Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — Exame Final da Época Normal (VERSÃO 1)

27 de junho de 2022

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ______________________________

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3 [15pts]	4 [10pts]	5 [20pts]	6 [20pts]	7 [20pts]	8a [10pts]	8b [10pts]	9a [10pts]	9b [10pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin:

$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $x \in \mathbb{R}$

$\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $x \in]-1,1[$

podemos concluir que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ tem soma igual a

☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{2}{\pi}$ ☐ $\frac{4}{\pi}$ ☐ $\frac{\pi}{4}$

(b) Seja f uma função que satisfaz as condições: $f(2) = 3$, $f'(2) = 5$, $f''(2) = 6$, e $f^{(n)}(2) = 0$ para todo o $n \geq 3$. Sabendo que a série de Taylor de f converge para f, podemos concluir que $f(4)$ é igual a:

☐ 25 ☐ 22 ☐ 12 ☐ 30

(c) Relativamente à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

podemos afirmar que:

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

☐ f é contínua em $\mathbb{R}^2$

☐ não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(d) Uma equação do plano tangente à superfície de equação $x^2 - 2y^2 + xz^2 = 5$ no ponto $(1,0,2)$ é:

☐ $-3x + 2z + 7 = 0$
☐ $3x - 2z + 1 = 0$
☐ $3x + 2z - 7 = 0$
☐ $3x + 2z - 1 = 0$

(e) Considere a função $f(x,y) = y^2$ definida no conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x \leq 2 \ \wedge \ -2 < y \leq 1\}.$$

Podemos afirmar que:

☐ a função admite máximo global mas não mínimo global.
☐ a função admite mínimo global mas não máximo global.
☐ a função não admite máximo ou mínimo globais.
☐ pelo Teorema de Weierstrass, a função admite máximo e mínimo globais uma vez que f é contínua.

(f) Sabendo que $y = \ln x$ é uma solução da equação diferencial $x^2y'' + xy' + y = \ln x$ e que $\{\cos(\ln x), \operatorname{sen}(\ln x)\}$ é um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada, qual é a solução geral da EDO completa?

☐ $y = C_1 \ln x + C_2 \cos(\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

☐ $y = \ln x + C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

☐ $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

☐ $y = C \ln x,\ C \in \mathbb{R}.$

[15pts] 2. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n^2+n)3^n}$. Indique o maior intervalo onde a série é absolutamente convergente.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

[15pts] 3. Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pelo seu polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto 1, $T_1^2 f(x)$, no intevalo $[1, 1.2]$, é inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$.

Continua na folha suplementar N°

[10pts] 4. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Determine a série de MacLaurin da função $xf'(x)$, indicando o respetivo intervalo de convergência. (Nota: $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n, |x| < 1$).

Continua na folha suplementar N°

[20pts] 5. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \\ \pi, & 0 \leq x < \pi \end{cases} .$$

Determine a série de Fourier de f e esboce o gráfico da sua soma no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Encontre os possíveis pontos de máximo e mínimo locais da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 7. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli:

$$y' + 4\frac{y}{x} = x^3 y^2, \quad x > 0.$$

Continua na folha suplementar Nº

8. Considere a EDO $y'' + y' - 6y = 6e^{2x}$.

[10pts] (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Sabendo que a EDO completa admite uma solução do tipo $y = Ax\mathrm{e}^{2x}$, onde A é uma constante, determine a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

9. Considere o seguinte problema de valores iniciais: $\begin{cases} y'' + y' = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

[10pts] (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{1}{4s(s+1)^2}, \;\; s > 0$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a \rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\sin u$	$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\tan u$	$u' \csc^2 u$	$-\cot u$	$u' \sec u$	$\ln \lvert \sec u + \tan u \rvert$
$u' \csc u$	$-\ln \lvert \csc u + \cot u \rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ $1+\cot^2 x = \csc^2 x$