DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE AVEIRO	MATEMÁTICA DISCRETA
EXAME DE RECURSO, 28 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **B**	Classificação: ________
Nome: ____________________	Nº Mec.: ________
Declaro que desisto: ____________________	Folhas supl.: ____

4. (2 val) Um código consiste ou em três letras consecutivas (distintas ou não, entre 23 letras) seguidas de três algarismos (repetidos ou não, de 0 a 9) ou em duas letras consecutivas seguidas de quatro algarismos. Quantas possibilidades para estes códigos existem? Justifique.

   Por exemplo, «ADF029», «AE1123», «BBB111»; mas «AB358D» não é um tal código.

5. (2 val) Determine a sucessão $(a_n)_{n\geq 0}$ que tem como série geradora a série $\frac{x}{(1-x)^3}$.

6. (3 val) Resolva a relação de recorrência

$$na_n - (5n-5)a_{n-1} = 5^n + 4,$$

onde $a_0 = 10$.

[Sugestão: Efetuar a substituição $b_n = na_n$.]

---

4) 1.º caso: L L L A A A

L – letra
A – algarismos

2.º caso: L L A A A A

Podemos repetir letras e algarismos.

Para cada posição do código preenchida com uma letra existem 23 possibilidades (23 letras) e para cada posição preenchida com um algarismo existem 10 possibilidades.

Portanto, o número de códigos gerados no 1.º caso é dado ~~por~~

$$A^r(23,3) \times A^r(10,3) = 23^3 \times 10^3$$

e no 2.º caso é

$$A^r(23,2) \times A^r(10,4) = 23^2 \times 10^4.$$

Pelo princípio da adição, o número de códigos gerados de acordo com estes formatos é $23^3 \times 10^3 + 23^2 \times 10^4$.

⑤ $\dfrac{x}{(1-x)^3} = x\,\dfrac{1}{(1-x)^3} \overset{\circledast}{=} x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\binom{3}{n}\!\right) x^n =$

$x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3+n-1}{n} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^{n+1}}_{\text{substituindo } n \text{ por } n-1} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+1}{n-1} x^n.$

$\circledast \quad \dfrac{1}{(1-y)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\binom{m}{n}\!\right) y^n$

Então, $a_n = \binom{n+1}{n-1}$

$\Leftrightarrow \boxed{a_n = \frac{(n+1)\,n}{2}}, n \geq 1$

---

⑥ substituindo, para todo $n \geq 0$, $b_n = n\,a_n$, obtém-se

$b_0 = 0 \times a_0 = 0$ e $\underbrace{b_n - 5\,b_{n-1} = 5^n + 4}_{\text{Equação de recorrência linear não homogénea.}}$, $n \geq 1$.

Solução geral:

$b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p_1)} + b_n^{(p_2)}$, onde

(i) $b_n^{(h)}$ é a solução geral de $b_n - 5\,b_{n-1} = 0$,

(ii) $b_n^{(p_1)}$ é uma solução particular de $b_n - 5\,b_{n-1} = 5^n$

(iii) $b_n^{(p_2)}$ é uma solução particular de $b_n - 5\,b_{n-1} = 4$.

(i) $b_n - 5\,b_{n-1} = 0 \longrightarrow x^n - 5\,x^{n-1} = 0, \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \boxed{x - 5 = 0}, x \neq 0$

Eq. característica

solução geral:

$\boxed{b_n^{(h)} = c\,5^n}$, c-constante

$x = 5$ é uma raiz característica com multiplicidade $m = 1$.

(cont. exer. 6)

(ii) $b_n - 5b_{n-1} = 5^n$

$d_n = 5^n \longrightarrow d_n = c\,p^n$, c, p constantes, $p \neq 1$.

$m=1$ é a multiplicidade de $p=5$ enquanto raiz característica.

$\downarrow$

solução do tipo:

$\boxed{b_n^{(P_1)} = A\,n^1\,5^n}$, A - constante

Determinar A:

$b_n^{(P_1)} - 5\,b_{n-1}^{(P_1)} = 5^n \iff A n 5^n - 5A(n-1)5^{n-1} = 5^n$

$\iff \cancel{An5^n} - \cancel{An5^n} + A\,5^n = 5^n \iff A = 1$

Então $\boxed{b_n^{(P_1)} = n\,5^n}$

(iii) $b_n - 5\,b_{n-1} = 4$

$d_n = 4$ é um polinómio de grau $j=0$.

$\downarrow$

solução do tipo:

$(A_0 + \dots + A_j n^j)\,n^m$, onde m $(m=0)$ é a multiplicidade do 1 enquanto raiz característica.

ou seja, $\boxed{b_n^{(P_2)} = A_0}$

Determinar A_0:

$b_n^{(P_2)} - 5\,b_{n-1}^{(P_2)} = 4 \iff A_0 - 5A_0 = 4 \iff A_0 = -1$.

Então $\boxed{b_n^{(P_2)} = -1}$

(cont. ex. 6)

Solução geral de $b_n - 5b_{n-1} = 5^n + 4$:

$b_n = c\,5^n + n\,5^n - 1$, c – constante.

Solução que verifica $b_0 = 0$:

$b_0 = 0 \iff c - 1 = 0 \iff c = 1$.

$$\boxed{b_n = 5^n + n\,5^n - 1, \quad n \geq 0}$$

Recorde-se que efetuámos a substituição

$b_n = n a_n$.

Então para $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{b_n}{n}$, ou seja,

$a_n = \dfrac{5^n - 1}{n} + 5^n$ e $b_0 = 0$.