



---

**Justifique claramente todas as suas respostas. Pode consultar apenas o seu formulário e não pode utilizar qualquer equipamento eletrónico. Boa sorte!**

---

1. (4 val.) Seja  $f$  a função definida por

$$f(x) = \ln(\arcsin x).$$

- (a) Determine o domínio e o contradomínio de  $f$ .
- (b) Mostre que  $f$  é invertível, determine a expressão que define a sua inversa  $f^{-1}$  e indique o domínio e o contradomínio de  $f^{-1}$ .
- (c) Enuncie o Teorema de Weierstrass. É possível aplicar este teorema a  $f$ ? Justifique a sua resposta.
- (d) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ .

2. (4 val.) Calcule as seguintes primitivas:

- (a)  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx;$
- (b)  $\int \frac{1}{(x^2+4)(x-2)} dx.$

3. (4 val.)

- (a) Calcule a área da região  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq x + 1\}$ .
- (b) Estude a natureza do integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx$ .
- (c) Calcule o valor do integral  $\int_0^{+\infty} (t^5 + e^{-2t}) e^{-2t} dt$ .

4. (4 val.) Resolva os seguintes problemas:

- (a) Determine uma função  $f$ , na variável  $x$ , que é igual à sua derivada multiplicada por  $x$  e que satisfaz a condição  $f(1) = 1$ .
- (b) Determine um fator integrante para a equação linear  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$  e encontre a solução que satisfaz a condição  $y(1) = -1$ .

5. (4 val.) Considere a equação diferencial linear completa de coeficientes constantes

$$y^{(iv)} + 8y'' + 16y = \sin(x) + e^x.$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
- (b) Descreva o procedimento para obter uma solução particular da equação completa utilizando o método dos coeficientes indeterminados.
- (c) Diga qual é a solução geral da equação completa.