Integral de Riemann-Stieltjes

Definición y propiedades

26 de octubre de 2014

Particiones

Definition

Sea $[a, b]$ intervalo. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ tales que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \ldots, n)$$

img/particion.png

Integral de Riemann

Sea f es una función real acotada definida en $[a, b]$. Para cada partición P de $[a, b]$ definimos

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & \sup f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ m_i & = & \inf f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ U(P, f) & = & \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, & \\ L(P, f) & = & \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i & \end{array}$$

y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \inf U(P, f) \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \sup L(P, f) \tag{2}$$

Las partes izquierdas de estas ecuaciones son llamadas *integral superior* e *integral inferior* de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

Integral de Riemann

Si las integrales *superior* e *inferior* son iguales entonces decimos que f es *riemann-integrable* en $[a, b]$ y diremos que $f \in \mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ denota el conjunto de funciones *riemann-integrables* y denotaremos el valor de (1) y (2) como

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{3}$$

A lo cual llamaremos la *integral de riemman de f sobre* $[a, b]$