Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro — Matemática Discreta

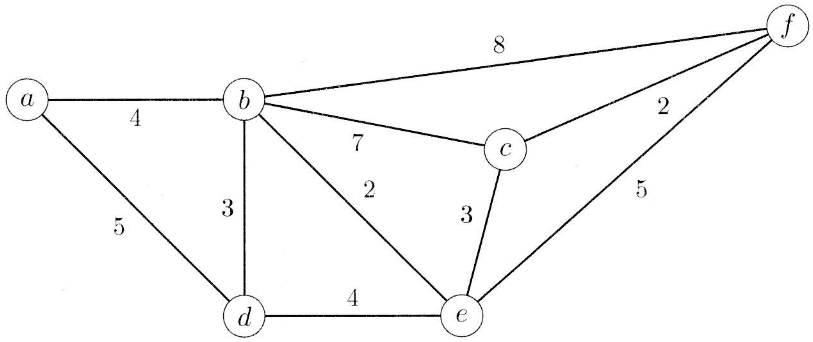
Exame de recurso, 28 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **C** Classificação: ______

Nome: Exemplo de Resolução Nº Mec.: ______

Declaro que desisto: ______ Folhas supl.: ______

7. (2 val) Seja G um grafo simples não orientado finito. Sabe-se que G tem 57 arestas e o seu grafo complementar G^{C} tem 133 arestas. Indique, justificando, o número de vértices de G.

8. (3 val) Seja G o grafo simples não orientado com custos nas arestas representado na figura seguinte.



Determine uma árvore abrangente de G com custo mínimo, aplicando o algoritmo de Kruskal. Apresente todos os passos do algoritmo.

9. (1 val) Seja G um grafo não orientado finito conexo e sejam C_1 e C_2 dois caminhos de maior comprimento (ou seja, com o maior número de arestas). Mostre que C_1 e C_2 têm pelo menos um vértice em comum.

---

7. Para qualquer grafo simples de ordem n (isto é, com n vértices) o número máximo de arestas é dado por $C_2^n = \binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}$, o qual coincide com o número de arestas do grafo completo K_n, $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$. Pelo que,

Como $|E(K_n)| = |E(G)| + |E(G^c)| = 57 + 133 = 190$,

tem-se $\frac{n(n-1)}{2} = 190 \Leftrightarrow n^2 - n - 380 = 0 \Leftrightarrow$

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-380)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1521}}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{39}{2} = \underline{20 \text{ vértices}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1521}}{2} \quad \text{não interessa} < 0 \end{cases}$$

$n = (1+\sqrt{1521})/2 = 20$, $|V(G)| = 20$.

8. **Algoritmo de Kruskal**

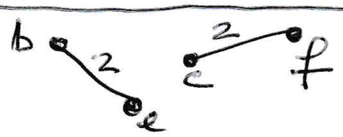
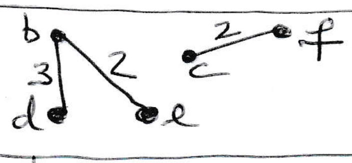
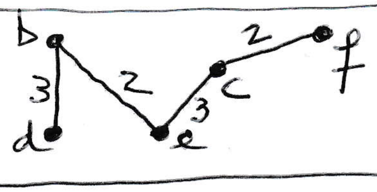
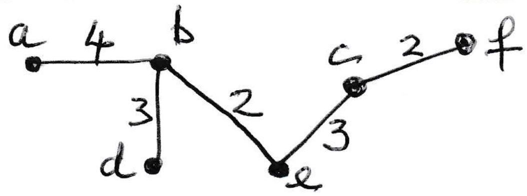
$G=(V,E,\psi)$, $W: E \to [0,\infty]$

Passo 1: Ordenar as arestas por ordem não decrescente de custos

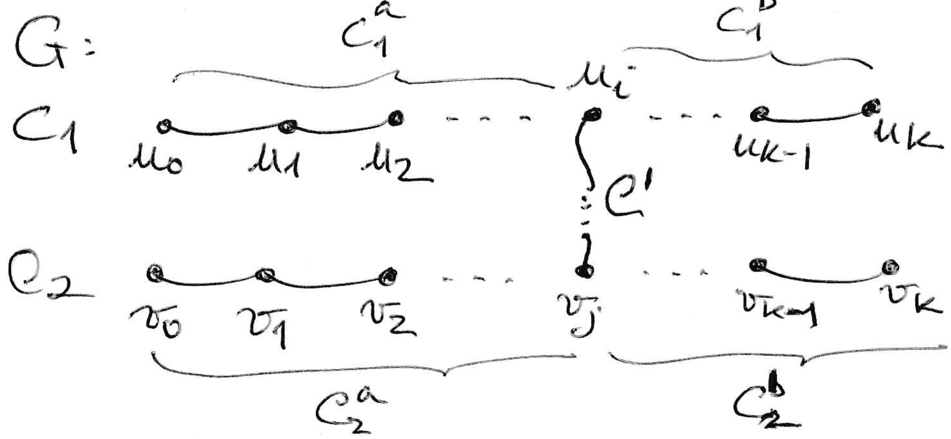
$$\underbrace{W(be)}_{2} \leq \underbrace{W(cf)}_{2} \leq \underbrace{W(bd)}_{3} \leq \underbrace{W(ce)}_{3} \leq \underbrace{W(de)}_{4}$$

$$\leq \underbrace{W(ab)}_{4} \leq \underbrace{W(ad)}_{5} \leq \underbrace{W(ef)}_{5} \leq \underbrace{W(bc)}_{7} \leq \underbrace{W(bf)}_{8}$$

Passos 2 e 3 (tabela): $E' = \{\}$, $i=1$

i	Insere aresta em E'?	$G[E']$
1	$E'=\{be\}$	
2	$E'=\{be, cf\}$	
3	$E'=\{be, cf, bd\}$	
4	$E'=\{be, cf, bd, ce\}$	
5	Não insere $\{de\}$ (ciclo)	
6	$E'=\{be, cf, bd, ce, ab\}$	 $= T_{opt}$ de G
7	$T_{opt}=(V,E')$ conexa	Passo 4: devolve árvore ótima T_{opt} com custo mínimo $= 14$

9. G:



Sejam $C_1 = (u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_{k-1}, u_k)$ e
$C_2 = (v_0, v_1, \dots, v_j, \dots, v_{k-1}, v_k)$ dois caminhos de comprimento máximo em G, $comp(C_1) = comp(C_2) = k$, $k \in \mathbb{N}$. Conforme ilustrado assume-se o contrário do que se pretende provar, isto é, que C_1 e C_2 não têm vértices comuns.
Como G é conexo existe um caminho C' unindo o vértice u_i de C_1 com v_j em C_2, $i, j \in [1, k]$, não contendo C' qualquer outro vértice de C_1 e C_2, com $Comp(C') \geq 1$.
Seja $C_1 = C_1^a u_i C_1^b$, com $C_1^a \cap C_1^b = u_i$ e
$C_2 = C_2^a v_j C_2^b$, com $C_2^a \cap C_2^b = v_j$.

Sem perda de generalidade, assumimos
$comp(C_1^a) \geq comp(C_1^b)$ e $comp(C_2^a) \geq comp(C_2^b)$,
isto é, $comp(C_1^a) \geq \lceil k/2 \rceil$ e $comp(C_2^a) \geq \lceil k/2 \rceil$.

Assim, pode obter-se um caminho $C^* = C_1^a u_i C' v_j C_2^a$, com $comp(C^*) \geq k+1$, o que contradiz o facto dos caminhos em G terem comprimento máximo igual a k.

Donde, quaisquer dois caminhos C_1 e C_2 em G de comprimento máximo k devem intersetar-se em pelo menos um vértice.