Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II- C — 2º Teste (V1)

11 de junho de 2024

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3a [15pts]	3b [10pts]	4a [15pts]	4b [15pts]	5 [20pts]	6a [10pts]	6b [20pts]	7 [20pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 7 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Sempre que necessitar de continuar uma resposta numa folha suplementar, indique, no sítio assinalado para o efeito, o número da folha suplementar que usou.

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) A série de Fourier $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\cos(nx)+\frac{(-1)^n}{n^2}\,\mathrm{sen}(nx)\right)$ converge em $\mathbb{R}$,

- ☐ absolutamente e uniformemente.
- ☐ absolutamente mas não uniformemente.
- ☐ uniformemente mas não absolutamente.
- ☐ nem absolutamente, nem uniformemente.

(b) Seja $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq x \wedge y>-x\}$. A fronteira de $\mathcal{D}$ é:

- ☐ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\wedge y=-x\}$.
- ☐ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=|x|\}$.
- ☐ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=x\vee y=-x\}$.
- ☐ $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=-|x|\}$.

(c) Considere a função $f(x,y)=x+2y$ definida em $\mathbb{R}^2$ e seja $k\in\mathbb{R}$. O que pode dizer sobre o conjunto de nível $\mathcal{N}_k$ de f?

- ☐ É uma reta de declive $m=\frac{1}{2}$.
- ☐ É uma reta de declive $m=-\frac{1}{2}$.
- ☐ É o plano definido por $z=x+2y-k$.
- ☐ É o plano definido por $z=k$ e $x+2y=k$.

(d) Sejam $\mathcal{D}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $(a,b)\in\mathcal{D}$. Se a derivada direcional de f no ponto (a,b) segundo o vetor $U=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=3$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ é igual a:

- ☐ 4
- ☐ -4
- ☐ $\frac{4}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\frac{-4}{\sqrt{2}}$

(e) Seja $f(x,y)=\operatorname{sen}(x)+yx^2-y^3+3$. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $P=(0,1,2)$ é:

- ☐ $x-3y-z=5$
- ☐ $x-3y+z=-5$
- ☐ $x-3y-z=-5$
- ☐ $2x-3y-z=5$

(f) Considere $f=f(x,y)$ uma função escalar diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e seja $z(s,t)=f(x(s,t),y(s,t))$, onde $x(s,t)=s^4+t^4$ e $y(s,t)=3st$. Qual das seguintes expressões representa $\dfrac{\partial z}{\partial s}(-1,0)$?

- ☐ $-4\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$
- ☐ $-4\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,0)$
- ☐ $4\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$
- ☐ $-4\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,0)-3\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,0)$

[15pts] 2. Sabendo que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}$ tem domínio de convergência $D_c=[-2,4[$ e que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}$, determine, justificando, o valor de $f'(2)$.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________ **Nome:** ________________________

3. Seja g a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi]$ por $g(x) = \pi(1 - 2x^2)$.

[15pts] (a) Justifique que a série de Fourier associada a g é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de a_0.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de g no ponto $x = -3\pi$.

Continua na folha suplementar Nº

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ \operatorname{sen}(y) & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

[15pts] (a) Averigue a existência de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e, caso exista, indique o seu valor.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Indique, justificando, se f é contínua no ponto $(0, \frac{\pi}{2})$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 5. Mostre que existe uma função real de variável real g definida num intervalo I contendo 0, tal que $g(0) = e$, g é de classe C^1 e

$$\ln(x + g(x)) = e^{xg(x)}$$

para todo o $x \in I$. Determine $g'(0)$.

Continua na folha suplementar Nº

6. Seja f a função real definida em $\mathbb{R}^2$ por $f(x, y) = -y^2 + 2xy - 2x^3 + 3$.

[10pts] (a) Determine os pontos críticos de f.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (b) Averigue a natureza dos pontos críticos obtidos na alínea anterior.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 7. Determine os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = 2x - 3y$ que pertencem à elipse de equação $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$