Teoremas tipo Turán proporcionales

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Luis Montejano Peimbert

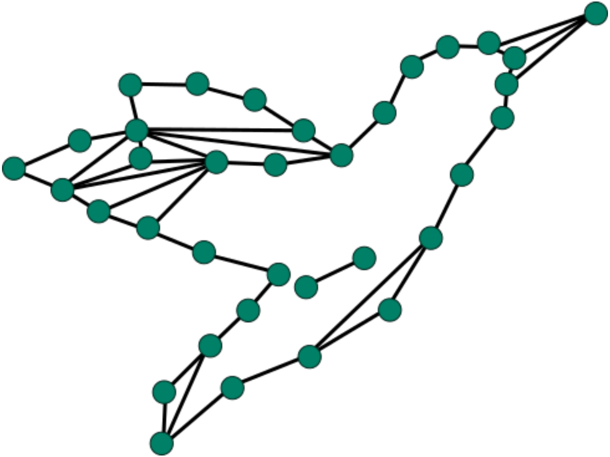
IMATE - Unidad Juriquilla, UNAM
I3M - Université de Montpellier

5 de marzo de 2015

Gráficas

- Una *gráfica* es una pareja $G = (V, E)$
- A V le llamamos el conjunto de *vértices*.
- A E le llamamos el conjunto de *aristas*. Sus elementos son algunas parejas de elementos de V.

Gráfica Colibrí

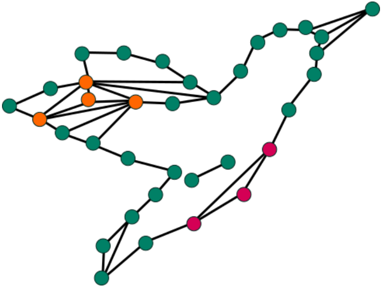


Clan y número de clan

- Un subconjunto de vértices S es un *clan* si hay arista entre cualquier par de elementos.
- El *número de clan* de una gráfica es el tamaño de un clan máximo. Se denota con $\omega(G)$.

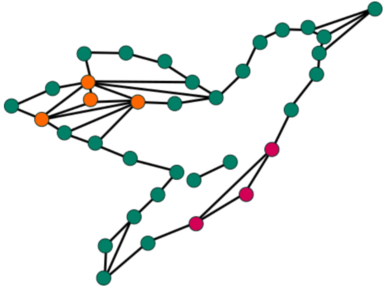
Clan y número de clan

- Un subconjunto de vértices S es un *clan* si hay arista entre cualquier par de elementos.
- El *número de clan* de una gráfica es el tamaño de un clan máximo. Se denota con $\omega(G)$.



Clan y número de clan

- Un subconjunto de vértices S es un *clan* si hay arista entre cualquier par de elementos.
- El *número de clan* de una gráfica es el tamaño de un clan máximo. Se denota con $\omega(G)$.



- **Intuición:** Si hay una cantidad fija de vértices y se tienen muchas aristas, entonces $\omega(G)$ es grande.

Teoremas de Turán y de Mantel

Teorema (Mantel, 1907)

Sea $G = (V, E)$ *una gráfica con* $|V(G)| = n$*. Si*

$$|E(G)| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

entonces

$$\omega(G) \geq 3.$$

Teoremas de Turán y de Mantel

Teorema (Mantel, 1907)

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con $|V(G)| = n$. Si

$$|E(G)| > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$

entonces

$$\omega(G) \geq 3.$$

Teorema (Turán, 1941)

Sea $G = (V, E)$ una gráfica con $|V(G)| = n$ y r un entero positivo. Si

$$|E(G)| > \frac{r-1}{r} \cdot \frac{n^2}{2},$$

entonces

$$\omega(G) \geq r + 1.$$

Teorema de Turán (proporcional)

- Si G tiene n vértices, entonces tiene máximo

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

aristas.

Teorema de Turán (proporcional)

- Si G tiene n vértices, entonces tiene máximo

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

  aristas.
- **Intuición:** Un porcentaje alto de aristas da un clan grande *fijo*, es decir $\omega(G) \geq r$.

Teorema de Turán (proporcional)

- Si G tiene n vértices, entonces tiene máximo

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

  aristas.
- **Intuición:** Un porcentaje alto de aristas da un clan grande *fijo*, es decir $\omega(G) \geq r$.
- **Pregunta** ¿Podremos tener un teorema que garantize que $\omega(G) \geq cn$ (proporcionalmente grande)?
- **Pregunta** ¿Podremos tener un teorema que garantize que $\omega(G) \geq f(n)$ con $f(n) \to \infty$?

Gráficas de intersecciones de intervalos

- En general no. Hay gráficas con

$$|E(G)| > 0.9999 \cdot \frac{n^2}{2} \quad \text{y} \quad \omega(G) < 0.0001 \cdot n.$$

Gráficas de intersecciones de intervalos

- En general no. Hay gráficas con

$$|E(G)| > 0.9999 \cdot \frac{n^2}{2} \quad \text{y} \quad \omega(G) < 0.0001 \cdot n.$$

- Como la cota de Turán es justa, sólo se asegura un K_{10001}.

Gráficas de intersecciones de intervalos

- En general no. Hay gráficas con

$$|E(G)| > 0.9999 \cdot \frac{n^2}{2} \quad \text{y} \quad \omega(G) < 0.0001 \cdot n.$$

- Como la cota de Turán es justa, sólo se asegura un K_{10001}.
- Pero si nos restringimos a una familia de gráficas, a veces sí.

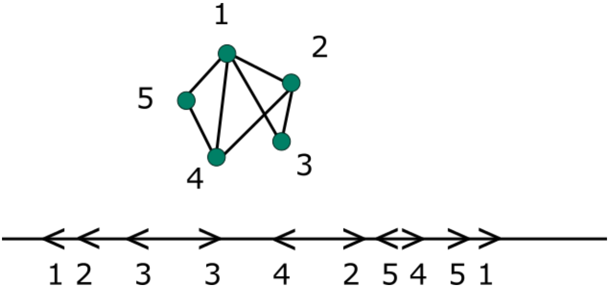
Gráficas de intersecciones de intervalos

- En general no. Hay gráficas con

$$|E(G)| > 0.9999 \cdot \frac{n^2}{2} \quad \text{y} \quad \omega(G) < 0.0001 \cdot n.$$

- Como la cota de Turán es justa, sólo se asegura un K_{10001}.
- Pero si nos restringimos a una familia de gráficas, a veces sí.
- *Gráficas de intersección de intervalos:* $G = (V, E)$, V una cantidad finita de intervalos acotados de $\mathbb{R}$ y ponemos arista si se intersectan.
- A la familia de todas las gráficas de intervalos la llamamos $\mathcal{G}_I$.

Ejemplo intersección intervalos



Teorema de Katchalski y Liu

Teorema (Katchalski, Liu)

Sea $G \in \mathcal{G}_I$ una gráfica de intersección de intervalos con n vértices y $\alpha \in [0, 1]$ un número real. Si G tiene más de

$$\alpha \cdot \binom{n}{2}$$

aristas, entonces $\omega(G) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot n$.

Teorema de Katchalski y Liu

Teorema (Katchalski, Liu)

Sea $G \in \mathcal{G}_I$ una gráfica de intersección de intervalos con n vértices y $\alpha \in [0,1]$ un número real. Si G tiene más de

$$\alpha \cdot \binom{n}{2}$$

aristas, entonces $\omega(G) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot n$.

- Si tenemos la mitad de las aristas, teo. Turán nos dice $\omega(G) \geq 3$, pero teo. Katchalski y Liu nos dice $\omega(G) \geq \frac{n}{4}$.
- ¿Qué nos permite tener un mejor resultado?

Teorema de Katchalski y Liu

Teorema (Katchalski, Liu)

Sea $G \in \mathcal{G}_I$ una gráfica de intersección de intervalos con n vértices y $\alpha \in [0,1]$ un número real. Si G tiene más de

$$\alpha \cdot \binom{n}{2}$$

aristas, entonces $\omega(G) \geq \frac{\alpha}{2} \cdot n$.

- Si tenemos la mitad de las aristas, teo. Turán nos dice $\omega(G) \geq 3$, pero teo. Katchalski y Liu nos dice $\omega(G) \geq \frac{n}{4}$.
- ¿Qué nos permite tener un mejor resultado? La geometría.

Preguntas

- ¿Cómo se traduce esa parte geométrica a la combinatoria?
- ¿Podemos aisarla para tener un resultado sólo combinatorio?

Preguntas

- ¿Cómo se traduce esa parte geométrica a la combinatoria?
- ¿Podemos aisarla para tener un resultado sólo combinatorio?
- ¿En qué familias de gráficas podemos tener un teorema tipo Turán que nos de $\omega(G) \geq c \cdot n$?
- ¿En qué familias de gráficas podemos tener un teorema tipo Turán $\omega(G) \geq f(n)$ con $n \to \infty$?

Preguntas

- ¿Cómo se traduce esa parte geométrica a la combinatoria?
- ¿Podemos aisarla para tener un resultado sólo combinatorio?
- ¿En qué familias de gráficas podemos tener un teorema tipo Turán que nos de $\omega(G) \geq c \cdot n$?
- ¿En qué familias de gráficas podemos tener un teorema tipo Turán $\omega(G) \geq f(n)$ con $n \to \infty$?
- ¿Podemos regresar estos resultados a la geometría o a otras áreas matemáticas?

Coloraciones y número cromático

- Para un entero positivo c denotamos $[c] = \{1, 2, \ldots, c\}$

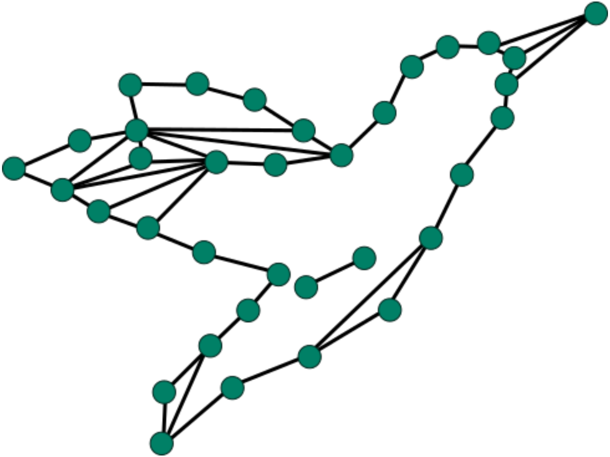
Coloraciones y número cromático

- Para un entero positivo c denotamos $[c] = \{1, 2, \ldots, c\}$
- Una *$c-$coloración propia* de G es una función $f : V \to [c]$ tal que para v_1 y v_2 adyacentes tenemos que $f(v_1) \neq f(v_2)$
- El *número cromático* $\chi(G)$ es el menor c para el cual existe una $c-$coloración propia.

Coloraciones y número cromático

- Para un entero positivo c denotamos $[c] = \{1, 2, \ldots, c\}$
- Una *$c-$coloración propia* de G es una función $f : V \to [c]$ tal que para v_1 y v_2 adyacentes tenemos que $f(v_1) \neq f(v_2)$
- El *número cromático* $\chi(G)$ es el menor c para el cual existe una $c-$coloración propia.
- Una gráfica G es *bipartita* si $\chi(G) \leq 2$.

Gráfica Colibrí



Coloración gráfica Colibrí

Clanes, coloraciones y vértices

- ¿Qué relaciones existen entre $\omega(G)$ y $\chi(G)$?

Clanes, coloraciones y vértices

- ¿Qué relaciones existen entre $\omega(G)$ y $\chi(G)$?
- Cada vértice de un clan tiene color distinto, entonces $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Clanes, coloraciones y vértices

- ¿Qué relaciones existen entre $\omega(G)$ y $\chi(G)$?
- Cada vértice de un clan tiene color distinto, entonces $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- ¿Será posible acotar a $\chi(G)$ por una función de $\omega(G)$ superiormente?

Clanes, coloraciones y vértices

- ¿Qué relaciones existen entre $\omega(G)$ y $\chi(G)$?
- Cada vértice de un clan tiene color distinto, entonces $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- ¿Será posible acotar a $\chi(G)$ por una función de $\omega(G)$ superiormente?

Teorema (Descartes, Erdos, Mycielski, Zykov, AMM, etc.)

Hay gráficas con $\omega(G) \leq 2$ y con $\chi(G)$ arbitrariamente grande.

Clanes, coloraciones y vértices

- ¿Qué relaciones existen entre $\omega(G)$ y $\chi(G)$?
- Cada vértice de un clan tiene color distinto, entonces $\chi(G) \geq \omega(G)$.
- ¿Será posible acotar a $\chi(G)$ por una función de $\omega(G)$ superiormente?

Teorema (Descartes, Erdos, Mycielski, Zykov, AMM, etc.)

Hay gráficas con $\omega(G) \leq 2$ y con $\chi(G)$ arbitrariamente grande.

- Las familias en donde sí se vale son interesantes (Gyarfas).

¿Y si metemos los vértices?

- ¿Podemos acotar a $\chi(G)$ superiormente por una función de $\omega(G)$ y de $|V(G)|$?

¿Y si metemos los vértices?

- ¿Podemos acotar a $\chi(G)$ superiormente por una función de $\omega(G)$ y de $|V(G)|$?
- Sí, $\chi(G) \leq |V(G)|$. Pero, ¿qué tanto necesitamos $|V(G)|$?

¿Y si metemos los vértices?

- ¿Podemos acotar a $\chi(G)$ superiormente por una función de $\omega(G)$ y de $|V(G)|$?
- Sí, $\chi(G) \leq |V(G)|$. Pero, ¿qué tanto necesitamos $|V(G)|$?

Proposición

Para cualquier gráfica G se cumple

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} \cdot |V(G)| + \frac{1}{2} \cdot \omega(G).$$

Prueba de la cota

- Tomamos G con $n = V(G)$, $\chi = \chi(G)$, $\omega = \omega(G)$. Pintamos con χ colores.
- Llamamos a_i al número de clases cromáticas con i vértices.

Prueba de la cota

- Tomamos G con $n = V(G)$, $\chi = \chi(G)$, $\omega = \omega(G)$. Pintamos con χ colores.
- Llamamos a_i al número de clases cromáticas con i vértices.
- Notemos que $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = \chi$ y que

$$\begin{aligned} n &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ra_r \\ &\geq a_1 + 2(a_2 + a_3 + \ldots + a_r) \\ &= a_1 + 2(\chi - a_1) = 2\chi - a_1. \end{aligned}$$

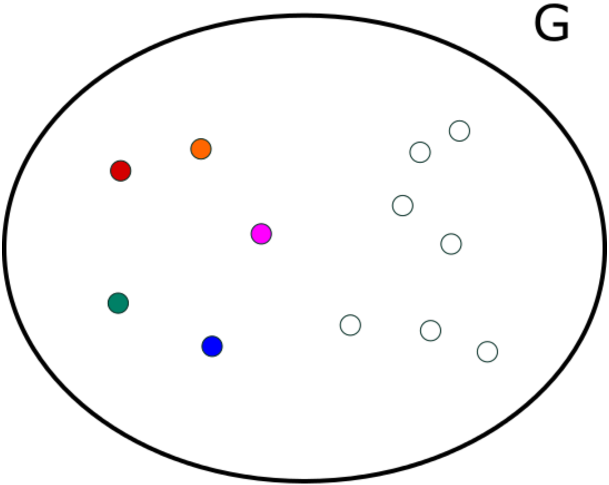
Prueba de la cota

- Tomamos G con $n = V(G)$, $\chi = \chi(G)$, $\omega = \omega(G)$. Pintamos con χ colores.
- Llamamos a_i al número de clases cromáticas con i vértices.
- Notemos que $a_1 + a_2 + \ldots + a_r = \chi$ y que

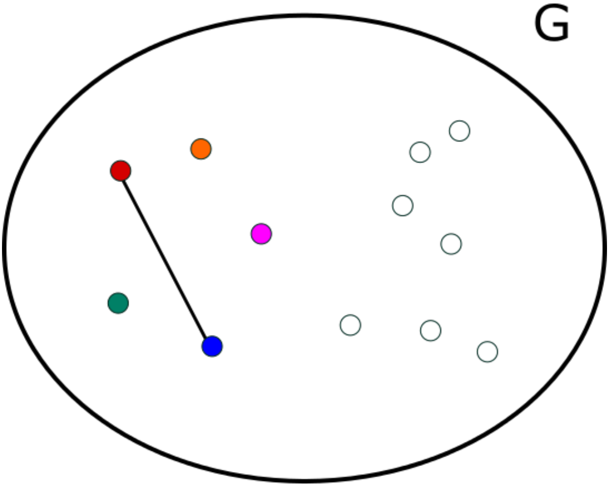
$$\begin{aligned} n &= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ra_r \\ &\geq a_1 + 2(a_2 + a_3 + \ldots + a_r) \\ &= a_1 + 2(\chi - a_1) = 2\chi - a_1. \end{aligned}$$

- Entonces $\chi \leq \frac{n+a_1}{2}$. Bastaría probar $a_1 \leq \omega$.

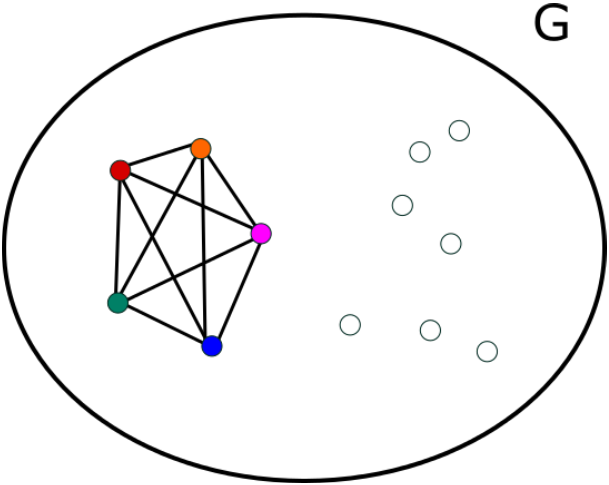
Prueba de la cota



Prueba de la cota



Prueba de la cota



Resultados: Las equivalencias

Teorema (L.M. y L. Montejano, 2014)

Sea $\mathfrak{G}$ una familia de gráficas cerrada bajo gráficas inducidas. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- *Existen reales c y d tales que*
  - *para toda $G \in \mathfrak{G}$ se tiene $\chi(G) \leq c\omega(G)$ y*
  - *para toda $B \in \mathfrak{G}$, B bipartita, se tiene $|E(B)| \leq d|V(B)|$.*
- *$\mathfrak{G}$ tiene teorema de Turán proporcional lineal, es decir*
  - *Existe β tal que para $G \in \mathfrak{G}$ si $|E(G)| \geq \alpha|V(G)|$, entonces $\omega(G) \geq \alpha\beta n$.*
- *Existe una constante C tal que*
  - *Si G es una gráfica en n vértices con $\omega(G) \leq k$, entonces $|E(G)| \leq Cnk$.*

Resultados: Cota del número cromático

Teorema (L.M. y L. Montejano, 2014)

Para cualquier $\epsilon > 0$ existe una función f_ϵ tal que para cualquier gráfica G se cumple

$$\chi(G) \leq \epsilon \cdot |V(G)| + f_\epsilon(\omega(G)).$$

Resultados: Cota del número cromático

Teorema (L.M. y L. Montejano, 2014)

Para cualquier $\epsilon > 0$ *existe una función* f_ϵ *tal que para cualquier gráfica* G *se cumple*

$$\chi(G) \leq \epsilon \cdot |V(G)| + f_\epsilon(\omega(G)).$$

Teorema (L.M. y L. Montejano, 2014)

Sea $\mathfrak{G}$ *una familia de gráficas c.b.i. en la cual las aristas de las bipartitas están acotadas linealmente* V*. Entonces para cualquier* $\alpha > 0$*, una proporción de* α *aristas en las gráficas de* $\mathfrak{G}$ *garantiza que* $\omega(G)$ *se va a infinito conforme* $|V(G)|$ *se va a infinito.*

Problemas

- ¿Será cierto para toda gráfica G lo siguiente?

$$\chi(G) \leq \frac{1}{3} \cdot |V(G)| + 1000 \cdot \omega(G).$$

- ¿Podremos cambiar el 1000 por una constante para que siempre se cumpla?
- ¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener una gráfica con 8 vértices con $\omega(G) \leq 3$ y sin tres vértices independientes?

Agradecimiento y contacto

Contacto

leomtz@im.unam.mx

http://blog.nekomath.com

Agradecimiento y contacto

Contacto

leomtz@im.unam.mx

http://blog.nekomath.com

¡Gracias por su atención!