Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo II-Agrupamento 3 — Exame Final (Época Normal)(V1)

19 de junho de 2023

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ______________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ____) N. folhas suplementares: ______

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3 [15pts]	4 [10pts]	5a [13pts]	5b [07pts]	6 [20pts]	7 [20pts]	8a [8pts]	8b [12pts]	9a [07pts]	9b [13pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 9 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Sabendo que $\dfrac{1}{4+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^n,\ -4 < x < 4$, qual das seguintes séries é a série de MacLaurin da função $f(x) = \ln(4+x)$?

- ☐ $\ln(4) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$
- ☐ $\ln(4) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1} n} x^{n+1}, \quad -4 < x < 4$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}(n+1)} x^{n}, \quad -4 < x < 4$

(b) O polinómio de Taylor de ordem 4 de uma função f no ponto $c = 3$ é dado por:

$$T_3^4(f(x)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{27}(x-3)^2 - \frac{1}{81}(x-3)^3.$$

O valor de $f'''(3)$ é igual a:

☐ $\frac{1}{81}$ ☐ $-\frac{1}{81}$ ☐ $\frac{2}{27}$ ☐ $-\frac{2}{27}$

(c) Relativamente à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} \operatorname{sen}(-xy^2) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

podemos afirmar que:

☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$

☐ f é contínua em $\mathbb{R}^2$ ☐ não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(d) Seja $f(x,y) = 2 + x^2 - y^2$. Uma equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $P = (1, -1, 2)$ é:

- [ ] $2x - 2y + z = 6$
- [ ] $x + 2z - z = 6$
- [ ] $2x + 2y - z = -2$
- [ ] $x + y = 0$

(e) Considere a função $f(x,y) = 1 + x^2$, definida no conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x \leq 2 \ \wedge \ -3 < y < 3\}.$$

Podemos afirmar que:

- [ ] a função admite mínimo global mas não máximo global.
- [ ] a função admite máximo global mas não mínimo global.
- [ ] a função não admite máximo ou mínimo globais.
- [ ] a função admite máximo e mínimo globais.

(f) Sabendo que $y_1 = xe^{3x}$ é uma solução da equação $y' - 3y = e^{3x}$ e que $y_2 = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x$ é uma solução de $y' - 3y = \cos x$, então a solução geral da EDO $y' - 3y = e^{3x} + \cos x$ é:

- [ ] $y = Ce^{3x} + xe^{3x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y = Ce^{3x} + xe^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x, ,C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y = Ce^{-3x} + xe^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}$.
- [ ] $y = Ce^{-3x} + xe^{3x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\operatorname{sen} x,\ C \in \mathbb{R}$.

[15pts] 2. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+4)\left(\frac{2-x}{3}\right)^n$. Indique o maior intervalo onde a série é absolutamente convergente.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 3. Considere a função f dada por $f(x) = \cos(2x)$. Usando a fórmula MacLaurin de ordem 3 da função f, calcule um valor aproximado de $\cos(\frac{1}{5})$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] 4. Considere a série de potências $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$. Calcule, justificando, $S'(\frac{1}{2})$.

Continua na folha suplementar Nº

5. Seja f a função 2π-periódica, definida em $[-\pi, \pi[$ por $f(x) = |2x| - \pi$.

[13pts] (a) Justifique que a série de Fourier associada a f é uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

e determine o valor de a_0.

Continua na folha suplementar Nº

[07pts] (b) Esboce o gráfico da função soma da série da alínea anterior no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 6. Determine os extremantes locais da função f definida por $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 + 3y^2$.

Continua na folha suplementar Nº

[20pts] 7. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli: $xy' - 2y = \dfrac{3y^4}{x}, \quad x > 0$.

Continua na folha suplementar Nº

8. Considere a EDO $y''' + 4y' = \operatorname{sen} x$.

[8pts] (a) Resolva a EDO homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Sabendo que a EDO completa admite uma solução particular do tipo $y = A\cos x$, determine a solução geral da EDO completa.

Continua na folha suplementar Nº

9. Usando Transformadas de Laplace,

[07pts] (a) determine o valor do integral impróprio $\int_0^{+\infty} t \operatorname{sen}(t) e^{-3t}\, dt$.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) resolva a seguinte equação integro-diferencial $y'(t) + \int_0^t y(\tau) \cosh(t-\tau)\, d\tau = 0$ com a condição inicial $y(0) = 1$.

Continua na folha suplementar Nº

Formulário Transformada de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\mathrm{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\mathrm{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \|a\|)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \|a\|$

Propriedades da transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s)+G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = \mathrm{e}^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln \|u\|$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\sin u$	$u' \sin u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\tan u$	$u' \csc^2 u$	$-\cot u$	$u' \sec u$	$\ln \|\sec u + \tan u\|$
$u' \csc u$	$-\ln \|\csc u + \cot u\|$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\arcsin u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\mathrm{arctg}\, u$ ou $-\mathrm{arccotg} u$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	$\mathrm{sen}(x \pm y) = \mathrm{sen}\, x \cos y \pm \cos x\ \mathrm{sen}\, y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \mathrm{sen}\, x\ \mathrm{sen}\, y$ $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$