

物理学への導入

0.1 物理の勉強の仕方

基本原理に基づいて、その原理を理解し（人に教授することのできるレベル）、種々の演習を通じて確認する。自然なものの見方が身につけばもうそれで終わり。

物理において『東大物理』も『医系物理』もなく、『古典物理学』『現代物理学』を合わせて『物理学』と総称する。また物理において解法などという言葉は使用しない。なぜなら、**自然なものの見方が身についた人からみれば、その方針が自然に出てくるから**である。

我々が日本語を話す時にいちいち考えて話さないのと同様に、物理においてもそういった自然に理解できるような見方を身につけることが重要。

0.1.1 古典物理学（19 世紀までの物理学）の世界観

古典物理学の世界観は“素朴な”素粒子論*であり、これが言わんとしていることは「生命だろうが、心（スピリチュアルな世界）だろうが、すべては究極粒子の振る舞いによって表現される」ということ。

例えば、我々が考えていることは脳内の素粒子の振る舞い（運動）によって決定されるといったこと。

ただし、今までの内容はあくまでも前提（人間のアイデアの 1 つ）にすぎず、こういった前提をすることによって「つじつまが合いそうだ」という発想から生まれたにすぎない。だから、『世界観』という表現を使用する。学問をする上で、大切な事は「その学問が何を前提としているのか」や「どういった発想を基に、何を目標としているのか」をとらえることである。当然そこには善し悪しといったレベルの議論は存在しない（どれも 1 つの世界観に過ぎず、絶対的なものではない）。

現代物理学においては素粒子論という発想が古典物理学とは異なる

0.1.2 自然科学について

自然科学は自然界を見るときの基本的な世界観でつじつまが合わなければもちろん修正される*。

絶対的なものではないが、実際問題として上手くいっているので、使っているだけである。すべての自然現象は素粒子の振る舞いとしてとらえられる。その真偽判定は実証（現実との照らし合わせ）のみによる。よって、有限な例についてしか、示すことが出来ない！（何度もいうようだが、絶対的ではない。）

しかし物理の表現を文学的な言葉で行うと（例えば日本語）分からない人が出てくるし、本来同じ概念として捉えられるべき概念が人によって異なったものに受け取られる可能性がある逆に言えば、文学的な言葉はそのあいまいさ故に、多種多様な解釈を可能にし、人類の精神活動を豊かなものにするのに重要な役割をしたともいえる。しかしそれだと議論にならないので、表現は定義ができるだけ正確なものを用いなければならない。

それを解決するために人間が作った言語。それが“数学”である。

これで『なぜ数学は必要か』という質問の答えは明らかになった。万人が納得するような言語が必要だったからである。

だから自然科学の世界においては、その世界の言葉である“数学”ができないと大きなハンデを負うことになるのである。

事実、古典力学的な世界観は 19 世紀ごろに修正された（ただし現象をマクロに見るときには依然として古典力学は有用である）

目次

物理学への導入	i
0.1 物理の勉強の仕方	i
第 1 章 電磁気学への導入	1
1.1 場の概念の導入	1
第 2 章 Potential Energy と電位	5
2.1 保存力	5
2.2 静電エネルギー	7
2.3 導体について	7
第 3 章 回路	8
3.1 コンデンサー	8
3.2 (無限に広いとみなせる) 平行金属板コンデンサー	8
3.3 電流	8
3.4 電気抵抗の定義と特徴	9
3.5 (準定常電流) 回路の考え方	10
3.6 電磁場中での荷電粒子の運動	10
3.7 電流が磁場から受ける力	11
3.8 磁場の Gauss の法則	11
3.9 電磁場の法則④	11
3.10 Biot-Savart (ビオ・サバル) の法則	12
3.11 電磁誘導	12
3.12 電磁場の法則③	13
3.13 自己・相互誘導	13
第 4 章 Maxwell 方程式のまとめ	14

第1章

電磁気学への導入

1.1 場の概念の導入

素朴な素粒子論に基づく古典物理学における力は次の2種類（量子力学レベルでは他に弱い力・強い力の合計4種類がある）

- 重力：質量に働く力
- 電磁気力：電荷に働く力

万有引力の式 $G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ は力学のときに勉強したはずである。しかしここでもう一度この式を良く考えてみよう。

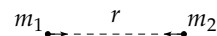
m_2 を主体とすると m_1, r は相手から影響を受ける情報である。この情報は例えば m_1 の位置が変わったり（ m_2 を主体と見ているので、もちろん相対的な変化）、また m_1 の質量が変わる（これは非常に起こりにくいことだが）とき、これらの情報は瞬時に m_2 に伝わるのかを考えて欲しい。

重力では実験（観測）は難しいが*、電磁気ではこのような実験は容易にできる。そして結論は瞬時には伝わらず、時間差があることが分かっている。

よって以上の議論により万有引力の式の表記はまずいことが分かった。

ではどうすればよいのか。

そこで人間が考えたことが『場』の概念の導入である。



宇宙空間で星が爆発する等、特殊な場合には発生することが考えられている。そのときに発生すると見られる重力波を検出しようと試みる研究者もいる。しかし未だに見されていない

1.1.1 場とは

粒子に力を感じさせるような性質が空間にあると考え、粒子は力場から力を受けていると考えることが場の概念である。

そして力場のでき方が粒子と何らかの法則性を持っていると考えると現象が説明できる。

この場の概念は受験生を苦しめることが多い。しかしよく考えてみて欲しい。我々は空間をほとんどの場合幾何的（座標や住所と考えればよい）な性質だけでは考えていない。

例えば、明るい・暖かい・にぎやかな・いい感じ・気味の悪いなど空間に何らかの性質を考えていることの方が圧倒的に多い。このとき空間にはその性質の場があるという。

そして場には大きく分けて以下の2つがある。

- スカラー場：明るさの場・温度の場等
- ベクトル場：風や水の流れの場

1.1.2 重力・電磁気力の表現

1.1.2.1 重力の表現

m の位置の重力場が C の時、重力は $F = mC$ と表せる。

ちなみに地表付近の重力場は近似的に鉛直下向きに一律で大きさ g である。

1.1.2.2 電磁気力の表現

電場 $E(\mathbf{r}, t)$ 、磁束密度 $B(\mathbf{r}, t)$ の位置 \mathbf{r} に電荷 q がある時、電磁気力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

と考えれば電磁気のあらゆる現象が説明でき、この力を Lorentz (ローレンツ) 力と呼ぶ。ただし Lorentz 力というと $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ のみを指すことが高校の参考書等では多い。しかし本書では \mathbf{E} も含めたこの力を Lorentz 力と呼ぶことにする。

1.1.3 電荷の特徴

電荷というものを考えてみよう。古典物理では素朴な素粒子論を基礎とするので電荷は素粒子であると考えると分かりやすい*。

- ① 電荷には最小単位 (電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ [C]) が存在し、この整数倍の電荷しか存在しない
- ② 孤立系の電荷は保存する (電荷保存則)

①に関して補足しておく。quark の電荷の大きさは $\pm \frac{e}{3}, \pm \frac{2}{3}e$ であるが、quark は2個や3個の組み合わせの粒子として存在し、quark 単体は現実世界には出てこない。よって電荷の合計は必ず e の整数倍になる。それが quark が発見された今でも電気素量 e の値を変えていない理由である。

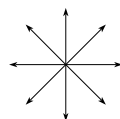
②にも補足。これは同時刻・同位置に正負両電荷が現れ (対生成)、また逆に同時刻・同位置に正負両電荷が消滅する (対消滅) という現象が起こることは否定していない*。また宇宙全体は一つの孤立系であり、宇宙全体の電荷は保存されていると考えられている。

1.1.4 電磁場の法則

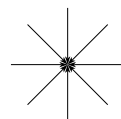
場とはに書いたようにベクトル場を理解しづらいのならば水の流れを想像すれば分かりやすい。なので以下の説明は水の流れを思い浮かべて読んで欲しい。

またベクトル場には次の2つがある。

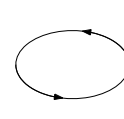
- ① わき出し吸いこみのある場 () 数学での div の概念であるが、今慌ててやる必要は無い
- ② 回転の場 (取り囲んでいる場) (洗濯機) 数学での rot の概念である



わき出し



吸い込み



回転

次節ではこの2つの場が発生する原因について書く。

1.1.4.1 電磁場の法則

以下のことは法則なので Why? と言ってはいけない。また以下のことを定式化したものが Maxwell 方程式である。

- ① 電場は 正電荷からわき出て
負電荷に吸い込まれる
- ② 磁場は N 磁荷からわき出て *
S 磁荷に吸い込まれる
- ③ 電場は $\left\{ \begin{array}{l} \text{磁場の時間変化} \\ \text{(磁荷の流れ)} \end{array} \right\}$ の周りを取り囲む
- ④ 磁場は $\left\{ \begin{array}{l} \text{電場の時間変化} \\ \text{電流} \end{array} \right\}$ の周りを取り囲む

あくまでも人間の idea
である

事実起こる

単磁荷 (magnetic
monopole) は発見され
ていないので、存在しな
いと考えるとよい

1.1.5 電場の Gauss の法則

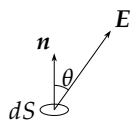
電磁場の法則①を定式化しよう。

任意の閉曲面 S を考えて、

任意の閉曲面 S の表面から出て行く電場の総和 $\propto S$ 内の全電気量

である。これを定式化しよう。電場は閉曲面の表面で一様とは限らないので積分計算が必要となる。

よって微小表面 dS 上で考える。微小表面 dS 上では、電場は一様とみなせる。この面を内→外へ貫く*電場の量を次のように表す。



雨が鉛直下方に降っているとき、傘を傾けると防げる雨の量は鉛直上方と傘の先端（数学的には傘の面の法線ベクトル）の成す角を θ とすると $\cos\theta$ に比例して減る。よって雨が鉛直下方から傾いている場合は傘を雨の降る方向に対して先端を平行（つまり傘の面は垂直）にすると最も防げる。

よって dS の内→外へ向かう単位法線ベクトル \mathbf{n} を考え \mathbf{n} と \mathbf{E} の成す角を θ とすると電場の量は

$$E dS \cos\theta = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$$

これをすべて足せば任意の閉曲面 S の表面から出て行く電場の総和が分かるので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \propto \sum_{S \text{ 内}} Q$$

と表せる。

ここで単位を確認しよう。電場 \mathbf{E} は単位電荷あたりに働く力だから電場 \mathbf{E} の単位は $[\text{N/C}]$ である。また dS は $[\text{m}^2]$ なので左辺は $[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}]$ である。右辺はもちろん $[\text{C}]$ だから比例定数を右辺につけるとしたら単位は $[\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2]$ である。

しかし我々が用いる単位系では比例定数は歴史的経緯から $\frac{1}{\epsilon_0}$ と表すので

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{S \text{ 内}} Q$$

と表す*。

この法則を利用して高校範囲で使用する定理を導こう。

世界を外界と内界に分ける曲面。袋を閉じたビニール袋を思い浮かべればよいだろうか？

もちろんこの向きを正とするという意味である

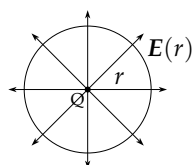
高校範囲外だが電束密度 \mathbf{D} を使うと比例定数はいらない

ただし物質分布があると対等ではなくなる

1.1.5.1 静止した点電荷の周りの電場

空間は一様・等方でありどの場所も全く対等である*。よって電場は点電荷の周りへ等方的にわき出る。

よって点電荷 Q から r の位置の電場を $E(r)$ と表すと半径 r の球面 S に



Gauss の法則を用いて、

$$E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

太字の式は電場の Coulomb の法則と呼ばれ公式である。

またこれをベクトルで表すと

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \left(k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0 \times 10^9 [\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2] \right)$$

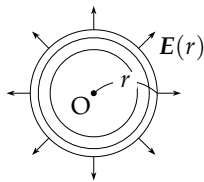
k_0 は Coulomb 力の比例定数と呼ばれている。

ただし静止しているとき自分自身の電荷が作り出した電場の影響は受けないことが実験的に証明されている。

よって点電荷同士に働きあう静電気力 (Coulomb 力) は左図のようになる ($Q_1, Q_2 > 0$)。

$$\begin{array}{c} E_2 = k_0 \frac{Q_2}{r^2} \quad \leftarrow Q_1 \quad \text{---} r \quad \text{---} \quad Q_2 \quad \rightarrow E_1 = k_0 \frac{Q_1}{r^2} \\ F_1 = Q_1 E_2 = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \quad \quad F_2 = Q_2 E_1 = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \end{array}$$

1.1.5.2 球対称電荷分布による電場



対称性より点 O から見ると、等方的に電場が生じる。図の球面 S に Gauss の法則を用いると、

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum_{S \text{ 内}} Q}{r^2}$$

万有引力の式の距離が物体の中心の距離であるのはこのような理由による

垂直でないと、見るところによって電場が変わる

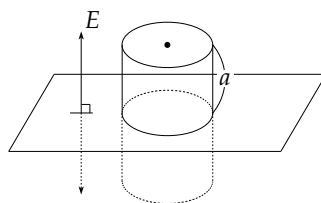
となる。よって点 O に電荷 $\sum_{S \text{ 内}} Q$ が点電荷として存在するときの電場と同じである*。

1.1.5.3 無限に長い直線状に一樣分布した電荷の周りの電場

対称性から直線状どこから見ても同じ電場が直線に垂直* に等方的に生じる。よって図の円柱面 S に Gauss の法則を用いて

$$E(r) \times 2\pi rh = \frac{1}{\epsilon_0} \rho h \Leftrightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r}$$

1.1.5.4 無限に広い平面状に一樣分布した電荷の周りの電場



対称性より平面状どこから見ても同じ電場が面に垂直に生じる。図の円柱面 S に Gauss の法則を用いて、底面積 A として

$$E \times 2A = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma A \Leftrightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

これは公式として使ってよく、特にコンデンサーのところで非常に重要な公式である。

1.1.5.1~1.1.5.4 から分かるように、Gauss の法則は積分計算をしなければならないので任意の点の電場を求められるのはきわめて対称性の強い電荷分布のときに限られる。

1.1.6 電場の重ね合わせ

前節の議論で Gauss の法則から電場が求まるのは、きわめて対称性の強い電荷分布のときに限られることがわかった。しかしこれでは例えば2つの静止した点電荷があったときの電場は求められないことになる。よってこの電場を求めるには他の方法を取らざるを得ない。そこで重ね合わせの原理を利用することになる

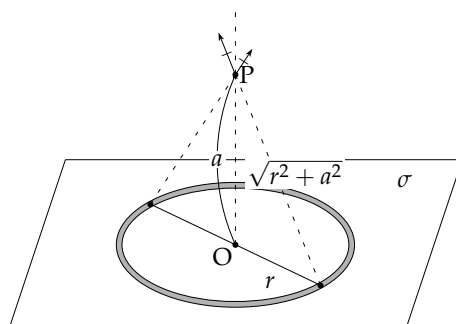
“こんなことありえない”
と思う人もいるかもしれないが、「 Q_1, Q_2 以外の電荷は無限遠方とみなせる」という意味である

重ね合わせの原理とは例えば点電荷 Q_1, Q_2 以外の電荷は無視できる世界での* 点 P を考える。

Q_1 のみが存在するときの P の電場を E_1 、 Q_2 のときを E_2 とすると、 Q_1, Q_2 が存在するときの点 P での電場 E は $E = E_1 + E_2$ のベクトル和になる。

電荷が何個あっても電場はベクトル和であることが実験的に示されている。

1.1.6.1 重ね合わせの原理から Gauss の法則 1.1.5.4 を求める



ベクトル和を良く考えてみよう

灰色部分の電荷は電荷面密度 σ と厚さ dr を用いて $\sigma \times 2\pi r dr$ と表せ、この部分が P に作る電場は \vec{OP} 向き* だから、成分を考えて

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \times 2\pi r dr}{(\sqrt{r^2 + a^2})^2} \times \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

の $r = 0 \sim \infty$ の和が求める電場であるから、

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\sigma a}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^\infty = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

これは当然ながら 1.1.5.4 のときと同じ結果である。

第2章

Potential Energyと電位

2.1 保存力

一般に仕事 $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は、始点 A と終点 B の位置を決めてもそれだけでは決まらず、途中経路に依存する*。力の種類によっては、 W が任意の始点、終点に対し、途中経路によらず、始点、終点の位置のみで決まる。このような力を『**保存力**』という。

摩擦など例はいくらでもある

2.1.0.2 地表付近の重力は保存力

例えば図のように質量 m の物体を任意の経路 C に沿って、地表付近 $y_A \sim y_B$ 動かす。 $\mathbf{F} = (0, -mg, 0), d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ とおけるから、仕事 W は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (-mg) dy = -mg \int_C dy = -mg(y_B - y_A)$$

これは経路 C によらず、 y_A, y_B の位置のみで決まる。よって地表付近の重力は保存力である*。

後で詳説するが地表付近の重力が保存力だから、重力の位置エネルギーが定義できる

2.1.0.3 静電気力も保存力

重ね合わせの原理より 1 つの静止点電荷による静電気力が保存力であることを示せばよい。

任意の経路 C はギザギザを極めて小さくすれば、図のような経路の組み合わせにできる。

A, B を決めると、 $r_1 = r_A, r_N = r_B$ と固定できるが、経路により $r_2 \sim r_{N-1}$ はいろいろ変わる。

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr + \int_{r_1}^{r_2} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr + \cdots + \int_{r_{N-1}}^{r_N} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr \\ &= \int_{r_1=r_A}^{r_N=r_B} k_0 \frac{Qq}{r^2} dr = -k_0 Qq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

これより仕事は r_A, r_B のみで決まり、途中経路によらないことが示された。

また保存力はどんな動き方をしてもスタート地点に戻ってきたらその仕事の合計は絶対に **0** ということは知っておきたい*。

$$1 \text{ 周積分 } \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

2.1.0.4 Potential Energy

力 \mathbf{F} が保存力であるとき、Potential Energy は次のように定義する。

A を基準とする B の Potential Energy U_B は $U_B = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^*$

つまり『A から B へ運ぶとき、保存力につりあわせる外力のする仕事』

(A)

保存力なので始点と終点だけ指定すればよい

\Leftrightarrow 『B から A へ動くとき、保存力自身がする仕事』

(B)

(A), (B) どちらでも言えるようにしておくべきである。

以上より点電荷 Q による静電気力の Potential Energy は r_A を基準とすると

$$U = - \int_{r_A}^{r_B} \left(k_0 \frac{Qq}{x^2} dx \right) = k_0 Qq \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

と表せる。

2.1.1 電位

電位とは単位電荷あたりの静電気力による Potential Energy で単位は $[J/C] = [\text{V}]$ ^{ボルト}
 前節の議論より r_A に対する r_B の電位 ϕ は,

$$\phi = \frac{U}{q} = k_0 Q \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

特に $r_A \rightarrow \infty$ にとれば $\phi_B = k_0 \frac{Q}{r_B}$

一般に静電場を E としたとき、A に対する B の電位は $\phi_B = -\int_A^B E \cdot dr$

2.1.1.1 一様電場による電位

定数での積分計算をしても良いが、2.1.0.4 の(A), (B)を利用すると、電場を水の流れと見たときに“上流側”の方が高電位であることはすぐにわかり、それが距離と比例関係にあることもすぐにわかる*。

というよりも分かるように訓練するべきである

2.1.1.2 電位の重ね合わせ

静電場 $E = E_1 + E_2 + \dots + E_N$ のとき

$$\phi_B = -\int_A^B E \cdot dr = -\int_A^B E_1 \cdot dr - \int_A^B E_2 \cdot dr - \dots - \int_A^B E_N \cdot dr = \phi_{1B} + \phi_{2B} + \dots + \phi_{NB}$$

と表せる。一見すると当たり前のことだが、ベクトル和である電場の重ね合わせに比べ、電位はスカラー和であるので計算は電位の方が楽である。

2.1.2 Potential Energy から保存力を求める

前節より Potential Energy はスカラーであるから計算が楽であることが分かった。

そこで計算が楽な Potential Energy で計算して必要に応じて保存力を逆算することができれば便利である。そこでその逆算の方法について考えてみよう。

Potential Energy $U(x, y, z)$, 保存力 $F(x, y, z)$ とする

点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_1 + \Delta x, y_1, z_1)$ を考えると

$$U(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1) = -\int_A^B F \cdot dr = -\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} F_x dx$$

ただし F_x は F の x 成分である。

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ のとき

$$U(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1) \doteq -F_x(x_1, y_1, z_1) \times \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$ を考えて

$$\begin{aligned} F_x(x_1, y_1, z_1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{U(x_1 + \Delta x, y_1, z_1) - U(x_1, y_1, z_1)}{\Delta x} \right\} \\ &= -\frac{\partial U}{\partial x}(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

これは偏微分と呼ばれる演算で x 以外の変数を固定して x で微分せよという意味で、 ∂ は d とほぼ同じ意味だが ∂ を使うと偏微分であることを強調できる

よって**保存力の x 成分は、Potential Energy の x 方向にそった変化の割合の逆符号である**。そしてこれは y, z 方向についても成り立つから、

$$F = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\text{grad } U = -\nabla U$$

ただし、これらの記号は現時点で覚える必要はない

2.1.3 Potential Energy を利用して運動の様子を目で見る

保存力のみを受ける物体のエネルギー保存則より、運動エネルギー (Kinetic Energy) を K , Potential Energy を U , 物体のもつエネルギーを E として

$$K + U = E$$

よって U のグラフが分かれば K が分かり運動の様子が非常にわかりやすくなる。

2.2 静電エネルギー

静電エネルギーとは考えている電荷分布を作るのに必要な静電気力につりあわせる外力のする仕事。

2.2.1 大きさムシの荷電粒子系の静電エネルギー

$Q_1 \sim Q_N$ が存在するような電荷分布を作る。静電気力は保存力であることから計算しやすい動かし方で計算すればよい。

よってまず何もない* 状態から Q_1 を所定の位置に運ぶとき、外力のする仕事 $W_1 = 0$ である。

$Q_1 \sim Q_N$ は無限遠方

次に Q_2 を所定の位置に運ぶと、外力のする仕事は $W_2 = Q_2 \times k_0 \frac{Q_1}{r_{12}}$

よって $N = 2$ のときの静電エネルギーは $U_2 = W_1 + W_2 = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}}$

同様に考えていけば N 個の粒子系の静電エネルギーは、 $U_N = \sum_{i < j} k_0 \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}$

静電エネルギーはコンデンサー等でも大事な考え方である。

2.2.2 電気力線について

2.3 導体について

理想的な導体は内部に自由電子（伝導電子）が無数に存在する物体*。絶縁体（誘電体・不導体）はその逆で内部に自由に動ける電荷がない物体である。

現実には $\sim 10^{28}$ [個/m³] 程度であり、また導体は主に金属のことである

2.3.1 静電場の中に導体を入れる

静電場の中に導体を入れると静電誘導* により現れた電荷の作る電場と外部電場の重ね合わせにより、電荷移動が終わったとき、**導体内部の電場は 0***。よって導体内部は等電位で、マクロに見た電荷分布は導体の表面のみである*。

内部の自由電子が電場から力を受けて移動すること

というより 0 でないと電荷が力を受けて動いてしまうので、0 になるまで電荷は動き続ける

ミクロに見れば内部にももちろんある

第3章

回路

3.1 コンデンサー

導体間の帯びている電荷の差ではない

導体間に電荷を移動させ保持したとき、これらの導体は**コンデンサーを形成する**という。このとき移動させた電荷の大きさ Q^* をコンデンサーに蓄えられた電荷という。また $C = \frac{Q}{V}$ を（電気）容量と**定義**する。また容量の単位は $[\text{F}]$ ^{ファラド} である。

よってコンデンサーは回路だけではなく例えば、下敷きで髪をこすっても電荷移動は起こるからコンデンサーであるし、雷雲と地面も電荷移動が起こっているからコンデンサーである。

3.1.1 電気容量は定数か？

Coulomb の法則と重ね合わせの原理より**金属表面の電荷分布を変えず**に Q を 2 倍にすると、電場・電位ともに 2 倍となる。よって電気容量は極板の形・配置・極板間の物質分布による定数とみなせる**可能性**がある。

電気容量が定数であることの証明はまだやっていないことを念頭に入れて欲しい

しかし雷雲と地面のように電荷がたまりすぎると放電が起きることがあるのでコンデンサーで蓄えられる電荷には限界がある。よって実際にはある程度の範囲で定数であることが知られており、その証明は大学でやる*。

3.1.2 コンデンサーの静電エネルギー

静電エネルギーとは『考えている電荷分布を作るのに必要な静電気力につりあわせる外力のする仕事』であり、これはもちろんコンデンサーのときにも当てはまる。

よって電荷に偏りのない状態から電荷を移動させてコンデンサーと同じ電荷分布を作るわけだが、一気に電荷 Q を動かすと電場が複雑に変化し計算できない。よって静電気力が保存力であることを利用して計算する方法を考えよう。

ここで物理ではおなじみの考え方。電位 v の変化が無視できるくらいの微小な電荷 dq を移動させるのに必要な外力を $q = 0 \sim Q$ まで足せば静電エネルギーは出るはずである。

よって求める外力の大きさは電位の定義から $v dq = \frac{q}{C} dq$ だから $Q = CV$ とすると

$$u = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

となる。これは既知として使ってよい。

3.2 （無限に広いとみなせる）平行金属板コンデンサー

3.2.1 極板間への物体挿入（導体）

3.2.2 極板間への物体挿入（誘電体）

3.3 電流

無論、単位時間中に通る電流が一定である保証は無い

大きさは断面を単位時間当たり*に通る電気量。よって単位は $[\text{A}]$ ^{アンペア} = $[\text{C/s}]$ である。

そして正方向を正電荷の流れと同じ向き* とする。これは導線内の電場の向きと同じである。

ただし電場が生じているなら自由電子はどんどん加速されて速さが大きくなり電流は大きくなるはずである。しかし実験的に電流は定常状態になることが分かっているので、熱振動している陽イオンなどに自由電子がぶつかり減速もされると考えられる*。

この二つの原因から電流は平衡状態となり、平均移動速度 \bar{v} は一定になる。

$I = enS\bar{v}$ であることが容易に分かる。

つまり負電荷である電子の流れとは**逆向き**

ただし、3.4.1 も読んで欲しい

3.4 電気抵抗の定義と特徴

電気抵抗を $R = \frac{V}{I}$ と定義する (単位は $[\Omega] = [V/A]$)。

この電気抵抗は電場 E の大きさが 2 倍になれば、電流 I も自由電子の加速度が 2 倍になるのだから 2 倍になると考えられ、また電圧 (電位と同じだが特に電気回路では電圧と呼ぶことが多い) V も 2 倍になると考えられる。

よって電気抵抗 R は一定であると考えられ、またそれは実験的にも正しいことが分かっている。また R は

- ① 物質の種類 (主に n の違い)
- ② 金属の温度 (陽イオンの熱振動が自由電子の衝突に影響していると考えられる)
- ③ 長さ l , 断面積 S (S が違うと I は変化し、 I が同じ時は E が同じなので、 l が違うと V は異なる)

に影響されると考えられる。

①, ②を固定したときの、 R の③の依存性

S を 2 倍にする。

l を 2 倍にする。

よって $R \propto \frac{l}{S}$ と考えられ、 $R = \rho \frac{l}{S}$ をかくとき、 $\rho [\Omega \cdot m]$ を抵抗率という。そして抵抗率 ρ が①,

②に依存すると考えられる。

ρ の①による依存性 n の大きい金属の方が ρ は小さい傾向にある。

ρ の②による依存性 金属では、温度により自由に動けない電子が自由に動けるようになったりはほとんどしない*。よって n は温度にはほとんど影響を受けない。しかし温度が上がると陽イオンなどの熱振動が激しくなり、自由電子の散乱が起こりやすくなり、 ρ は大きくなる傾向にある。

半導体では温度の上昇と共に n が大きくなり、この影響により ρ は小さくなる傾向がある

3.4.1 しかし、圈点部分をよく考えてみよう！

実はこれは大嘘である。

random な振動をしている陽イオンは一定間隔で分布していて、random な振動をしているのだから、陽イオン同士には近づいたり、遠ざかったりするものが random にある。よって電子から見た平均の格子間隔は変わらないはず (おかしいと気づかないならもう一度見直してよく考えよう)。そうするとぶつかりやすさも変わらないはずである。古典物理学的に言うなら、自由電子の振動が激しくなるとすぐに衝突してしまうという方が適切であるが、陽イオンの熱振動で議論するのが普通である。

さらにいうと実験的には絶対零度に近い温度では抵抗が 0 になる (超伝導現象) が起こることが分かっている。よって単純に電子が陽イオンに『ぶつかる』というイメージは**正確でない**。

実際、この抵抗の問題は量子力学がない時代には超難問とされてきた。そして現在これは量子力学でないと説明不可能であることが知られていて、その量子力学によると抵抗の原因は結晶格子の乱雑さ (規則正しければ 0) によるものとされている。

ちなみに半導体は温度が上がると動ける自由電子が増加するので n が増加する。よって温度が上がると抵抗率は減少する。

3.4.2 Joule 熱について

単位時間あたりに導線内の自由電子は、電場から IV の仕事をされるが、これを陽イオンなどとの衝突によりそれらの熱振動を激しくするのに使われる*。

よって単位時間あたりに失われる energy は $P = IV = RI^2 = V^2/R$ [J/s]

3.5 (準定常電流) 回路の考え方

準定常電流回路とは電磁場の発生が無視でき、それにより回路から空間に持ち出される energy が無視できる回路のこと。そのように仮定すれば電荷電流の分布を楽に求めることができる。

3.5.1 回路を解く方法

- 電荷・電流を仮定（もちろん物理法則に反しないように）
- 以下の回路方程式で求める
 - 孤立系の電荷保存
 - 任意のループ 1 周に対し、(ループ 1 周あたりの起電力) = (ループ 1 周あたりの電圧降下)

ただし起電力とは電荷に対して仕事を恒常的* にする能力のことである。また電圧とは電位差のことで特に回路で大変よく使われる。その理由は『ぐるぐる』電場上のある点 A を考えると『ぐるぐる』電場を電荷が点 A から 1 周して点 A に戻ってきたときに電荷は仕事をもらっている。よってこのとき電荷に働く力は保存力ではない。よって電位が定義できないので電位差が使われる。

3.5.2 energy 収支

運動方程式の両辺にスカラー積で速度 v をかけると仕事率の式に変わる。実は回路方程式にも似たようなことができる。

両辺に電流 i をかけると* 仕事率の式にかわる。それを時刻 $t = 0 \sim \infty$ において積分すれば仕事になることは明らかである。

3.6 電磁場中での荷電粒子の運動

荷電粒子 q に電場 E 、磁束密度 B の元で、実験的に以下のような力 F が及ぼされることが分かっている。

$$F = q(E + v \times B)$$

この力は Lorentz 力と呼ばれる。またベクトル積の特徴から $v \times B$ の項は v と直行しているので、電荷に対して仕事をしない。また B 方向には磁場から電荷が受ける力は働かない。

よって荷電粒子の運動を求めるには Lorentz 力と運動方程式から解けばよいが電場や磁場が時間的に変化すると複雑な積分計算となるから、特に高校範囲では一様電場・磁場になる。

3.6.1 電磁場中での電荷と磁荷の運動

ここで電荷、磁荷が電磁場から受ける力をまとめると

$$F = q(E + v \times B)$$

$$F = m(H - v \times D)$$

と表せる。ただし M は質量ではなく magnetic (磁荷) のことである。

ここで H, D はそれぞれ“磁場”，“電束密度”と呼ばれ、それぞれ電場、磁束密度に対応する値である。

電場・電束密度、磁場・磁束密度は単なる測り方の違いでそれぞれ真空中では $\epsilon_0 E = D, \mu_0 H = B$ の関係式が成立している。

また ϵ_0, μ_0 は真空の誘電率、真空の透磁率と呼ばれる定数である。

この式を見ればなぜ電気と磁気が同じ“電磁”気学となったのかが少しわかるだろう*。

IV の仕事をもらっているのに平均移動速度は不変なのはこういう理由からである

ここが電位差と違う

もちろん回路方程式はスカラー

そうなるとなぜ磁荷が無いのか大変疑問である

3.7 電流が磁場から受ける力

歴史的には電流が磁場から受ける力が最初に観測され、それについて研究をして Lorentz 力は発見されたが、ここでは Lorentz 力を前提にして話をしてみたい。

$I = -enSv$ とかける*。よってこの導線の長さ l の部分には、 nSl 個自由電子が含まれることに注意して、各自由電子が $f = -ev \times B$ の Lorentz 力を受けているので、この部分が磁場から受ける力は、

$$\begin{aligned} F &= nSlf = nSl(-ev \times B) \\ &= l(-enSv) \times B = lI \times B \end{aligned}$$

また磁束密度 B の単位は右辺と左辺を比較して $[T] = [N/A \cdot m]$ である。

3.8 磁場の Gauss の法則

今度は電磁場の法則②を定式化しよう。1.1.5 でやったことと全く同じである。しかし、単磁荷が発見されていないので磁場のわき出し吸いこみはないことが電場の Gauss の法則と大きく異なる。よって、

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{S \text{ 内}} M = 0$$

と表せる。

ここで単位を確認しよう。磁荷の単位は $[Wb]^*$ で面積は $[m^2]$ なので $[T] = [Wb/m^2]$ と表せる。

本来なら $[C]$ と並ぶ重要な電磁気学の単位であるが、磁荷が存在しないので $[C]$ ほど頻繁に見ないかもしれない

3.9 電磁場の法則④

ここでは電流の周りに生じる取り囲み磁場について表現しておく。

3.9.1 Ampère の法則

定性的には I の向きに右ねじを回して進む向きになるような、 H のうずまきができる。

これを式に表すと以下ようになる。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

ここで C は任意のループで左辺は C 1 周に沿って単位磁荷を運ぶとき、磁場のする仕事で右辺は C をふちとする面 S を貫く全電流である。ここで面 S は C をふちとすれば任意で、閉曲面を 2 つに分けた様なものを想像して、例えば封のしていないビニール袋でビニール袋のふちが C でビニール袋が面 S ということと分かりやすいだろうか？ ただし特に大学入試の問題では面を複雑にとると計算が難しくなるだけなのでちょうどシャボン玉のようにループにくっついた面を考えるのがよい。

しかしここで疑問が生じなければおかしい。なぜなら左辺は C 1 周に沿って単位磁荷を運ぶとき、磁場のする仕事と書いたが回る方向によって正負が変わってしまう。右辺も単位法線ベクトル \mathbf{n} は方向を考えると 2 つ存在するのでどちらを取るかで正負が変わる。なのでここは数学で頻繁に使われる右手系を使って、 \mathbf{n} の方向に右手の親指を立てて他の指の向く方向が $d\mathbf{r}$ の正方向である。もちろん $d\mathbf{r}$ から先に決めてもいいし、右ねじを $d\mathbf{r}$ 方向に回したときに進む方向を \mathbf{n} 方向にするとしても同じことである。

3.9.2 無限に長い直線電流の周りの磁場

対称性より直線状どこから見ても、同じ磁場が等方的に取り囲む。よって磁場は円になりループ C を半径 r の円にとると、磁場 $H(r)$ は $H(r) \cdot 2\pi r = +I \iff H(r) = \frac{I}{2\pi r}$

3.9.3 無限に長いソレノイドコイルの電流の周りの磁場

実際のソレノイドコイルは一本の導線を巻いていくので軸に平行な電流もあるはずだがここでは理想化し、無視する。

まず当然だが磁場にも重ね合わせの原理は成り立つので円電流が作る磁場を重ねると
ソレノイド途中放棄

3.10 Biot-Savart (ビオ・サバル) の法則

Ampère の法則は積分法則なので任意の点の磁場を求められるのはきわめて対称性ときに限られる。

よってそうでないときは電流を細かくした電流素片*が任意の点に作る磁場の法則 (Biot-Savart の法則) と重ね合わせの原理を用いる。

Biot-Savart の法則はもともとは実験的に発見されたが、Ampère の法則を書き換えたものと考えて欲しい。

電流素片 $I ds$ が、この素片から任意の位置ベクトル \mathbf{r} の位置に作る磁場は

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I ds}{|\mathbf{r}|^2} \times \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

3.11 電磁誘導

電磁誘導には次の2種類ある。

- ① 磁場中を運動する導体中の自由電子に働く Lorentz 力の成分による誘導起電力
- ② 磁場の变化の周りに生じる取り囲み電場 (誘導電場) による誘導起電力 (=電磁場の法則③)

①について PQ 中に考えた単位正電荷は $Q \rightarrow P$ 向きに力 $|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}|$ ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の PQ 方向成分の絶対値という意味で用いたが、数学的に正しい記号ではない) を受ける。よって $Q \rightarrow P$ へ動くとき、仕事 $l|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}|$ をされることになり、これが $Q \rightarrow P$ 向きに生じる誘導起電力である。

これにより PQ 方向に電荷分布の偏りができ、 $Q \rightarrow P$ 向きの静電場が生じる。

定常状態での力のつりあい $0 = |(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}| - |E|$

よって Q に対する P の電位は、 $\phi_P - \phi_Q = +|E|l = l|(\mathbf{v} \times \mathbf{B})_{PQ}| = V$

つまり大事なことは**電位差と起電力は全く違う**ということである。

(ここでは電磁誘導により) 電荷に対し仕事をする状態が生じる \rightarrow 電荷分布が生じる \rightarrow 電位差が生じるというプロセスを踏むのである。起電力とは単位電荷に対して仕事をする能力で、電位差は考えている部分に生じた静電場から定義されるものである。

ここは大事なので具体例をあげて違いを説明しよう。

電位差がある回路 (ここではコンデンサー) 電荷が移動して電位差を解消しようとし、解消すると電荷は移動しない

起電力がある回路 (ここでは電池で考える) 電荷が移動して電位差を解消しようとするが、起電力が電荷を移動させて電場を一定に保つので電位差は変わらない

3.11.1 ローレンツ変換

ここでまた Lorentz 力について考えてみよう。 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ という式をよく見て欲しい。速度 \mathbf{v} は見る座標系によって違う。極端なことを言えば静止座標系で見たとき速度 \mathbf{v} で動いている物体は速度 \mathbf{v} で動いている座標系から見ると静止しているように見える。

よって、例えば一様磁場の中に (電場は無いとする) 電荷粒子を放り込めば $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を向心力とした等速円運動が観測されるがこの現象を粒子と同じ速度で動く座標系から見ると粒子は静止して見える。また、この座標系は加速度をもっているので慣性力 (遠心力) が働くはずである。しかし Lorentz 力は $\mathbf{0}$ だから力はつりあっていないはずである。

現在の物理学ではローレンツ変換といい電場と磁場は見る座標系によって何らかの関係性があるとされている。なので、前の例の遠心力はローレンツ変換により現れる誘導電場から働く力とつり合う。

よって電磁誘導②は図のようにあくまで座標系の違いであり電磁誘導①と全く同じ現象である。

3.12 電磁場の法則③

磁場の変化の周りに電場が取り囲む。

これを式に表すと以下になる。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

ここで C は任意のループで、左辺は C 1 周に生じる誘導起電力で、右辺は C をふちとする面 S を貫く全磁束である。

もちろん $d\mathbf{r}, \mathbf{n}$ の正方向は電磁場の法則④と同じである。

また普通全磁束を Φ で表し $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ と書く。これを Faraday の法則という。またこのマイナスの符号は次のように解釈できる (レンツの法則)。

Φ の変化を妨げる磁場をつくる電流を流そうとする向き

3.13 自己・相互誘導

Ampère の法則 (これを变形した Biot-Savart の法則でもよい) から、電流の作る磁場は電流に比例する

るので K_1, K_2 を (ふちとする) 貫く全磁束は、
$$\begin{cases} \Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \\ \Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \end{cases}$$
 とかける*。

コイルがいくつあっても
同じ

$|L_{ij}|$ は K_1, K_2 の形, 配置, 物質分布により決まる定数。

このとき $|L_{11}| = L_1$ を K_1 の自己インダクタンスという。

$|L_{22}| = L_2$ を K_2 の自己インダクタンスという。

$|L_{12}| = |L_{21}| = M^*$ を K_1, K_2 の相互インダクタンスという。よって
$$\begin{cases} \Phi_1 = +L_1I_1 + MI_2 \\ \Phi_2 = +MI_1 + L_2I_2 \end{cases}$$
 とかけ

相反定理 証明は難

ることがわかる。ただしインダクタンスの前の符号は面の法線ベクトルと磁束の方向により変わりうる。

ただし法線ベクトルの方向は任意に決められ、磁束の正方向も任意に決められる*。

嘘??

I_1, I_2 の変化に伴い K_1, K_2 に生じる誘導起電力は
$$\begin{cases} V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \\ V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt} \end{cases}$$
 となる。

またインダクタンスの単位は $[\text{Wb}/\text{A}] = [\text{H}]$ である。

またインダクタンスを求めるのは困難なことが多いため高校範囲で求めることが要求されるのはソレノイドコイルのみである。

3.13.1 (無限に長いと近似できる) ソレノイドコイルのインダクタンス

3.13.2 自己インダクタンス L のコイルの回路における役割

I と同じ向きを正とした誘導起電力 V は $V = -L\frac{dI}{dt}$ と表せる。たこれは起電力なので回路方程式の左辺に書くのが普通である。また、電流 I の変化を妨げる向きに誘導起電力が生じるので**逆起電力**とも呼ばれる。

第4章

Maxwell方程式のまとめ

$$\textcircled{1} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \sum \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\textcircled{2} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \sum M = 0$$

ただし①, ②の S は任意の閉曲面で以下の S は C を取り囲む面で閉曲面を2つに分割したようなものを想像すればよい。

$$\textcircled{3} \oint_C \mathbf{E} d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\textcircled{4} \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$$

物理学の公式はほとんど
実験的に判明したもので
ある

④の強調部分? は物理学では珍しく Maxwell が理論的に導入した*。

導入した理由は③の式との兼ね合いもあるがそれに加えて以下のような考察から導入しなければなら
ないと分かった。

ループ C に Ampère の法則を用いると面 S_1, S_2 を考えて

$$\oint_C \mathbf{H} d\mathbf{r} = \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = +I \quad (4.1)$$

$$= \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = 0? \quad (4.2)$$

式 (4.2)では面 S_2 を貫く電流は存在しないので計算ミスではない。しかしよく見ると面 S_2 にはコンデ
ンサー間の電場が貫いている。しかも電流によりコンデンサー上の電荷が増えている。我々はこれまでの
勉強により電気と磁気は非常に密接な関係があることがわかっている。よって④の式に③と同じような式
が出てこないことに違和感を持つべきである*。すると Ampère の式では不十分であることが分かるは
ずである。

よって③の式から Ampère の式には $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS$ の項が必要である。

符号は実際に面 S_2 を貫く電束密度を求めてみればよい*。

電荷 Q , 面積 S とすればコンデンサー間の電束密度は $\mathbf{D} = \frac{Q}{S}$ で $I = \frac{dQ}{dt}$ より

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{dQ}{dt} = +I \text{ なので符号は正であれば面 } S_1 \text{ と結果は同じになる。}$$

もちろんこの議論だけでは予想に過ぎず実際にこの項が現れることは実験をして示さねばならない。そ
して現在ではこの項が必要であることは実験的に示されている。

そして以上の議論から次の現象が予言される。

導線に振動電流を流す。すると振動電流の周りには④により振動磁場が生じ、その周りに③により振動
電場が生じ、...

というようにして振動電磁場が空間を伝える現象があることになる。これが電磁波と呼ばれるもので
Maxwell は電磁波の伝わる速度を理論的に計算し光と同じ速度であることを突き止め、光も電磁波であ
ることを証明した。

残念ながら磁荷は無いの
で“磁流”はない。した
がって③の式に Ampère
のような式は現れない

変位電流ともいう