_a , contudo este é desprezável face ao momento de propulsão M_p . A influência do vento dificulta a modelação da força aerodinâmica, sendo a sua representação simplificada,

$$F_{an} = -K_{an}|v_{an}|v_{an} \quad (16)$$

em que K_a são os coeficientes aerodinâmicos e $v_a = v - v_w$, onde v_w é a velocidade do vento expressa no referencial local.

A força da gravidade é calculada por,

$$F_g = mR^T g \quad (17)$$

em que o vector g é dado por 18 e o valor da aceleração gravítica é $9.81m/s^2$.

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} \quad (18)$$

3.2.2 Cinemática

As equações da cinemática relacionam a velocidade do corpo com a sua posição. As velocidades linear e angular do quadri-rotor podem ser descritas no referencial inercial por,

$$\dot{p} = Rv \quad (19)$$

$$\dot{\Phi} = S\omega \quad (20)$$

onde $p = [p_N, p_E, p_D]^T$ e $\Phi = [\phi, \theta, \psi]^T$ correspondem, respectivamente, à posição do centro de massa e à atitude do quadri-rotor relativamente ao referencial inercial. A matriz S é dada por,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\phi & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \quad (21)$$

Onde se utilizou a notação compacta $s_\alpha = \sin(\alpha)$, $c_\alpha = \cos(\alpha)$ e $t_\alpha = \tan(\alpha)$.

As equações 14, 15, 19 e 20 constituem então as equações do subsistema do movimento. Este subsistema pode ser descrito, genericamente, em espaço de estados por $\dot{x} = f(x, u, d)$, definindo os estados $x = [v^T, \omega^T, p^T, \Phi^T]^T$, e as entradas de propulsão, $u = [F_p^T, M_p^T]^T$, e perturbações do vento, d . É de notar que as equações da dinâmica e da cinemática não são lineares e portanto não é possível escrever este espaço de estados na forma matricial.

3.3 Sistema de Instrumentação

Este sistema corresponde aos sensores utilizados pelo quadri-rotor para medir a sua posição durante o voo. O drone em estudo, *Parrot Mambo Fly*, está equipado com três sensores que permitem conhecer uma estimativa da sua altitude e orientação a qualquer momento:

- **Inertial Measurement Unit (IMU):**

Um IMU é um pequeno aparelho electrónico constituído por uma combinação de três outros sensores. Estes, por norma, incluem um giroscópio, um acelerómetro e um magnetómetro. O acelerómetro detecta as mudanças de velocidade do drone, em qualquer direcção, medindo a

aceleração linear em relação ao referencial inercial. O giroscópio detecta mudanças na orientação do sensor, e, consequentemente, do drone, medindo assim a velocidade angular (no referencial local). O magnetómetro mede o campo magnético do local. O IMU do drone não inclui um magnetómetro.

- **Sonar:**

O sonar emite uma onda de som de alta frequência que, ao encontrar um obstáculo, é reflectida sendo captada pelo sonar. Através da medição do intervalo de tempo entre a emissão da onda e a recepção da onda reflectida é possível calcular uma estimativa da altitude do drone.

- **Sensor de pressão:**

O sensor de pressão serve como apoio ao sonar. Tal como o nome indica, este sensor mede a variação de pressão em relação a um ponto de referência na origem do referencial inercial, permitindo assim obter uma estimativa da altitude do drone.

Desta forma, a partir dos sensores disponíveis é possível obter directamente as velocidades lineares em x , u , em y , v , e em z , ω , as velocidades angulares de rolamento, p , de picada, q , e de guinada, r , e altitude, z , do drone. Contudo, outros dos estados utilizados para modelar o drone, como a posição em x e y , e os ângulos de rolamento, ϕ , picada, θ , e guinada, ψ , têm de ser obtidos indirectamente. Para abordar o problema da obtenção das rotações, vai-se utilizar como exemplo a obtenção do ângulo de rolamento através do sensor IMU (acelerómetro + giroscópio).

Analisando, primeiramente, a obtenção do ângulo utilizando o giroscópio. assumindo que o drone parte de uma rotação de rolamento igual a zero (se se encontra em voo pairado, por exemplo). Quando este começa a rodar sobre o eixo x , é possível determinar qual foi a variação do ângulo de rolamento numa amostra de tempo, e somar essa variação à estimativa actual do ângulo de rolamento. Este método é essencialmente o mesmo que integrar a velocidade angular, e é válido em curtos espaços de tempo mas acumula um erro muito grande em medições mais prologadas. As medições dos sensores são afectadas por ruído e por *bias*, os quais também são amplificados quando se integra a velocidade para obter a rotação, criando, assim, a acumulação do erro. A obtenção do ângulo de picada é semelhante.

Analisando agora a obtenção do ângulo de rolamento pelo acelerómetro. O acelerómetro não só mede a aceleração linear do drone, como também a aceleração da gravidade (se o drone estivesse em queda livre o acelerómetro mediria zero). Assim, é possível definir que o sentido *Down*, colinear com o eixo z do referencial inercial, é no sentido oposto ao sentido da aceleração gravítica medida pelo acelerómetro, a qual aponta para cima pois mede a aceleração a que o drone se encontra para contrariar a gravidade e se manter em voo pairado. Uma vez definida a direcção *Down*, o ângulo de rolamento pode ser obtido através do arco de tangente entre a aceleração em y e a aceleração em z . Este método, contudo, não é preciso para curtas medições uma vez que as medições são afectadas por ruído, e por outras acelerações a que o drone poderá estar sujeito. Se, por acaso, o IMU não se localizar no centro de aceleração do drone, haverá ainda mais erro pois este captará uma aceleração linear proveniente da rotação.

Por outro lado, a aceleração da gravidade é constante, o que torna o método da medição de rotações utilizando o acelerómetro estável para longos períodos de tempo. A obtenção do ângulo de picada é semelhante. O IMU permite combinar ambas as medidas de forma a que uma complemente a outra, melhorando a qualidade da medição.

Relativamente ao ângulo de guinada, atendendo a que o IMU do drone não possui um magnetómetro, este tem de ser estimado integrando a velocidade angular em z . Em relação às posições em x e y , a única forma de as obter é integrando duas vezes a aceleração, o que acumula erro ao longo do tempo devido ao ruído e ao bias.

Uma vez que a modelação e utilização dos sensores será abordada nas fases posteriores deste projecto, modelou-se este sistema como um sistema de sensores ideais, isto é, $y = x$.

4 Linearização

A modelação do movimento apresentada anteriormente pode ser escrita numa formulação em espaço de estados com duas equações sendo elas respectivamente a equação de estados e a equação de saída:

$$\dot{x} = f(x, u, d) \quad (22)$$

$$y = h(x, u, n) \quad (23)$$

em que $x = [I; \Omega; v; \omega; p; \Phi]$, u é o vector de entradas, y o vector das saídas, d o vector de perturbações e n o vector do ruído da saída. De forma a ser possível fazer a análise dos sistemas, é necessário efectuar a linearização dos modelos anteriormente apresentados.

Para efectuar a linearização foi necessário de encontrar uma condição de equilíbrio no sentido em que as variáveis de estado sejam constantes. Desse modo, utilizaram-se as condições de equilíbrio do voo pairado uma vez que obedecem a este critério, isto é, $y_0 = \text{constante}$ e as velocidades são nulas $\dot{x}=0$. Deste modo, considerando um voo estacionário sem ruído e perturbações temos as seguintes condições de equilíbrio:

$$\dot{x} = 0 = f(x_0, u_0, 0) \quad (24)$$

$$y_0 = h(x_0, u_0, 0) \quad (25)$$

Pode-se então proceder à linearização das equações de espaço de estados através da expansão de Taylor de primeira ordem:

$$\dot{x} = \frac{df}{dx}(x_0, u_0) \cdot (x - x_0) + \frac{df}{du}(x_0, u_0) \cdot (u - u_0) \quad (26)$$

$$y - y_0 = \frac{dh}{dx}(x_0, u_0) \cdot (x - x_0) + \frac{dh}{du}(x_0, u_0) \cdot (u - u_0) \quad (27)$$

Se se considerar as seguintes variáveis de estado com desvios a partir dos valores de equilíbrio

$$\tilde{x} = x - x_0 \quad (28)$$

$$\tilde{u} = u - u_0 \quad (29)$$

$$\tilde{y} = y - y_0 \quad (30)$$

pode-se obter um sistema linear no espaço de estados com a seguinte representação:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (31)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \quad (32)$$

sendo D nulo. As matrizes A, B e C são calculadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{du} \\ \dots \\ \frac{df_n}{du} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{dh}{dx_1} & \dots & \frac{dh}{dx_n} \end{bmatrix} \quad (35)$$

4.1 Linearização do Sistema de Actuação

4.1.1 Sistema dos Motores

Atendendo ao que foi abordado anteriormente sobre a linearização, pode-se então aplicar esses conceitos aos diferentes subsistemas. Neste subsistema, a entrada é a tensão normalizada em cada motor, $\tilde{u} = \tilde{\delta}_i$, e a saída é a velocidade angular dos motores $\tilde{y} = \tilde{\Omega}_i$.

Para a utilização do processo de linearização previamente explicado foi escolhida a condição inicial o voo pairado. Em voo pairado a força de propulsão (somatório dos binários das hélices) tem de ser igual ao peso do drone, e os binários criados pelas hélices são iguais. Assim, a velocidade angular das hélices no ponto de equilíbrio é

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{4K_T}} \quad (36)$$

A cada um dos 4 motores está associado um sistema cujo vector de estados é $\tilde{x} = [\tilde{\Omega}_i \ \tilde{I}_i]$. Desta forma, podemos obter o seguinte espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Omega}}_i \\ \dot{\tilde{I}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\Omega_0 K_Q + B_m}{J_m} & \frac{K_t}{J_m} \\ -\frac{K_e}{L_m} & \frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_i \\ \tilde{I}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \tilde{\delta}_i \quad (37a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\Omega}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_i \\ \tilde{I}_i \end{bmatrix} \quad (37b)$$

4.1.2 Sistema de Movimento

Assumindo como entrada do subsistema do movimento as velocidades angulares de cada um dos motores, $u = \Omega = [\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4]^T$, e os estados previamente definidos, a linearização do subsistema pode ser escrita na forma matricial $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{\tilde{p}} \\ \dot{\tilde{\Phi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \\ \tilde{p} \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v \\ B_\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega} \quad (38)$$

Onde cada 0 na matriz A representa uma matriz de zeros de dimensão 3x3 e na matriz B representam matrizes de zeros de dimensão 3x4, I é a matriz identidade de dimensão 3x3, e

$$A_v = \begin{bmatrix} 0 & -g & 0 \\ g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_z & -b_z & -b_z & -b_z \end{bmatrix}, B_\omega = \begin{bmatrix} b_p & -b_p & -b_p & b_p \\ b_q & b_q & -b_q & -b_q \\ -b_r & b_r & -b_r & b_r \end{bmatrix}.$$

Os coeficiente de B_v e B_ω dependem dos parâmetros do quadri-rotor, e são iguais a:

$$\begin{aligned} b_z &= 2K_T\Omega_0 \\ b_p &= \frac{2K_T\Omega_0 L \cos(45^\circ)}{J_x} \\ b_q &= \frac{2K_T\Omega_0 L \sin(45^\circ)}{J_y} \\ b_r &= \frac{2K_Q\Omega_0}{J_z} \end{aligned}$$

O sistema do movimento pode ainda ser decomposto em seis subsistemas SISO, correspondentes aos movimentos de translação e de rotação em relação aos três eixos coordenados. Estes subsistemas descrevem o eixo vertical, o eixo de rolamento, o eixo de picada, o eixo de guinada, o eixo longitudinal e o eixo lateral. Uma vez que, como anteriormente observado, o quadri-rotor é um sistema sub-actuado, levando a que o movimento no eixo longitudinal seja uma consequência do movimento de picada, e o movimento no eixo lateral seja uma consequência do movimento de rolamento, estes seis subsistemas podem ser reduzidos a quatro, dois SISO e dois SIMO. Estes subsistemas são:

- **Eixo vertical:** A este subsistema estão associadas a velocidade e posição verticais, ω e p_D , respetivamente. A entrada no sistema é a soma das velocidades dos quatro motores, $\tilde{\Omega}_z = \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 + \tilde{\Omega}_3 + \tilde{\Omega}_4$ e a saída é a posição vertical do drone medida no referencial inercial,

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\omega}} \\ \dot{\tilde{p}}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{p}_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_z \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_z \quad (39a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{p}_D = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{p}_D \end{bmatrix} \quad (39b)$$

- **Eixo de guinada:** A este subsistema correspondem as variáveis relativas a este eixo que são a razão de guinada r e o ângulo de guinada ψ . A entrada no sistema é a diferença entre as velocidades de rotação dos motores que induzem movimento positivo de guinada (2 e 4) e dos motores que induzem movimento negativo (1 e 3), $\tilde{\Omega}_r = \tilde{\Omega}_2 + \tilde{\Omega}_4 - \tilde{\Omega}_3 - \tilde{\Omega}_1$ sendo a saída o ângulo de guinada do quadri-rotor:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{r}} \\ \dot{\tilde{\psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_r \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_r \quad (40a)$$

$$\tilde{y} = \tilde{\psi} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{r} \\ \tilde{\psi} \end{bmatrix} \quad (40b)$$

- **Eixo de picada + eixo longitudinal:** A este subsistema correspondem as variáveis relativas a este eixo, que são a razão de picada, q , e o ângulo de picada, θ , a velocidade longitudinal, u , juntamente com a posição longitudinal p_n . O movimento longitudinal pode ser representado como sendo consequência do movimento do eixo do picada. Assim, a entrada no sistema é a diferença entre as velocidades de rotação dos motores que induzem movimento positivo de

picada (1 e 2) e dos motores que induzem movimento negativo (3 e 4), $\tilde{\Omega}_q = \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_3 - \tilde{\Omega}_4$, e a saída a posição longitudinal do quadri-rotor p_n e o ângulo de picada θ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{p}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{u} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_q \quad (41a)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{u} \\ \tilde{p}_n \end{bmatrix} \quad (41b)$$

- **Eixo de rolamento + eixo lateral:** A este subsistema correspondem as variáveis relativas a este eixo que são a razão de rolamento, p , e o ângulo de rolamento, ϕ , a velocidade lateral, v , juntamente com a posição lateral p_e . O movimento lateral pode ser representado como sendo consequência do movimento do eixo do rolamento. Assim, a entrada no sistema é a diferença entre as velocidades de rotação dos motores que induzem movimento positivo de rolamento (1 e 4) e dos motores que induzem movimento negativo (2 e 3), $\tilde{\Omega}_p = \tilde{\Omega}_1 + \tilde{\Omega}_4 - \tilde{\Omega}_2 - \tilde{\Omega}_3$, e a saída a posição lateral do quadri-rotor p_e e o ângulo de rolamento ϕ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}} \\ \dot{\tilde{\phi}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{p}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\Omega}_p \quad (42a)$$

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p}_e \end{bmatrix} \quad (42b)$$

- **NOTA - Entradas dos subsistemas e tensão normalizada:** Tendo em conta os subsistemas analisados anteriormente, podemos representar de forma matricial as entradas dos subsistemas na forma $\Omega_a = A\Omega_i$, sendo a matriz A a seguinte:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_z \\ \tilde{\Omega}_r \\ \tilde{\Omega}_q \\ \tilde{\Omega}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_1 \\ \tilde{\Omega}_2 \\ \tilde{\Omega}_3 \\ \tilde{\Omega}_4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Pode-se também representar a tensão normalizada na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\delta}_z \\ \tilde{\delta}_r \\ \tilde{\delta}_q \\ \tilde{\delta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}_2 \\ \tilde{\delta}_3 \\ \tilde{\delta}_4 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Através da relação $\delta_i = K_\Omega \Omega_i$, é possível obter a tensão normalizada para cada motor através da seguinte equação:

$$\delta_i = K_\Omega A^{-1} \Omega_a \quad (45)$$

sendo $\delta_i = [\delta_1; \delta_2; \delta_3; \delta_4]$ e $\Omega_a = [\Omega_z; \Omega_r; \Omega_q; \Omega_p]$.

5 Análise do Sistema

5.1 Estabilidade

Para se analisar a estabilidade do sistema, avaliou-se individualmente a estabilidade de cada pólo da função de transferência que representa o sistema a analisar.

Assim, dado um espaço de estados representado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (46)$$

Sendo $x(t)$ o vector de estado, $u(t)$ o input e $y(t)$ o output do sistema. Pode-se determinar os valores próprios da matriz A , que correspondem aos pólos da função de transferência, ou determinar a função de transferência a partir da representação por espaço de estados, e de seguida, determinar os pólos do sistema. Estes valores caracterizarão o sistema da seguinte forma:

- O sistema é **estável**, se todos os pólos forem estáveis, ou seja todos os pólos estiverem no semiplano complexo esquerdo.
- O sistema é **marginalmente estável**, se todos os pólos forem estáveis, à excepção de um dos pólos, que se encontra na origem, ou se houver dois pólos complexos conjugados no eixo imaginário.
- Sistema é **instável**, se pelo menos um dos seus pólos for instável, ou seja estiver no semiplano complexo direito. Ou caso existam pólos de multiplicidade maior que 1 no eixo imaginário.

Os valores próprios da matriz A do estado de espaços são determinados da seguinte forma:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (47)$$

5.2 Controlabilidade

Um sistema é completamente controlável se é possível, partindo de um estado inicial $x(t_0)$, aplicando uma acção de controlo $u(t)$, atingir qualquer estado final $x(t_f)$. Assim, a controlabilidade representa a capacidade dos actuadores de influenciar os estados do sistema. Esta é uma propriedade que depende apenas da representação por estado de espaços do sistema, mais concretamente das matrizes A e B . Para avaliar a controlabilidade do sistema, construiu-se a matriz de controlabilidade a partir das matrizes A e B , da seguinte forma:

$$\mathcal{C} = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (48)$$

Sendo n a dimensão do vector de estado, conclui-se que o sistema é completamente controlável se a característica de \mathcal{C} for igual a n , $\text{car}\mathcal{C} = n$. Caso contrário, o sistema não é controlável. Assim, a matriz \mathcal{C} tem de ter n linhas e colunas linearmente independentes.

5.3 Observabilidade

Um sistema é classificado como sendo completamente observável, se é possível determinar qualquer estado inicial $x(t_0)$, observando o output do sistema $y(t)$ durante o intervalo de tempo de t_0 a t_f . Então, dizer que um sistema é completamente observável, significa que todas as alterações do seu estado serão reflectidas no output. Tal como a controlabilidade, esta propriedade depende apenas da representação por estado de espaços do sistema, neste caso, das matrizes A e C .

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Assim, conclui-se que o sistema é completamente observável se $\text{car}\mathcal{O} = n$. Caso contrário, o sistema não é observável. Ou seja, a matriz \mathcal{O} tem de ser composta por n linhas e colunas linearmente independentes.

5.4 Análise dos subsistemas do movimento

De seguida analisa-se estas propriedades, tendo em conta o espaço de estados de cada subsistema, representado anteriormente.

5.4.1 Eixo vertical

- Estabilidade

Determinando os valores próprios da matriz A da representação por espaço de estados obtida anteriormente (equações 39), verifica-se que o sistema tem dois pólos na origem, concluindo assim que o sistema é instável.

- Controlabilidade

Sendo este subsistema de 2ª ordem, para que seja completamente controlável a característica da matriz de controlabilidade terá de ser igual à ordem do sistema, isto é $\text{car}\mathcal{C} = 2$. O que se verifica, pois as linhas e colunas da seguinte matriz são linearmente independentes:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} -b_z & 0 \\ 0 & -b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.7 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & -1.7 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (50)$$

- Observabilidade

Para esta segunda propriedade verificamos que a característica de \mathcal{O} é 2, pois as colunas da seguinte matriz são linearmente independentes. Assim, a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente observável.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

5.4.2 Eixo de guinada

- Estabilidade

Determinando os valores próprios da matriz A da representação por espaço de estados obtida anteriormente (equação 40), verifica-se que o sistema tem dois pólos na origem, concluindo assim que o sistema é instável.

- Controlabilidade

Analogamente ao subsistema anterior, sendo este um sistema de 2ª ordem, como a característica de \mathcal{C} é 2, a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente controlável.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & b_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0 \\ 0 & 0.0041 \end{bmatrix} \quad (52)$$

- Observabilidade

Para esta segunda propriedade verifica-se que $\text{car}\mathcal{O} = 2$, pois as linhas e colunas da seguinte matriz são linearmente independentes. Assim, a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente observável.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

5.4.3 Eixo de picada e eixo longitudinal

- Estabilidade

Determinando os valores próprios da matriz A da representação por espaço de estados obtida anteriormente (equação 41), verifica-se que o sistema tem quatro pólos na origem, concluindo que o sistema é instável.

- Controlabilidade

Sendo este sub-sistema de 4ª ordem, para que seja completamente controlável a característica da matriz de controlabilidade terá de ser igual à ordem do sistema, isto é $\text{car}\mathcal{C} = 4$. O que se verifica, pois as linhas e colunas da seguinte matriz são linearmente independentes:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b_q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -gb_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -gb_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1051 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1051 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0312 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0312 \end{bmatrix} \quad (54)$$

- Observabilidade

Determinando a matriz de observabilidade, visto que o sistema é de 4ª ordem e $\text{car}\mathcal{O} = 4$ verificamos que a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente observável.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9.81 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

5.4.4 Eixo de rolamento e eixo lateral

- Estabilidade

Determinando os valores próprios da matriz A da representação por espaço de estados obtida anteriormente (equação 42), verifica-se que o sistema tem quatro pólos na origem, concluindo que o sistema é instável.

- Controlabilidade

Analogamente ao subsistema anterior, sendo este um sistema de 4ª ordem, como $\text{car}\mathcal{C} = 4$, a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente controlável.

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} b_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gb_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gb_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1293 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1293 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2684 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2684 \end{bmatrix} \quad (56)$$

- Observabilidade

Determinando a matriz de observabilidade, visto que o sistema é de 4ª ordem e $\text{car}\mathcal{O} = 4$ verifica-se que a característica da matriz é igual à ordem do sistema e o sistema é completamente observável.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9.81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9.81 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

5.5 Perturbações

O modelo do drone também poderá sofrer influência de perturbações exteriores, nomeadamente a força do vento ou outras forças aplicadas no drone. Nesta primeira fase, o controlador implementado, regulador, tem como objectivo levar todos os estados do modelo para zero, ou seja, levar o drone à posição de voo pairado. Desta forma, o efeito das perturbações deverá ser atenuado pelo controlador, estabilizando o sistema, como será apresentado no ponto 6.1 e 6.2.

6 Implementação no *simulink*

De forma a poder estudar o drone de forma mais aprofundada e poder fazer simulações do que foi abordado anteriormente, foram projectados dois ficheiros *simulink* referentes à modelação linear e não linear do drone. Para correr o modelo *simulink* é necessário correr primeiro o script *Drone_Fase_1.m* uma vez que este calcula e define as variáveis necessárias para os ficheiros. Neste ficheiro é também apresentado um conjunto de opções ao utilizador que permitem escolher qual dos modelos correr, mudar as condições iniciais, escolher o tempo de simulação e fechar o programa. Os modelos apresentados podem ser observados nas seguintes imagens:

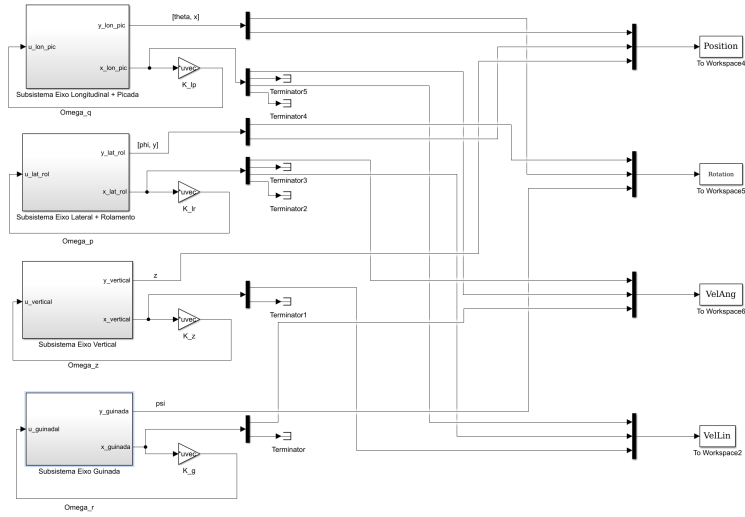


Figura 3: Modelação Linear do Drone - Ficheiro Simulink

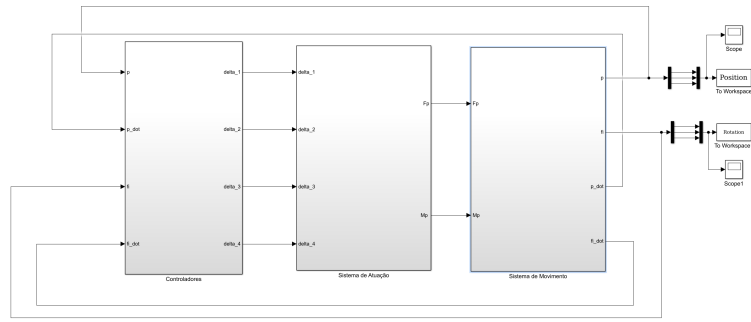


Figura 4: Modelação Não Linear do Drone - Ficheiro Simulink

Através da observação da figura 3 pode-se notar que o modelo implementado possui um regulador, cuja implementação e objectivo serão abordados de seguida.

6.1 Controlador Implementado

Para a poder controlar o sistema obtido foi implementado um controlador de realimentação de estados, que corresponde a um regulador. Este tipo de controlador consiste na colocação de pólos para um dado sistema de forma a obter um vector de ganhos que, ao ser multiplicado pelo vector de estados, permite obter a entrada para o sistema, como se pode observar na figura 5:

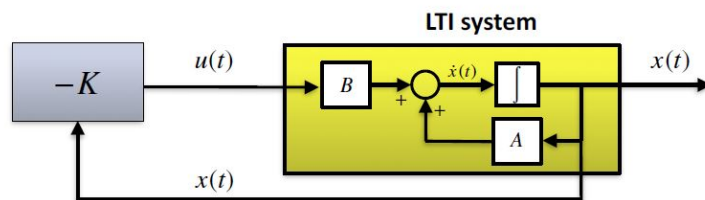


Figura 5: Esquema do controlador implementado [4]

Esta abordagem requer que o sistema seja linear e invariante no tempo (LTI), por isso, para projectar o regulador é necessário usar o modelo linearizado do drone. Considerando que a abordagem

de modelação divide o sistema do movimento em 4 subsistemas, projectou-se um regulador para cada subsistema. Para calcular o vector de ganhos K_i para cada subsistema recorreu-se à fórmula de Ackerman, de forma a que os pólos sejam colocados no local desejado.

A localização dos pólos para cada controlador é a seguinte:

- Regulador do movimento em x + picada: $s = -2.5 + 0.5i$, $s = -2.5 - 0.5i$, $s = -3$, $s = -3$
- Regulador do movimento em y + rolamento: $s = -2.5 + 0.5i$, $s = -2.5 - 0.5i$, $s = -3$, $s = -3$
- Regulador de altura: $s = -5$, $s = -5$
- Regulador de guinada: $s = -1 + 0.5i$, $s = -1 - 0.5i$

A colocação destes pólos resultou nos seguintes vectores de ganho para cada subsistema:

- Regulador do movimento em x : $K = [104.643, 432.843, -81.457, -56.729]$
- Regulador do movimento em y : $K = [85.077, 351.909, 66.226, 46.122]$
- Regulador de altura: $K = [-58550, -146374]$
- Regulador de guinada: $K = [485.130, 303.206]$

Nas figuras 6 e 7 é possível observar, como exemplo, a implementação de um destes controladores no *simulink* nos modelos linear e não linear, respectivamente. Este é o controlador projectado para o subsistema do eixo longitudinal + picada:

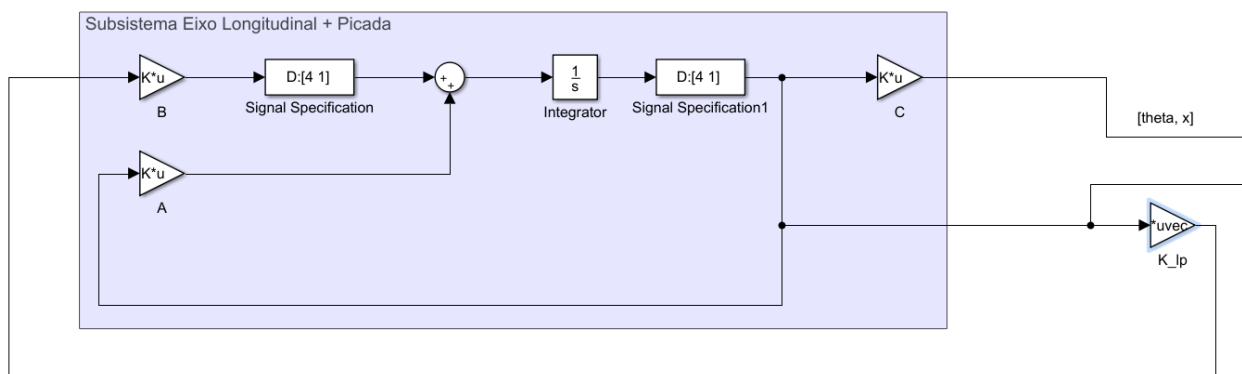


Figura 6: Controlador Subsistema Eixo Longitudinal + Picada - Modelo Linear

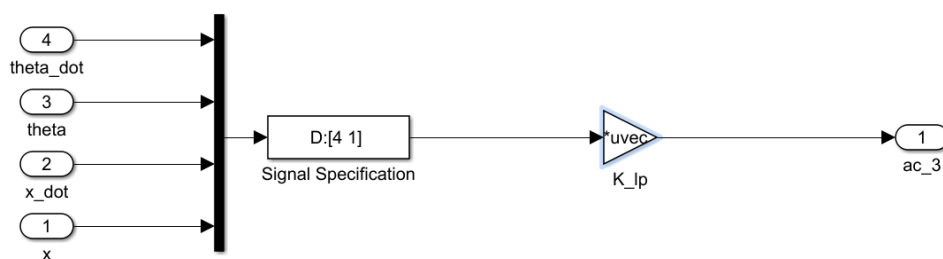


Figura 7: Controlador Subsistema Eixo Longitudinal + Picada - Modelo Não Linear

Através da análise da figura 6, pode-se concluir que a implementação do regulador no *simulink* para o modelo linear é semelhante ao apresentado na figura 5 uma vez que todos os subsistemas deste modelo são apresentados em espaço de estados, permitindo, assim, este tipo de abordagem. No caso do modelo não linear da figura 7, a implementação do regulador é executada de maneira diferente visto que, neste modelo, os sistemas não são apresentados num espaço de estados. Deste modo, as entradas do bloco do controlador são as variáveis referentes às posições e velocidades lineares e angulares, que depois são usadas para construir os respectivos vectores de estados para cada subsistema, para aplicar o regulador. Isto é, multiplicando esse vector de estados pelo vector de ganhos para obter a entrada u de cada subsistema, que será depois convertida nas entradas para o sistema de actuação utilizando a relação das equações 43, 44 e 45.

6.2 Perturbações

Para a implementação das perturbações no modelo não linear utilizou-se o bloco do *Simulink*, *signal builder*, que permitiu simular a aplicação de forças nos três eixos coordenados. A figura 8 representa um exemplo de conjunto de perturbações:

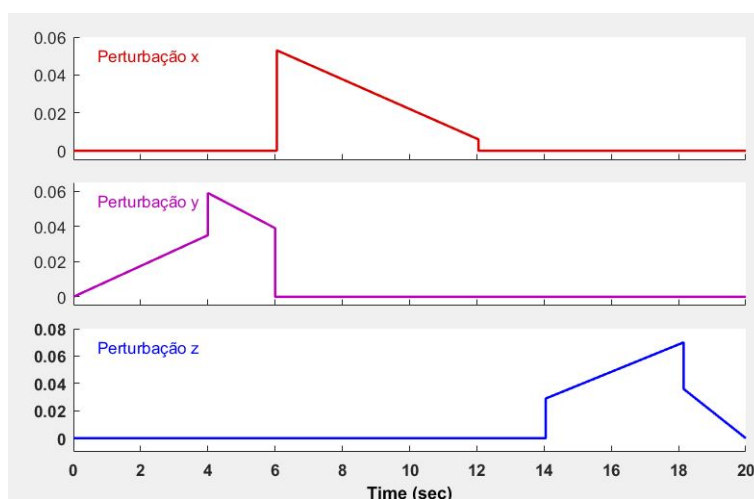


Figura 8: Perturbações

7 Análise dos resultados obtidos

Com o objectivo de pôr à prova os dois modelos do quadri-rotor projectados, aplicaram-se condições iniciais de posição e rotação para além das perturbações, figura 8, ao modelo *simulink*. A função que o regulador desempenha é levar todos os estados para zero. De seguida passa-se a avaliar as respostas dos sistemas, linear e não linear, no tempo com as condições iniciais aplicadas, e com e sem a presença de perturbações, para o caso do sistema não linear.

Em primeiro lugar, testou-se o sistema sem qualquer perturbação, apenas com condições iniciais escolhidas. Estas foram as seguintes:

- Condição inicial em x : 1 m;
- Condição inicial em y : 1.5 m;
- Condição inicial em z : 2 m;
- Condição inicial da guinada: 0.1 rad;

As condições iniciais e as perturbações foram escolhidas de forma a tentar que os ângulos de rolamento (ϕ) e de picada (θ) não excedessem os 10° , ou seja, aproximadamente $0.17rad$. Estes valores foram definidos, pois embora em simulação, para valores maiores, o sistema continue a estabilizar, no modelo físico rotações de amplitude tão elevada não seriam realistas.

Nas figuras seguintes (9, 10, 11, 12) encontram-se representadas as respostas no tempo, da posição e rotação, dos modelos linear e não linear sem perturbações (há que salientar que o sentido positivo do z é para baixo, tal como definido no tópico 2):

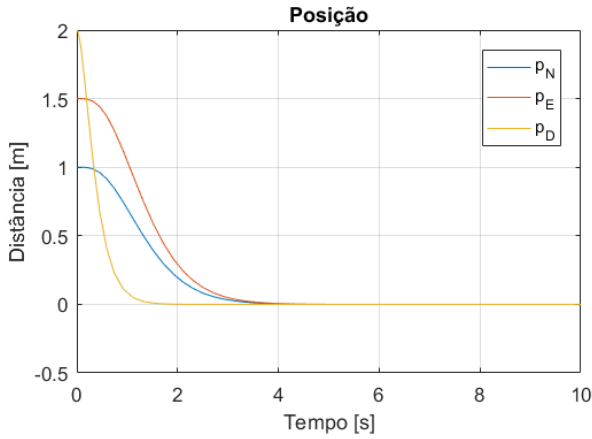


Figura 9: Posição Linear

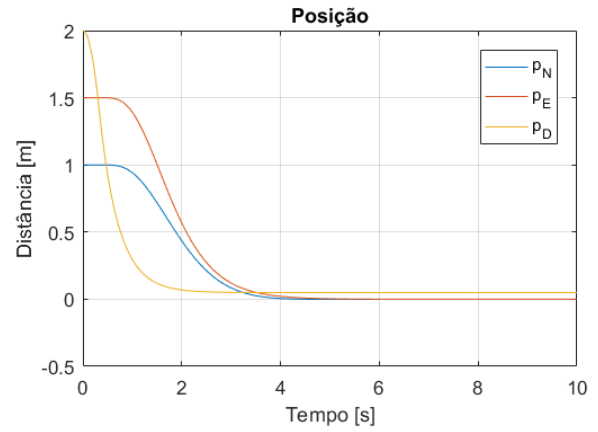


Figura 10: Posição Não Linear

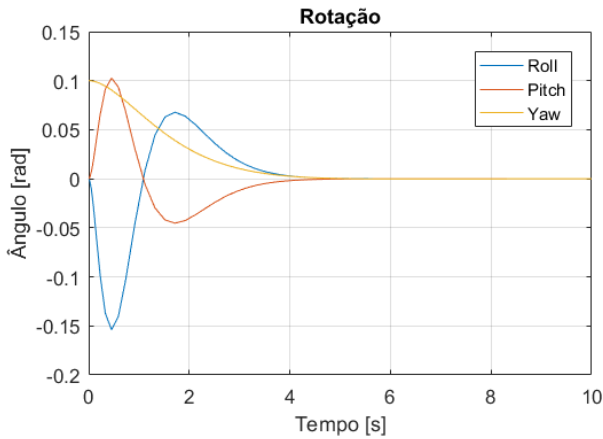


Figura 11: Rotação - Modelo Linear

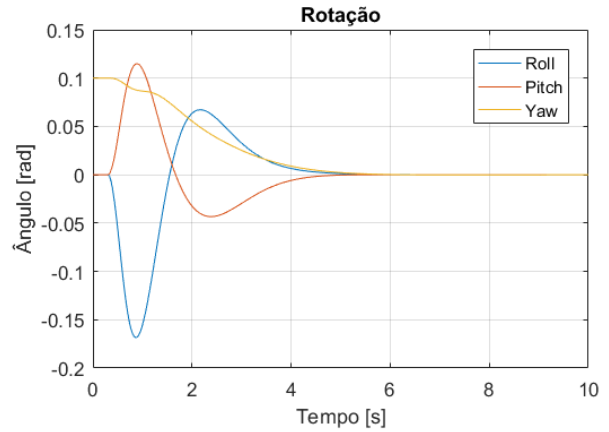


Figura 12: Rotação - Modelo Não Linear

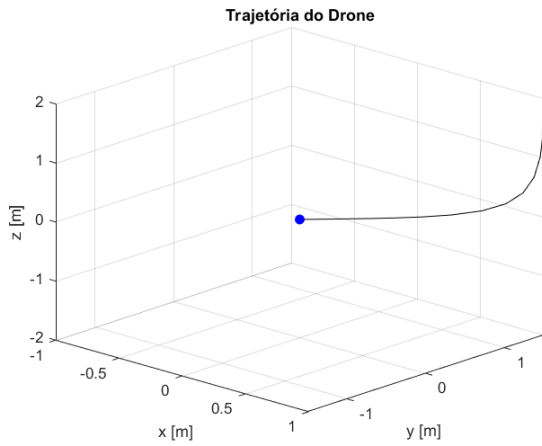


Figura 13: Trajetória - Modelo Linear

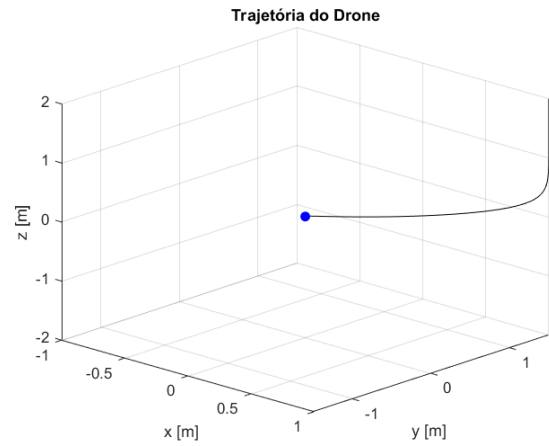


Figura 14: Trajetória - Modelo Não Linear

Nos testes verificou-se que as respostas da posição e da rotação eram semelhantes entre ambos. Nos dois casos as posições em x e y demoram cerca de 4 segundos a estabilizar, sendo que o modelo não linear, figura 10, demora um pouco mais que o linear, figura 9, pois apresenta um atraso de cerca de 1 segundo. Em relação à resposta na coordenada z é possível observar que esta estabiliza em cerca 2 segundos, sendo o sistema linear, mais uma vez, ligeiramente mais rápido. Por outro lado, esta resposta apresenta um erro estacionário igual a 0.1 no modelo não linear, para os valores de pólos do regulador escolhidos.

Analisando agora as respostas das rotações, verifica-se que ambas as respostas são, também, semelhantes. No caso do modelo linear, figura 11, e não linear, figura 12, todas as respostas estabilizam ao fim de cerca de 5 segundos, sendo o modelo não linear um pouco mais lento visto que apresenta um atraso. Também é possível observar uma pequena oscilação inicial na rotação em torno de z no modelo não linear.

Testou-se em seguida a robustez do modelo não linear quanto à presença de perturbações, utilizando os sinais representados na figura 8. Nesta simulação as condições iniciais são idênticas às apresentadas anteriormente, tendo sido obtidos os seguintes resultados:

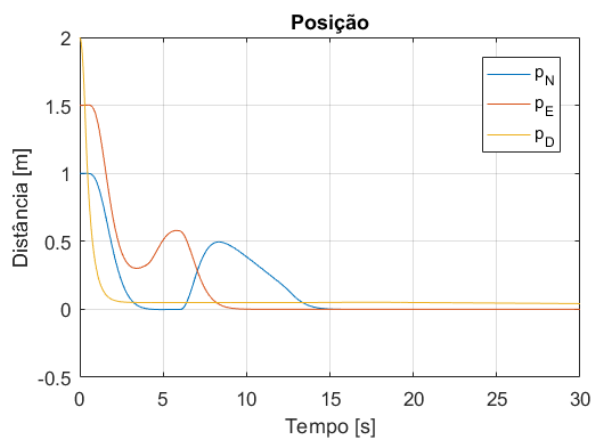


Figura 15: Posição - Modelo Não Linear

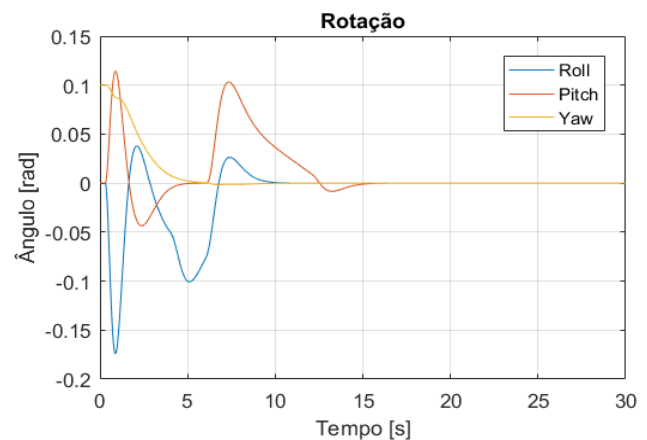


Figura 16: Rotação - Modelo Não Linear

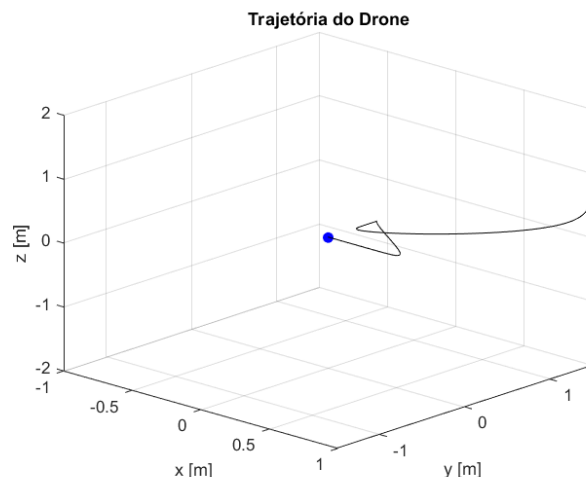


Figura 17: Trajetória - Modelo Não Linear

Na presença das perturbações verifica-se que as respostas em z e do ângulo de guinada sofreram poucas ou nenhuma alteração. No sinal utilizado para perturbar z , a perturbação começa aos 14 segundos, e, de facto, no gráfico das rotações há uma ligeira perturbação na guinada neste tempo. Contudo, este sistema responde rapidamente, e facilmente supera a perturbação. Relativamente a x e a y e aos ângulos de picada e rolamento, há uma clara influência das perturbações, mas as respostas acabam por estabilizar aos 15 e 10 segundos, respectivamente. Uma agravante a este factor será a hipótese de as perturbações não serem todas introduzidas imediatamente no início da simulação, mas sim desfasadas no tempo, como apresentado na figura 8.

Observou-se ainda que, tal como referido anteriormente na análise sem perturbações, no modelo não linear, na coordenada z , a resposta não estabiliza exactamente em zero. Este erro será devido à força gravítica a que o drone está sujeito. Neste modelo, a força propulsão na direcção z não é exactamente igual à força da gravidade, não conseguindo assim, anular completamente este efeito, o que leva a que o drone estabilize em voo pairado, não na posição $(0,0,0)$, mas sim ligeiramente abaixo.

8 Conclusões e considerações finais

Atendendo a que os subsistemas do movimento que constituem o drone são instáveis e subactuados, a necessidade de este ser controlado é acentuada. A presença dos vários sensores com que o drone vem equipado permite obter, quer directamente, quer indirectamente, todas as variáveis de estado do sistema. Tal como foi analisado, cada um destes subsistemas é completamente controlável e observável, o que permitiu projectar um controlador que estabilizasse o drone em voo pairado.

Nesta primeira fase, optou-se pela implementação de um regulador, tendo como objectivo garantir que o drone consegue manter uma posição de equilíbrio no estado de voo pairado, que foi considerado como condição estacionária. Esta implementação de controlo foi feita com sucesso tal como a modelação dos subsistemas de actuação e de movimento do drone em *Simulink*.

Em suma, esta primeira fase do projecto permitiu aprofundar conhecimentos sobre o funcionamento do drone, nomeadamente sobre a sua dinâmica de funcionamento e a forma como será possível ser controlado de forma autónoma a partir dos dados recebidos pelos sensores.

Referências

- [1] Alexandra Moutinho e José Raul Azinheira, *Simulação e Controlo de Drones*, Paper científico, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Maio 2018
- [2] José Sá da Costa, *OPTIMAL CONTROL - State Representation, Modeling and Analysis*, Notas de apoio à unidade curricular Controlo Ótimo, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2012/2013
- [3] Miguel Ayala Botto, *State Space Modelling of Dynamic Systems*, Apresentação das aulas teóricas da unidade curricular Controlo Ótimo, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa, sem data
- [4] Miguel Ayala Botto, *State Feedback Control*, Apresentação das aulas teóricas da unidade curricular Controlo Ótimo, Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Superior Técnico, Lisboa, sem data
- [5] Paolo Ceppi, *Model-based Design of a Line-tracking Algorithm for a Low-cost Mini Drone through Vision-based Control*, Thesis submitted as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Electrical and Computer engineering in the Graduate College of the University of Illinois, Chicago, 2020
- [6] Katsuhiko Ogata, *Modern Control Engineering*, Fourth Edition, Prentice Hall, New Jersey, 2002
- [7] What is an Inertial Sensor - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=LXuHWe5W1pc>
- [8] Understanding Sensor Fusion and Tracking, Part 2: Fusing a Mag, Accel, Gyro Estimate - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=0rlvvYgmTvI>
- [9] Drone Control and the Complementary Filter - Youtube,
<https://www.youtube.com/watch?v=whSw42XddsU>