Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — 1º Teste (VERSÃO 1)

13 de maio de 2022

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ________________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3 [25pts]	4a [10pts]	4b [15pts]	4c [20pts]	5 [25pts]	6a [05pts]	6b [15pts]	6c [10pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Qual é o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(x+\pi)^n$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ π

(b) Sabendo que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-5)^n$ tem raio de convergência igual a 2, podemos concluir que:

☐ a série converge absolutamente em $x=-5$

☐ a série é divergente em $x=5$

☐ a série converge simplesmente em $]3,7[$

☐ a série converge absolutamente em $x=4$

(c) Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ para } x \in]-1,1[$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

podemos concluir que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ tem soma igual a

☐ $\ln 9$ ☐ $\ln(\frac{1}{9})$ ☐ $\ln(\frac{9}{4})$ ☐ $-\ln(\frac{9}{4})$

(d) O polinómio de Taylor de grau 4 para uma função f em torno do ponto $a = 3$ é dado por:

$$2 + \sqrt{3}(x-3) + 10(x-3)^2 + \pi(x-3)^3 + 3(x-3)^4.$$

O valor de $f''(3)$ é igual a:

☐ 5 ☐ 6π ☐ 20 ☐ $2\sqrt{3}$

(e) Seja f uma função que satisfaz as condições: $f(3) = 1$, $f'(3) = 4$, $f''(3) = 6$, e $f^{(n)}(3) = 0$ para todo o $n \geq 3$. Sabendo que a série de Taylor de f converge para f, podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

☐ 5 ☐ 21 ☐ 17 ☐ 33

(f) Seja f uma função 2π-periódica tal que $f(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ para $x \in [-\pi, \pi[$. Qual o valor do coeficiente a_0 da série de Fourier de f?

☐ $\frac{2\pi^2}{3}$ ☐ $\frac{\pi^2}{3}$ ☐ $\frac{5\pi^2}{6}$ ☐ $\frac{5\pi^2}{12}$

[15pts] 2. Prove que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4n^2}$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ______________ **Nome:** ______________________________

[25pts] 3. Determine o domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-4)^n}{n\,6^{n+1}}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

Continua na folha suplementar Nº

4. Seja $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

[10pts] (a) Sabendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $|x| < 1$, mostre que:

$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}, \ |x| < 1.$$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Usando a alínea anterior, determine a série de Taylor da função f, indicando o maior intervalo de $\mathbb{R}$ onde a mesma é válida.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (c) Utilizando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de f, indique um valor aproximado para $\ln(1.01)$. Sabendo que $f'''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, mostre que o erro absoluto dessa aproximação é inferior a $2 \times (0.1)^4$.

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] 5. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi, & -\pi \leq x < 0 \\ \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases} .$$

Determine a série de Fourier de f e esboce o gráfico da sua soma no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Continua na folha suplementar Nº

6. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

[05pts] (a) Determine o domínio de f, D_f.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Averigúe se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (c) Determine a curva de nível -1, $\mathcal{C}_{-1}$, e represente-a geometricamente.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\tan u$	$u'\csc^2 u$	$-\cot u$	$u'\sec u$	$\ln\|\sec u + \tan u\|$
$u'\csc u$	$-\ln\|\csc u + \cot u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$