Integral de Riemann-Stieltjes

Equipo 1

Facultad de Matemáticas UV

26 de octubre de 2014

Particiones

Definition

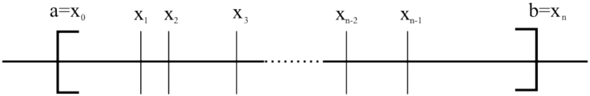
Sea $[a, b]$ intervalo. Una *partición* de $[a, b]$ es un conjunto de puntos $x_0, x_1, ..., x_n$ tales que

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

Sean

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \ldots, n)$$

[1]



Integral de Riemann

Definition (2)

Sea f es una función real acotada definida en $[a, b]$. Para cada partición P de $[a, b]$ definimos

$$\begin{array}{rcll} M_i & = & \sup f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ m_i & = & \inf f(x) & (x_{i-1} \leq x \leq x_i), \\ U(P, f) & = & \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, & \\ L(P, f) & = & \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i & \end{array}$$

y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f\, dx = \inf U(P, f) \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b} f\, dx = \sup L(P, f) \tag{2}$$

Las partes izquierdas de estas ecuaciones son llamadas *integral superior* e *integral inferior* de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

Integral de Riemann

Definition (3)

Si las integrales *superior* e *inferior* son iguales entonces decimos que f es *riemann-integrable* en $[a, b]$ y diremos que $f \in \mathcal{R}$ donde $\mathcal{R}$ denota el conjunto de funciones *riemann-integrables* y denotaremos el valor de (1) y (2) como

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{3}$$

A lo cual llamaremos *integral de riemman de $f(x)$*.

Integral de Riemann-Stieltjes

Sea α una función monótona creciente definida en $[a, b]$ (y por tanto, acotada). Para cada partición P escribimos

$$\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \qquad \Delta\alpha_i \geq 0$$

Para cualquier función acotada en $[a, b]$ definimos

$$\begin{array}{rcl} U(P, f, \alpha) & = & \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \\ L(P, f, \alpha) & = & \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \end{array}$$

Done M_i y m_i son lo mismo que en la definición (2) y finalmente

$$\overline{\int_a^b} f \, d\alpha = \inf U(P, f, \alpha), \tag{4}$$

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha = \sup L(P, f, \alpha), \tag{5}$$

Integral de Riemann-Stieltjes

Definition (4)

Si los términos de (4) y (5) son iguales, denotaremos su valor común como

$$\int_a^b f \, d\alpha \tag{6}$$

ó

$$\int_a^b f(x) \, d\alpha(x). \tag{7}$$

Que es la *integral de rieman-stieltjes* de f respecto de α sobre $[a, b]$.
Si (6) existe, es decir (5) y (6) son iguales, decimos que f es integrable respecto a α y escribimos $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

Integral de Riemann-Stieltjes

Definition (5)

Decimos que la partición P^* es un *refinamiento* de P si $P^* \supset P$. Dadas dos particiones P_1 y P_2 decimos que P^* es su *refinamiento común* si $P^* = P_1 \cup P_2$

Theorem (1)

Si P^* es un refinamiento de P, entonces

$$L(P, f, \alpha) \leq L(P^*, f, \alpha) \tag{8}$$

y

$$U(P^*, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \tag{9}$$