

**ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**



**MAP 3121 – MÉTODOS NUMÉRICOS E APLICAÇÕES**

**EXERCÍCIO PROGRAMA I**

**AUTOVALORES E AUTOVETORES DE MATRIZES TRIDIAGONAIS SIMÉTRICAS  
O ALGORITMO QR**

Catarina Rodrigues Erickson – 11258742

Isabella Mulet e Souza – 11259184

**SÃO PAULO**

**2021**

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>4</b>
<b>2. CONTEXTUALIZAÇÃO</b>	<b>5</b>
2.1 ROTAÇÕES DE GIVENS	5
2.2 ALGORITMO QR	5
2.2.1 ALGORITMO QR COM DESLOCAMENTO ESPECTRAL	6
2.3 SISTEMA MASSA MOLA	7
<b>3. PRIMEIRA TAREFA</b>	<b>8</b>
3.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO SEM DESLOCAMENTO ESPECTRAL	8
3.2 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO COM DESLOCAMENTO ESPECTRAL	9
3.3 RESULTADOS	10
3.3.1 MATRIZ DE ORDEM 4	10
3.3.2 MATRIZ DE ORDEM 8	11
3.3.3 MATRIZ DE ORDEM 16	12
3.3.4 MATRIZ DE ORDEM 32	13
3.4 CONCLUSÕES	15
<b>4. SEGUNDA TAREFA</b>	<b>16</b>
4.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO	16
4.2 RESULTADOS	17
4.2.1 POSIÇÃO $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1$	17
4.2.2 POSIÇÃO $X(0) = 1, 10, -4, 3, -2$	18
4.2.3 POSIÇÃO INICIAL CORRESPONDENTE AO MODO DE MAIOR FREQUÊNCIA	19
4.3 CONCLUSÕES	20
<b>5. TERCEIRA TAREFA</b>	<b>22</b>
5.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO	22
5.2 RESULTADOS	23
5.2.1 POSIÇÃO $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1$	23
5.2.2 POSIÇÃO $X(0) = 1, 10, -4, 3, -2$	24

5.2.3	POSIÇÃO INICIAL CORRESPONDENTE AO MODO DE MAIOR FREQUÊNCIA	26
5.3	CONCLUSÕES	28
6.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29

## 1. INTRODUÇÃO

A fim de entender as aplicações dos conceitos estudados pela disciplina de Cálculo Numérico, dois exercícios programados foram propostos. Neste trabalho, métodos numéricos foram usados para calcular autovalores e autovetores de matrizes tridiagonais simétricas, que carregam informações muito relevantes e analisar seu uso em uma aplicação prática.

Neste relatório, que contempla o EP 1, o algoritmo QR foi estudado a fim de calcular os autovetores e autovalores mencionados acima, através da fatoração QR, por rotação de Givens. Além disso, ao final, foi possível solucionar um problema com sistemas massa mola, utilizados na modelagem de algumas aplicações.

Para este exercício computacional, foi usada a linguagem Python, na versão 3.9.1, com as bibliotecas auxiliares Matplotlib, para a plotagem gráfica e NumPy, para operações matemáticas.

## 2. CONTEXTUALIZAÇÃO

Matrizes reais simétricas  $n \times n$ , cujos autovalores são reais, têm seus autovetores escolhidos de tal maneira que se forme uma base ortonormal em  $R^n$ .

### 2.1 ROTAÇÕES DE GIVENS

As rotações de Givens são transformações lineares ortogonais, dadas, somente se,  $Q^T \cdot Q = Q \cdot Q^T = I$ , de  $R^n$  em  $R^n$ . Elas podem ser utilizadas para eliminar elementos de uma matriz.

As matrizes de rotação são ortonormais, apresentando determinantes unitários, de um plano correspondente às linhas  $i$  e  $j$ , respectivamente, de uma matriz e podem ser interpretadas como:

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$$

Onde,  $c$  é  $\cos(\theta)$  e  $s$  é  $\sin(\theta)$ , a rotacionar no sentido anti-horário, cujos valores devem ser calculados a fim de zerar algum dos elementos da matriz multiplicada.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Para transformar  $A$ , através das rotações de Givens,  $\theta_1$  é definido, inicialmente, para zerar  $\beta_1$ . Para isso, define-se  $c_1 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$  e

$s_1 = \frac{-\beta_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2}}$ . Utiliza-se este método até que  $A$  tenha se tornado uma

matriz triangular superior, eliminando elemento a elemento. Portanto,

generalizando, tem-se:  $c_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}$  e  $s_k = \frac{-\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}$ . A transformação é

completa quando a matriz  $R$  (matriz triangular superior) é obtida. A sequência das rotações transpostas (composição de matrizes ortogonais) representa a matriz  $Q$ .

## 2.2 ALGORITMO QR

O algoritmo QR é um dos métodos mais comuns para o cálculo de autovalores e autovetores associados às matrizes. Suas equações fundamentais são:  $A_{k-1} = Q_k \cdot R_k$ ;  $R_k \cdot Q_k = A_k$ . Ou seja, a partir da iteração k-1, há uma fatoração QR da matriz  $A_{k-1}$ , multiplicando de forma reversa as matrizes Q e R, satisfazendo  $A_k = R_k \cdot Q_k$ , até a convergência.

$$Q_{n-1} \cdot Q_{n-2} \dots Q_2 \cdot Q_1 \cdot A = R$$

Quando a matriz A é tridiagonal, as matrizes  $Q_j$  representam rotações de Givens, contempladas, anteriormente, neste relatório e a matriz R é a matriz triangular superior resultante. Assim, tem-se que:  $A^{(k+1)} = R^{(k)} \cdot (Q_1^{(k)})^T \dots (Q_{n-1}^{(k)})^T$ , sendo  $A^{(k+1)}$  também uma matriz simétrica.

Para o cálculo da matriz  $V^k$ , matriz cujas colunas são os autovetores da matriz A, tridiagonal simétrica, inicia-se com  $V^0 = I$  e a cada iteração multiplica-se  $V^0$  por  $(Q_1^{(k)})^T, (Q_2^{(k)})^T, \dots, (Q_{n-1}^{(k)})^T$ . Assim,  $V^{(k+1)} = V^{(k)} \cdot (Q_1^{(k)})^T \dots (Q_{k+1}^{(k-1)})^T$ .

### 2.2.1 ALGORITMO QR COM DESLOCAMENTO ESPECTRAL

A fim de acelerar a convergência do método, é possível subtrair da matriz um múltiplo de identidade,  $\mu_k$ , que varia a cada iteração k.

$$A^{k+1} = R^{(k)} \cdot Q^{(k)} + \mu_k \cdot I$$

Essa mudança do múltiplo de identidade é realizada de acordo com a heurística de Wilkinson, onde  $d_k = \frac{\alpha_{n-1}^{(k)} - \alpha_n^{(k)}}{2}$  e  $\text{sgn}(d) = 1$ , se  $d \geq 0$  e  $\text{sgn}(d) = -1$ , nos outros casos:  $\mu_k = \alpha_n^{(k)} + d_k - \text{sgn}(d_k) \cdot \sqrt{d_k^2 + (\beta_{n-1}^{(k)})^2}$ .

Na prática se  $\beta_{n-1}^{(k)} < \epsilon$ , então  $\beta_{n-1}^{(k)} = 0$ , critério satisfatório para a convergência do método e um dos autovalores de A já foi

determinado. Para encontrar o restante, basta proceder da mesma maneira para a submatriz tridiagonal  $n-1 \times n-1$  e assim por diante.

## 2.3 SISTEMA MASSA MOLA

Uma aplicação prática da teoria até então explicada é um sistema massa mola. Para ele, os autovetores representam os modos naturais de vibração do sistema e os autovalores determinam a frequência de vibração.

Para um sistema massa mola simples, a solução da equação de força é:  $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ . Já para um sistema composto, que será discutido nas tarefas 2 e 3 deste relatório, a solução da equação diferencial:  $x''(t) + \lambda x(t) = 0$  é  $x(t) = \mathbf{a} \cos(\omega t) + \mathbf{b} \sin(\omega t)$ , sendo  $\omega = \sqrt{\lambda}$ . Em termos de matriz, temos:  $X''(t) + AX(t) = 0$ .

Especificamente, para o sistema massa mola com  $n$  massas, com  $m$  em Kg, e  $n+1$  molas, a matriz  $A$  é:  $A =$

$$\frac{1}{m} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -K_n & K_n + K_{n+1} \end{bmatrix}, \text{ sendo } A \text{ tridiagonal simétrica,}$$

portanto, o algoritmo QR pode ser aplicado, e  $K$  a constante elástica.

Para a solução deste sistema, deve ser feita uma mudança de variável, então:  $Y''(t) + \Lambda Y(t) = 0$ , tal que  $\Lambda$  é a matriz diagonal de autovalores em suas colunas e  $Y(t) = Q^T X(t)$  e  $y(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ , sendo  $A$  e  $\varphi$ , dados de condição inicial.

### 3. PRIMEIRA TAREFA

A primeira tarefa deste exercício programa demandava a execução de um código que realizasse a decomposição QR, com e sem deslocamento espectral para uma matriz A tal que os elementos de sua diagonal principal valesse 2 e os de suas subdiagonais valessem -1. Um exemplo 4x4:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, deve ser realizada uma comparação entre o número de iterações necessárias para a convergência do método, nos dois casos, na ausência e na presença de deslocamento, considerando que  $\epsilon = 10^{-6}$ .

#### 3.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO SEM DESLOCAMENTO ESPECTRAL

O código foi feito para encontrar os autovalores e autovetores de uma matriz tridiagonal simétrica, a partir da decomposição QR. Apenas os elementos das diagonais das matrizes foram armazenados, sem a necessidade de utilizar toda a matriz para a manipulação.

O código tem como ponto de partida a definição de uma função cujas entradas necessárias são: uma lista com os elementos da diagonal principal; uma lista com os elementos das subdiagonais e TRUE ou FALSE para aplicar ou não deslocamento espectral, respectivamente.

Nos casos em que não existe deslocamento espectral, o cálculo da matriz R é iniciado com o armazenamento dos cossenos e senos, encontrados a partir das expressões:  $c_k = \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}$  e  $s_k = \frac{-\beta_k}{\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}}$ , em seus respectivos vetores, definidos para cada iteração k.

A partir disso, a matriz  $Q_n \cdot Q_{n-1} \cdot Q_{n-2} \dots Q_2 \cdot Q_1 \cdot A$  é criada e tem suas linhas modificadas em duplas sucessivas (i e i+1), indo de acordo com a Teoria das Rotações de Givens, mencionada e explicada, anteriormente. Isso foi feito para que só as diagonais fossem necessárias para a manipulação. Para a próxima iteração, as novas diagonais da matriz  $R \cdot Q_n^T \cdot Q_{n-1}^T \cdot Q_{n-2}^T \dots Q_2^T \cdot Q_1^T$  são definidas e



armazenadas, a fim de zerar elementos,  $\beta_k$ . Para isso, modificam – se os elementos das diagonais nas colunas da matriz  $A_{(k+1)}$ , também em duplas sucessivas (i e i+1), enquanto  $\beta_{n-1}^{(k)} = < \epsilon = 10^{-6}$ .

Por fim, a matriz V é calculada alterando os elementos das diagonais nas colunas i e i+1, a cada tentativa com uma linha nova. De tal forma que:  $v_{j,i} = v_{j,i} \cdot c - v_{j,i+1} \cdot s$  e  $v_{j,i+1} = v_{j,i} \cdot s - v_{j,i+1} \cdot c$ . Esse modo é repetido enquanto  $\beta_{n-1}^{(k)} = < \epsilon = 10^{-6}$ .

Para realizar os testes exigidos por esta tarefa, definiu – se uma função cuja entrada necessária é o tamanho da matriz n x n e o deslocamento, caso não haja deslocamento, ele valerá 0. A partir disso, o código devolve os autovalores e autovetores da matriz em estudo.

### 3.2 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO COM DESLOCAMENTO ESPECTRAL

O código foi feito para ambos os casos, na ausência e presença de deslocamento espectral. Neste último, a primordial diferença foi implantada através da definição de uma função formulada a partir da heurística de Wilkinson,  $\mu_k = \alpha_n^{(k)} + d_k - \text{sgn}(d_k) \cdot \sqrt{d_k^2 + (\beta_{n-1}^k)^2}$ , com  $d_k$  e  $\text{sgn}(d)$  definidos, anteriormente, neste relatório.

Antes de começar o cálculo da matriz R, nos casos em que há deslocamento espectral, calcula – se  $\mu_k \cdot I$  para a matriz A, em sua iteração k. Em seguida, essa matriz gerada pela multiplicação é subtraída da matriz inicial A, alterando os termos de sua diagonal principal,  $\alpha_k$ . Assim, para encontrar a matriz R, parte – se dessa matriz A alterada, cujos elementos armazenados pertencem apenas à diagonal principal.

Em seguida, o código segue a mesma lógica de operação sem deslocamento espectral, identificada no item anterior deste relatório.

Para obter uma decomposição QR, a partir deste código, usa – se uma função cujas entradas são a dimensão da matriz n x n, tridiagonal simétrica, a qual se quer decompor, e o deslocamento, que neste caso não será zerado.

### 3.3 RESULTADOS

#### 3.3.1 MATRIZ DE ORDEM 4

Para a execução do algoritmo QR com deslocamento, a matriz cujas colunas apresentam os autovetores da matriz A de dimensão 4x4 é:

```
[ [ 0.37174803  0.60150096  0.60150096  0.37174803 ]  
[ -0.60150096 -0.37174803  0.37174803  0.60150096 ]  
[  0.60150096 -0.37174803 -0.37174803  0.60150096 ]  
[ -0.37174803  0.60150096 -0.60150096  0.37174803 ] ]
```

**Imagem 3.1:** Matriz de autovetores de dimensão 4x4 encontrada pelo código, com deslocamento.

O número de iterações necessárias para a convergência neste caso foi 7.

Já para a execução do algoritmo sem deslocamento, a matriz de autovetores, com 3 algarismos significativos, encontrada é:

```
[ [ 0.3717485   0.60150096  0.60150078  0.37174784 ]  
[ -0.60150124 -0.37174739  0.37174841  0.60150084 ]  
[  0.60150067 -0.37174868 -0.37174766  0.60150107 ]  
[ -0.37174757  0.60150095 -0.60150113  0.37174823 ] ]
```

**Imagem 3.2:** Matriz de autovetores de dimensão 4x4 encontrada pelo código, sem deslocamento.

O número de iterações necessárias para a convergência, sem deslocamento, é 45.

```
[ 3.61803399  2.61803399  1.38196601  0.38196601 ]
```

**Imagem 3.3:** Vetor de autovalores, encontrado pelo código, para a matriz A de dimensão 4x4.

### 3.3.2 MATRIZ DE ORDEM 8

Assim como pedido no enunciado, a análise para a matriz A, de dimensão 8x8, foi feita tanto para a aplicação com deslocamento quanto sem. Por isso, a matriz cujas colunas são autovetores, encontrada para o caso com deslocamento, depois de 15 iterações para a convergência é:

```
[ [ 1.61229842e-01  3.03012985e-01  4.08248290e-01  4.64242827e-01
    4.64242827e-01  4.08248290e-01  3.03012985e-01  1.61229842e-01 ]
[ -3.03012985e-01 -4.64242827e-01 -4.08248290e-01 -1.61229842e-01
    1.61229842e-01  4.08248290e-01  4.64242827e-01  3.03012985e-01 ]
[  4.08248290e-01  4.08248290e-01 -2.21294439e-14 -4.08248290e-01
   -4.08248290e-01  2.52459056e-12  4.08248290e-01  4.08248291e-01 ]
[ -4.64242827e-01 -1.61229842e-01  4.08248290e-01  3.03012985e-01
   -3.03012985e-01 -4.08248290e-01  1.61229842e-01  4.64242827e-01 ]
[  4.64242827e-01 -1.61229842e-01 -4.08248290e-01  3.03012985e-01
    3.03012985e-01 -4.08248290e-01 -1.61229842e-01  4.64242827e-01 ]
[ -4.08248290e-01  4.08248290e-01 -2.34177234e-14 -4.08248290e-01
    4.08248290e-01  2.46124119e-12 -4.08248291e-01  4.08248290e-01 ]
[  3.03012985e-01 -4.64242827e-01  4.08248290e-01 -1.61229842e-01
   -1.61229842e-01  4.08248290e-01 -4.64242827e-01  3.03012985e-01 ]
[ -1.61229842e-01  3.03012985e-01 -4.08248290e-01  4.64242827e-01
   -4.64242827e-01  4.08248290e-01 -3.03012985e-01  1.61229842e-01 ]
```

**Imagem 3.4:** Matriz de autovetores de dimensão 8x8 encontrada pelo código, com deslocamento.

Já para o caso de decomposição QR realizada sem deslocamento espectral, para a mesma matriz A, de ordem 8 o número de iterações até a convergência foi de 143. A matriz de autovetores encontrada pelo código é:

```
[ [ 1.61230694e-01  3.03013212e-01  4.08248433e-01  4.64242877e-01
    4.64242720e-01  4.08248267e-01  3.03012624e-01  1.61229105e-01 ]
[ -3.03014292e-01 -4.64242654e-01 -4.08247742e-01 -1.61229057e-01
    1.61230569e-01  4.08248944e-01  4.64242811e-01  3.03011856e-01 ]
[  4.08249440e-01  4.08247141e-01 -1.25015167e-06 -4.08248835e-01
   -4.08247746e-01  1.26505892e-06  4.08249284e-01  4.08247297e-01 ]
[ -4.64243281e-01 -1.61227855e-01  4.08248982e-01  3.03012011e-01
   -3.03013902e-01 -4.08247613e-01  1.61231725e-01  4.64242434e-01 ]
[  4.64242373e-01 -1.61231829e-01 -4.08247599e-01  3.03013959e-01
    3.03012068e-01 -4.08248969e-01 -1.61227958e-01  4.64243219e-01 ]
[ -4.08247141e-01  4.08249440e-01 -1.25058203e-06 -4.08247745e-01
    4.08248836e-01 -1.26646589e-06 -4.08247297e-01  4.08249284e-01 ]
[  3.03011678e-01 -4.64242999e-01  4.08248839e-01 -1.61230627e-01
   -1.61229114e-01  4.08247636e-01 -4.64242843e-01  3.03014116e-01 ]
[ -1.61228989e-01  3.03012758e-01 -4.08248148e-01  4.64242777e-01
   -4.64242934e-01  4.08248314e-01 -3.03013346e-01  1.61230580e-01 ] ]
```

**Imagem 3.5:** Matriz de autovetores de dimensão 8x8 encontrada pelo código, sem deslocamento.

```
[3.87938524 3.53208889 3.          2.34729636 1.65270364 1.
0.46791111 0.12061476]
```

**Imagem 3.6:** Vetor de autovalores, encontrado pelo código, para a matriz A de dimensão 8x8.

### 3.3.3 MATRIZ DE ORDEM 16

Para a matriz A de dimensão 16x16, a implementação do código a partir da decomposição QR, com deslocamento espectral, a quantidade de iterações para a convergência é 31. Para este caso, a matriz cujas colunas são os autovetores é:

```
[ [ 0.06302556 0.12390487 0.18056474 0.2310757 0.27371765 0.30703848
0.32990347 0.341534 0.341534 0.32990347 0.30703848 0.27371765
0.2310757 0.18056472 0.1239049 0.06302556 ]
[-0.12390487 -0.2310757 -0.30703848 -0.341534 -0.32990347 -0.27371765
-0.18056474 -0.06302556 0.06302556 0.18056474 0.27371765 0.32990347
0.34153401 0.30703844 0.23107574 0.12390487 ]
[ 0.18056474 0.30703848 0.341534 0.27371765 0.12390487 -0.06302556
-0.2310757 -0.32990347 -0.32990347 -0.2310757 -0.06302556 0.12390487
0.27371765 0.34153396 0.30703853 0.18056474 ]
[-0.2310757 -0.341534 -0.27371765 -0.06302556 0.18056474 0.32990347
0.30703848 0.12390487 -0.12390487 -0.30703848 -0.32990347 -0.18056474
0.06302557 0.2737176 0.34153405 0.2310757 ]
[ 0.27371765 0.32990347 0.12390487 -0.18056474 -0.341534 -0.2310757
0.06302556 0.30703848 0.30703848 0.06302556 -0.2310757 -0.34153401
-0.18056474 0.12390482 0.32990349 0.27371765 ]
[-0.30703848 -0.27371765 0.06302556 0.32990347 0.2310757 -0.12390487
-0.341534 -0.18056474 0.18056474 0.341534 0.12390487 -0.2310757
-0.32990347 -0.06302561 0.27371764 0.30703848 ]
[ 0.32990347 0.18056474 -0.2310757 -0.30703848 0.06302556 0.341534
0.12390487 -0.27371765 -0.27371765 0.12390487 0.341534 0.06302556
-0.30703847 -0.23107573 0.18056471 0.32990347 ]
[-0.341534 -0.06302556 0.32990347 0.12390487 -0.30703848 -0.18056474
0.27371765 0.2310757 -0.2310757 -0.27371765 0.18056474 0.30703848
-0.12390487 -0.32990348 0.06302552 0.341534 ]
[ 0.341534 -0.06302556 -0.32990347 0.12390487 0.30703848 -0.18056474
-0.27371765 0.2310757 0.2310757 -0.27371765 -0.18056474 0.30703848
0.12390487 -0.32990346 -0.06302562 0.341534 ]
[-0.32990347 0.18056474 0.2310757 -0.30703848 -0.06302556 0.341534
-0.12390487 -0.27371765 0.27371765 0.12390487 -0.341534 0.06302556
0.30703847 -0.23107567 -0.18056478 0.32990347 ]
[ 0.30703848 -0.27371765 -0.06302556 0.32990347 -0.2310757 -0.12390487
0.341534 -0.18056474 -0.18056474 0.341534 -0.12390487 -0.2310757
0.32990347 -0.06302552 -0.27371766 0.30703848 ]
[-0.27371765 0.32990347 -0.12390487 -0.18056474 0.341534 -0.2310757
-0.06302556 0.30703848 -0.30703848 0.06302556 0.2310757 -0.341534
0.18056474 0.12390492 -0.32990346 0.27371765 ]
[ 0.2310757 -0.341534 0.27371765 -0.06302556 -0.18056474 0.32990347
-0.30703848 0.12390487 0.12390487 -0.30703848 0.32990347 -0.18056474
-0.06302557 0.2737177 -0.34153396 0.2310757 ]
[-0.18056474 0.30703848 -0.341534 0.27371765 -0.12390487 -0.06302556
0.2310757 -0.32990347 0.32990347 -0.2310757 0.06302556 0.12390487
-0.27371765 0.34153405 -0.30703842 0.18056474 ]
[ 0.12390487 -0.2310757 0.30703848 -0.341534 0.32990347 -0.27371765
0.18056474 -0.06302556 -0.06302556 0.18056474 -0.27371765 0.32990347
-0.34153401 0.30703851 -0.23107565 0.12390487 ]
[-0.06302556 0.12390487 -0.18056474 0.2310757 -0.27371765 0.30703848
-0.32990347 0.341534 -0.341534 0.32990347 -0.30703848 0.27371765
-0.2310757 0.18056476 -0.12390484 0.06302556 ]]
```

**Imagem 3.7:** Matriz de autovetores de dimensão 16x16 encontrada pelo código, com deslocamento.

Já para o caso sem deslocamento, a quantidade de iterações é 473. Para estas especificações, a matriz de autovetores, encontrada é:

```
[ [ 0.06302679 0.1239053 0.18056501 0.23107586 0.27371777 0.30703851
  0.3299035 0.34153408 0.34153397 0.32990336 0.30703838 0.27371752
  0.23107545 0.18056468 0.12390447 0.06302456]
[-0.12390715 -0.23107626 -0.30703859 -0.34153381 -0.32990312 -0.27371714
-0.18056419 -0.06302497 0.06302618 0.18056525 0.27371806 0.32990374
 0.34153397 0.30703862 0.23107516 0.123903 ]
[ 0.18056777 0.30703868 0.34153339 0.27371661 0.12390375 -0.06302653
-0.23107633 -0.32990375 -0.32990322 -0.23107502 -0.06302469 0.12390581
 0.27371831 0.34153474 0.30703822 0.18056226]
[-0.23107907 -0.34153332 -0.27371593 -0.06302378 0.18056593 0.32990373
 0.30703792 0.12390382 -0.12390596 -0.30703896 -0.3299032 -0.18056371
 0.06302689 0.27371918 0.3415345 0.23107294]
[ 0.27372091 0.32990149 0.12390218 -0.18056644 -0.34153407 -0.23107453
 0.06302689 0.3070391 0.30703786 0.06302423 -0.23107673 -0.34153393
-0.1805634 0.12390706 0.32990507 0.27371498]
[-0.30704118 -0.27371425 0.06302857 0.32990399 0.23107421 -0.12390643
-0.34153412 -0.18056347 0.18056606 0.34153385 0.12390345 -0.23107696
-0.329903 -0.06302321 0.27372045 0.30703626]
[ 0.32990526 0.18056014 -0.23107806 -0.30703727 0.06302762 0.34153414
 0.12390334 -0.27371864 -0.27371665 0.12390638 0.34153387 0.06302381
-0.30703934 -0.23107388 0.18056858 0.32990201]
[-0.34153463 -0.06302027 0.32990437 0.12390241 -0.30703943 -0.18056313
 0.27371867 0.23107446 -0.23107697 -0.27371663 0.1805662 0.30703766
-0.12390673 -0.32990279 0.06302999 0.34153349]
[ 0.34153338 -0.06303086 -0.32990258 0.12390733 0.30703752 -0.18056635
-0.27371663 0.23107694 0.23107443 -0.27371867 -0.18056329 0.3070393
 0.12390301 -0.32990416 -0.06302114 0.34153451]
[-0.32990169 0.18056934 0.23107333 -0.30703968 -0.06302351 0.34153387
-0.1239064 -0.27371666 0.27371865 0.12390335 -0.34153414 0.06302732
 0.30703761 -0.23107752 -0.18056091 0.32990493]
[ 0.30703577 -0.27372105 -0.06302256 0.32990296 -0.23107719 -0.12390331
 0.34153389 -0.18056602 -0.18056343 0.34153416 -0.12390629 -0.23107444
 0.32990395 -0.06302792 -0.27371485 0.30704069]
[-0.27371439 0.32990545 -0.12390756 -0.18056305 0.34153394 -0.23107687
-0.06302424 0.30703785 -0.30703909 0.0630269 0.23107467 -0.34153408
 0.18056609 0.12390267 -0.32990188 0.27372032]
[ 0.23107233 -0.34153469 0.27371937 -0.06302735 -0.18056355 0.32990322
-0.30703903 0.12390592 0.12390378 -0.30703799 0.32990375 -0.18056577
-0.06302424 0.27371612 -0.34153351 0.23107847]
[-0.18056171 0.30703827 -0.34153462 0.27371869 -0.12390599 -0.0630246
 0.23107507 -0.32990319 0.32990373 -0.23107638 0.06302644 0.12390392
-0.27371699 0.34153327 -0.30703873 0.18056723]
[ 0.12390259 -0.23107513 0.30703836 -0.3415342 0.32990383 -0.27371816
 0.1805653 -0.06302616 -0.06302495 0.18056424 -0.27371724 0.3299032
-0.34153404 0.30703833 -0.23107624 0.12390674]
[-0.06302434 0.12390444 -0.18056447 0.23107554 -0.27371753 0.30703844
-0.32990345 0.34153393 -0.34153404 0.32990359 -0.30703857 0.27371778
-0.23107595 0.1805648 -0.12390527 0.06302657]]
```

**Imagem 3.8:** Matriz de autovetores de dimensão 16x16 encontrada pelo código, sem deslocamento.

```
[3.9659462 3.86494446 3.70043427 3.47801783 3.20526927 2.89147671
2.54732598 2.18453672 1.81546328 1.45267402 1.10852329 0.79473073
0.52198217 0.29956573 0.13505554 0.0340538 ]
```

**Imagem 3.9:** Vetor de autovalores, encontrado pelo código, para a matriz A de dimensão 16x16.

### 3.3.4 MATRIZ DE ORDEM 32

Para a mesma matriz A, com dimensões 32x32 o número de iterações necessárias para a convergência do método, com deslocamento espectral é 59. A matriz de autovetores encontrada, pelo código, é:

```
[ [ 0.02340118  0.04659044  0.06935776 ...  0.06935873  0.0234014
  -0.04659044]
[-0.04659044 -0.09149697 -0.13309657 ...  0.13309836  0.04659086
  -0.09149697]
[ 0.06935776  0.13309657  0.18605268 ...  0.18605503  0.06935835
  -0.13309657]
...
[-0.06935776  0.13309657 -0.18605268 ...  0.18604948  0.06935839
  0.13309657]
[ 0.04659044 -0.09149697  0.13309657 ...  0.13309414  0.04659089
  0.09149697]
[-0.02340118  0.04659044 -0.06935776 ...  0.06935645  0.02340142
  0.04659044]]
```

**Imagem 3.10:** Matriz de autovetores de dimensão 32x32 encontrada pelo código, com deslocamento.

Na ausência de deslocamento espectral a quantidade de iterações necessárias é 1600.

```
[ [ 0.0234029  0.04659111  0.06935817 ...  0.06935769  0.04658961
  0.02339974]
[-0.04659381 -0.09149821 -0.13309722 ...  0.13309655  0.09149551
  0.04658761]
[ 0.06936267  0.13309814  0.18605327 ...  0.18605293  0.13309466
  0.06935366]
...
[-0.06935285  0.133095  -0.1860521 ...  0.18605243 -0.13309849
  0.06936189]
[ 0.04658706 -0.09149574  0.13309591 ...  0.13309659 -0.09149844
  0.04659328]
[-0.02339946  0.04658976 -0.06935735 ...  0.06935783 -0.04659123
  0.02340263]]
```

**Imagem 3.11:** Matriz de autovetores de dimensão 32x32 encontrada pelo código, sem deslocamento.

```
[3.99094385 3.96385739 3.91898595 3.85673587 3.7776709 3.68250707
3.57210619 3.44746808 3.30972147 3.16011382 3. 2.83083003
2.65413593 2.47151787 2.28462968 2.09516383 1.90483617 1.71537032
1.52848213 1.34586407 1.16916997 1. 0.83988618 0.69027853
0.55253192 0.42789381 0.31749293 0.2223291 0.14326413 0.08101405
0.00905615 0.03614261]
```

**Imagem 3.12:** Vetor de autovalores, encontrado pelo código, para a matriz A de dimensão 32x32.

### 3.4 CONCLUSÕES

Ao final da análise das matrizes de autovetores e dos vetores de autovalores, encontrados a partir da decomposição QR, para todas as variações de dimensões da mesma matriz A, tridiagonal simétrica, cujos elementos da diagonal principal valem 2 e os das subdiagonais valem -1, é possível extrair algumas constatações.

Em todas as dimensões da matriz analisadas, 4x4, 8x8, 16x16 e 32x32, o número de iterações necessárias para a convergência do código é menor nos casos em que se aplica a decomposição com deslocamento espectral. Isso ocorre porque o deslocamento acelera a convergência da decomposição QR, sendo necessário menos análises de k, para o método convergir, levando em consideração que  $\epsilon = 10^{-6}$ .

## 4. SEGUNDA TAREFA

A segunda tarefa pede a análise gráfica da evolução da solução de um sistema massa mola, com 5 massas de 2 Kg, cada e as molas com constante elástica de  $K_i = (40 + 2i)N/m$ , para  $i$  variando de 1 até 6. Os gráficos devem ser plotados para 10 s e mostrar o deslocamento das molas a partir da posição de equilíbrio, com velocidade nula. A análise será realizada para três vetores iniciais:  $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1$ ;  $X(0) = 1, 10, -4, 3, -2$  e  $X(0)$  correspondente ao modo de maior frequência.

### 4.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO

O código tem como início, uma função que cria a matriz A como

a exposta anteriormente, 
$$A = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -K_n & K_n + K_{n+1} \end{bmatrix}.$$

O primeiro passo é calcular os elementos da diagonal principal desta matriz, de acordo com a fórmula: de  $K_i = (40 + 2i)$ . Em seguida, calculamos os elementos da subdiagonal da matriz A.

Para os vetores iniciais:  $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1$  e  $X(0) = 1, 10, -4, 3, -2$ , dentro da função de plotagem de deslocamento das massas do sistema em questão, alguns passos foram seguidos. Primeiro, define-se o vetor de deslocamento  $X(0)$ , para então, gerar seus autovalores e autovetores, a partir da função criada para esse fim e utilizada também na solução da primeira tarefa. Esta função devolve os autovalores e uma matriz cujas colunas são os autovetores (Q). Em seguida, realiza-se a mudança de variável de  $X(0)$  para  $Y(0)$ , usando a fórmula:  $Y(0) = Q^T \cdot X(0)$ .

Para a geração dos gráficos, as variáveis da abscissa (tempo) são definidas para uma análise de 0 a 10 segundos a cada 0,025 segundos. Com isso, as coordenadas de posição de  $x_i(t)$ , para cada mola do sistema foram calculadas.



Para esse cálculo, foi definida uma outra função cujas entradas são o  $Y(0)$ , a matriz cujas colunas são os autovetores,  $Q$ , o vetor das frequências e as abscissas. Usa – se esse raciocínio:

$$X(t) = Q.Y(t)$$

$$y_i(t) = y_i(0). \cos(\sqrt{\lambda_i}. t)$$

Já para o vetor associado ao modo de maior frequência, também dentro da função de plotagem de deslocamento definiram – se os autovalores e a matriz  $Q$ , de autovetores da matriz tridiagonal  $A$ . Em seguida, calcula-se  $X(0)$  que está relacionado ao autovetor de maior frequência.

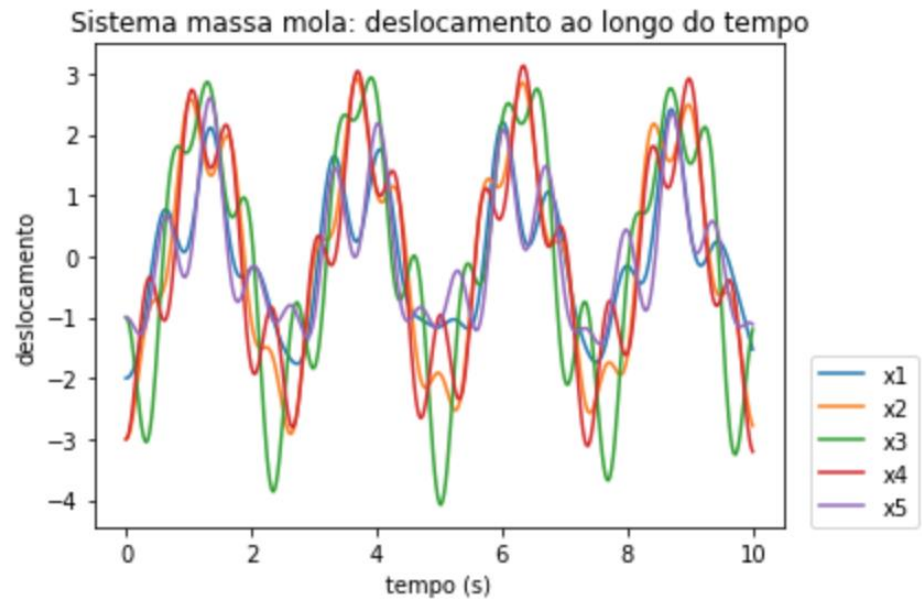
Para descobrir o maior autovalor e seu autovetor, a partir de um vetor com autovalores e da matriz  $Q$  com autovetores, criou – se uma função, que encontra também a posição destes, a partir da análise do vetor contendo os autovalores, quadrado da frequência. Assim, destaca – se o maior valor de frequência, que será usado para todas as massas, nesse caso. A partir disso, o raciocínio é o mesmo exposto anteriormente para os vetores iniciais já fornecidos pelo enunciado.

O código necessita como entrada apenas o número de massas, 5 e a seleção de qual vetor inicial utilizar nos cálculos, e ele devolve uma matriz cujas colunas são os autovetores, um vetor com as frequências, sendo  $\omega = \sqrt{\lambda}$ .

## 4.2 RESULTADOS

### 4.2.1 POSIÇÃO $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1$

Primeiramente, foi analisado o sistema massa mola de 5 massas de 2 Kg, partindo do vetor de posição inicial:  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ . O código gerou um gráfico de deslocamento em função do tempo, em um intervalo de 10 s.



**Gráfico 4.1:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 5 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ .

Além disso, a implementação do código também gerou os valores da frequência (Imagem 4.1), que também podem ser compreendidos como os autovalores ao quadrado e uma matriz cujas colunas apresentam os autovetores (Imagem 4.2) da matriz A inicial, indicada no item 4.1 deste relatório.

[ 9.40452049 8.37340021 6.83909251 4.83721337 2.50386576 ]

**Imagem 4.1:** Vetor das frequências do sistema massa mola com 5 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ .

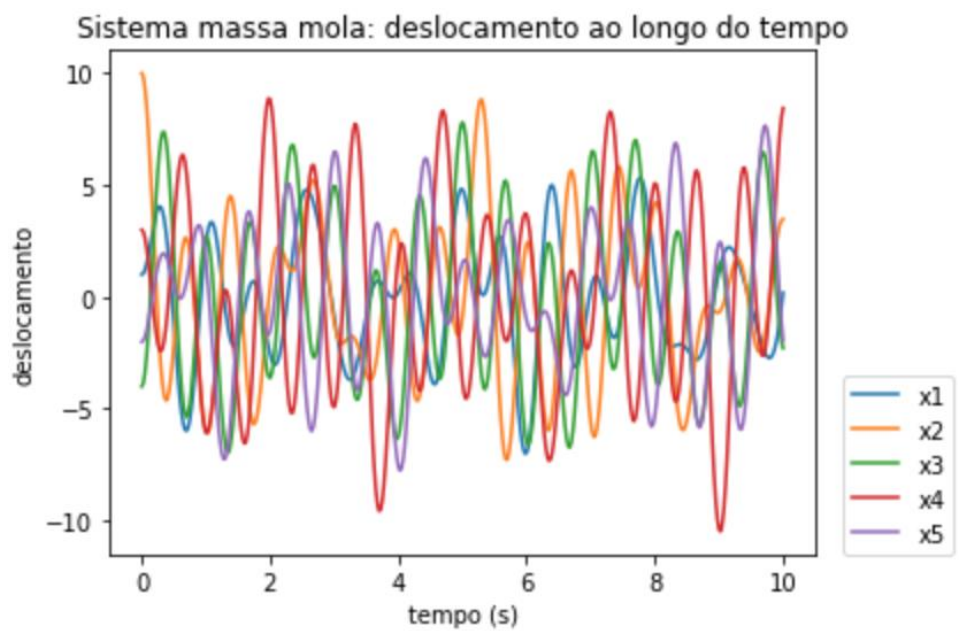
```
[ [ 0.18933466 0.4749761 0.5988224 0.53250395 0.31048569 ]
  [-0.39110521 -0.58538281 -0.10270311 0.4744457 0.51837923 ]
  [ 0.55766111 0.18485786 -0.56486874 -0.06375702 0.57593403 ]
  [-0.588202 0.38295964 0.09308549 -0.51737516 0.4806437 ]
  [ 0.39271058 -0.50089335 0.55056535 -0.46861371 0.26863215 ] ]
```

**Imagem 4.2:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ .

#### 4.2.2 POSIÇÃO $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$

Neste caso, o sistema de 5 massas de 2 Kg foi analisado e inserido no código, a partir do vetor de posição:  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ .

Assim como no item anterior, também foram encontrados um gráfico de deslocamento em função do tempo, dentro de um intervalo de 10 segundos (Gráfico 4.2); o vetor das frequências, obtido pelo código (Imagem 4.3); e a matriz de autovetores da matriz A, baseada nas constantes elásticas do sistema massa mola (Imagem 4.4).



**Gráfico 4.2:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 5 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ .

```
[ 9.40452049  8.37340021  6.83909251  4.83721337  2.50386576 ]
```

**Imagem 4.3:** Vetor das frequências do sistema massa mola com 5 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ .

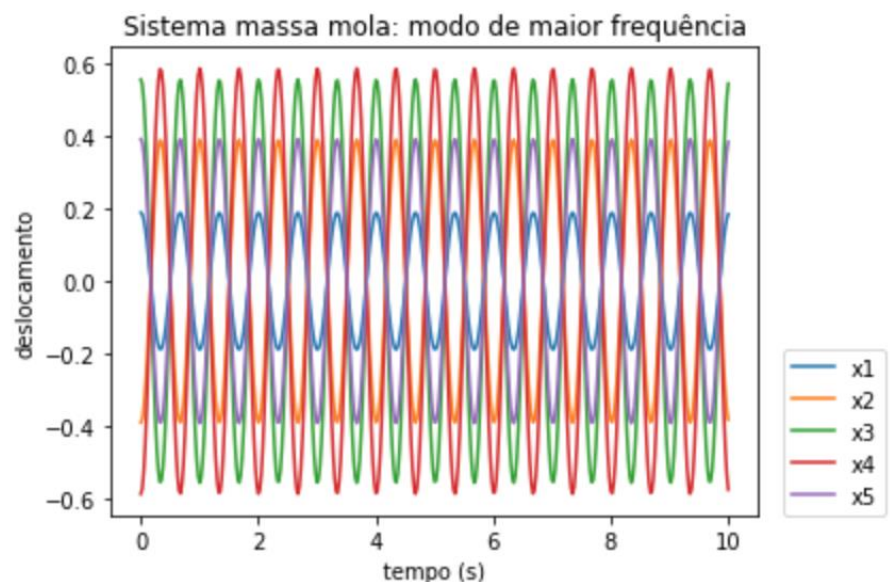
```
[ [ 0.18933466  0.4749761  0.5988224  0.53250395  0.31048569 ]
  [-0.39110521 -0.58538281 -0.10270311  0.4744457  0.51837923 ]
  [ 0.55766111  0.18485786 -0.56486874 -0.06375702  0.57593403 ]
  [-0.588202   0.38295964  0.09308549 -0.51737516  0.4806437  ]
  [ 0.39271058 -0.50089335  0.55056535 -0.46861371  0.26863215 ] ]
```

**Imagem 4.4:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ .

#### 4.2.3 POSIÇÃO INICIAL CORRESPONDENTE AO MODO DE MAIOR FREQUÊNCIA

Para este caso, o vetor de posição inicial não foi dado pelo enunciado, mas sim calculado pelo código, como explicado no item 4.1 deste relatório e a frequência encontrada é uma única para todas as massas já que ela é a maior:  $\omega = 9,404520488593056$ .

Assim como nos itens anteriores, a implementação do código formulado resultou em um gráfico de deslocamento em função do tempo, para o mesmo intervalo de 10 segundos (Gráfico 4.3) e uma matriz de autovetores de A (Imagem 4.5), a mesma matriz exposta no 4.1 deste relatório.



**Gráfico 4.3:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 5 molas, a partir da posição inicial correspondente ao modo de maior frequência.

```
[ [ 0.18933466  0.4749761  0.5988224  0.53250395  0.31048569 ]
[ -0.39110521 -0.58538281 -0.10270311  0.4744457  0.51837923 ]
[ 0.55766111  0.18485786 -0.56486874 -0.06375702  0.57593403 ]
[ -0.588202   0.38295964  0.09308549 -0.51737516  0.4806437  ]
[ 0.39271058 -0.50089335  0.55056535 -0.46861371  0.26863215 ] ]
```

**Imagem 4.5:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, a partir da posição inicial correspondente ao modo de maior frequência.

### 4.3 CONCLUSÕES

As matrizes dos autovetores encontradas para as três situações são as mesmas, porque partiu – se de uma mesma matriz  $A$  calculada a partir das constantes elásticas ( $K_i = (40 + 2i)$ ).

Com a análise dos gráficos, foi possível notar que com o primeiro vetor de posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ , as amplitudes alcançadas pelo deslocamento foram menores do que as alcançadas com o vetor de posição  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ . Além disso, ainda na comparação entre estas duas posições iniciais, as variações em função do tempo do primeiro deles é mais estável. Por isso, o gráfico fica visualmente mais nítido e alinhado. Em compensação, para o segundo vetor inicial, as curvas não possuem trajetórias muito semelhantes e sobrepostas. Isso demonstra que as massas apresentaram deslocamentos ligeiramente mais diferentes, partindo da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ .

As amplitudes alcançadas pelo sistema massa mola cuja partida é da posição de equilíbrio correspondente ao modo de maior frequência são as menores entre as três, no entanto o gráfico tem suas curvas bem definidas. As massas apresentam amplitudes diferentes e crescentes, mas seus nós estão sempre em intersecção, porque a frequência das massas é sempre a mesma e a maior. Com isso, o período das funções geradas para cada massa é o mesmo.

## 5. TERCEIRA TAREFA

Semelhante à segunda tarefa, a terceira pede que o sistema massa mola analisado contenha 10 massas de 2 Kg, sendo cada mola com  $K_i = (40 + 2(-1)^i)N/m$ , para  $i$  de 1 até 11. As posições iniciais são dadas por  $X(0): x_{i+5} = x_i$ , para  $i = 1, \dots, 5$ , dados no item anterior.

Assim, para o vetor inicial do item anterior  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1]$ , tem – se para esta tarefa:  $[-2, -3, -1, -3, -1, -2, -3, -1, -3, -1]$  e para  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2]$ , o vetor correspondente é:  $[1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$ .

### 5.1 RACIOCÍNIO DO CÓDIGO

O raciocínio do código para esta tarefa é o mesmo que o da tarefa anterior, mudando apenas a quantidade de massas e a função definidora das constantes elásticas, que altera a matriz A.

Então, o código também tem como início, a função que cria a matriz A como a exposta anteriormente,  $A =$

$$\frac{1}{m} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & -K_n & K_n + K_{n+1} \end{bmatrix}, \text{ mas nesta tarefa a função que}$$

determina as constantes elástica é:  $K_i = (40 + 2(-1)^i)$ . Primeiro, são calculados os elementos da diagonal principal e em seguida, os das subdiagonais da matriz A. Em seguida, fazendo uso da função que calcula a decomposição QR, na primeira e na segunda tarefas, a matriz de autovetores (Q) é definida, bem como a matriz de autovalores. O passo seguinte é realizar a mudança de variáveis, assim como na segunda tarefa, usando a fórmula:  $Y(0) = Q^T \cdot X(0)$ .

A partir dessas expressões:  $X(t) = Q \cdot Y(t)$ , realiza – se uma multiplicação de matrizes, a fim de descobrir os valores por massa e  $y_i(t) = y_i(0) \cdot \cos(\sqrt{\lambda_i} \cdot t)$ , a coordenada de posição,  $x_i(t)$ , para cada massa, é calculada para cada 0,025 segundo, dentro do intervalo de 10 segundos. Em seguida, as funções são plotadas nos gráficos, assim como na segunda tarefa.

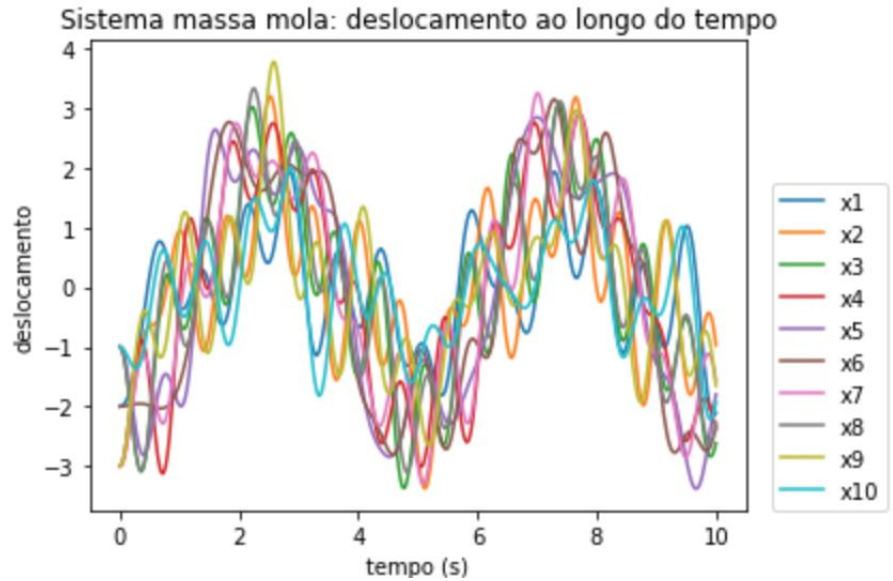
Para o vetor de posição de equilíbrio correspondente ao modo de maior frequência, a lógica é a mesma da segunda tarefa. Dentro do vetor de frequência obtido a partir do vetor de autovalores proveniente da decomposição QR, define – se o maior valor e seu autovetor correspondente. A partir disso, aplica – se essa mesma frequência para todas as massas e o código segue o mesmo raciocínio aplicado para os vetores iniciais dados pelo enunciado, indicado anteriormente neste item.

O código necessita como entrada apenas o número de massas, 10 e a indicação de qual posição de equilíbrio será aplicada, e ele devolve uma matriz cujas colunas são os autovetores, um vetor com as frequências, sendo  $\omega = \sqrt{\lambda}$ .

## 5.2 RESULTADOS

### 5.2.1 POSIÇÃO $X(0) = -2, -3, -1, -3, -1, -2, -3, -1, -3, -1$

Para o vetor de posição de equilíbrio:  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1, -2, -3, -1, -3, -1]$ , do sistema massa mola com 10 massas de 2 Kg, cada, o código, quando implementado, devolve: um gráfico de deslocamento em função do tempo (Gráfico 5.1), para cada massa, em um intervalo de 10 segundos; o vetor de frequências (Imagem 5.1) e a matriz de autovetores, situados em suas colunas (Imagem 5.2).



**Gráfico 5.1:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 10 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1, 2, -3, -1, -3, -1]$ .

```
[8.85430675 8.5866133 8.14823653 7.55406849 6.85575468 5.74444321
4.78915955 3.68866392 2.5040112 1.26540587]
```

**Imagem 5.1:** Vetor das frequências do sistema massa mola com 10 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1, 2, -3, -1, -3, -1]$ .

```
[ [ 0.12524522 0.24007379 0.33455082 0.3982122 0.39519743 0.39519743
0.3982122 0.33455082 0.24007379 0.12524522 ]
[ -0.22901235 -0.38560341 -0.42047874 -0.32357492 -0.1317583 0.1317583
0.32357492 0.42047874 0.38560341 0.22901236 ]
[ 0.32440201 0.41920135 0.21433932 -0.14952577 -0.38824511 -0.38824511
-0.14952577 0.21433932 0.41920134 0.32440202 ]
[ -0.38597125 -0.3244365 0.11104171 0.41425828 0.2486503 -0.2486503
-0.41425828 -0.1110417 0.32443649 0.38597126 ]
[ 0.42149319 0.11263113 -0.39115441 -0.20678114 0.33748705 0.33748705
-0.20678114 -0.39115441 0.11263112 0.42149319 ]
[ -0.42149319 0.11263113 0.39115441 -0.20678114 -0.33748705 0.33748705
0.20678114 -0.39115441 -0.11263114 0.42149319 ]
[ 0.38597125 -0.3244365 -0.11104171 0.41425828 -0.2486503 -0.2486503
0.41425828 -0.1110417 -0.32443651 0.38597124 ]
[ -0.32440201 0.41920135 -0.21433932 -0.14952577 0.38824511 -0.38824511
0.14952577 0.21433932 -0.41920136 0.324402 ]
[ 0.22901235 -0.38560341 0.42047874 -0.32357492 0.1317583 0.1317583
-0.32357492 0.42047874 -0.38560341 0.22901235 ]
[ -0.12524522 0.24007379 -0.33455082 0.3982122 -0.39519743 0.39519743
-0.3982122 0.33455082 -0.24007379 0.12524521 ] ]
```

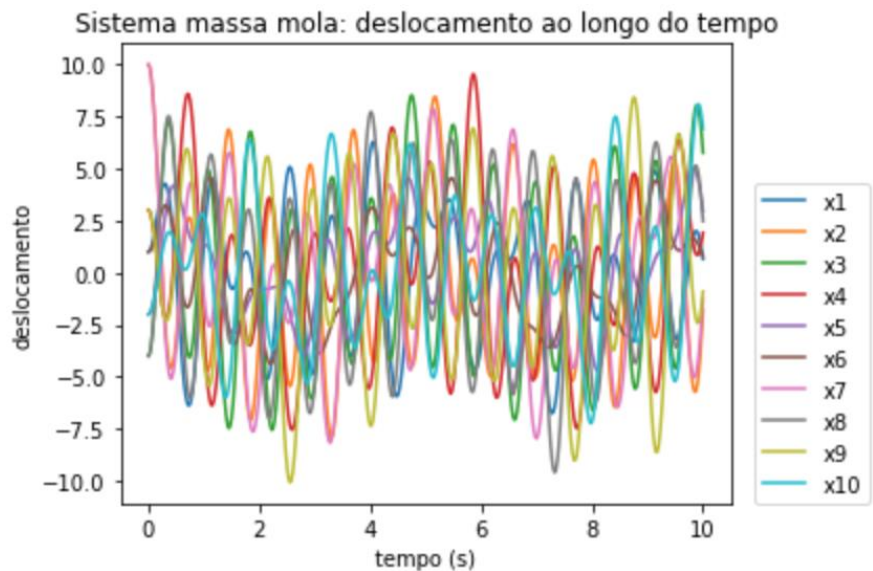
**Imagem 5.2:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, a partir da posição inicial  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1, 2, -3, -1, -3, -1]$ .

## 5.2.2 POSIÇÃO $X(0) = 1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2$



Neste caso, o sistema de 10 massas de 2 Kg foi analisado e inserido no código, a partir do vetor de posição:  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$ .

Assim como no item anterior, também foram encontrados um gráfico de deslocamento em função do tempo, dentro de um intervalo de 10 segundos (Gráfico 5.2); o vetor das frequências, (Imagem 5.3); e a matriz de autovetores da matriz A, baseada nas constantes elásticas do sistema massa mola (Imagem 5.4).



**Gráfico 5.2:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 10 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$ .

```
[8.85430675 8.5866133 8.14823653 7.55406849 6.85575468 5.74444321
4.78915955 3.68866392 2.5040112 1.26540587]
```

**Imagem 5.3:** Vetor das frequências do sistema massa mola com 10 molas, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$ .

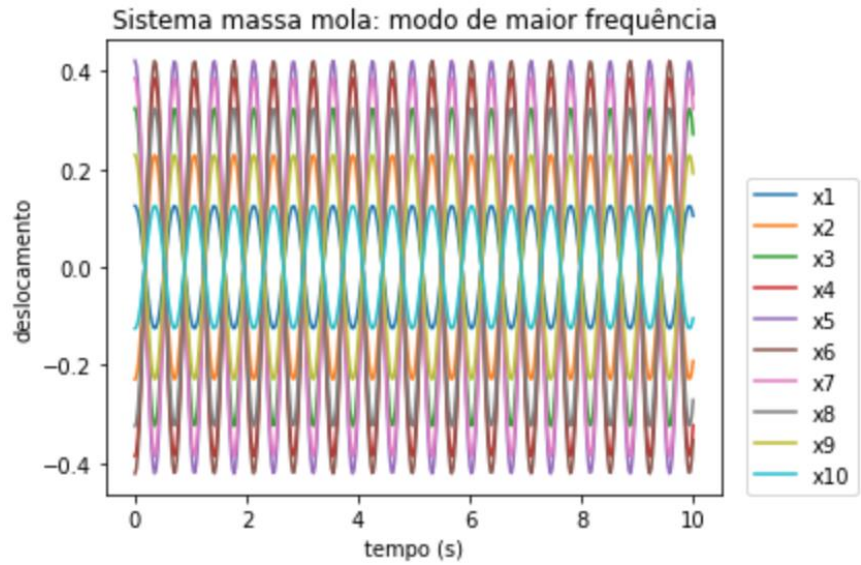
```
[ [ 0.12524522  0.24007379  0.33455082  0.3982122  0.39519743  0.39519743
    0.3982122  0.33455082  0.24007379  0.12524522]
[-0.22901235 -0.38560341 -0.42047874 -0.32357492 -0.1317583  0.1317583
  0.32357492  0.42047874  0.38560341  0.22901236]
[ 0.32440201  0.41920135  0.21433932 -0.14952577 -0.38824511 -0.38824511
 -0.14952577  0.21433932  0.41920134  0.32440202]
[-0.38597125 -0.3244365  0.11104171  0.41425828  0.2486503  -0.2486503
 -0.41425828 -0.1110417  0.32443649  0.38597126]
[ 0.42149319  0.11263113 -0.39115441 -0.20678114  0.33748705  0.33748705
 -0.20678114 -0.39115441  0.11263112  0.42149319]
[-0.42149319  0.11263113  0.39115441 -0.20678114 -0.33748705  0.33748705
  0.20678114 -0.39115441 -0.11263114  0.42149319]
[ 0.38597125 -0.3244365  -0.11104171  0.41425828 -0.2486503  -0.2486503
  0.41425828 -0.1110417  -0.32443651  0.38597124]
[-0.32440201  0.41920135 -0.21433932 -0.14952577  0.38824511 -0.38824511
  0.14952577  0.21433932 -0.41920136  0.324402 ]
[ 0.22901235 -0.38560341  0.42047874 -0.32357492  0.1317583  0.1317583
 -0.32357492  0.42047874 -0.38560341  0.22901235]
[-0.12524522  0.24007379 -0.33455082  0.3982122  -0.39519743  0.39519743
 -0.3982122  0.33455082 -0.24007379  0.12524521]]
```

**Imagem 5.4:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, a partir da posição inicial  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$ .

### 5.2.3 POSIÇÃO INICIAL CORRESPONDENTE AO MODO DE MAIOR FREQUÊNCIA

Para este caso, o vetor de posição inicial não foi dado pelo enunciado, mas sim calculado pelo código, como explicado no item 5.1 deste relatório e a frequência encontrada é única e aplicada para todas as massas, por ser a maior, sendo ela:  $\omega = 8,854306747535366$ .

Assim como nos itens anteriores, a implementação do código formulado resultou em um gráfico de deslocamento em função do tempo, para o mesmo intervalo de 10 segundos (Gráfico 5.3), para cada uma das 10 molas e uma matriz de autovetores de A (Imagem 5.5), matriz tridiagonal simétrica cujo cálculo está exposto no item 5.1, deste relatório.



**Gráfico 5.3:** Gráfico gerado pelo código, para o sistema massa mola com 10 molas, a partir da posição inicial correspondente ao modo de maior frequência.

```

[[ 0.12524522  0.24007379  0.33455082  0.3982122   0.3
9519743  0.39519743
 0.3982122   0.33455082  0.24007379  0.12524522]
[-0.22901235 -0.38560341 -0.42047874 -0.32357492 -0.13
17583   0.1317583
 0.32357492  0.42047874  0.38560341  0.22901236]
[ 0.32440201  0.41920135  0.21433932 -0.14952577 -0.38
824511 -0.38824511
-0.14952577  0.21433932  0.41920134  0.32440202]
[-0.38597125 -0.3244365  0.11104171  0.41425828  0.24
86503  -0.2486503
-0.41425828 -0.1110417  0.32443649  0.38597126]
[ 0.42149319  0.11263113 -0.39115441 -0.20678114  0.33
748705  0.33748705
-0.20678114 -0.39115441  0.11263112  0.42149319]
[-0.42149319  0.11263113  0.39115441 -0.20678114 -0.33
748705  0.33748705
 0.20678114 -0.39115441 -0.11263114  0.42149319]
[ 0.38597125 -0.3244365  -0.11104171  0.41425828 -0.24
86503  -0.2486503
 0.41425828 -0.1110417  -0.32443651  0.38597124]
[-0.32440201  0.41920135 -0.21433932 -0.14952577  0.38
824511 -0.38824511
 0.14952577  0.21433932 -0.41920136  0.324402   ]
[ 0.22901235 -0.38560341  0.42047874 -0.32357492  0.13
17583   0.1317583
-0.32357492  0.42047874 -0.38560341  0.22901235]
[-0.12524522  0.24007379 -0.33455082  0.3982122  -0.39
519743  0.39519743
-0.3982122   0.33455082 -0.24007379  0.12524521]]

```

**Imagem 5.5:** Matriz dos autovetores da matriz A, geradas para o sistema massa mola, com 10 massas, a partir da posição inicial correspondente ao modo de maior frequência.

### 5.3 CONCLUSÕES

Assim como na tarefa 2, as matrizes de autovetores encontradas são as mesmas para as três variações de posição inicial, porque todas partem de uma mesma matriz  $A$ , tridiagonal simétrica, decomposta através do algoritmo QR.

A partir da análise gráfica, é possível notar que com o primeiro vetor de posição  $X(0) = [-2, -3, -1, -3, -1, -2, -3, -1, -3, -1]$ , as amplitudes alcançadas pelos deslocamentos em função do tempo, quando comparadas às encontradas a partir do gráfico cuja posição de equilíbrio é  $X(0) = [1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3, -2]$  são menores. Além disso, as variações das massas que partem do primeiro vetor inicial são mais estáveis. Por isso, o gráfico fica visualmente menos poluído. Apesar das oscilações, as funções de todas as massas seguem um certo padrão em função do tempo, que compõem um gráfico mais nítido em relação às variações do sistema, generalizando. Em compensação, para o segundo vetor inicial, as curvas não possuem trajetórias padronizadas ou similares.

As amplitudes alcançadas pelo sistema massa mola cuja partida é da posição inicial correspondente ao modo de maior frequência são as menores entre as três. Este gráfico apresenta curvas muito bem definidas e similares, variando a amplitude do deslocamento de cada massa, bem como a ordem dos vales de cada curva, mantendo os nós sempre em alinhamento, devido à imposição da mesma frequência para todas as massas, que apresentam também os mesmos períodos de oscilação.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ISAACSON, E.; KELLER, H. B. Analysis of Numerical Methods.

ENUNCIADO DO EXERCÍCIO PROGRAMA. Autovalores e autovetores de matrizes tridiagonais simétricas – O Algoritmo QR. MAP3121, 2021. Disponível em:

[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6249061/mod\\_resource/content/3/ep1\\_2021.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6249061/mod_resource/content/3/ep1_2021.pdf). Acesso em: 2021.