Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro | Matemática Discreta

Exame de recurso, 28 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **A** Classificação: ____________

Nome: ______________________________ Nº Mec.: ____________

Declaro que desisto: ______________________________ Folhas supl.: ______

1. (3 val) Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado P, Q, R de dois argumentos e considere as fórmulas

$$\varphi_1 = \forall x \exists y\, (P(x,y) \wedge Q(x,y)),$$
$$\varphi_2 = \forall x\, [((\exists y\, P(x,y)) \wedge (\exists z\, Q(x,z))) \to (\exists w R(x,w))],$$
$$\psi = \forall x \exists w\, R(x,w).$$

Utilizando método de resolução, mostre que $\varphi_1, \varphi_2 \vDash \psi$.

2. (2 val) Determine o coeficiente de x^2y^{14} no desenvolvimento de $(\frac{x}{y} - 2y^2)^{10}$.

3. (2 val) Mostre que, para quaisquer 51 números inteiros escolhidos entre 1 e 100, existem dois cuja soma é 101.

---

1. Transformação de φ_1, φ_2 e $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva de Skolem:

$\varphi_1 \equiv \forall x\; P(x, f(x)) \wedge Q(x, f(x))$

$f \to$ símbolo de função

$\varphi_2 \equiv \forall x \left[(\forall y \neg P(x,y)) \vee (\forall z \neg Q(x,z)) \vee (\exists w R(x,w)) \right]$

$\equiv \forall x \exists w \forall y \forall z\, (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x,w))$

$\equiv \forall x \forall y \forall z (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x, g(x)))$

$g \to$ símbolo de função

$\neg\psi \equiv \exists x \forall w\; \neg R(x,w)$

$\equiv \forall w\; \neg R(c, w)$

$c \to$ símbolo de constante

conjunto de cláusulas

$\Pi = \{ \underbrace{P(x, f(x))}_{C_1}, \underbrace{Q(x, f(x))}_{C_2}, \underbrace{\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x, g(x))}_{C_3}, \underbrace{\neg R(C, w)}_{C_4} \}$

$x, y, z, w \to$ variáveis
$C \to$ constante

Cláusulas

C_1	$P(x, f(x))$	hipótese
C_2	$Q(x, f(x))$	hipótese
C_3	$\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,z) \vee R(x, g(x))$	hipótese
C_4	$\neg R(c, w)$	hipótese
C_5	$\neg Q(x,z) \vee R(x, g(x))$	RB(1,3) umG: $\{f(x)/y\}$
C_6	$R(x, g(x))$	RB(2,5) umG: $\{f(x)/z\}$
C_7	$\perp$	RB(4,6) umG: $\{c/x\} \circ \{g(x)/w\} = \{c/x, g(c)/w\}$

pelo método de resolução Γ é inconsistente. Logo

$$\varphi_1, \varphi_2 \models \psi \qquad \text{c.q.d}$$

2.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{binómio de Newton}$$

$$\left(\frac{x}{y} - 2y^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k (-2y^2)^{10-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-2)^{10-k} x^k y^{20-3k}$$

O coeficiente pretendido é o correspondente ao termo $k=2$, ou seja

$$\binom{10}{2}(-2)^8 = \frac{10!}{2!\,8!} 2^8$$

3. Seja A o conjunto de números escolhidos. $|A| = 51$

Considere-se a seguinte partição de $[100] = \{1, \ldots, 100\}$

$$X_1 = \{1, 100\}$$
$$X_2 = \{2, 99\}$$
$$\vdots$$
$$X_{50} = \{50, 51\}.$$

Note-se que $X_i = \{x, y\}$ sse $x + y = 101$

A função $f: A \to \{X_1, \ldots, X_{50}\} = \mathcal{X}$

$a \mapsto X_i$ quando $a \in X_i$

Como $\underset{51}{\underset{\shortparallel}{|A|}} > \underset{50}{\underset{\shortparallel}{|\mathcal{X}|}}$ f é não injetiva pelo

princípio da gaiola de Pombos.

Logo

$f(a) = f(b)$ para $a, b \in A$ $(a \neq b)$

ou seja,

$$X = \{a, b\}$$

Assim concluímos que existem $a, b \in A$ tais que $a + b = 101$.