

Integral de Riemann-Stieltjes

Equipo 1

Facultad de Matemáticas UV

27 de octubre de 2014

Particiones

Definition

Sea $[a, b]$ intervalo. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_n tales que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$$

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \dots, n)$$

[1]



Integral de Riemann

Definition (2)

Sea f es una función real acotada definida en $[a, b]$. Para cada partición P de $[a, b]$ definimos

$$\begin{aligned}M_i &= \sup f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\m_i &= \inf f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\U(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \\L(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i\end{aligned}$$

y finalmente

$$\int_a^b f \, dx = \inf U(P, f) \quad (1)$$

$$\int_a^b f \, dx = \sup L(P, f) \quad (2)$$

Las partes izquierdas de estas ecuaciones son llamadas *integral superior* e *integral inferior* de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

Integral de Riemann

Definition (3)

Si las integrales *superior* e *inferior* son iguales entonces decimos que f es *riemann-integrable* en $[a, b]$ y diremos que $f \in \mathcal{R}$ donde \mathcal{R} denota el conjunto de funciones *riemann-integrables* y denotaremos el valor de (1) y (2) como

$$\int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

A lo cual llamaremos *integral de riemman* de $f(x)$.

Integral de Riemann-Stieltjes

Sea α una función monótona creciente definida en $[a, b]$ (y por tanto, acotada). Para cada partición P escribimos

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \quad \Delta\alpha_i \geq 0$$

Para cualquier función acotada en $[a, b]$ definimos

$$\begin{aligned} U(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta\alpha_i, \\ L(P, f, \alpha) &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta\alpha_i, \end{aligned}$$

Donde M_i y m_i son lo mismo que en la definición (2) y finalmente

$$\int_a^b f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \quad (4)$$

$$\int_a^b f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \quad (5)$$

Integral de Riemann-Stieltjes

Definition (4)

Si los términos de (4) y (5) son iguales, denotaremos su valor común como

$$\int_a^b f d\alpha \quad (6)$$

ó

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x). \quad (7)$$

Que es la *integral de rieman-stieltjes* de f respecto de α sobre $[a, b]$.
Si (6) existe, es decir (5) y (6) son iguales, decimos que f es integrable respecto a α y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Integral de Riemann-Stieltjes

Definition (5)

Decimos que la partición P^* es un *refinamiento* de P si $P^* \supset P$. Dadas dos particiones P_1 y P_2 decimos que P^* es su *refinamiento común* si $P^* = P_1 \cup P_2$

Theorem (1)

Si P^* es un refinamiento de P , entonces

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \quad (8)$$

y

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \quad (9)$$

Teoremas

Theorem (2)

$$\int_a^b f d\alpha \leq \overline{\int}_a^b f d\alpha$$

Theorem (3)

$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon \quad (10)$$

Teoremas

Theorem (4)

- 1 Si se cumple (10) Para alguna P y alguna ϵ , entonces (10) se cumple para cada refinamiento de P .
- 2 Si (10) se cumple para $P = x_0, \dots, x_n$ y si s_i y t_i son puntos arbitrarios en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(t_i)| \Delta \alpha_i < \epsilon$$

Theorem (5)

Si f es continua en $[a, b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$.

Teoremas

Theorem (6)

Si f es monótona en $[a, b]$, y α es continua en $[a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$

Theorem (7)

Supóngase que f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, y suponga que α es continua en cada punto en que f es discontinua. Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$

Theorem (8)

Suponga que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$, $m \leq f \leq M$, ϕ es continua en $[m, M]$ y $h(x) = \phi(f(x))$ en $[a, b]$. Entonces $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$

Propiedades de la integral I

- ① Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ entonces

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha),$$

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ para cualquier constante c , y

$$\begin{aligned}\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha &= \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \\ \int_a^b cf d\alpha &= c \int_a^b f d\alpha.\end{aligned}$$

- ② Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leq \int_a^b f_2 d\alpha$$

Propiedades de la integral II

- 3 Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y

$$\int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha$$

- 4 Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y $|f(x)| \leq M$ en $[a, b]$ entonces

$$\left| \int_a^b f d\alpha \right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Propiedades de la integral III

- 5 Si $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ y $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ y

$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2;$$

si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y c es una constante positiva, entonces $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ y

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha.$$