Cálculo II- C — Exame Final (V1)

11 de junho de 2024

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____________________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [20pts]	3a [12pts]	3b [13pts]	4a [15pts]	4b [15pts]	5a [13pts]	5b [07pts]	6 [15pts]	7 [15pts]	8 [15pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 8 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Sempre que necessitar de continuar uma resposta numa folha suplementar, indique, no sítio assinalado para o efeito, o número da folha suplementar que usou.

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) A série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3+n^2} x^n$ tem raio de convergência $R = \frac{1}{2}$. O seu domínio de convergência é:

☐ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ☐ $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ ☐ $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ☐ $\{0\}$

(b) A série de Fourier $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3}\cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{sen}(nx) \right)$ converge em $\mathbb{R}$,

☐ absolutamente e uniformemente.
☐ absolutamente mas não uniformemente.
☐ uniformemente mas não absolutamente.
☐ nem absolutamente, nem uniformemente.

(c) Considere a função $f(x, y) = x + 2y$ definida em $\mathbb{R}^2$ e seja $k \in \mathbb{R}$. O que pode dizer sobre o conjunto de nível $\mathcal{N}_k$ de f?

☐ É uma reta de declive $m = \frac{1}{2}$. ☐ É uma reta de declive $m = -\frac{1}{2}$.
☐ É o plano definido por $z = x + 2y - k$. ☐ É o plano definido por $z = k$ e $x + 2y = k$.

(d) Sejam $\mathcal{D}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $(a, b) \in \mathcal{D}$. Se a derivada direcional de f no ponto (a, b) segundo o vetor $U = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ é igual a:

☐ 4 ☐ -4 ☐ $\frac{4}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{-4}{\sqrt{2}}$

(e) Seja $f(x,y) = \operatorname{sen}(x) + yx^2 - y^3 + 3$. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $P = (0,1,2)$ é:

- ☐ $x - 3y - z = 5$
- ☐ $x - 3y + z = -5$
- ☐ $x - 3y - z = -5$
- ☐ $2x - 3y - z = 5$

(f) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = x^2 - 2y^3$. Podemos afirmar que:

- ☐ f não tem pontos críticos
- ☐ $(0,0)$ é maximizante local de f
- ☐ $(0,0)$ é minimizante local de f
- ☐ $(0,0)$ é ponto de sela de f

[20pts] 2. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \dfrac{x^2}{4} \ln x$. Usando a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f em torno do ponto $c = 1$, calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\dfrac{1}{48}$.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________ Nome: ____________

3. Estude a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

[12pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\ln n}$

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(n+2)!}{n^{n+1}}$

Continua na folha suplementar Nº

4. Considere a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$

[15pts] (a) Determine o intervalo de convergência da série, I_c.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Sendo $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n3^n}$, para $x \in I_c$, determine, justificando, o valor de $f'(2)$.

Continua na folha suplementar Nº

5. Seja g a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi]$ por $g(x) = \pi(1 - 2x^2)$.

[13pts] (a) Justifique que a série de Fourier associada a g é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de a_0.

Continua na folha suplementar Nº

[07pts] (b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de g no ponto $x = -3\pi$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \\ \operatorname{sen}(y) & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

Indique, justificando, se f é contínua no ponto $(0,0)$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 7. Mostre que existe uma função real de variável real g definida num intervalo I contendo 0, tal que $g(0) = e$, g é de classe C^1 e

$$\ln(x + g(x)) = e^{xg(x)}$$

para todo o $x \in I$. Determine $g'(0)$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 8. Determine os extremos globais da função f definida por $f(x, y) = 2x - 3y$ que pertencem à elipse de equação $x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 10$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln \lvert \sec u + \operatorname{tg} u \rvert$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln \lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u \rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$