Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-C — 1º Teste (V1)

17 de abril de 2024

Duração: **2h00**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ________________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3 [20pts]	4a [15pts]	4b [15pts]	4c [20pts]	5 [25pts]	6a [15pts]	6b [15pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 6 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Sempre que necessitar de continuar uma resposta numa folha suplementar, indique, no sítio assinalado para o efeito, o número da folha suplementar que usou.

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ uma série numérica tal que $\lim_{n\to+\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_{n+1})=1$. Podemos afirmar que:

- ☐ $\lim_{n\to+\infty}(u_2+\cdots+u_n)=1$.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- ☐ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente e tem soma igual a 1.
- ☐ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é divergente.

(b) A soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}-1}{6^n}$ é:

- ☐ $\frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{21}{5}$
- ☐ $\frac{5}{12}$
- ☐ $\frac{9}{5}$

(c) Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas tais que $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = 3$. Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ é convergente, podemos concluir que:

- [ ] $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.
- [ ] $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{n^3}\right)$ é convergente.
- [ ] $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + \frac{1}{n^3}\right)$ é divergente.
- [ ] $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|b_n| + \frac{1}{n}\right)$ é convergente.

(d) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos positivos. Então, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(a_n)^n$ é uma

- [ ] série alternada absolutamente convergente.
- [ ] série alternada divergente.
- [ ] série alternada simplesmente convergente.
- [ ] série de termos não negativos divergente.

(e) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ uma série de potências divergente em $x = 2$. Podemos afirmar que a série é:

- [ ] divergente em $x = 1$.
- [ ] divergente em $x = -1$.
- [ ] convergente em $x = -1$.
- [ ] convergente em $x = 3$.

(f) Sabendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ para $|x| < 1$, podemos afirmar que uma representação em série de potências de $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ é:

- [ ] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^n$ para $|x| < \frac{3}{2^2}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n$ para $|x| < \frac{3}{2}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+1}} x^n$ para $|x| < \frac{3}{2}$.
- [ ] $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{2^{n+1}} x^n$ para $|x| < 3$.

N° Mec: ____________ **Nome:** ______________________________

[15pts] 2. Sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série numérica de termos positivos convergente, indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \operatorname{arctg}(n)$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 3. Mostre que a série de Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \frac{n}{n+1} - \ln \frac{n+2}{n+3} \right)$ é convergente e determine a sua soma.

Continua na folha suplementar Nº

4. Estude a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

[15pts] (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^3-1)}{(n^2+1)(n^2+2)}$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{(2n)!}{n^n}$

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] 5. Determine o raio e o domínio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+6)^n}{3^n n^2}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

Continua na folha suplementar Nº

6. Considere a função f dada por $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$.

[15pts] (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função f centrado em $c = \pi$, $T_{\pi}^{3}f$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] (b) Justifique que o erro absoluto na aproximação de $f(2)$ por $T_{\pi}^{3}f(2)$ é inferior ou igual a $\dfrac{(\pi-2)^4}{4!}$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$	$u'e^u$	e^u
$u'a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\|\sec u + \operatorname{tg} u\|$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\|\operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$