Cálculo II-Agrupamento 3 — 2º Teste (VERSÃO 1)

27 de junho de 2022

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [25pts]	3 [25pts]	4 [25pts]	5a [15pts]	5b [15pts]	5c [05pts]	6a [15pts]	6b [15pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Uma equação do plano tangente à superfície de equação $x^2 - 2y^2 + xz^2 = 5$ no ponto $(1, 0, 2)$ é:
- ☐ $-3x + 2z + 7 = 0$
- ☐ $3x - 2z + 1 = 0$
- ☐ $3x + 2z - 7 = 0$
- ☐ $3x + 2z - 1 = 0$

(b) Sejam $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(xy) + \mathrm{e}^z$ e $U = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. A derivada direcional de f segundo o vetor U no ponto $P = (0, 1, 2)$ é igual a:
- ☐ $1 + \mathrm{e}^2$
- ☐ $\dfrac{1 + \mathrm{e}^2}{\sqrt{3}}$
- ☐ $1 - \mathrm{e}^2$
- ☐ $\mathrm{e}^2 - 1$

(c) Considere a função $f(x, y) = y^2$, definida no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x \leq 2 \ \wedge \ -2 < y \leq 1\}.$$

Podemos afirmar que:
- ☐ a função admite mínimo global mas não máximo global.
- ☐ a função admite máximo global mas não mínimo global.
- ☐ a função não admite máximo ou mínimo globais.
- ☐ pelo Teorema de Weierstrass, a função admite máximo e mínimo globais uma vez que f é contínua.

(d) Se $y' - 4y = 0$ e $y(0) = 2$, então $y(2)$ é igual a:

☐ 0 ☐ $2\mathrm{e}^8$ ☐ e^8 ☐ 4

(e) Sabendo que $y = \ln x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y'' + xy' + y = \ln x$ e que $\{\cos(\ln x), \operatorname{sen}(\ln x)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada, qual é a solução geral da EDO completa?

☐ $y = C \ln x,\ C \in \mathbb{R}$.

☐ $y = C_1 \ln x + C_2 \cos(\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

☐ $y = \ln x + C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

☐ $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(f) A transformada de Laplace de $f(t) = \mathrm{e}^{2t} \cos(3t)$ é

☐ $F(s) = \dfrac{s}{s^2+9},\ \ s > 0.$

☐ $F(s) = \dfrac{1}{s-2} \cdot \dfrac{s}{s^2+9},\ \ s > 2.$

☐ $F(s) = \dfrac{s-2}{s^4-4s+13},\ s > -2.$

☐ $F(s) = \dfrac{s-2}{s^2-4s+13},\ s > 2.$

[25pts] 2. Encontre os possíveis pontos de máximo e mínimo locais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4.$

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

[25pts] 3. Justifique que a função f definida por $f(x,y) = 5x - 3y$ admite máximo e mínimo globais em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 136\}$ e determine-os.

(Nota: $\dfrac{4 \times 136}{34} = 16$).

Continua na folha suplementar N°

[25pts] 4. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli:

$$y' + 4\frac{y}{x} = x^3y^2, \quad x > 0.$$

Continua na folha suplementar Nº

5. Considere a EDO $y'' + y' - 6y = 6e^{2x}$.

[15pts] (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Determine uma solução particular da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

[05pts] (c) Indique a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

6. Considere o seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} y'' + y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

[15pts] (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{1}{4s(s+1)^2}, \quad s > 0$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\mathrm{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\mathrm{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a \rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s>s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s)=F(s)+G(s)\,,\ s>\max\{s_f,s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s)=\alpha F(s)\,,\ s>s_f$ e $\alpha\in\mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)\}(s)=F(s-\lambda)\,,\ s>s_f+\lambda$ e $\lambda\in\mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)=(-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s>s_f$ e $n\in\mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t)\cdot f(t-a)\}(s)=\mathrm{e}^{-as}F(s)\,,\ s>s_f$ e $a>0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s)=\dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s>a\,s_f$ e $a>0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

com $s>\max\{s_f,s_{f'},s_{f''}\ldots,s_{f^{(n-1)}}\}$, $n\in\mathbb{N}$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r\neq-1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\tan u$	$u'\csc^2 u$	$-\cot u$	$u'\sec u$	$\ln\lvert\sec u+\tan u\rvert$
$u'\csc u$	$-\ln\lvert\csc u+\cot u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{arctg}\,u$ ou $-\mathrm{arccotg}u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$\mathrm{sen}(x\pm y)=\mathrm{sen}\,x\cos y\pm\cos x\ \mathrm{sen}\,y$	$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
$\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\mathrm{sen}\,x\ \mathrm{sen}\,y$	$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
	$\sin(2x)=2\sin x\cos x$	$1+\tan^2 x=\sec^2 x$
	$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x$	$1+\cot^2 x=\csc^2 x$