Integral de Riemann-Stieltjes

Equipo 1

Facultad de Matemáticas UV

27 de octubre de 2014

Particiones

Definition

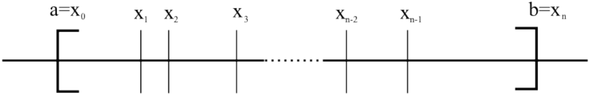
Sea $[a, b]$ intervalo. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ tales que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \ldots, n)$$

[1]



Integral de Riemann

Definition (2)

Sea f es una función real acotada definida en $[a, b]$. Para cada partición P de $[a, b]$ definimos

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & \sup f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ m_i & = & \inf f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ U(P,f) & = & \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, & \\ L(P,f) & = & \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i & \end{array}$$

y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f\, dx = \inf U(P,f) \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f\, dx = \sup L(P,f) \tag{2}$$

Las partes izquierdas de estas ecuaciones son llamadas *integral superior* e *integral inferior* de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

Integral de Riemann

Definition (3)

Si las integrales *superior* e *inferior* son iguales entonces decimos que f es *riemann-integrable* en $[a, b]$ y diremos que $f \in \mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ denota el conjunto de funciones *riemann-integrables* y denotaremos el valor de (1) y (2) como

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

A lo cual llamaremos *integral de riemman de* $f(x)$.

Integral de Riemann-Stieltjes

Sea α una función monótona creciente definida en $[a, b]$ (y por tanto, acotada). Para cada partición P escribimos

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \qquad \Delta\alpha_i \geq 0$$

Para cualquier función acotada en $[a, b]$ definimos

$$\begin{array}{rcl} U(P, f, \alpha) & = & \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \\ L(P, f, \alpha) & = & \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \end{array}$$

Done M_i y m_i son lo mismo que en la definición (2) y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \text{ínf} \, U(P, f, \alpha), \tag{4}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{5}$$

Integral de Riemann-Stieltjes

Definition (4)

Si los términos de (4) y (5) son iguales, denotaremos su valor común como

$$\int_a^b f \, d\alpha \tag{6}$$

ó

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x). \tag{7}$$

Que es la *integral de rieman-stieltjes* de f respecto de α sobre $[a, b]$.
Si (6) existe, es decir (5) y (6) son iguales, decimos que f es integrable respecto a α y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Definition (5)

Decimos que la partición P^* es un *refinamiento* de P si $P^* \supset P$. Dadas dos particiones P_1 y P_2 decimos que P^* es su *refinamiento común* si $P^* = P_1 \cup P_2$

Theorem (1)

Si P^* es un refinamiento de P, entonces

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \tag{8}$$

y

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \tag{9}$$

Teoremas

Theorem (2)

$$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

Theorem (3)

$f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < \epsilon \tag{10}$$

Teoremas

Theorem (4)

1. *Si se cumple (10) Para alguna P y alguna ϵ, entonces (10) se cumple para cada refinamiento de P.*
2. *Si (10) se cumple para $P = x_0, \ldots, x_n$ y si s_i y t_i son puntos arbitrarios en $[x_{i-1}, x_i]$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \Delta\alpha_i < \epsilon$$

Theorem (5)

Si f es continua en $[a, b]$ entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ sobre $[a, b]$.

Teoremas

Theorem (6)

Si f es monótona en $[a, b]$, y α es continua en $[a, b]$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$

Theorem (7)

Supóngase que f es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$, y suponga que α es continua en cada punto en que f es discontinua. Entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$

Theorem (8)

Suponga que $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$, $m \leq f \leq M$, ϕ es continua en $[m, M]$ y $h(x) = \phi(f(x))$ en $[a, b]$. Entonces $h \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$

Propiedades de la integral I

1. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ entonces

$$f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha),$$

$cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ para cualquier constante c, y

$$\begin{aligned} \textstyle\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha &= \textstyle\int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha, \\ \textstyle\int_a^b cf\, d\alpha &= c \textstyle\int_a^b f\, d\alpha. \end{aligned}$$

2. Si $f_1(x) \leq f_2(x)$ en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f_1\, d\alpha \leq \int_a^b f_2\, d\alpha$$

Propiedades de la integral II

3. Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y
$$\int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha$$
4. Si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y $|f(x)| \leq M$ en $[a, b]$ entonces
$$|\int_a^b f\,d\alpha| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Propiedades de la integral III

5. Si $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ y $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, entonces $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ y

$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2;$$

si $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ y c es una constante positiva, entonces $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ y

$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

Theorem (9)

Si $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ *en* $[a, b]$ *entonces*

1. $fg \in \mathcal{R}(\alpha)$;
2. $|f| \in \mathcal{R}(\alpha)$ *y* $|\int_a^b f\, d\alpha| \leq \int_a^b |f| d\alpha$.

Definition

La *función escalón unitario* I está definida como

$$I(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases}$$