Cálculo de Programas
Trabalho Prático
MiEI+LCC — 2017/18

Departamento de Informática
Universidade do Minho

Junho de 2018

Grupo nr.	13
a81047	Catarina Machado
a82339	João Vilaça

1 Preâmbulo

A disciplina de Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação (conjunto de leis universais e seus corolários) e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos dois cursos que têm esta disciplina, restringe-se a aplicação deste método à programação funcional em Haskell. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

2 Documentação

Para cumprir de forma integrada os objectivos enunciados acima vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [**?**], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o código fonte e a documentação de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp1718t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp1718t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp1718t.zip` e executando

```
$ lhs2TeX cp1718t.lhs > cp1718t.tex
$ pdflatex cp1718t
```

em que `lhs2tex` é um pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que deve desde já instalar executando

```
$ cabal install lhs2tex
```

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp1718t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp1718t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp1718t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

[1] O suffixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

vai ser seleccionado pelo GHCi para ser executado.

3 Como realizar o trabalho

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de três alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo de trabalho por forma a poderem responder às questões que serão colocadas na *defesa oral* do relatório.

Em que consiste, então, o *relatório* a que se refere o parágrafo anterior? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo C com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp1718t.aux
$ makeindex cp1718t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. Dever-se-á ainda instalar o utilitário QuickCheck, que ajuda a validar programas em Haskell, a biblioteca JuicyPixels para processamento de imagens e a biblioteca gloss para geração de gráficos 2D:

```
$ cabal install QuickCheck JuicyPixels gloss
```

Para testar uma propriedade QuickCheck *prop*, basta invocá-la com o comando:

```
> quickCheck prop
+++ OK, passed 100 tests.
```

Problema 1

Segundo uma notícia do Jornal de Notícias, referente ao dia 12 de abril, *"apenas numa hora, foram transacionadas 1.2 mil milhões de dólares em bitcoins. Nas últimas 24 horas, foram transacionados 8,5 mil milhões de dólares, num total de 24 mil milhões de dólares referentes às principais criptomoedas"*.

De facto, é inquestionável que as criptomoedas, e em particular as bitcoin, vieram para ficar. Várias moedas digitais, e em particular as bitcoin, usam a tecnologia de block chain para guardar e assegurar todas as transações relacionadas com a moeda. Uma block chain é uma coleção de blocos que registam os movimentos da moeda; a sua definição em Haskell é apresentada de seguida.

$$\mathbf{data}\ Blockchain = Bc\ \{bc :: Block\} \mid Bcs\ \{bcs :: (Block, Blockchain)\}\ \mathbf{deriving}\ Show$$

Cada bloco numa block chain regista um número (mágico) único, o momento da execução, e uma lista de transações, tal como no código seguinte:

$$\mathbf{type}\ Block = (MagicNo, (Time, Transactions))$$

Cada transação define a entidade de origem da transferência, o valor a ser transacionado, e a entidade destino (por esta ordem), tal como se define de seguida.

$$\mathbf{type}\ Transaction = (Entity, (Value, Entity))$$
$$\mathbf{type}\ Transactions = [Transaction]$$

A partir de uma block chain, é possível calcular o valor que cada entidade detém, tipicamente designado de ledger:

$$\mathbf{type}\ Ledger = [(Entity, Value)]$$

Seguem as restantes definições Haskell para completar o código anterior. Note que $Time$ representa o momento da transação, como o número de milisegundos que passaram desde 1970.

$$\begin{aligned}&\textbf{type } MagicNo = String\\&\textbf{type } Time = Int \quad \text{-- em milisegundos}\\&\textbf{type } Entity = String\\&\textbf{type } Value = Int\end{aligned}$$

Neste contexto, implemente as seguintes funções:

1. Defina a função $allTransactions :: Blockchain \to Transactions$, como um catamorfismo, que calcula a lista com todas as transações numa dada block chain.

   Propriedade QuickCheck 1 *As transações de uma block chain são as mesmas da block chain revertida:*

   $$prop1a = sort \cdot allTransactions \equiv sort \cdot allTransactions \cdot reverseChain$$

   Note que a função $sort$ é usada apenas para facilitar a comparação das listas.

2. Defina a função $ledger :: Blockchain \to Ledger$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que calcula o ledger (i.e., o valor disponível) de cada entidade numa uma dada block chain. Note que as entidades podem ter valores negativos; de facto isso acontecerá para a primeira transação que executarem.

   Propriedade QuickCheck 2 *O tamanho do ledger é inferior ou igual a duas vezes o tamanho de todas as transações:*

   $$prop1b = \mathsf{length} \cdot ledger \leqslant (2*) \cdot \mathsf{length} \cdot allTransactions$$

   Propriedade QuickCheck 3 *O ledger de uma block chain é igual ao ledger da sua inversa:*

   $$prop1c = sort \cdot ledger \equiv sort \cdot ledger \cdot reverseChain$$

3. Defina a função $isValidMagicNr :: Blockchain \to Bool$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que verifica se todos os números mágicos numa dada block chain são únicos.

   Propriedade QuickCheck 4 *A concatenação de uma block chain com ela mesma nunca é válida em termos de números mágicos:*

   $$prop1d = \neg \cdot isValidMagicNr \cdot concChain \cdot \langle id, id \rangle$$

   Propriedade QuickCheck 5 *Se uma block chain é válida em termos de números mágicos, então a sua inversa também o é:*

   $$prop1e = isValidMagicNr \Rightarrow isValidMagicNr \cdot reverseChain$$

Problema 2

Uma estrutura de dados frequentemente utilizada para representação e processamento de imagens de forma eficiente são as denominadas quadtrees. Uma *quadtree* é uma árvore quaternária em que cada nodo tem quatro sub-árvores e cada folha representa um valor bi-dimensional.

$$\begin{aligned}&\textbf{data } QTree\ a = Cell\ a\ Int\ Int \mid Block\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\ (QTree\ a)\\&\quad \textbf{deriving } (Eq, Show)\end{aligned}$$

```
( 0 0 0 0 0 0 0 0 )
( 0 0 0 0 0 0 0 0 )
( 0 0 0 0 1 1 1 0 )
( 0 0 0 0 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 1 1 0 0 )
( 1 1 1 1 0 0 0 0 )
( 1 1 1 1 0 0 0 1 )
```

(a) Matriz de exemplo bm.

```
Block
  (Cell 0 4 4) (Block
    (Cell 0 2 2) (Cell 0 2 2) (Cell 1 2 2) (Block
      (Cell 1 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1)))
  (Cell 1 4 4)
  (Block
    (Cell 1 2 2) (Cell 0 2 2) (Cell 0 2 2) (Block
      (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 0 1 1) (Cell 1 1 1)))
```

(b) Quadtree de exemplo qt.

Figura 1: Exemplos de representações de bitmaps.

Uma imagem monocromática em formato bitmap pode ser representada como uma matriz de bits[2], tal como se exemplifica na Figura 1a.

O anamorfismo $bm2qt$ converte um bitmap em forma matricial na sua codificação eficiente em quadtrees, e o catamorfismo $qt2bm$ executa a operação inversa:

$$
\begin{aligned}
&bm2qt :: (Eq\ a) \Rightarrow Matrix\ a \to QTree\ a \\
&bm2qt = anaQTree\ f\ \textbf{where} \\
&\quad f\ m = \textbf{if}\ one\ \textbf{then}\ i_1\ u\ \textbf{else}\ i_2\ (a,(b,(c,d))) \\
&\qquad \textbf{where}\ x = (nub \cdot toList)\ m \\
&\qquad\qquad u = (head\ x, (ncols\ m, nrows\ m)) \\
&\qquad\qquad one = (ncols\ m \equiv 1 \vee nrows\ m \equiv 1 \vee \mathsf{length}\ \ x \equiv 1) \\
&\qquad\qquad (a,b,c,d) = splitBlocks\ (nrows\ m\ `div`\ 2)\ (ncols\ m\ `div`\ 2)\ m
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&qt2bm :: (Eq\ a) \Rightarrow QTree\ a \to Matrix\ a \\
&qt2bm = cataQTree\ [f,g]\ \textbf{where} \\
&\quad f\ (k,(i,j)) = matrix\ j\ i\ \underline{k} \\
&\quad g\ (a,(b,(c,d))) = (a \updownarrow b) \leftrightarrow (c \updownarrow d)
\end{aligned}
$$

O algoritmo $bm2qt$ particiona recursivamente a imagem em 4 blocos e termina produzindo folhas para matrizes unitárias ou quando todos os píxeis de um sub-bloco têm a mesma côr. Para a matriz bm de exemplo, a quadtree correspondente $qt = bm2qt\ bm$ é ilustrada na Figura 1b.

Imagens a cores podem ser representadas como matrizes de píxeis segundo o código de cores RGBA, codificado no tipo $PixelRGBA8$ em que cada pixel é um quádruplo de valores inteiros $(red, green, blue, alpha)$ contidos entre 0 e 255. Atente em alguns exemplos de cores:

$$
\begin{aligned}
whitePx &= PixelRGBA8\ 255\ 255\ 255\ 255 \\
blackPx &= PixelRGBA8\ 0\ 0\ 0\ 255 \\
redPx &= PixelRGBA8\ 255\ 0\ 0\ 255
\end{aligned}
$$

O módulo BMP, disponibilizado juntamente com o enunciado, fornece funções para processar ficheiros de imagem bitmap como matrizes:

$$
\begin{aligned}
&readBMP :: FilePath \to \mathsf{IO}\ (Matrix\ PixelRGBA8) \\
&writeBMP :: FilePath \to Matrix\ PixelRGBA8 \to \mathsf{IO}\ ()
\end{aligned}
$$

Teste, por exemplo, no $GHCi$, carregar a Figura 2a:

```
> readBMP "cp1718t_media/person.bmp"
```

Esta questão aborda operações de processamento de imagens utilizando quadtrees:

1. Defina as funções $rotateQTree :: QTree\ a \to QTree\ a$, $scaleQTree :: Int \to QTree\ a \to QTree\ a$ e $invertQTree :: QTree\ a \to QTree\ a$, como catamorfismos e/ou anamorfismos, que rodam[3], redimensionam [4] e invertem as cores de uma quadtree[5], respectivamente. Tente produzir imagens similares às Figuras 2b, 2c e 2d:

```
> rotateBMP  "cp1718t_media/person.bmp" "person90.bmp"
> scaleBMP 2 "cp1718t_media/person.bmp" "personx2.bmp"
> invertBMP  "cp1718t_media/person.bmp" "personinv.bmp"
```

[2] Cf. módulo $Data.Matrix$.
[3] Segundo um ângulo de 90º no sentido dos ponteiros do relógio.
[4] Multiplicando o seu tamanho pelo valor recebido.
[5] Um pixel pode ser invertido calculando $255 - c$ para cada componente c de cor RGB, exceptuando o componente alpha.

(a) Bitmap de exemplo.

(b) Rotação.

(c) Redimensionamento.

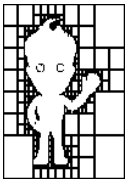
(d) Inversão de cores.

(e) Compresão de 1 nível.

(f) Compresão de 2 níveis.

(g) Compresão de 3 níveis.

(h) Compresão de 4 níveis.



(i) Bitmap de contorno.

(j) Bitmap com contorno.

Figura 2: Manipulação de uma figura bitmap utilizando quadtrees.

Propriedade QuickCheck 6 *Rodar uma quadtree é equivalente a rodar a matriz correspondente:*

$$prop2c = rotateMatrix \cdot qt2bm \equiv qt2bm \cdot rotateQTree$$

Propriedade QuickCheck 7 *Redimensionar uma imagem altera o seu tamanho na mesma proporção:*

$$prop2d\ (Nat\ s) = sizeQTree \cdot scaleQTree\ s \equiv ((s*) \times (s*)) \cdot sizeQTree$$

Propriedade QuickCheck 8 *Inverter as cores de uma quadtree preserva a sua estrutura:*

$$prop2e = shapeQTree \cdot invertQTree \equiv shapeQTree$$

2. Defina a função $compressQTree :: Int \to QTree\ a \to QTree\ a$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que comprime uma quadtree cortando folhas da árvore para reduzir a sua profundidade num dado número de níveis. Tente produzir imagens similares (mas não necessariamente iguais) às Figuras 2e, 2f, 2g e 2h:

```
> compressBMP 1 "cp1718t_media/person.bmp" "person1.bmp"
> compressBMP 2 "cp1718t_media/person.bmp" "person2.bmp"
> compressBMP 3 "cp1718t_media/person.bmp" "person3.bmp"
> compressBMP 4 "cp1718t_media/person.bmp" "person4.bmp"
```

Propriedade QuickCheck 9 *A quadtree comprimida tem profundidade igual à da quadtree original menos a taxa de compressão:*

$$prop2f\ (Nat\ n) = depthQTree \cdot compressQTree\ n \equiv (-n) \cdot depthQTree$$

3. Defina a função $outlineQTree :: (a \to Bool) \to QTree\ a \to Matrix\ Bool$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que recebe uma função que determina quais os píxeis de fundo e converte uma quadtree numa matriz monocromática, de forma a desenhar o contorno de uma malha poligonal contida na imagem. Tente produzir imagens similares (mas não necessariamente iguais) às Figuras 2i e 2j:

```
> outlineBMP    "cp1718t_media/person.bmp" "personOut1.bmp"
> addOutlineBMP "cp1718t_media/person.bmp" "personOut2.bmp"
```

Propriedade QuickCheck 10 *A matriz de contorno tem dimensões iguais às da quadtree:*

$$prop2g = sizeQTree \equiv sizeMatrix \cdot outlineQTree\ (<0)$$

Teste unitário 1 *Contorno da quadtree de exemplo qt:*

$$teste2a = outlineQTree\ (\equiv 0)\ qt \equiv qtOut$$

Problema 3

O cálculo das combinações de n k-a-k,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} \tag{1}$$

envolve três factoriais. Recorrendo à lei de recursividade múltipla do cálculo de programas, é possível escrever o mesmo programa como um simples ciclo-for onde se fazem apenas multiplicações e somas. Para isso, começa-se por estruturar a definição dada da forma seguinte,

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)$$

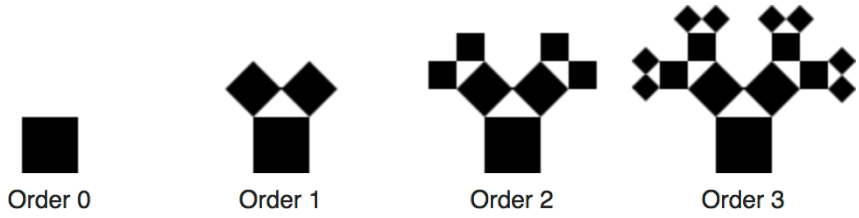


Figura 3: Passos de construção de uma árvore de Pitágoras de ordem 3.

onde

$$h\ k\ d = \frac{f\ k\ d}{g\ d}$$
$$f\ k\ d = \frac{(d+k)!}{k!}$$
$$g\ d = d!$$

assumindo-se $d = n - k \geqslant 0$. É fácil de ver que $f\ \ k$ e g se desdobram em 4 funções mutuamente recursivas, a saber

$$f\ k\ 0 = 1$$
$$f\ k\ (d+1) = \underbrace{(d+k+1)}_{l\ k\ d} * f\ k\ d$$
$$l\ k\ 0 = k+1$$
$$l\ k\ (d+1) = l\ k\ d + 1$$

e

$$g\ 0 = 1$$
$$g\ (d+1) = \underbrace{(d+1)}_{s\ d} * g\ d$$
$$s\ 0 = 1$$
$$s\ (d+1) = s\ d + 1$$

A partir daqui alguém derivou a seguinte implementação:

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)\ \textbf{where}\ h\ k\ n = \textbf{let}\ (a, \_, b, \_) = \text{for}\ loop\ (base\ k)\ n\ \textbf{in}\ a\ /\ b$$

Aplicando a lei da recursividade múltipla para $\langle f\ k, l\ k\rangle$ e para $\langle g, s\rangle$ e combinando os resultados com a lei de banana-split, derive as funções $base\ k$ e $loop$ que são usadas como auxiliares acima.

Propriedade QuickCheck 11 *Verificação que* $\binom{n}{k}$ *coincide com a sua especificação (1):*

$$prop3\ (NonNegative\ n)\ (NonNegative\ k) = k \leqslant n \Rightarrow \binom{n}{k} \equiv n!\ /\ (k! * (n-k)!)$$

Problema 4

Fractais são formas geométricas que podem ser construídas recursivamente de acordo com um conjunto de equações matemáticas. Um exemplo clássico de um fractal são as árvores de Pitágoras. A construção de uma árvore de Pitágoras começa com um quadrado, ao qual se unem dois quadrados redimensionados pela escala $\sqrt{2}/2$, de forma a que os cantos dos 3 quadrados coincidam e formem um triângulo rectângulo isósceles. Este procedimento é repetido recursivamente de acordo com uma dada ordem, definida como um número natural (Figura 3).

Uma árvore de Pitágoras pode ser codificada em Haskell como uma full tree contendo quadrados nos nodos e nas folhas, sendo um quadrado definido simplesmente pelo tamanho do seu lado:

$$\textbf{data}\ FTree\ a\ b = Unit\ b \mid Comp\ a\ (FTree\ a\ b)\ (FTree\ a\ b)\ \textbf{deriving}\ (Eq, Show)$$
$$\textbf{type}\ PTree = FTree\ Square\ Square$$
$$\textbf{type}\ Square = Float$$

1. Defina a função $generatePTree :: Int \to PTree$, como um anamorfismo, que gera uma árvore de Pitágoras para uma dada ordem.

   Propriedade QuickCheck 12 *Uma árvore de Pitágoras tem profundidade igual à sua ordem:*

   $$prop4a\ (SmallNat\ n) = (depthFTree \cdot generatePTree)\ n \equiv n$$

   Propriedade QuickCheck 13 *Uma árvore de Pitágoras está sempre balanceada:*

   $$prop4b\ (SmallNat\ n) = (isBalancedFTree \cdot generatePTree)\ n$$

2. Defina a função $drawPTree :: PTree \to [Picture]$, utilizando catamorfismos e/ou anamorfismos, que anima incrementalmente os passos de construção de uma árvore de Pitágoras recorrendo à biblioteca gloss. Anime a sua solução:

   ```
   > animatePTree 3
   ```

Problema 5

Uma das áreas em maior expansão no campo da informática é a análise de dados e machine learning. Esta questão aborda um *mónade* que ajuda a fazer, de forma simples, as operações básicas dessas técnicas. Esse mónade é conhecido por *bag*, *saco* ou *multi-conjunto*, permitindo que os elementos de um conjunto tenham multiplicidades associadas. Por exemplo, seja

$$\textbf{data}\ Marble = Red \mid Pink \mid Green \mid Blue \mid White\ \textbf{deriving}\ (Read, Show, Eq, Ord)$$

um tipo dado.[6] A lista $[Pink, Green, Red, Blue, Green, Red, Green, Pink, Blue, White]$ tem elementos repetidos. Assumindo que a ordem não é importante, essa lista corresponde ao saco

```
{ Red |-> 2 , Pink |-> 2 , Green |-> 3 , Blue |-> 2 , White |-> 1 }
```

que habita o tipo genérico dos "bags":

$$\textbf{data}\ Bag\ a = B\ [(a, Int)]\ \textbf{deriving}\ (Ord)$$

O mónade que vamos construir sobre este tipo de dados faz a gestão automática das multiciplidades. Por exemplo, seja dada a função que dá o peso de cada berlinde em gramas:

$$\begin{aligned}
&marbleWeight :: Marble \to Int\\
&marbleWeight\ Red\ \ = 3\\
&marbleWeight\ Pink\ = 2\\
&marbleWeight\ Green = 3\\
&marbleWeight\ Blue\ = 6\\
&marbleWeight\ White = 2
\end{aligned}$$

Então, se quisermos saber quantos *berlindes* temos, de cada *peso*, não teremos que fazer contas: basta calcular

$$marbleWeights = \mathsf{fmap}\ marbleWeight\ bagOfMarbles$$

onde *bagOfMarbles* é o saco de berlindes referido acima, obtendo-se:

```
{ 2 |-> 3 , 3 |-> 5 , 6 |-> 2 }.
```

[6] "Marble" traduz para "berlinde" em português.

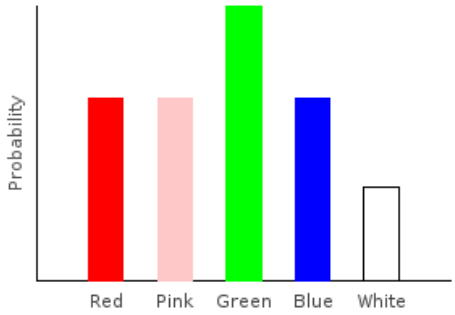


Figura 4: Distribuição de berlindes num saco.

Mais ainda, se quisermos saber o total de berlindes em $bagOfMarbles$ basta calcular fmap $(!)$ $bagOfMarbles$ obtendo-se `{ () |-> 10 }`; isto é, o saco tem 10 berlindes no total.

Finalmente, se quisermos saber a probabilidade da cor de um berlinde que tiremos do saco, basta converter o referido saco numa distribuição correndo:

$$marblesDist = dist\ bagOfMarbles$$

obtendo-se a distribuição (graças ao módulo Probability):

```
Green  30.0%
  Red  20.0%
 Pink  20.0%
 Blue  20.0%
White  10.0%
```

cf. Figura 4.

Partindo da seguinte declaração de Bag como um functor e como um mónade,

$$\begin{array}{l}\textbf{instance}\ Functor\ Bag\ \textbf{where}\\ \quad \mathsf{fmap}\ f = B \cdot \mathsf{map}\ (f \times id) \cdot unB\\ \textbf{instance}\ Monad\ Bag\ \textbf{where}\\ \quad x \gg\!= f = (\mu \cdot \mathsf{fmap}\ f)\ x\ \textbf{where}\\ \quad return = singletonbag\end{array}$$

1. Defina a função μ (multiplicação do mónade Bag) e a função auxiliar $singletonbag$.
2. Verifique-as com os seguintes testes unitários:

Teste unitário 2 *Lei* $\mu \cdot return = id$*:*

$$test5a = bagOfMarbles \equiv \mu\ (return\ bagOfMarbles)$$

Teste unitário 3 *Lei* $\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{fmap}\ \mu$*:*

$$test5b = (\mu \cdot \mu)\ b3 \equiv (\mu \cdot \mathsf{fmap}\ \mu)\ b3$$

onde $b3$ *é um saco dado em anexo.*

Anexos

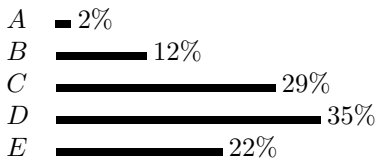
A Mónade para probabilidades e estatística

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{unD :: [(a, ProbRep)]\} \tag{2}$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a $100/$.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam $100/$. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

```
d1 :: Dist Char
d1 = D [('A',0.02),('B',0.12),('C',0.29),('D',0.35),('E',0.22)]
```

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'  35.0%
'C'  29.0%
'E'  22.0%
'B'  12.0%
'A'   2.0%
```

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular de programação monádica.

B Definições auxiliares

Funções para mostrar *bags*:

```
instance (Show a, Ord a, Eq a) => Show (Bag a) where
  show = showbag . consol . unB where
    showbag = concat .
      (++["  }"]) . ("{  ":) .
      (intersperse "  ,  ") .
      sort .
      (map f) where f (a,b) = (show a) ++ "  |->  " ++ (show b)
unB (B x) = x
```

Igualdade de *bags*:

```
instance (Eq a) => Eq (Bag a) where
  b == b' = (unB b) `lequal` (unB b')
    where lequal a b = isempty (a `ominus` b)
      ominus a b = a ++ neg b
      neg x = [(k,-i) | (k,i) <- x]
```

Ainda sobre o mónade *Bag*:

```
instance Applicative Bag where
  pure = return
  (<*>) = aap
```

O exemplo do texto:

$$bagOfMarbles = B\ [(Pink, 2), (Green, 3), (Red, 2), (Blue, 2), (White, 1)]$$

Um valor para teste (bags de bags de bags):

```
b3 :: Bag (Bag (Bag Marble))
b3 = B [(B [(B [(Pink,2),(Green,3),(Red,2),(Blue,2),(White,1)],5)
  ,(B [(Pink,1),(Green,2),(Red,1),(Blue,1)],2)],2)]
```

Outras funções auxiliares:

```
a ↦ b = (a, b)
consol :: (Eq b) ⇒ [(b, Int)] → [(b, Int)]
consol = filter nzero · map (id × sum) · col where nzero (_, x) = x ≢ 0
isempty :: Eq a ⇒ [(a, Int)] → Bool
isempty = all (≡ 0) · map π2 · consol
col x = nub [k ↦ [d' | (k', d') ← x, k' ≡ k] | (k, d) ← x]
consolidate :: Eq a ⇒ Bag a → Bag a
consolidate = B · consol · unB
```

C Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções aos exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto e / ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Problema 1

De modo a resolver este primeiro problema, antes de procedermos ao desenvolvimento das suas 3 alíneas, tivemos que definir algumas funções que nos ajudarão a implementar as soluções requeridas.

```
inBlockchain = [Bc, Bcs]
outBlockchain (Bc a) = i1 (a)
outBlockchain (Bcs (a, b)) = i2 (a, b)
recBlockchain g = id + (id × g)
cataBlockchain g = g · (recBlockchain (cataBlockchain g)) · outBlockchain
anaBlockchain g = inBlockchain · (recBlockchain (anaBlockchain g)) · g
hyloBlockchain h g = cataBlockchain h · anaBlockchain g
```

Estas funções, nomeadamente $inBlockchain$, $outBlockchain$, $recBlockchain$, $cataBlockchain$, $anaBlockchain$ e $hyloBlockchain$, podem ser deduzidas tendo em consideração o Tipo de Dados do problema, a matéria de Cálculo de Programas e com a ajuda de alguns diagramas.

Uma vez que o tipo de Blockchain é $Bc\ \{bc :: Block\}$ ou $Bcs\ \{bcs :: (Block, Blockchain)\}$, sabemos que o $inBlockchain$ e o $outBlockchain$ deverão "fechar"e "abrir"a Blockchain, respetivamente, logo, conseguimos representar os diagramas:

$$Blockchain \xleftarrow[inBlockchain]{} Block + (Block \times Blockchain)$$

$$Blockchain \xrightarrow[outBlockchain]{} Block + (Block \times Blockchain)$$

Assim, conseguimos perceber de imediato a definição de ambas as funções:

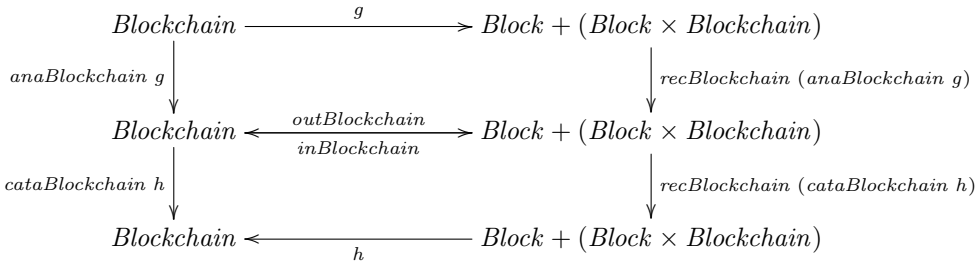
$$inBlockchain = [Bc, Bcs]$$

$$outBlockchain\ (Bc\ a) = i_1\ (a)$$
$$outBlockchain\ (Bcs\ (a, b)) = i_2\ (a, b)$$

Relativamente às funções $recBlockchain$, $cataBlockchain$, $anaBlockchain$ e $hyloBlockchain$, os seus tipos já estavam presentes no enunciado e o significado e intuito de cada uma delas também já era sabido.

A título de exemplo, através do diagrama em seguida conseguimos ter uma melhor perceção de qual deverá ser a definição de cada uma destas funções.

Assumimos que as funções g e h mencionadas são funções que devolvem a identidade.



Assim, intuitivamente conseguimos perceber a definição de cada uma delas.

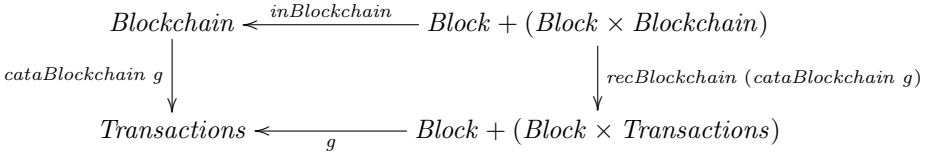
$$recBlockchain\ g = id + (id \times g)$$
$$cataBlockchain\ h = h \cdot (recBlockchain\ (cataBlockchain\ h)) \cdot outBlockchain$$
$$anaBlockchain\ g = inBlockchain \cdot (recBlockchain\ (anaBlockchain\ g)) \cdot g$$
$$hyloBlockchain\ h\ g = cataBlockchain\ h \cdot anaBlockchain\ g$$

Na resolução das alíneas recorremos a alguns diagramas onde também fica implícito o porquê da definição de cada uma destas funções.

1. Função allTransactions

   O objetivo da função $allTransactions$ é calcular a lista com todas as transações numa dada block chain, utilizando um catamorfismo.

   O diagrama desta função será:



   O objetivo é descobrir o gene g, para assim termos a definição final de como algo do género $allTransactions = cataBlockchain\ g$

   Assim, tendo em atenção o tipo de Block:

   $$\mathbf{type}\ Block = (MagicNo, (Time, Transactions))$$

   E o tipo de Blockchain já apresentado, deduzimos que o g terá que ser um "either", $g = [b0, joint]$, onde de um lado irá tratar o $Block$ e do outro o $Block \times Transactions$. Isso deve-se ao facto de g receber como parâmetro: $Block + (Block \times Transactions)$, ou seja, uma "soma", e devolver: $Transactions$, logo, obrigatoriamente a função terá que ser "either" para abolir o $+$.

(a) Descobrir b0

Para tratar o lado em que o domínio é $Block$, e sabendo que o resultado terá que ser $Transactions$, o objetivo desta função será "retirar"do $Block$ as $Transactions$.

Assim, teremos que definir $b0$ com projeções π_2 como podemos verificar no diagrama em seguida:

$$\begin{array}{l} MagicNo \times (Time \times Transactions) \\ \qquad\qquad \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2 \cdot \pi_2} \\ \qquad\quad Transactions \end{array}$$

Deste modo, fica definido $b0$ como:

$$b0 = \pi_2 \cdot \pi_2$$

(b) Descobrir joint

Tendo em conta o domínio da função $joint$, ou seja, $Block \times Transactions$, percebemos que o objetivo desta função será retirar de $Block$ as suas $Transactions$ e juntá-las às $Transactions$ já acumuladas (passadas como parâmetro).

Assim, uma definição de $joint\ pointwise$ é:

$$joint\ (block, transac) = (\pi_2\ (\pi_2\ block)) +\!\!+ transac$$

Esta função cumpre os requisitos a que a proposemos, uma vez que retira de $Block$ as $Transactions$, e concatena-as às $Transactions$ passadas como parâmetro.

Temos então a definição de $b0$ e $joint$, pelo que ficamos a saber qual é o gene g:

$$\begin{array}{ll} & g = [b0, joint] \\ \equiv & \quad \{\ \text{Definição de b0 ; Definição de joint}\ \} \\ & g = [\pi_2 \cdot \pi_2, joint] \\ & \textbf{where}\ joint\ (x, y) = (\pi_2\ (\pi_2\ x)) +\!\!+ y \end{array}$$

Deste modo, está definida a função $allTransactions$ pedida:

$$\begin{array}{l} allTransactions\ a = cataBlockchain\ [\pi_2 \cdot \pi_2, joint]\ a \\ \quad \textbf{where}\ joint\ (x, y) = (\pi_2\ (\pi_2\ x)) +\!\!+ y \end{array}$$

2. Função ledger

—

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\mathsf{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\ {\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\ B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A* & \xrightarrow{lsplitBGene} & 1 + A * \times (A \times A\ above)\ above \\ {\scriptstyle ana\ lsplitBGene}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + ((ana\ lsplitBGene) \times \mathsf{map}\ \ (id \times ana\ lsplitBGene))} \\ B & \xrightarrow[inB]{outB} & 1 + B \times (A \times B)\ above \\ {\scriptstyle cata\ inordBGene}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + ((cata\ inordBGene) \times \mathsf{map}\ \ (id \times cata\ inordBGene))} \\ A\ above & \xleftarrow[inordBGene]{} & 1 + A\ above \times (A \times A\ above)\ above \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&groupL :: Ledger \to Ledger\\
&groupL\ t = (sums \cdot \mathsf{map}\ \ (mapFst\ head \cdot unzip) \cdot groupBy\ (\lambda x\ y \to \pi_1\ x \equiv \pi_1\ y) \cdot sort)\ t\\
&\quad \textbf{where}\ mapFst\ f\ (a, b) = (f\ a, b)\\
&\qquad\quad sums\ [\,] = [\,];\\
&\qquad\quad sums\ ((a, b) : t) = (a, sum\ b) : sums\ t\\
&ledger\ a = groupL\ (cataList\ [nil, insert]\ (allTransactions\ a))\\
&\quad \textbf{where}\ insert\ (x, y) = (\pi_1\ x, -\pi_1\ (\pi_2\ x)) : (\pi_2\ (\pi_2\ x), \pi_1\ (\pi_2\ x)) : y\\
&isValidMagicNr\ a = all\ ((\equiv)\ 1 \cdot \mathsf{length}\ ) \cdot group \cdot sort\ \$\ cataBlockchain\ [list, insert]\ a\\
&\quad \textbf{where}\ list\ x = [\pi_1\ x]\\
&\qquad\quad insert\ (x, y) = (\pi_1\ x) : y
\end{aligned}
$$

Problema 2

$$
\begin{aligned}
&inQTree = [uncurryCell\ Cell, uncurryBlock\ Block]\\
&\quad \textbf{where}\ uncurryCell\ f\ (e, (n1, n2)) = f\ e\ n1\ n2\\
&\qquad uncurryBlock\ f\ (q1, (q2, (q3, q4))) = f\ q1\ q2\ q3\ q4\\
&outQTree\ (Cell\ e\ n1\ n2) = i_1\ (e, (n1, n2))\\
&outQTree\ (Block\ q1\ q2\ q3\ q4) = i_2\ (q1, (q2, (q3, q4)))\\
&baseQTree\ f\ g = (f \times id) + (g \times (g \times (g \times g)))\\
&recQTree\ g = baseQTree\ id\ g\\
&cataQTree\ g = g \cdot (recQTree\ (cataQTree\ g)) \cdot outQTree\\
&anaQTree\ g = inQTree \cdot (recQTree\ (anaQTree\ g)) \cdot g\\
&hyloQTree\ h\ g = cataQTree\ h \cdot anaQTree\ g\\
&\textbf{instance}\ Functor\ QTree\ \textbf{where}\\
&\quad \mathsf{fmap}\ f = cataQTree\ (inQTree \cdot baseQTree\ f\ id)\\
&rotateQTree = \bot\\
&scaleQTree = \bot\\
&invertQTree = \bot\\
&compressQTree = \bot\\
&outlineQTree = \bot
\end{aligned}
$$

Problema 3

O objetivo deste problema é derivar as funções $base\ k$ e $loop$ de modo a podermos calcular as combinações de n k-a-k,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

recorrendo a um ciclo-for onde apenas se fazem multiplicações e somas:

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)\ \textbf{where}\ h\ k\ n = \textbf{let}\ (a, \_, b, \_) = \mathsf{for}\ loop\ (base\ k)\ n\ \textbf{in}\ a\ /\ b$$

Tendo em conta o **where** $h\ \ k\ \ n$ e o **in** $\ a\ /\ b$ da função acima apresentada e comparando com a definição de $h\ k$ do enunciado,

$$
\begin{aligned}
h\ k\ n &= \frac{f\ k\ n}{g\ n}\\
f\ k\ n &= \frac{(n+k)!}{k!}\\
g\ n &= n!
\end{aligned}
$$

constatamos que o nosso a em **in** $a\ /\ b$ terá que ser a função $f\ \ k$ e o b será a função g.

Assim, para podermos descobrir a definição das funções pedidas ($base\ \ k$ e $loop$) teremos que, a partir da definição de $f\ \ k$ (e consequentemente de $l\ \ k$) e da definição de g (e consequentemente de

s), descobrirmos a definição de $\langle f\ k, l\ k\rangle$ e de $\langle g, s\rangle$ (com recurso à lei da recursividade múltipla) e posteriormente combinarmos os seus resultados com a lei de banana-split.

Para tal, dividimos o nosso problema em diferentes partes:

1. Determinar $\langle f\ k, l\ k\rangle$

   Para isso, tirando partido da indicação do enunciado, ou seja, com o intuito de aplicar a lei da recursividade múltipla, temos:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot \mathbf{in} = o \cdot F\ \langle f\ k, l\ k\rangle \\ l\ k \cdot \mathbf{in} = p \cdot F\ \langle f\ k, l\ k\rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Fokkinga: (50)}\ \} \\
& \langle f\ k, l\ k\rangle = (\!|\langle o, p\rangle|\!)
\end{aligned}
$$

   O objetivo será então determinar o e p e, para isso, teremos que olhar individualmente para cada uma das funções $f\ k$ e $l\ k$, apresentadas no enunciado:

   (a) Descobrir o (com a ajuda da função $f\ k$)

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k\ 0 = 1 \\ f\ k\ (d+1) = (l\ k\ d) * (f\ k\ d) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def comp: (74) ; (*) escrita como função prefixo}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot 0 = 1 \\ f\ k \cdot (d+1) = (*)\ (l\ k\ d)\ (f\ k\ d) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Igualdade extencional: (73) ; Def const: (76)}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ f\ k \cdot (d+1) = (*)\ (l\ k\ d)\ (f\ k\ d) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de mul: mul (a, b) = (*) a b ;}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ f\ k \cdot (d+1) = mul\ (f\ k\ d, l\ k\ d) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def split: (78) ; Def comp: (74) ; Definição de succ: succ d = d + 1 ; Igualdade extencional: (73)}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f\ k \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ f\ k \cdot (\mathsf{succ}) = mul \cdot \langle f\ k, l\ k\rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Eq + : (27) ; Natural id : (1)}\ \} \\
& [f\ k \cdot \underline{0}, f\ k \cdot (\mathsf{succ})] = [\underline{1} \cdot id, mul \cdot \langle f\ k, l\ k\rangle] \\
\equiv & \quad \{\ \text{Fusão + : (20) ; Absorção x : (11)}\ \} \\
& f\ k \cdot [\underline{0}, (\mathsf{succ})] = [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle f\ k, l\ k\rangle) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de in e functor (dos naturais): } \mathbf{in} = [\underline{0}, (\mathsf{succ})]\ ,\ F\ \langle f\ k, l\ k\rangle = (id + \langle f\ k, l\ k\rangle)\ \} \\
& f\ k \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot F\ \langle f\ k, l\ k\rangle
\end{aligned}
$$

   Logo, $o = [\underline{1}, mul]$.

   (b) Descobrir p (com a ajuda da função $l\ k$)

$$
\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} l\ k\ 0 = k + 1 \\ l\ k\ (d+1) = l\ k\ d + 1 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def comp: (74)}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} l\ k \cdot 0 = k + 1 \\ l\ k \cdot (d+1) = l\ k\ d + 1 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Definição de succ: succ d = d + 1 ; Def const: (76) ; Igualdade extencional: (73) } \}$$

$$\begin{cases} l\ k \cdot \underline{0} = \underline{(\mathsf{succ}\ \ k)} \\ l\ k \cdot (\mathsf{succ}\ ) = \mathsf{succ}\ \cdot (l\ k) \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Eq + : (27) ; Natural id : (1) } \}$$

$$[l\ k \cdot \underline{0}, l\ k \cdot (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot l\ k]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Natural id : (1) ; Cancelamento x : (7) } \}$$

$$[l\ k \cdot \underline{0}, l\ k \cdot (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)} \cdot id, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \langle f\ k, l\ k \rangle]$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Fusão + : (20) ; Absorção x : (11) } \}$$

$$l\ k \cdot [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \cdot (id + \langle f\ k, l\ k \rangle)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Definição de in e functor (dos naturais): } \mathbf{in} = [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )] \text{ , } F\ \langle f\ k, l\ k \rangle = (id + \langle f\ k, l\ k \rangle) \ \}$$

$$l\ k \cdot \mathbf{in} = [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \cdot F\ \langle f\ k, l\ k \rangle$$

Logo, $p = [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2]$.

Deste modo, após encontrarmos a definição de o e de p conseguimos determinar a definição de $\langle f\ k, l\ k \rangle$ uma vez que já haviamos concluido que $\langle f\ k, l\ k \rangle = (\!|\langle o, p \rangle|\!)$.
Logo, $\langle f\ k, l\ k \rangle = (\!|\langle [\underline{1}, mul], [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle|\!)$.

2. Determinar $\langle g, s \rangle$

   Para descobrir $\langle g, s \rangle$ seguimos o mesmo raciocínio, isto é, tentamos descobrir um v e um j de modo a podermos aplicar a lei da recursividade múltipla:

$$\begin{cases} g \cdot \mathbf{in} = v \cdot F\ \langle g, s \rangle \\ s \cdot \mathbf{in} = j \cdot F\ \langle g, s \rangle \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Fokkinga: (50) } \}$$

$$\langle g, s \rangle = (\!|\langle v, j \rangle|\!)$$

   (a) Descobrir v (com a ajuda da função g)

$$\begin{cases} g\ 0 = 1 \\ g\ (d+1) = (g\ d) * (s\ d) \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Def comp: (74) ; (*) escrita como função prefixo } \}$$

$$\begin{cases} g \cdot 0 = 1 \\ g \cdot (d+1) = (*)\ (g\ d)\ (s\ d) \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Igualdade extencional: (73) ; Def const: (76) } \}$$

$$\begin{cases} g \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ g \cdot (d+1) = (*)\ (g\ d)\ (s\ d) \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Definição de mul: mul (a, b) = (*) a b ; } \}$$

$$\begin{cases} g \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ g \cdot (d+1) = mul\ (g\ d, s\ d) \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Def split: (78) ; Def comp: (74) ; Definição de succ: succ d = d + 1 ; Igualdade extencional: (73) } \}$$

$$\begin{cases} g \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ g \cdot (\mathsf{succ}\ ) = mul \cdot \langle g, s \rangle \end{cases}$$

$$\equiv \quad \{ \text{ Eq + : (27) ; Natural id : (1) } \}$$

$$
\begin{aligned}
& [g \cdot \underline{0}, g \cdot (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{1} \cdot id, mul \cdot \langle g, s \rangle] \\
\equiv & \quad \{\ \text{Fusão + : (20) ; Absorção x : (11)}\ \} \\
& g \cdot [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{1}, mul] \cdot (id + \langle g, s \rangle) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de in e functor (dos naturais): } \mathbf{in} = [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )]\ ,\ F\ \langle g, s \rangle = (id + \langle g, s \rangle\ \}\ \} \\
& g \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, mul] \cdot F\ \langle g, s \rangle
\end{aligned}
$$

Logo, $v = [\underline{1}, mul]$.

(b) Descobrir j (com a ajuda da função s)

$$
\begin{aligned}
& \begin{cases} s\ 0 = 1 \\ s\ (d+1) = s\ d + 1 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def comp: (74)}\ \} \\
& \begin{cases} s \cdot 0 = 1 \\ s \cdot (d+1) = s\ d + 1 \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de succ: succ d = d + 1 ; Def const: (76) ; Igualdade extencional: (73)}\ \} \\
& \begin{cases} s \cdot \underline{0} = \underline{1} \\ s \cdot (\mathsf{succ}\ ) = \mathsf{succ}\ \cdot s \end{cases} \\
\equiv & \quad \{\ \text{Eq + : (27) ; Natural id : (1)}\ \} \\
& [s \cdot \underline{0}, s \cdot (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot s] \\
\equiv & \quad \{\ \text{Natural id : (1) ; Cancelamento x : (7)}\ \} \\
& [s \cdot \underline{0}, s \cdot (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{1} \cdot id, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \langle g, s \rangle] \\
\equiv & \quad \{\ \text{Fusão + : (20) ; Absorção x : (11)}\ \} \\
& s \cdot [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )] = [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \cdot (id + \langle s, g \rangle) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de in e functor (dos naturais): } \mathbf{in} = [\underline{0}, (\mathsf{succ}\ )]\ ,\ F\ (\langle s, g \rangle = (id + \langle s, g \rangle)\ \}\ \} \\
& s \cdot \mathbf{in} = [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \cdot F\ \langle s, g \rangle
\end{aligned}
$$

Logo, $j = [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2]$.

Deste modo, após encontrarmos a definição de v e de j conseguimos determinar a definição de $\langle g, s \rangle$ uma vez que já haviamos constatado que $\langle g, s \rangle = (\!|\langle v, j \rangle|\!)$.
Logo, $\langle g, s \rangle = (\!|\langle [\underline{1}, mul], [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle|\!)$.

3. Aplicar a lei de banana split à definição de $\langle f\ k, l\ k \rangle$ e $\langle g, s \rangle$

A lei de banana split (51) é a seguinte:

$$
\begin{aligned}
& \langle (\!|i|\!), (\!|j|\!) \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{Banana-split : (51)}\ \} \\
& (\!|(i \times j) \cdot \langle F\ \pi_1, F\ \pi_2 \rangle|\!)
\end{aligned}
$$

Assim, podemos constatar que, no nosso caso:

$$(\!|i|\!) = (\!|\langle [\underline{1}, mul], [\underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle|\!)$$

e

$$(\!|j|\!) = (\!|\langle [\underline{1}, mul], [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle|\!)$$

Assim, retomando o resultado anterior e aplicando a lei temos:

$$
\begin{aligned}
& \langle (\!| \langle [\underline{1}, mul], [\underline{(\mathsf{succ}\ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle |\!), (\!| \langle [\underline{1}, mul], [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle |\!) \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{Banana-split : (51)}\ \} \\
& (\!| (\!| \langle [\underline{1}, mul], [\underline{(\mathsf{succ}\ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle |\!) \times (\!| \langle [\underline{1}, mul], [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle |\!)) \cdot \langle F\ \pi_1, F\ \pi_2 \rangle |\!)
\end{aligned}
$$

Agora podemos então continuar a resolver o problema, sempre com o intuito de chegar a um $(\!|[b, i]|\!)$ para podermos aplicar a definição de ciclo for:

$$\mathsf{for}\ b\ \underline{i} = (\!|[i, b]|\!)$$

Retomando o resultado anterior e continuando a aplicar as leis do cálculo de programas, temos:

$$
\begin{aligned}
& (\!| (\langle [\underline{1}, mul], [\underline{(\mathsf{succ}\ k)}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle \times \langle [\underline{1}, mul], [\underline{1}, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2] \rangle) \cdot \langle F\ \pi_1, F\ \pi_2 \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Absorção x : (11) ; Lei da troca : (28)}\ \} \\
& (\!| \langle [\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle mul, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \rangle] \cdot F\ \pi_1, [\langle \underline{1}, \underline{1} \rangle, \langle mul, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \rangle] \cdot F\ \pi_2 \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição do Functor (dos naturais): } F\ \pi_1 = id + \pi_1, F\ \pi_2 = id + \pi_2\ \} \\
& (\!| \langle [\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle mul, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (id + \pi_1), [\langle \underline{1}, \underline{1} \rangle, \langle mul, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \rangle] \cdot (id + \pi_2) \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Absorção + : (22) x2 ; Fusão x : (10) x2 ; Natural id : (1) x2}\ \} \\
& (\!| \langle [\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle], [\langle \underline{1}, \underline{1} \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle] \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Lei da troca : (28)}\ \} \\
& (\!| [\langle \langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle \underline{1}, \underline{1} \rangle \rangle, \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle] |\!) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Definição de for: for } b\ \underline{i} = (\!|[i, b]|\!)\ \} \\
& \mathsf{for}\ \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle\ \langle \langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle \underline{1}, \underline{1} \rangle \rangle
\end{aligned}
$$

Assim, tendo em conta a definição do enunciado:

$$\mathsf{for}\ loop\ (base\ k)$$

E comparando com o nosso resultado:

$$\mathsf{for}\ \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle\ \langle \langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle \underline{1}, \underline{1} \rangle \rangle$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
& loop = \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ}\ \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \\
& base\ k = \langle \langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle \underline{1}, \underline{1} \rangle \rangle
\end{aligned}
$$

4. Derivar a definição de base k

   Focando em $base\ k$:

$$base\ k = \langle \langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ k)} \rangle, \langle \underline{1}, \underline{1} \rangle \rangle$$

Vamos agora introduzir variáveis à definição *pointfree* para podermos ter o resultado da função $base\ k$ em haskell.

Uma vez que o tipo de split, por exemplo, $\langle id, id\rangle$ é:

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle \langle id,id\rangle}\downarrow \\ A \times A \end{array}$$

O tipo de $\langle\langle id, id\rangle, \langle id, id\rangle\rangle$ será:

$$\begin{array}{c} A \\ {\scriptstyle \langle\langle id,id\rangle,\langle id,id\rangle\rangle}\downarrow \\ (A \times A) \times (A \times A) \end{array}$$

Assim, conseguimos perceber qual é o tipo da variável que temos que adicionar uma vez que no nosso caso também se trata de um split de split.

Logo, continuando a derivação:

$$\begin{aligned}
& base\ k = \langle\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}\rangle, \langle \underline{1}, \underline{1}\rangle\rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{Igualdade extensional : (73)}\ \} \\
& base\ k = \langle\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}\rangle, \langle \underline{1}, \underline{1}\rangle\rangle\ a \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def split : (78)}\ \} \\
& base\ k = (\langle \underline{1}, \underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}\rangle\ a, \langle \underline{1}, \underline{1}\rangle\ a) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def split : (78) x2}\ \} \\
& base\ k = ((\underline{1}\ a, \underline{(\mathsf{succ}\ \ k)}\ a), (\underline{1}\ a, \underline{1}\ a)) \\
\equiv & \quad \{\ \text{Def const : (76) x4 ; Definição de succ: succ k = k + 1}\ \} \\
& base\ k = ((1, k+1), (1, 1))
\end{aligned}$$

Porém, tendo em consideração a implementação desejada:

$$\binom{n}{k} = h\ k\ (n-k)\ \mathbf{where}\ h\ k\ n = \mathbf{let}\ (a, \_, b, \_) = \mathsf{for}\ loop\ (base\ k)\ n\ \mathbf{in}\ a\ /\ b$$

Vemos que em **let** $(a, \_, b, \_)$ o tipo de dados é um quádruplo o que implica que os tipos de $loop$ e $base\ k$, mais especificamente o tipo de retorno, terão que ser também um quádruplo (o for $loop\ (base\ k)\ n$, por sua vez, também deverá retornar um quádruplo).

Deste modo, através da aplicação de uma simples função que nos altere o tipo de dados, por exemplo:

$$\begin{aligned}
& altera :: ((a, b), (c, d)) \to (a, b, c, d) \\
& altera\ ((a, b), (c, d)) = (a, b, c, d)
\end{aligned}$$

Conseguimos ter a derivação desejada da função $base\ k$:

$$base\ k = (1, k+1, 1, 1)$$

5. Derivar a definição de loop

   Por último, para derivar a definição de $loop$ teremos que pensar da mesma forma, ou seja, inserir variáveis. Porém, ao contrário da função $base\ k$, as variáveis a inserir terão que ser do tipo ((a, b), (c, d)) uma vez que temos um split com projeções π_1 e π_2. Nos diagramas abaixo pode-se verificar o motivo desta diferença de domínio:

Tendo em conta o primeiro split do split maior, temos:

$$\begin{array}{c} (A \times B) \times (C \times D) \\ {\scriptstyle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle} \downarrow \\ Z \times B \end{array}$$

É de salientar que o tipo mul (a, b) = a * b, ou seja, o tipo desta função é:

$$\begin{array}{c} (A \times B) \\ {\scriptstyle mul} \downarrow \\ Z \end{array}$$

Tendo agora em consideração o segundo split do split maior, temos:

$$\begin{array}{c} (A \times B) \times (C \times D) \\ {\scriptstyle \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle} \downarrow \\ (Z \times D \end{array}$$

Temos então,

$$\begin{array}{ll} & loop = \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \\ \equiv & \quad \{ \text{ Igualdade extensional : (73) } \} \\ & loop = \langle \langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle, \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \rangle \ ((a, b), (c, d)) \\ \equiv & \quad \{ \text{ Def split : (78) } \} \\ & loop = (\langle mul \cdot \pi_1, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle \ ((a, b), (c, d)), \langle mul \cdot \pi_2, \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \ ((a, b), (c, d))) \\ \equiv & \quad \{ \text{ Def split : (78) x2 ; Def comp : (74) x6 ; Def proj : (81) x6 } \} \\ & loop = ((mul \ (a, b), \mathsf{succ} \ b), (mul \ (c, d), \mathsf{succ} \ d)) \\ \equiv & \quad \{ \text{ Definição de succ : succ k = k + 1 x2 ; Definição de mul : mul (m,n) = m * n x2 } \} \\ & loop = ((a * b, b + 1), (c * d, d + 1)) \end{array}$$

Deparámo-nos com o mesmo problema da função $base \ k$ e por isso vamos aplicar novamente a função $altera$ para reparar o tipo de dados de retorno. Temos então:

$$loop \ (a, b, c, d) = (a * b, b + 1, c * d, d + 1)$$

Deste modo, obtemos os dois resultados pretendidos:

$base \ k = (1, k + 1, 1, 1)$
$loop \ (a, b, c, d) = (a * b, b + 1, c * d, d + 1)$

Problema 4

$inFTree = \bot$
$outFTree = \bot$
$baseFTree = \bot$
$recFTree = \bot$
$cataFTree = \bot$
$anaFTree = \bot$
$hyloFTree = \bot$
instance $Bifunctor \ FTree$ **where**
  $bimap = \bot$
$generatePTree = \bot$
$drawPTree = \bot$

Problema 5

$$singletonbag = \bot$$
$$\mu = \bot$$
$$dist = \bot$$

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2tex

Estudar o texto fonte deste trabalho para obter o efeito:[7]

$$\begin{array}{ll} & id = \langle f, g\rangle \\ \equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\ \equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\ \Box & \end{array}$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \xleftarrow{\mathsf{in}} & 1 + \mathbb{N}_0 \\ {\scriptstyle (\!|g|\!)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id + (\!|g|\!)} \\ B & \xleftarrow[g]{} & 1 + B \end{array}$$

[7] Exemplos tirados de [?].