



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ
НЭТИ** | **Факультет прикладной
математики и информатики**

Кафедра теоретической и прикладной информатики
Лабораторная работа №1
по дисциплине «Планирование и анализ экспериментов»

КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Группа ПМ-12	ВОСТРЕЦОВА ЕКАТЕРИНА
Вариант 4	ЗИЯНУРОВ АРТЁМ
	ХАМИТОВА ЕКАТЕРИНА

Преподаватели	ПОПОВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ
---------------	-------------------------------

Новосибирск, 2025

1. Задание

1. Изучить понятия непрерывного плана эксперимента и информационной матрицы, а также критерии оптимальности, связанные с точностью оценивания параметров модели и точностью оценивания математического ожидания функции отклика.
2. Разработать программное приложение по обработке различных планов эксперимента для регрессионных моделей. Программа должна иметь возможность обрабатывать несколько различных планов для одной и той же модели. Обработка заключается в вычислении различных функционалов от информационной матрицы, связанных с тем или иным критерием оптимальности.
3. Для каждого из заданных планов вычислить значения функционалов от информационной (дисперсионной) матриц, связанных с такими критериями как: D -, A -, E -, Φ^2 -, Λ -, MV -, G - оптимальности. Проранжировать планы, указанные в варианте, с позиций различных критериев. Выбрать план, наиболее предпочтительный по совокупности критериев. Список планов приведен в табл. 1.
4. В качестве спектра плана выбрать один из приведенных в табл. 1 для соответствующей модели. Веса точек выразить в виде зависимости от одного параметра как в примере аналитического построения оптимального плана. Для этого параметра определить допустимые интервалы значений, руководствуясь тем, что веса точек должны быть неотрицательные, а число таких точек с ненулевыми весами должно быть не меньше числа параметров в модели. Построить графики изменения критерия оптимальности плана, указанного в варианте, в зависимости от этого скалярного параметра; определить по графику оптимальные значения параметра и критерия. Сравнить полученный результат с результатами из п. 3. 5.
5. Оформить отчет, включающий в себя постановку задачи, полученные результаты и текст программы.
6. Защитить лабораторную работу.

Вариант 4

Модель квадратичная на отрезке, без линейного члена. Планы для анализа: 5-8. Для пункта 4 задания использовать критерий A -оптимальности.

№	x_1 / p_1		x_2 / p_2		x_3 / p_3		x_4 / p_4		x_5 / p_5
5	-1	0.1273	-0.5	0.3727	0.5	0.3727	1	0.1273	
6	-1	0.152	-0.468	0.348	0.468	0.348	1	0.152	
7	-1	0.1799	-0.5279	0.3201	0.5279	0.3201	1	0.1799	
8	-1	0.25	-0.49	0.25	0.49	0.25	1	0.25	

2. Постановка задачи

$$y = f^T(x)\theta + e = \theta_0 + \theta_2 x^2 + e,$$

y – значение зависимой переменной,

e – ошибка,

$f^T(x) = (1, x^2)$ – заданная вектор функция, от независимой переменной x ,

$\theta = (\theta_0, \theta_2)$ – вектор неизвестных параметров

3. Ход работы

Для работы использовались такие критерии:

- 1) D – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \max_{\varepsilon} |M(\varepsilon)|$.
- 2) A – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \text{tr}(D(\varepsilon))$.
- 3) E – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \max_i \lambda_i(D(\varepsilon))$.
- 4) Φ_p – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \Phi_p(\varepsilon) = \arg \min_{\varepsilon} (m^{-1} \text{tr} D^p(\varepsilon))^{\frac{1}{p}}$.
- 5) Λ – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \sum_{i=1}^m [\lambda_i(D(\varepsilon)) - \bar{\lambda}(D(\varepsilon))]^2$.
- 6) MV – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \max_{ii} D_{ii}(\varepsilon)$.
- 7) G – оптимальный план: $\varepsilon^* = \arg \min_{\varepsilon} \max_{x \in X} d(x, \varepsilon)$, где $d(x, \varepsilon) = f^T(x)M^{-1}f(x)$.

При таких характеристиках:

- 1) Информационная матрица $M = \sum_{j=1}^n p_j f(x_j) f^T(x_j)$,
- 2) Дисперсионная матрица $D(\varepsilon) = M^{-1}(\varepsilon)$

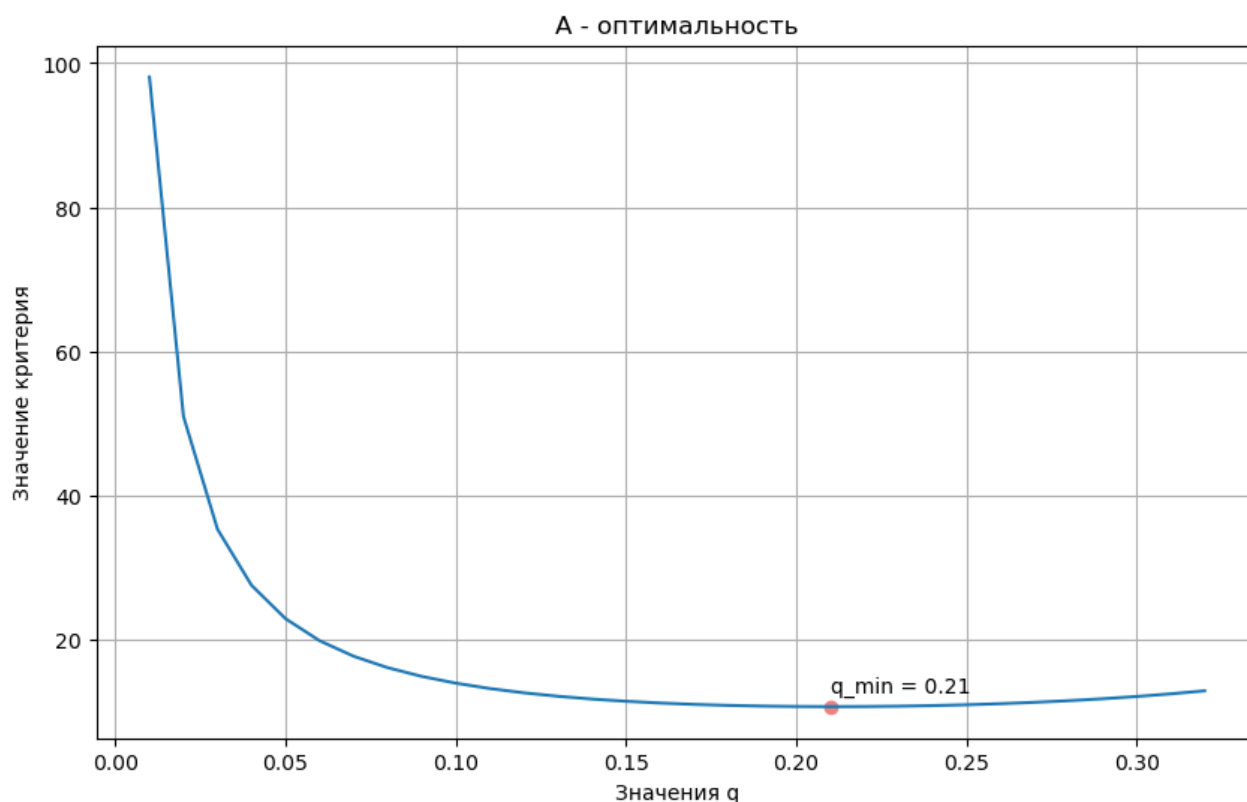
Также использовались различные характеристики матриц, такие как определитель, собственные значения, след и тд.

Результаты исследования:

№ плана Критерий	5	6	7	8
D	0.10675	0.12905	0.11984	0.14436
A	12.18904	10.36332	11.76078	10.59021
E	0.08799	0.10468	0.09088	0.10111
Φ_2	8.05721	6.77866	7.79834	7.01065
Λ	55.55111	38.20143	52.47035	42.22221
MV	9.36762	7.74893	8.34382	6.92703
G	3.92772	3.28947	2.77932	1.99999

По результатам видно, что оптимальным планом будет являться 6.

В качестве спектра возьмем такую совокупность: $\bar{x} = \{-1, -0.5, 0.5, 1\}$. Веса выберем таким образом: $p_1 = q, p_2 = q, p_3 = q, p_4 = 1 - 3q$. $0 < q \leq \frac{1}{3}$



Значение $q = 0.21$, значение критерия - 10.62762

Значения критерия близки к плану 6 и 8. Значение чуть больше, чем значения планов 6 и 8, но меньше, чем значения планов 5 и 7.

4. Код программы

```
import pandas as pd
import numpy as np
import scipy.linalg as lng
import matplotlib.pyplot as plt

def func(x):
    return np.array([1, x**2]).reshape(2, 1)

n = 4# количество спектров
m = 2

data = [
    "-1 0.1273 -0.5 0.3727 0.5 0.3727 1 0.1273",
    "-1 0.152 -0.468 0.348 0.468 0.348 1 0.152",
    "-1 0.1799 -0.5279 0.3201 0.5279 0.3201 1 0.1799",
    "-1 0.25 -0.49 0.25 0.49 0.25 1 0.25",
]

data_list = []
for row in data:
    val = row.split()
    row_arr = []
```

```

    for i in range(0, 8, 2):
        row_arr.append([ float(val[i]), float(val[i+1]) ])
    data_list.append(row_arr)
df = pd.DataFrame(data_list)
df

for j in range(n):
    # Информационная матрица
    M = np.zeros((m, m))
    for i in range(n):
        M += df.at[j, i][1] * (func(df.at[j, i][0]) * np.transpose(func(df.at[j,
i][0])))
    # Дисперсионная матрица
    D = lng.inv(M)

    det_D = lng.det(D)

    # Оценки
    # D-оптимальный план
    D_opt_plan = lng.det(M)

    # A-оптимальный план
    A_opt_plan = np.trace(D)

    # E-оптимальный план
    E_opt_plan = np.linalg.eigvals(M).min()

    # Фп-оптимальный план: введенные критерии  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  -> p=2
    Fp_opt_plan = (np.matrix.trace(D @ D) / m)**0.5

    # Lambda-оптимальный план
    Lam_opt_plan = 0
    eig_aver = np.average(np.linalg.eigvals(D))
    for i in range(m):
        Lam_opt_plan += (np.linalg.eigvals(D)[i] - eig_aver)**2

    # MV-оптимальный план
    MV_opt_plan = np.diag(D).max()

    # G-оптимальный план
    d = list()
    for i in range(n):
        d.append(float(func(df.at[j, i][0]).T @ D @ func(df.at[j, i][0])))
    G_opt_plan = max(d)

    #M, "\n", D, "\n",
    print("План номер ", j)
    print(D_opt_plan, "\n", A_opt_plan, "\n", E_opt_plan, "\n",
          Fp_opt_plan, "\n", Lam_opt_plan, "\n", MV_opt_plan, "\n", G_opt_plan,
          "\n")

```

```

x, p, q, res = [], [], [], []

for i in [i*0.01 for i in range(1,33)]:
    x = np.array([-1,-0.5,0.5,1])
    p = np.array([i, i, 1-3*i,i])
    q.append(i)

    M_q=np.zeros((m,m))
    for j in range(n):
        M_q+=p[j]*func(x[j]) @ np.transpose(func(x[j]))
    D_q = lng.inv(M_q)

    res.append(np.trace(D_q))
q_min = q[res.index(min(res))]

min_res = min(res)

fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(q, res)
plt.scatter(q_min, min_res, color = 'lightcoral')
plt.title('A - оптимальность')
plt.ylabel('Значение критерия')
plt.xlabel('Значения q')
plt.grid(True)
plt.text(q_min, min_res+2, 'q_min = 0.21')

plt.show()

print(f"Значение критерия: {min_res}, соответствующее значение q {q_min}")

```