Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — 1º Teste (VERSÃO 1)

14 de abril de 2023

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ________________________________) N. folhas suplementares: _____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [23pts]	3a [13pts]	3b [10pts]	4a [10pts]	4b [13pts]	5a [23pts]	5b [12pts]	6a [12pts]	6b [8pts]	7 [16pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Qual é o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} x^n$?

☐ 5 ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ $+\infty$ ☐ 0

(b) Sabendo que uma dada série de potências da forma $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-c)^n$, onde $a_n \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem domínio de convergência $]-8, 4]$, podemos afirmar que:

☐ a série é absolutamente convergente em $x = 4$

☐ a série é simplesmente convergente em $x = -8$

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 6$

☐ $c = 2$

(c) Recordando o desenvolvimento em série de MacLaurin da função cosseno hiperbólico,

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

qual das seguintes representações é válida?

☐ $x^2\cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!} x^{2n+2},\ x \in \mathbb{R}$ ☐ $x^2\cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n+2},\ x \in \mathbb{R}$

☐ $x^2\cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$ ☐ $x^2\cosh(-2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(2n)!} x^{2n+1},\ x \in \mathbb{R}$

(d) O polinómio de Taylor de ordem 3 de uma função f no ponto $c = \frac{\pi}{4}$ é dado por:

$$T^3_{\frac{\pi}{4}}(f(x)) = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3.$$

O valor de $f'''(\frac{\pi}{4})$ é igual a:

☐ 4 ☐ 8 ☐ 0 ☐ -2

(e) Seja f uma função que satisfaz as condições: $f(2) = 0$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = 2$, $f'''(2) = -6$ e $f^{(n)}(2) = 0$ para todo o $n \geq 4$. Sabendo que a série de Taylor de f converge para f, podemos concluir que $f(4)$ é igual a:

☐ -4 ☐ 4 ☐ 0 ☐ 20

(f) Sabendo que a série de Fourier da extensão 2π-periódica da função $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x < \pi$, é

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x),\ x \in \mathbb{R},$$

podemos concluir que a soma da série numérica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ é

☐ $-\frac{4}{\pi}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$ ☐ $\frac{\pi^2}{8}$

[23pts] 2. Determine o domínio de convergência da série de potências $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x-4)^n}{(n+1)^2}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

3. Considere a função f dada por $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

[13pts] (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem 1 da função f.

Continua na folha suplementar N°

[10pts] (b) Usando a fórmula obtida na alínea anterior, calcule um valor aproximado de $\sqrt[3]{1{,}3}$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a 10^{-2}.

Continua na folha suplementar N°

4. Considere a série de funções definida por $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$.

[10pts] (a) Prove que esta série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Justifique que a função soma é integrável em $[-\pi, \pi]$ e calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}\, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

5. Considere a função 2π-periódica f definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = -x$.

[23pts] (a) Determine a série de Fourier de f.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Seja S a função soma da série de Fourier obtida na alínea anterior.
Indique o valor de $S(3\pi)$ e de $S(-2\pi)$.

Continua na folha suplementar Nº

6. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{5}{\ln(x^2 + y^2)}$.

[12pts] (a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

Continua na folha suplementar Nº

[8pts] (b) Determine a curva de nível 5, $\mathcal{C}_5$.

Continua na folha suplementar Nº

[16pts] 7. A função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx^3 - xy^3}{2x^4 + 3y^4} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua na origem? Justifique convenientemente.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$