

引力波作业报告

刘苏明

2020 年 1 月 10 日

1 数据分析

从网站 [<https://www.gw-openscience.org/events/GW150914/>] 可以获取 Living 和 Hanford 的引力波探测数据。

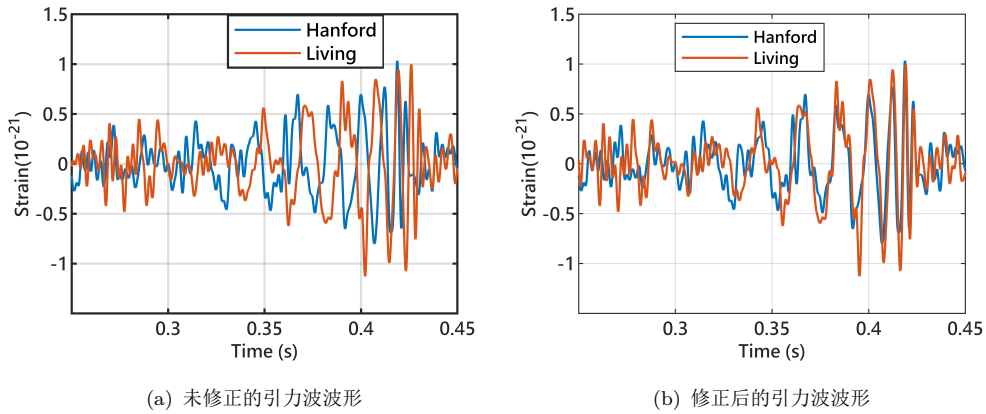


图 1: 引力波波形

LIGO Hanford 和 Livingston 探测器在 UTC 时间为 2015 年 9 月 14 日 9:50:45 左右探测到了编号为 GW150914 的引力波。为了更清楚地看到引力波波形，原始数据经过 30Hz-350Hz 的滤波器，因为这是探测器灵敏度最高的频率带。同时应用带阻滤波器消除仪器产生的高频谱噪声。经过处理后得到图 1(a) 的图像。这时 Living 和 Hanford 的波形还存在较大差异，因为 Living 和 Hanford 的地理位置不同，Living 首先探测到引力波信号，比 Hanford 早 6.9ms，而且两者的探测方向相反。所以图 1(a) 的数据需要修正。修正后的引力波波形如图 1(b) 所示。

图 2 表示 Hanford 和 Living 的引力波能量随时间和频率变化的图像。从图中可以看出，随着时间和频率的增大，引力波能量也在增大。从 0.3s 开始，引力波周期减小，所以频率开始增大。在 0.42s 左右，能量迅速下降，频率趋于稳定。最后，引力波的瞬时频率高于 200Hz。整个过程持续了大概 0.15s。

广义相对论中，质量在加速的情况下会产生引力波。由于波形表现出了至少八个振荡周期，所以存在一个或多个质量在振荡。引力波频率和能量的增大也表示在这段时间里引力波源的振荡频率也在增大。在引力波频率和能量都在增大时，天体的轨道运动只有一个合理的解释：引力波向外辐射能量，它产生了天体运动唯一的阻力，使得两个天体在不断靠近，频率不断增大且放大了引力波辐射的能量。

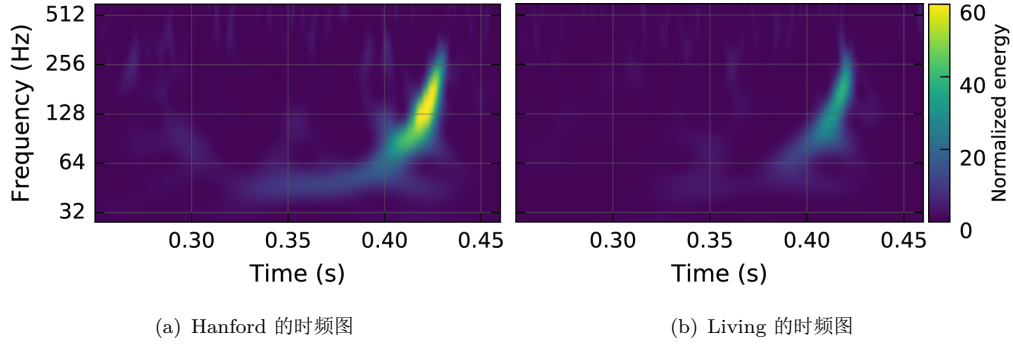


图 2: 时频图

我们将证明，随观测到的频率演化唯一合理的解释是，该系统由两个黑洞组成，它们相互环绕，绕后合并在一起。

确定能量最大时对应的频率 $f_{\text{GW}}|_{\text{max}}$ ：在证明时，一个非常重要的物理量是能量最大时的频率值。利用图 1 的峰值或者图 2 的最亮点附近的过零点，我们保守地计算该值

$$f_{\text{GW}}|_{\text{max}} \sim 150\text{Hz}, \quad (1)$$

因此我们可以把引力波源的轨道运动解释为，天体做轨道运动时，轨道角频率不超过某个值

$$\omega_{\text{Kep}}|_{\text{max}} = \frac{2\pi f_{\text{GW}}|_{\text{max}}}{2} = 2\pi \times 75\text{Hz} \quad (2)$$

确定引力波源的质量量级：爱因斯坦发现无迹质量四极矩为 Q_{ij} 的系统在视界距离为 d_L 产生的引力波形变 h 为

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 d_L} \frac{d^2 Q_{ij}}{dt^2} \quad (3)$$

引力波辐射能量的速率可以由四极质量公式推出

$$\begin{aligned} \frac{dE_{\text{GW}}}{dt} &= \frac{c^3}{16\pi G} \iint |\dot{h}|^2 dS = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \sum_{i,j=1}^3 \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \\ \text{where } |\dot{h}|^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{dh_{ij}}{dt} \frac{dh_{ij}}{dt} \end{aligned} \quad (4)$$

其积分区域为半径为 d_L 的球。方程 (4) 表示当轨道天体的速度远小于光速且引力波形变也不大时的轨道能量损失速率。在频率达到 $f_{\text{GW}}|_{\text{max}}$ 前，我们会一直使用它。

对于一个双天体系统，我们使用 m_1, m_2 表示两天体的质量，使用 $M = m_1 + m_2$ 表示天体的总质量， $\mu = m_1 m_2 / M$ 表示减少的质量，质量系数为 $q = m_1 / m_2$ ，假设 $m_1 \geq m_2$ 即 $q \geq 1$ 。我们可以定义 chirp mass 为 \mathcal{M} 来表示双天体引力波源系统向外辐射引力波的表达式

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} \quad (5)$$

使用牛顿运动定律，万有引力定律和爱因斯坦的引力波光度四极方程，导出了一个简单的公式，把引力波的频率与频率导数和 chirp mass 联系起来。

$$\mathcal{M} = \frac{c^3}{G} \left(\left(\frac{5}{96} \right)^3 \pi^{-8} (f_{\text{GW}})^{-11} (\dot{f}_{\text{GW}})^3 \right)^{1/5} \quad (6)$$

只要牛顿运动定律有效，这个公式就有效。

所以我们可以通过观测数据使用引力波的频率和频率导数计算任意时刻的 chirp mass。当然, \mathcal{M} 的确切值是多少并不重要, 为了简单起见, 我们设 $\mathcal{M} = 30M_{\odot}$ 。

chirp mass 在 $f_{\text{GW}}|_{\text{max}} < 150\text{Hz}$ 会保持不变, 这样就给解释轨道运动提供了有力的支持。引力波应变的能量随频率增加也支持这样的解释, 且计算中这些公式的假设是适用的:

1. 双星系统的速度远小于光速; 2. 轨道运动的半径在不断减少; 3. 使用开普勒定律来描述周期。

chirp mass 还可以换一种计算方法

$$f_{\text{GW}}^{-8/3}(t) = \frac{(8\pi)^{8/3}}{5} \left(\frac{G\mathcal{M}}{c^3} \right)^{5/3} (t_c - t) \quad (7)$$

这个方程不包含频率的导数, 所以可以直接通过应变数据的过零点的时间间隔来计算 \mathcal{M} 。常数 t_c 是合并时刻。图 3 更直观的展示了这个现象。

2 证明天体是致密的

为了简化计算, 我们设两个天体的质量相等, $m_1 = m_2$ 。也就是说 $m_1 = m_2 = 2^{1/5}\mathcal{M} = 35M_{\odot}$, $M = m_1 + m_2 = 70M_{\odot}$ 。假设天体不存在自旋而且它们的轨道符合开普勒定律, 在合并前都保持着圆轨道。

根据万有引力定律, 合并时刻的天体距离为

$$R = \left(\frac{GM}{\omega_{\text{Kep}}^2|_{\text{max}}} \right)^{1/3} = 350\text{km} \quad (8)$$

和天体的半径向相比, 这个数字相当小。白矮星的半径有 1000km。密度最大的天体是中子星, 半径只有 10km。如果观测到的中子星, 在这种距离下它们不会合并但是中子星的质量最大只有 $3M_{\odot}$ 。所以中子星也不是我们的目标天体。

在我们的简化计算中, 天体质量为 $m_1 = m_2 = M_{\odot}$ 。每个天体半径为施瓦茨席尔德半径 $r = 103\text{km}$, 如图 3 所示。

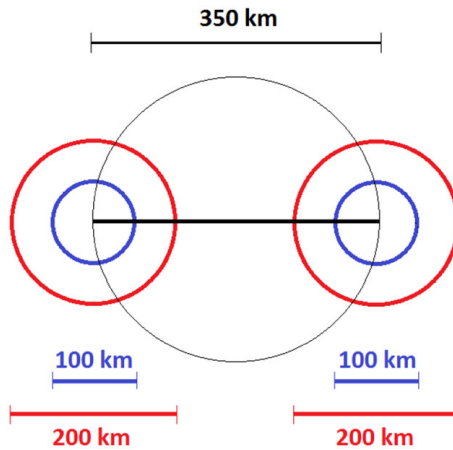


图 3: 最小天体距离和施瓦茨席尔德半径的图示

为了定量描述天体间的靠近程度, 我们定义了紧密度系数 $\mathcal{R} = R/(r_1 + r_2)$ 。所以我们的双向系统的致密度系数为 $\mathcal{R} = 350\text{km}/206\text{km} \sim 1.7$ 。和其它著名的开普勒轨道系统相比,

水星与太阳的紧密度系数达到 $\mathcal{R} \sim 2 \times 10^7$ ，两个中子星构成的系统在合并前紧密度系数在 2 和 5 之间。

所以，从开普勒定律和牛顿运动定律出发，GW150914 在到达合并时刻时其紧密度系数达到黑洞量级，足以证明其密度非常大。

3 假设的影响

在第 2 节，我们计算出了引力波源是黑洞，但是它存在三个假设，圆形轨道、质量相同、无自旋。本节会讨论这些假设是否会影响结论。

3.1 轨道偏心率

3.2 质量不相等

3.3 天体自旋