Universidade de Aveiro - **Departamento de Matemática**

Matemática Discreta 2023/2024 - UC 47166 (1^o Ano/2^o Sem)

Exame de Recurso - 05/07/2024 **Duração: 2h 30m**

1. Admita que o universo do discurso é o conjunto dos seres Humanos e considere os seguintes predicados:
   - Xibu(x) : x é da tribo Xibu;
   - Tonga(y) : y é da tribo Tonga;
   - vendearmas(x, y) : x vende armas a y;
   - traidor(x) : x é traidor.

   Traduza em lógica de primeira ordem as seguintes afirmações (leis da tribo Xibu):

   (a) É traidor quem da tribo Xibu venda armas a alguém da tribo Tonga.

   (b) *Guru* da tribo Xibu não vende armas a membros da tribo Tonga.

2. Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado P e Q de um argumento, L de dois argumentos, sendo x, y, z, w e s, símbolos de variáveis, com as seguintes fórmulas:

   $\varphi_1 \equiv \exists x \, \forall y \left(P(x) \wedge L(x,y) \right)$

   $\varphi_2 \equiv \forall z \, \exists w \left(\left(P(z) \wedge Q(w) \right) \to \neg L(z,w) \right)$

   $\psi \equiv \exists s \, \neg Q(s)$

   Usando o método de resolução mostre que ψ é consequência lógica de φ_1 e φ_2, ou seja, $\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

3. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 28, 29\}$. Usando o princípio da gaiola de pombos mostre que qualquer subconjunto S de A, $S \subset A$, tal que $|S| = 16$, tem pelo menos dois elementos cuja soma é igual a 30.

4. Determine, justificando, o número de possibilidades de formar sequências com as letras A, B e R de comprimento 11, tal que:

   (a) A palavra **BARRA** apareça no início ou no final da sequência, não havendo restrições nas restantes posições. Por exemplo, **BARRA**RRRABB e AARBRA**BARRA** são exemplos de sequências possíveis.

   (b) A sequência comece e termine com uma das letras **A** ou **R** e as restantes posições sejam ocupadas por igual número de cada uma das letras A, B e R. Por exemplo, **A**RRABBBRAA**A** e **R**AABBBARRR**A** são exemplos de sequências possíveis.

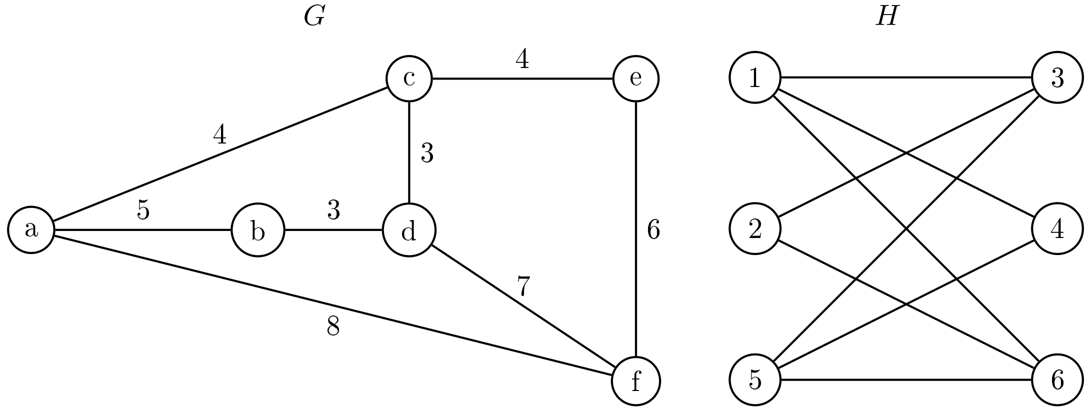
5. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sucessão definida por

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n + 1, \; n \geq 1, \\ a_0 = 1 \; . \end{cases}$$

   (a) Resolva a equação de recorrência dada, de modo a obter uma fórmula fechada para $a_n, \; n \geq 0$.

   (b) Obtenha a função geradora ordinária associada à sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como um quociente de polinómios (uma função racional).

6. Sejam $G = (V_G, E_G, W_G)$ e $H = (V_H, E_H)$ os grafos simples a seguir representados, com conjuntos de vértices $V_G = \{\text{a, b, c, d, e, f}\}$ e $V_H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, conjuntos de arestas E_G e E_H, sendo W_G a matriz dos custos indicados nas arestas de G.



(a) Os grafos G e H são isomorfos? Justifique devidamente e, em caso afirmativo, estabeleça um isomorfismo φ entre V_G e V_H, ou seja, defina a função

$$\varphi : \{\text{a, b, c, d, e, f}\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(b) Aplicando o algoritmo de Prim determine uma árvore abrangente de G de custo mínimo, $T_G = (V', E')$, partindo de $V' = \{\text{e}\}$ e $E' = \emptyset$. Deve indicar todos os passos (iterações) do algoritmo com todas as arestas envolvidas no processo de escolha e o respetivo custo, apresentando, no final, a árvore de custo mínimo $T_G = (V', E')$, bem como o custo da mesma.

Sugestão: Notando por (ij, w_{ij}) cada par $(aresta, custo)$ e $a^* = i^*j^*$ a aresta de menor custo, na sua resposta pode recorrer a uma tabela do seguinte tipo

Iteração	V'	E'	$(ij, w_{ij}), i \in V', j \in V_G \setminus V'$	$a^* = i^*j^*, i^* \in V', j^* \in V_G \setminus V'$
1	{e}	$\emptyset$	$(\mathbf{ec}, \mathbf{4}), (\text{ef}, 6)$	**ec**
...	...	...	...	...

Formulário: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)}, \ \alpha \in \mathbb{R};$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} (\alpha x)^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^k}, \ k \in \mathbb{N}.$

Cotações:

1.(a)	**1.(b)**	**2.**	**3.**	**4.(a)**	**4.(b)**	**5.(a)**	**5.(b)**	**6.(a)**	**6.(b)**
1.0	1.0	3.0	2.0	1.5	1.5	2.5	2.5	2.0	3.0

Matemática Discreta (MD)

1. a) $\forall x \left(\left(Xibu(x) \wedge \exists y \left(Tonga(y) \wedge vendearmas(x,y) \right) \right) \rightarrow traidor(x) \right)$

b) $Xibu(Guru) \wedge \forall y \left(Tonga(y) \rightarrow \neg vendearmas(Guru,y) \right)$

Guru: constante no conjunto dos seres Humanos.

2. $\varphi_1 \equiv \exists x \forall y \left(P(x) \wedge L(x,y) \right)$

FNS: Forma Normal de Skolem

$\overset{FNS}{\equiv} \forall y \left(\underbrace{P(a)}_{C_1} \wedge \underbrace{L(a,y)}_{C_2} \right)$, a constante de Skolem

cláusulas: C_1 C_2

$\varphi_2 \equiv \forall z \exists w \left(\left(P(z) \wedge Q(w) \right) \rightarrow \neg L(z,w) \right)$

$\equiv \forall z \left(\left(P(z) \wedge Q(f(z)) \right) \rightarrow \neg L(z,f(z)) \right)$

$\overset{(i),(ii)}{\underset{FNS}{\equiv}} \forall z \left(\underbrace{\neg P(z) \vee \neg Q(f(z)) \vee \neg L(z,f(z))}_{C_3} \right)$

(i) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

(ii) Leis de Morgan

$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

, f função de Skolem

$\neg \psi = \underbrace{\neg \left(\exists s \, \neg \varphi(s) \right)}_{\underbrace{\neg \exists s}_{\forall s} \; \underbrace{\neg(\neg \varphi(s))}_{\varphi(s)}} \overset{FNS}{\equiv} \forall s \, \underbrace{\varphi(s)}_{C_4}$

Partindo do conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ mostra-se, usando resolução, que S é inconsistente: ER2

$$\sigma_1 = \{a/z\}$$
umg de $\{P(a), P(z)\}$

$$
\begin{array}{ll}
C_1 : & P(a) \\
C_3\sigma_1 : & \neg P(a) \vee \neg Q(f(a)) \vee \neg L(a, f(a)) \\
\hline
C_5 : & \neg Q(f(a)) \vee \neg L(a, f(a)) \quad R(C_1, C_3\sigma_1) \\
C_2\sigma_2 : & L(a, f(a)) \\
\hline
C_6 : & \neg Q(f(a)) \quad R(C_5, C_2\sigma_2) \\
C_4\sigma_3 : & Q(f(a)) \\
\hline
 & \perp
\end{array}
$$

$$\sigma_2 = \{f(a)/y\}$$
umg de $\{L(a, y), L(a, f(a))\}$

$$\sigma_3 = \{f(a)/s\}$$
umg de $\{Q(s), Q(f(a))\}$

Donde, como se obtém a cláusula vazia ($\perp$, falso) S é inconsistente, pelo que, φ é consequência lógica de φ_1 e φ_2, isto é, $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi$.

3. Considere-se a partição de A em 14 subconjuntos de 2 elementos cuja soma é igual a 30 e ainda o subconjunto que sobra com 1 elemento apenas

$$A = \underbrace{\{1,29\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{2,28\}}_{A_2} \cup \cdots \cup \underbrace{\{14,16\}}_{A_{14}} \cup \underbrace{\{15\}}_{A_{15}}$$

Temos 15 caixas (gaiolas) de A_1 a A_{15} para acomodar 16 elementos (pombos) de $S=\{s_1, s_2, \dots, s_{16}\}$.

Como $S \subseteq A$, com $|S|=16$, pelo PGP existem pelo menos dois elementos s_i, s_j, $i \neq j$, que vão pertencer a alguma das 14 caixas $A_1, A_2, \dots, A_{14}$, isto é, tal que, $s_i + s_j = 30$, $s_i, s_j \in A_k$, para algum $k \in \{1,2,\dots,14\}$.

De facto, podemos ter $s_1 \in A_1, s_2 \in A_2, \dots, s_{15} \in A_{15}$, mas, $s_{16} \in A_k$, para algum $k \in \{1,2,\dots,14\}$, uma vez que $|A_{15}| = 1$, enquanto $|A_1| = |A_2| = \dots = |A_{14}| = 2$, todos estes subconjuntos com 2 elementos cuja soma é igual a 30.

<u>Ou, alternativa:</u>

* Se $15 \notin S$, pode definir-se $f: S \to \{1, \dots, 14\}$
  $x \to i$ tal que $x \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, 14$,
  $|S| > 14 \Rightarrow f$ não é injetiva (PGP)
  i.e., $f(x_1) = f(x_2)$ p/ alguns $x_1, x_2 \in S$ com $x_1 \neq x_2$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = 30$.

* $15 \in S$, define-se
  $f: S \setminus \{15\} \to \{1, \dots, 14\}$
  $x \to i$ tal que $x \in A_i$, $i=1,2,\dots,14$, como $|S \setminus \{15\}| > 14$, a conclusão é análoga à anterior.

4. (a) $L=\{A,B,R\}$, $|L|=3$

As sequências podem ser representadas por 11-uplos $(L_1,L_2,\dots,L_{10},L_{11})$, $L_i\in L$, $i=1,2,\dots,11$:

$$A_1=\{(B,A,R,R,A,L_6,L_7,L_8,L_9,L_{10},L_{11}),\ L_i\in L,\ i=6,\dots,11\}$$

$|A_1|=3\times3\times3\times3\times3\times3=3^6$, pois $|L|=3$, contagem envolvendo arranjos com repetição;

$$A_2=\{(L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6,B,A,R,R,A),\ L_i\in L,\ i=1,\dots,6\}$$

$|A_2|=3^6$, aplicando o princípio da Inclusão-Exclusão tem-se $|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=\underline{3^6+3^6-3}$,

uma vez que $A_1\cap A_2=\{(B,A,R,R,A,L_6,B,A,R,R,A),L_6\in L\}$.

(b) $M=\{A,R\}$, $|M|=2$

$$B=\{(L_1,\underbrace{L_2,L_3,\dots,L_{10}}_{},L_{11}),\ L_1,L_{11}\in M,\ L_2,\dots,L_{10}\in L,\ \text{tal que } 3A,3B,3R\}$$

trata-se de um problema envolvendo permutações com repetição, onde as 9 posições $L_2,L_3,\dots,L_{10}$ são ocupadas por igual número de As, Bs e Rs:

$$\binom{9}{3,3,3}=\binom{9}{3}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}=\frac{9!}{3!3!3!},$$ pelo princípio da multiplicação tem-se

$$|B|=2\times\binom{9}{3,3,3}\times2=4\times\frac{9!}{3!3!3!}=4\times\frac{9\times8\times7\times\cdots\times2}{6\times6\times6}.$$

5. (a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n + 1, & n \geq 1 \\ a_0 = 1 \end{cases}$

$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$, determina-se a soluç. geral da eq. homogénea associada $a_n - a_{n-1} = 0$, cuja equação característica é

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ raiz característica, com multiplicidade 1.

$a_n^{(h)} = c_1 1^n = c_1$, const. a determinar no final;

Soluç. particular $a_n^{(p)}$ da eq. de recorrência dada é $a_n^{(p)} = \underbrace{(A_0 + A_1 n)}_{}\, n^1$ ← mult. de 1 enquanto raiz caract.

uma vez que o termo não homogéneo é $(2n+1)$ polinomial de grau 1,

Substituindo na eq. dada, tem-se

$(A_0 + A_1 n) n = (A_0 + A_1(n-1))(n-1) + 2n + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_0 n + A_1 n^2 = A_0(n-1) + A_1(n-1)^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{A_0 n} + \cancel{A_1 n^2} = \cancel{A_0 n} - A_0 + \cancel{A_1 n^2} - 2nA_1 + A_1 + 2n + 1$

$\Leftrightarrow (A_0 - A_1) + 2A_1 n = 2n + 1$, vindo

$\begin{cases} A_0 - A_1 = 1 \\ 2A_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = A_1 + 1 \\ A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 2 \\ A_1 = 1 \end{cases}$; assim, vem

$a_n = c_1 + (2 + n) n$, $n \geq 0$, como $a_0 = 1$,

tem-se $c_1 = 1$, pelo que, $a_n = 1 + 2n + n^2$

$a_n = (n+1)^2$, $n \geq 0$

5. (b) Função geradora ordinária associada à sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+2n+1)x^n$$

$$\Leftrightarrow A(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty} n x^n+\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\Leftrightarrow A(x)=1+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}+2x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$\Leftrightarrow A(x)=1+x\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{A(x)}+2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'+\frac{1}{1-x}-1$$

$$\Leftrightarrow A(x)=1+xA(x)+2x\left(\frac{1}{1-x}\right)'+\frac{1-(1-x)}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow A(x)(1-x)=1+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow A(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow A(x)=\frac{(1-x)^2+2x+x(1-x)}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow A(x)=\frac{1\cancel{-2x}\cancel{+x^2}\cancel{+2x}+x\cancel{-x^2}}{(1-x)^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Leftrightarrow A(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

6.(a) G e H são isomorfos ($G \simeq H$):

- são ambos grafos simples com a mesma ordem $|V_G| = |V_H| = 6$ e a mesma dimensão $|E_G| = |E_H| = 8$;
- existem 4 vértices de grau 3 e 2 vértices de grau 2 em ambos os grafos, definindo-se a função bijetiva $\varphi: V_G \to V_H$, com $\varphi(a)=3$, $\varphi(b)=2$, $\varphi(c)=1$, $\varphi(d)=6$, $\varphi(e)=4$ e $\varphi(f)=5$, tem-se um isomorfismo φ, tal que para todos os vértices $u, v \in V_G$, $uv \in E_G \Rightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_H$, preservando-se as relações de vizinhança entre vértices:

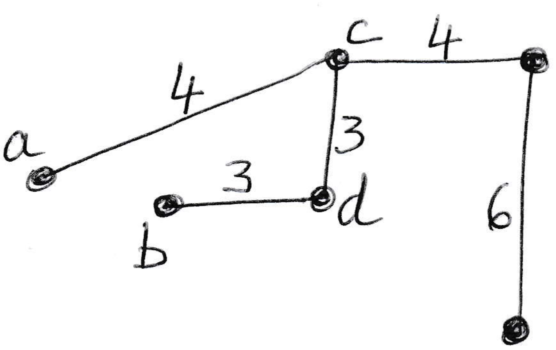
$ab \in E_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(b) = 32 \in E_H$
$ac \in E_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(c) = 31 \in E_H$
$af \in E_G \Rightarrow \varphi(a)\varphi(f) = 35 \in E_H$
$bd \in E_G \Rightarrow \varphi(b)\varphi(d) = 26 \in E_H$
$cd \in E_G \Rightarrow \varphi(c)\varphi(d) = 16 \in E_H$
$ce \in E_G \Rightarrow \varphi(c)\varphi(e) = 14 \in E_H$
$ef \in E_G \Rightarrow \varphi(e)\varphi(f) = 45 \in E_H$
$df \in E_G \Rightarrow \varphi(d)\varphi(f) = 65 \in E_H$

Ou seja, cada vértice de grau 3 tem como vizinhos 2 vértices de grau 3 e 1 de grau 2; cada vértice de grau 2 tem como vizinhos 2 vértices de grau 3, tanto em G como em H.

6. (b) Algoritmo de Prim para obter uma árvore abrangente de G de custo mínimo $T_G = (V', E')$, partindo de $V' = \{e\}$:

Iteração	V'	E'	(ij, w_{ij}) $i \in V', j \in V_G \setminus V'$	$a^* = i^* j^*$, $i^* \in V', j^* \in V_G \setminus V'$
1	$\{e\}$	$\emptyset$	$\underline{(ec, 4)}$, $(ef, 6)$	ec
2	$\{e, c\}$	$\{ec\}$	$(ef, 6)$ $\underline{(cd, 3)}$, $(ca, 4)$	cd
3	$\{e, c, d\}$	$\{ec, cd\}$	$(ef, 6)$, $(ca, 4)$ $(df, 7)$, $\underline{(db, 3)}$	db
4	$\{e, c, d, b\}$	$\{ec, cd, db\}$	$(ef, 6)$, $\underline{(ca, 4)}$, $(df, 7)$ $(ba, 5)$	ca
5	$\{e, c, d, b, a\}$	$\{ec, cd, db, ca\}$	$\underline{(ef, 6)}$, $(df, 7)$ $(af, 8)$	ef
6	$\{e, c, d, b, a, f\}$	$\{ec, cd, db, ca, ef\}$	PARAR! $V' = V_G$	

$$T_G = G[E'] = G[\{ec, cd, db, ca, ef\}]$$



$T_G = (V', E')$ árvore ótima com custo total mínimo igual a

$$4 + 3 + 3 + 4 + 6 = 20.$$