Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II- C — Exame de Recurso (V1)

27 de junho de 2024

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____) N. folhas suplementares: ______

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2a [12pts]	2b [13pts]	3 [15pts]	4 [15pts]	5a [17pts]	5b [13pts]	6a [18pts]	6b [07pts]	7a [10pts]	7b [20pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 7 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Sempre que necessitar de continuar uma resposta numa folha suplementar, indique, no sítio assinalado para o efeito, o número da folha suplementar que usou.

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos positivos e de soma igual a S. Relativamente à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ podemos afirmar que:

- ☐ é uma série convergente de soma igual a $\dfrac{1}{S}$.
- ☐ é uma série divergente.
- ☐ nada podemos concluir quanto à sua natureza.
- ☐ é uma série convergente mas nada podemos afirmar quanto ao valor da sua soma.

(b) Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ uma série de potências convergente em $x=-1$. Podemos afirmar que a série é:

- ☐ divergente em $x=-2$
- ☐ divergente em $x=1$
- ☐ convergente em $x=4$
- ☐ convergente em $x=2$

(c) Sabendo que $\displaystyle\frac{1}{1+(2x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}$, $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$, qual das seguintes séries é a série de MacLaurin da função $f(x) = \operatorname{arctg}(2x)$?

- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -2 < x < 2$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{4^{2n}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -2 < x < 2$

(d) Seja $f(x,y) = \begin{cases} (x^3 - y^3)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Podemos afirmar que:

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

☐ f é contínua em $\mathbb{R}^2$ ☐ não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(e) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2y + \cos(xy^2)$. A derivada direcional de f no ponto $(\pi, 1)$ segundo o vetor $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é igual a:

☐ $2\pi + \pi^2\sqrt{2}$ ☐ $2\pi + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$ ☐ $2 + \pi^2\sqrt{2}$ ☐ $\pi\sqrt{2} + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$

(f) Seja $f(x,y,z) = ye^{x^2} - zy + 2z$. Uma equação do plano tangente à superfície de nível 3 de f no ponto $P = (0,1,2)$ é:

☐ $x+y+z=3$ ☐ $xy+z=-3$ ☐ $y-z=-1$ ☐ $y+z=3$

2. Estude a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

[12pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2n+3)}$

Continua na folha suplementar Nº ☐

[13pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-2)^n\left(\frac{n-1}{n+4}\right)^{n^2}$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função com derivadas finitas de qualquer ordem tal que $f(-1)=3$ e $f'(x)-f(x)-x=0$, para todo o $x\in\mathbb{R}$. Determine a série de Taylor de f centrada no ponto $c=-1$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 4. Seja f a função cosseno hiperbólico, isto é, $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Usando a fórmula de Taylor e sabendo que o polinómio de MacLaurin de ordem 4 de f é

$$T_0^4(f(x)) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

mostre que

$$\cosh(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Continua na folha suplementar Nº

5. Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} (x+1)^{2n+1}$.

[17pts] (a) Determine o intervalo de convergência da série, I_c.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Mostre que $S(x) = -\frac{x+1}{x^2+2x+3}$, para todo o $x \in I_c$.

Continua na folha suplementar Nº

6. Seja g a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por $g(x) = \pi x$.

[18pts] (a) Determine a série de Fourier de g.

Continua na folha suplementar Nº

[07pts] (b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de g no ponto $x = 3\pi$.

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere a função f definida por $f(x, y) = x + \frac{y^2}{2}$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

[10pts] (a) Determine, se existirem, os pontos críticos de f no interior de $\mathcal{D}$ e classifique-os.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (b) Justifique a existência de extremos globais de f em $\mathcal{D}$ e determine-os.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u'\operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u'\operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u'\sec u$	$\ln\lvert\sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u'\operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$