*Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro*

**Cálculo II-Agrupamento 3 — 2º Teste (V1)**

*19 de junho de 2023*

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ______________ Nome: ______________________________

(Declaro que desisto: ______________________________ ) N. folhas suplementares: ______

| Questão [Cotação] | 1 [60pts] | 2a [10pts] | 2b [15pts] | 3 [25pts] | 4 [25pts] | 5a [15pts] | 5b [15pts] | 5c [05pts] | 6a [10pts] | 6b [20pts] | Classificação (valores) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |

**– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –**

**[60pts]** 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja $f(x,y) = 2 + x^2 - y^2$. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f$ no ponto $P = (1,-1,2)$ é:
- ☐ $2x - 2y + z = 6$
- ☐ $x + 2z - z = 6$
- ☐ $2x + 2y - z = -2$
- ☐ $x + y = 0$

(b) Seja $g(x,y,z) = 3e^x \cos(yz)$. A derivada direcional da função $g$ no ponto $Q = (0, \frac{\pi}{2}, -1)$ na direção do vetor $\overrightarrow{u} = (2,1,-2)$ é:
- ☐ $-3 - 3\pi$
- ☐ $-1 - \pi$
- ☐ $-3 + 3\pi$
- ☐ $-1 - \frac{\pi}{2}$

(c) Considere a função $f(x,y) = 1 + x^2$, definida no conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 2 \ \wedge \ -3 < y < 3\}.$$

Podemos afirmar que:
- ☐ a função admite mínimo global mas não máximo global.
- ☐ a função admite máximo global mas não mínimo global.
- ☐ a função não admite máximo ou mínimo globais.
- ☐ a função admite máximo e mínimo globais.

(d) Considere a EDO de 1ª ordem $M(x,y)dx+(xe^y+2xy+1)dy=0$. Para que a equação diferencial seja exata, $M(x,y)$ tem de ser da forma (onde $\phi(x)$ denota uma função na variável $x$):

- ☐ $e^y + xy^2 + \phi(x)$
- ☐ $e^y + y^2 + \phi(x)$
- ☐ $e^y + y^2 + y$
- ☐ $xe^y + xy^2 + 1$

(e) Sabendo que $y_1 = xe^{3x}$ é uma solução da equação $y' - 3y = e^{3x}$ e que $y_2 = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x$ é uma solução de $y' - 3y = \cos x$, então a solução geral da EDO $y' - 3y = e^{3x} + \cos x$ é:

- ☐ $y = Ce^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y = Ce^{3x} + xe^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x, ,C \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y = Ce^{-3x} + xe^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}.$
- ☐ $y = Ce^{-3x} + xe^{3x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}.$

(f) A transformada de Laplace de $f(t) = \mathrm{e}^{-3t}\operatorname{sen}(2t)$ é

- ☐ $F(s) = \dfrac{-6}{(s-3)(s^2+4)},\quad s > 3.$
- ☐ $F(s) = \dfrac{-6}{(s-3)(s^2+4)},\quad s > -3.$
- ☐ $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+13},\ s > -3.$
- ☐ $F(s) = \dfrac{2}{s^2+6s+13},\ s > 3.$

2. Considere a função $f$ definida por $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 + 3y^2$.

**[10pts]** (a) Determine os pontos críticos de $f$.

Continua na folha suplementar Nº ☐

[15pts] (b) Averigue a natureza dos pontos críticos obtidos.

Continua na folha suplementar Nº

**[25pts]** 3. Seja $f$ a função definida por $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^3$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Determine os extremos globais de $f$ em $D$.

Continua na folha suplementar Nº

**[25pts]** 4. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli: $xy' - 2y = \dfrac{3y^4}{x}, \quad x > 0$.

Continua na folha suplementar Nº

5. Considere a EDO $y''' + 4y' = \operatorname{sen} x$.

**[15pts]** (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine uma solução particular da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

[05pts] (c) Indique a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

6. Usando Transformadas de Laplace,

**[10pts]** (a) determine o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{sen}(t)e^{-3t}\,dt$.

Continua na folha suplementar Nº

**[20pts]** (b) resolva a seguinte equação integro-diferencial $y'(t) + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\cosh(t-\tau)\,d\tau = 0$ com a condição inicial $y(0) = 1$.

Continua na folha suplementar Nº

## Formulário Transformada de Laplace

| Função | Transformada | Função | Transformada | Função | Transformada |
|---|---|---|---|---|---|
| $t^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$ | $e^{at}$ $(a \in \mathbb{R})$ | $\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$ | $\text{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$ | $\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$ |
| $\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$ | $\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$ | $\text{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$ | $\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$ |

## Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

| | |
|---|---|
| $\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$ | $\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ |
| $\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ | $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$ |
| $\mathcal{L}\{H_a(t)\cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$ | $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\,s_f$ e $a > 0$ |

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}\ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)\cdot G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,\ t \geq 0$

## Formulário de Primitivas

| Função | Primitiva | Função | Primitiva | Função | Primitiva |
|---|---|---|---|---|---|
| $u^r u'$ $(r \neq -1)$ | $\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$ | $\dfrac{u'}{u}$ | $\ln\|u\|$ | $u'e^u$ | $e^u$ |
| $u'a^u$ | $\dfrac{a^u}{\ln a}$ | $u'\cos u$ | $\sin u$ | $u'\sin u$ | $-\cos u$ |
| $u'\sec^2 u$ | $\tan u$ | $u'\csc^2 u$ | $-\cot u$ | $u'\sec u$ | $\ln\|\sec u + \tan u\|$ |
| $u'\csc u$ | $-\ln\|\csc u + \cot u\|$ | $\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | $-\arccos u$ ou $\arcsin u$ | $\dfrac{u'}{1+u^2}$ | $\text{arctg}\, u$ ou $-\text{arccotg} u$ |

## Algumas fórmulas trigonométricas

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ <br> $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ | $\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\, x \cos y \pm \cos x\ \text{sen}\, y$ <br> $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen}\, x\ \text{sen}\, y$ <br> $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ <br> $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ | $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ <br> $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ | $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ <br> $1+\cot^2 x = \csc^2 x$ |