Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — Exame Final da Época de Recurso (V 1)

11 de julho de 2022

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N.º folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [20pts]	3a [08pts]	3b [12pts]	4a [15pts]	4b [10pts]	5 [20pts]	6 [15pts]	7a [10pts]	7b [10pts]	8 [20pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Com base num dos seguintes desenvolvimentos em série de MacLaurin

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ \text{ para } x \in]-1,1[$$

podemos concluir que a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$ tem soma igual a:

☐ 1 ☐ -1 ☐ 4 ☐ -4

(b) Seja f uma função que satisfaz as condições: $f(5) = 1$, $f'(5) = 2$, $f''(5) = -4$, e $f^{(n)}(5) = 0$ para todo o $n \geq 3$. Sabendo que a série de Taylor de f converge para f, podemos concluir que $f(6)$ é igual a:

☐ 5 ☐ 1 ☐ -1 ☐ -3

(c) Relativamente à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

podemos afirmar que:

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$ ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

☐ f é contínua em $\mathbb{R}^2$ ☐ não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(d) Uma equação do plano tangente à superfície de equação $x^2y - y + e^{2z} = 1$ no ponto $(1, 1, 0)$ é:

- ☐ $x + z - 1 = 0$
- ☐ $x + z + 1 = 0$
- ☐ $2x + 2z - 1 = 0$
- ☐ $2x - 2z + 1 = 0$

(e) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Podemos afirmar que:

- ☐ f não tem pontos críticos
- ☐ $(0, 0)$ é maximizante local de f
- ☐ $(0, 0)$ é minimizante local de f
- ☐ $(0, 0)$ é ponto de sela de f

(f) Qual é a solução geral da equação diferencial exacta $(xy^2 + 3x^2y)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$?

- ☐ $x^3y + y^2x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$
- ☐ $2x^3y + y^2x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$
- ☐ $2x^3y - y^2x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$
- ☐ $x^3y + 2y^2x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$

[20pts] 2. Indique o maior intervalo onde a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{3n+1}}(x+2)^n$ é absolutamente convergente.

Continua na folha suplementar Nº ☐

N° Mec: ____________ **Nome:** ______________________________

3. Seja $f(x) = \ln(1+x)$, com $x \in]-1, +\infty[$.

[08pts] (a) Determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função f, $T_0^2 f(x)$.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Usando o polinómio $T_0^2 f(x)$, determine um valor aproximado de $\ln(1.1)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{1}{3} \times 10^{-3}$.

Continua na folha suplementar Nº

4. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(3\pi - |x|)$.

[15pts] (a) Justifique que a série de Fourier associada a f é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de a_0.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Calcule, justificando, a soma da série de Fourier de f no ponto $x = 3\pi$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 5. Determine os extremos globais da função f definida por $f(x,y) = x^2+x+y^2+y-1$, restringida ao conjunto $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \frac{1}{2}\}$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 6. Resolva a seguinte equação diferencial: $xy' + 2y = \operatorname{sen} x, \quad x > 0.$

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere a EDO $y''' - 2y'' + y' = 4x + 1$.

[10pts] (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] (b) Sabendo que a EDO completa admite uma solução do tipo $y = Ax^2 + Bx$, onde A e B são constantes, determine a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 8. Resolva o seguinte problema de valores iniciais usando Transformadas de Laplace,

$$\begin{cases} y'' - y' = 2e^t \cos(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Continua na folha suplementar Nº

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a\rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t)\cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)\,,\ s > a\,s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}\ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}$	$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\frac{a^u}{\ln a}$	$u'\cos u$	$\sin u$	$u'\sin u$	$-\cos u$
$u'\sec^2 u$	$\tan u$	$u'\csc^2 u$	$-\cot u$	$u'\sec u$	$\ln\lvert\sec u + \tan u\rvert$
$u'\csc u$	$-\ln\lvert\csc u + \cot u\rvert$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x\ \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $1+\tan^2 x = \sec^2 x$ $1+\cot^2 x = \csc^2 x$