Exercícios Teóricos – u01: Introdução aos Somatórios

Catarina F. M. Castro (803531) – AEDs II

Introdução aos Somatórios

1-

- Mostre o somatório dos ***n*** primeiros números inteiros

R: Matematicamente, a solução para isso seria em formato de somatório: $\Sigma_{i=1}^{i \le n} i$

2-

- Mostre o número de comparações entre registros que o algoritmo de Seleção realiza

```
for (int i = 0; i < (n - 1); i++) {
    int menor = i;
    for (int j = (i + 1); j < n; j++){
        if (array[menor] > array[j]){
            menor = j;
        }
    }
    swap(menor, i);
}
```

R: $\boldsymbol{c(n)} = \Sigma_{i=0}^{n-2}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{i} - \boldsymbol{1})$

3-

a) $\sum_{n=1}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \boxed{55}$

b) $\sum_{1}^{5} 3i = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = \boxed{45}$

c) $\sum_{1}^{5} (3 - 2i) = \sum_{1}^{5} 3 - \sum_{1}^{5} 2i = \boxed{-15}$

d) $\sum_{1}^{5} (2i+x) = 2 \cdot (1+2+3+4+5) + 5 \cdot x = \boxed{30 + 5x}$

e) $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1).(5-i) = [0 \cdot (-1) \cdot 5] + [1 \cdot 0 \cdot 4] + [2 \cdot 1 \cdot 3] + [3 \cdot 2 \cdot 2] + [4 \cdot 3 \cdot 1] + [5 \cdot 4 \cdot 0] = \boxed{30}$

f) $\sum_{m=1}^{5} (8j - 2m) = (8j - 2) + (8j - 4) + (8j - 6) + (8j - 8) + (8j - 10) = \boxed{(40j - 30)}$

4-

- Podemos afirmar que $\sum_{0}^{5} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i) = \sum_{2}^{4} i \,.\, (i-1) \,.\, (5-i)$? Justifique.

Sim, pois os termos a_0, a_1 e a_5 são iguais a zero, o que faz com que os dois somatórios sejam iguais a $a_2 + a_3 + a_4$.

Manipulação de somatórios

1-

- Assinale a alternativa que contém a expressão cuja soma é igual a 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49

a) $\sum_{i=0}^{5} (i^2 + 2i + 4)$ b) $\sum_{i=0}^{5} (3i + 2)^2$ ~~c)~~ $\sum_{i=0}^{5} (i + 2)^2$

2-

- Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) (V) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

c) (V) $\sum_{l=1}^{n} 3l = 3.\sum_{l=1}^{n} l$

e) (V) $\sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75+\sum_{t=8}^{32} t$

b) (F) $\sum_{p=0}^{1000} (3+p)=3+\sum_{p=0}^{1000} p$

d) (F) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$

3-

- Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$S_n = \sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

$S = \sum_{3}^{n} a_i + b_i - a_1 - a_2$

4-

- Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

$2 \cdot 0 = 0$ $2 \cdot (4-0) = 8$
$2 \cdot 1 = 2$ $2 \cdot (4-1) = 6$
$2 \cdot 2 = 4$ $\downarrow$ $2 \cdot (4-2) = 4$ $\uparrow$
$2 \cdot 3 = 6$ $2 \cdot (4-3) = 2$
$2 \cdot 4 = 8$ $2 \cdot (4-4) = 0$

(n-i) é um decremento do valor de i.

5-

- Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma **Progressão Aritmética (PA)**

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a + b.i)$$

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a+bi)$$

$$S_n = \sum_{0 \le (n-i) \le n} (a + b(n-i))$$

$$S_n = \sum_{0 \le (n-i) \le n} (a + bn - bi)$$

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} (a+bi) + \sum_{0 \le (n-i) \le n} (a+bn-bi)$$

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [a + \cancel{bi} + a + bn \cancel{-bi}]$$

$$2S_n = \sum_{0 \le i \le n} [2a + bn]$$

$$2S_n = (2a+bn) \cdot \sum_{0 \le i \le n} 1$$

$$2S_n = (2a+bn) \cdot (n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{(2a+bn)(n+1)}{2}}$$

6-

- Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss

$$\sum_{0 \le i \le n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

sendo:

$$S_n = \frac{(2a+bn) \cdot (n+1)}{2}$$

com $a = 0$

$b = 1$

temos:

$$S_n = \frac{(2 \cdot 0 + 1 \cdot n) \cdot (n+1)}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

7-

- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        soma += i;
    }
    return soma;
}
```

```
int somatorio(int n){
        return ((n * (n+1))/2);
}
```

8-

- O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \le i \le n-2} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

$$\sum_{0 \le i \le n-2} (n-i-1) =$$

$$= \sum n - \sum i - \sum 1 =$$

$$= n(n-1) - \sum_{0 \le i n \le n-2} i - 1(n-1) =$$

$$= n(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - (n-1) =$$

$$= \frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{2n^2 - 2n - n^2 - 3n + 2 - 2n - 2}{2} =$$

$$\boxed{= \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}$$

9-

Exercício Resolvido (8): Justifique as Expressões

a) $\sum_{1}^{n} i = \sum_{0}^{n} i$

b) $\sum_{1}^{n} a_i \neq \sum_{0}^{n} a_i$

c) $\sum_{1}^{n} a_i = \sum_{0}^{n-1} a_{i+1}$

a) Como o valor do primeiro elemento é 0, ele é irrelevante para o resultado do somatório.
b) a_i não representa necessariamente o valor de i, mas também pode representar algum valor qualquer em uma sequência, na qual i é o índice de posição.
c) O resultado dos dois somatórios é o mesmo

10-

- Sendo $1 \le m \le n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i + a_m$$

11-

- Sendo $1 \le m \le n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i - a_{m-2} - a_{m-1}$$

12-

- Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma PG

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a.x^i$$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \le i \le n} ax^{i+1}$$

$$S_n + ax^{n+1} = a + x S_n$$

$$S_n - xS_n = a - ax^{n+1}$$

$$S_n (1 - x) = a - ax^{n-1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{a - ax^{n-1}}{(1-x)}, \text{ para } x \ne 1}$$

13-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i.2^i$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \cancel{0 \cdot 2^0} + \sum_{0 \le i \le n} (i+1) \cdot 2^{i+1}$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = \sum_{0 \le i \le 2} i \cdot 2^{i+1} + \sum_{0 \le i \le n} 2^{i+1}$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 \sum_{0 \le i \le 2} i \cdot 2 + 2 \sum_{0 \le i \le 2} 2^i$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2 S_n + 2 \sum_{0 \le i \le 2} 2^i$$

$$\frac{a - ax^{n+1}}{1-x}, \text{ com } a = 1 \text{ e } x = 2$$

$$= \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} =$$

$$= (2^{n+1} - 1)$$

$$S_n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2S_n \; 2 (2^{n+1} - 1)$$

$$S_n = n 2^{n+1} \cancel{+ 2^{n+1}} \cancel{- 2 \cdot 2^{n+1}} + 2$$

$$S_n = n 2^{n+1} + 2$$

$$\boxed{S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2}$$

14-

- Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{n\,(n+1)(2.n+1)}{6}, \text{ para } n \ge 0$$

1) $S_n = \frac{0\,(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0 \longrightarrow$ verdadeiro

2) $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + n^2$

$6\,S_n = (n^2-n)(2n-1) + 6n^2$

$6\,S_n = [2n^3 - n^2 - 2n^2 + n] + 6n^2$

$S_n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} \longrightarrow$ verdadeiro

15-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$= \sum_0^n 3 + \sum_0^n i =$

$= 3\,(n+1) + \frac{n\,(n+1)}{2} =$

$= \frac{6n+6+n^2+n}{2} =$

$= \frac{n^2+7n+6}{n}$

1) $\frac{0^2+7\cdot 0+6}{2} = 3$ (verdadeiro)

2) $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = \frac{(n-1)^2+7\,(n-1)+6}{2} + (3+n)$

$S_n = \frac{(n-1)^2+7\,(n-1)+6+(6+2n)}{2}$

$S_n = \frac{(n^2+7n+6)}{2} \longrightarrow$ verdadeiro

16-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

$= \sum_1^n (4i+1) =$

$= 4\sum_1^n i + \sum_1^n 1 =$

$= 4\,\frac{n\,(n-1)}{2} + n =$

$= 2n^2 + 3n$

1) $2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 = 5 \longrightarrow$ verdadeiro

2) $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = 2\,(n-1)^2 + 3\,(n-1) + (4n+1)$

$S_n = 2n^2 + 3n \longrightarrow$ verdadeiro

17-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(5i+1)^2-(5i-1)^2] =$$

$= \sum_{1}^{n}[(25i^2+10i+1)-(25i^2-10i+1)] =$

$= \sum_{1}^{n} 20i =$

$= 10n^2+10n$

1) $10 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 20 \longrightarrow$ verdadeiro

2) $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = 10(n-1)^2 + 10(n-1) + 20n$

$S_n = (10n^2 - 20n + 10) + (10n - 10) + 20n$

$S_n = 10n^2 + 10n$

$\longrightarrow$ verdadeiro

18-

- Prove a fórmula apresentada anteriormente usando indução matemática

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

1) $(0-1)\,2^{0+1} + 2 = 0 \longrightarrow$ verdadeiro

2) $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = [((n-1)-1)\,2^n + 2] \cdot (n\,2^n)$

$S_n = (2n-2)\,2^n + 2$

$S_n = (n-1)\,2^{n+1} + 2 \longrightarrow$ verdadeiro

19-

- Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

$S_n + (n+1)^2 = 0^2 + \sum_{0 \le i \le n}(i+1)^2$

$S_n + (n+1)^2 = \sum_{0 \le i \le n}(i^2+2i+1)$

$S_n + (n+1)^2 = \sum i^2 + \sum 2i + \sum 1$

$\underbrace{S_n + (n+1)^2}_{} = \underbrace{S_n}_{} + n(n+1) + (n+1)$

As soma se anulam

Resolvendo o somatório dos cubos:

$S_{cubo_n} + (n+1)^3 = \sum_{0 \le i \le n}(i+1)^3$

$S_{cubo_n} + (n+1)^3 = \sum i^3 + \sum 3i^2 + \sum 3i + \sum 1$

$S_{cubo_n} + (n+1)^3 = S_{cubo_n} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$

$S_n = \frac{2n^3+3n+n}{6}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercícios

1-

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial *a* e razão *b*.

```
int somatorioPA(int a, int b, int n){
	return ((2*a + b*n)*(n+1))/2;
}
```

2-

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
	int tmp = array[i];
	int j = i - 1;
	while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
		array[j + 1] = array[j];
		j--;
	}
	array[j + 1] = tmp;
}
```

Melhor caso: $c(n) = n$
Pior caso: $c(n) = n^2$