**Descrição do Problema e da Solução**

Problema: Uma vez que os cidadãos não se podem cruzar quando saem de casa, visto que há possibilidade de ficarem infetados com tal aproximação, cada rua, cada avenida e cada supermercado apenas pode ter um cidadão a deslocar--se de cada vez. Assim, neste problema, foi-nos pedido para desenvolvermos um algoritmo que devolvia o número máximo de cidadãos que podiam deslocar--se até supermercados diferentes sem se cruzarem uns com os outros.

Solução: Uma vez que se trata de um problema de fluxo máximo, modelámos o mapa da cidade como uma rede de fluxo construída da seguinte forma:

* Para cada cruzamento, criámos um node na rede de fluxo. Uma vez que cada cruzamento tem capacidade igual a 1, cada node é constituído por dois vértices, um de entrada e outro de saída, que são ligados por um arco de capacidade igual a 1;
* Adicionámos também dois vértices auxiliares *s* e *t* que representam a *source* e a *sink* da rede, respetivamente;
* O vértice *s* tem um arco para cada cidadão com capacidade igual a 1, visto que é o número máximo de pessoas que podem sair de casa (cidadãos representam múltiplas fontes);
* Cada supermercado tem um arco para o vértice *t* com capacidade igual a 1, visto que é o número máximo de cidadãos em cada supermercado (supermercados representam múltiplos destinos);
* Cada node tem o seu vértice de saída a apontar para o vértice de entrada dos outros nodes, que correspondem aos cruzamentos que lhe são adjacentes;

Assim, com o problema modelado, aplicámos um algoritmo de cálculo de fluxo máximo para obtermos o valor pretendido. Escolhemos o algoritmo Edmonds-Karp, porque a capacidade e o fluxo entre cada arco apenas variam entre 0 e 1. Esta escolha também teve em conta o facto do Edmonds-Karp utilizar uma BFS, o que permite calcular os caminhos mais curtos em primeiro lugar (Ford-Fulkerson + BFS).

Na aplicação da BFS retornamos o primeiro caminho mais curto encontrado. De forma a otimizar o código e não ser necessário correr a BFS para encontrar todos os caminhos, quando se encontra o primeiro caminho da lista, verifica-se se mais algum vértice, presente na queue da BFS é predecessor da sink. Se for adiciona--se a uma lista de vértices. Esta lista de vértices permite encontrar todos os caminhos possíveis de igual tamanho para se atingir a sink através da source. Assim, só é preciso correr a BFS quando não há mais caminhos do mesmo tamanho.

Na aplicação do algoritmo de Ford-Fulkerson, se a BFS retornar um caminho vazio, significa que a sink não é atingível a partir da source, logo, retorna o valor máximo de fluxo calculado até ao momento. Se a BFS retornar um caminho não vazio, então adicionamos fluxo a todos os arcos do mesmo. De seguida verificamos os vértices pertencentes à lista de possíveis predecessores da sink. Verificamos se todos os arcos do novo caminho estão disponíveis. Se sim, então é um caminho de aumento e passamos ao vértice seguinte. Se não, eliminamos o vértice da lista e passamos ao seguinte.

**Análise Teórica**

1. Leitura dos dados de entrada: na função que lê o input temos 2 *for’s:*

- Um para ler os supermercados e outro para ler os cidadãos → O(C) + + O(S) = O(V);

- Função que cria as ligações entre nodes (inicializa o grafo residual com arcos de capacidade igual a 1 ou 0) → O(E);

Assim, a complexidade da leitura dos dados de entrada é O(V + E).

1. Aplicação do algoritmo de Edmonds-Karp:

* Aplicação de BFS:

- *For* para efetuar *reset* a todos os nodes, que implica inicializar todos os vértices (vértice de entrada e vértice de saída) como não visitados, declarar o vértice predecessor e o arco que liga o predecessor ao vértice em questão a NULL→ O(V);

- Adiciona o vértice inicial (source) à lista de vértices (queue) → O(1);

*- While* a queue da BFS não está vazia, percorre os arcos de cada vértice da queue e adiciona o vértice de destino de cada arco à queue, marca o vértice como visitado, define o predecessor e o arco que liga o predecessor ao vértice → O(V + E);

- Se a sink não foi descoberta (predecessor igual a NULL), então retornamos um caminho vazio (sink não é atingível a partir da source);

- Se a sink foi descoberta na aplicação da BFS, percorremos o resto da queue e verificamos se algum vértice tem uma ligação direta para a sink. Se sim, adicionamos a uma lista de vértices → O(V);

-Posteriormente, construímos o primeiro caminho encontrado pela BFS partindo da source e atingindo a sink e retornamos no final → O(V + E);

Assim, a complexidade da aplicação do algoritmo da BFS é O(V + E) = O(E).

* Aplicação do algoritmo Ford-Fulkerson no caminho descoberto pela BFS:

- Chamada à função que aplica a BFS → O(V + E) = O(E);

-A lista retornada pela BFS é um caminho de aumento e assim, percorremos todos os arcos do caminho e definimos as capacidades dos arcos residuais correspondentes a 1 → O(VE).

-Posteriormente, verificamos os vértices que se encontram na lista de vértices de predecessores da sink (para descobrir novos caminhos com o mesmo tamanho). Definimos o predecessor da *sink* como o primeiro vértice da lista e eliminamos o vértice da lista. Fazemos backtrack até à *source* para verificarmos se é um caminho de aumento possível e se sim percorremos os arcos todos do caminho e definimos as capacidades dos arcos residuais a 1. Repetimos o mesmo processo até a lista de vértices estar vazia. → O(VE).

Assim, o número de aumentos de fluxos é O(VE).

-No fim, retorna o valor máximo de fluxo calculado → O(1);

Assim, a complexidade da aplicação do Ford Fulkerson é O(VE).

Concluindo, a complexidade da aplicação do algoritmo Edmonds-Karp é O(VE)\*O(E) = O

1. Apresentação dos dados:

- Retorna para a linha de comandos o valor máximo de fluxo calculado pelo algoritmo Edmonds-Karp → O(1);

**Avaliação Experimental dos Resultados**

Seja:

A → Nº de avenidas;

R → Nº de ruas;

V → Nº de vértices = 2 \* (A \* R) + 2 (Vin e Vout para cada cruzamento + *source* + *sink*);

E → 4 \* 2 (ligações dos vértices dos cantos)

+ (2 \* (R – 2)) \* 3 (os vértices da primeira e da última rua têm 3 ligações (sem contar com o primeiro e último vértice))

+ (2 \* (A – 2)) \* 3 (os vértices da primeira e da última avenida têm 3 ligações (sem contar com o primeiro e último vértice))

+ [(A – 2) \* (R – 2)] \* 4 (restantes vértices têm 4 ligações)

+ S + C + V (S ligações dos supermercados à *sink*, C ligações da *source* até aos cidadãos e V ligações porque cada vértice tem uma ligação interna do Vin para o Vout)

E → 8 + 6 [(R – 2) + (A – 2)] + 4[(A – 2)(R – 2)] + C + S + V

Como cada arco (exceto os arcos da *source* para os cidadãos e os arcos dos supermercados para a *sink*) tem um arco residual na rede de fluxo:

E → 2 \* [8 + 6 [(R – 2) + (A – 2)] + 4[(A – 2)(R – 2)] + C + S + V] – S – C

Efetuámos vários testes com mapas n \* n gerados pelo gerados fornecido pelo professor. Gerámos mapas com n = 250, 500, 750, 1000, 1250, 1500, 1750 e 2000. Os cidadãos e os supermercados corresponderam a 5% de n. Como pode ser visto na tabela e no gráfico a seguir representados, calculámos a média do tempo para cada instância e obtivemos o gráfico correspondente aos valores obtidos experiencialmente.



Analisando o gráfico, concluímos que a nossa solução aproxima-se à análise teórica previamente feita. Uma vez que o eixo do x não evolui linearmente (o que evoluiu linearmente foi o valor de V), o gráfico não corresponde a uma função linear, mas sim a um função cubica????