

***A**celeradores y **D**etectores de **P**artículas*

Guía para Trabajo Computacional 1

Profesor Bernardo Gómez Moreno

Febrero 3 de 2026

Introducción

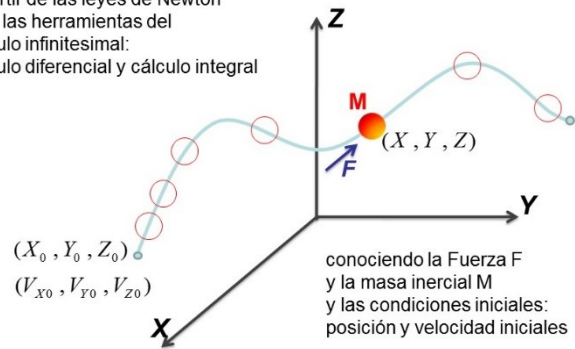
Cálculo numérico de trayectoria de partícula en 3 dimensiones

Podemos hacer modelos computacionales del movimiento de partículas en tres dimensiones, aplicando esta muy sencilla aproximación de primer orden (método de Euler, o método de Euler-Feynman). Para mayor precisión extendemos la aproximación a Runge-Kutta cuarto orden.

Conociendo las masas que se mueven, las fuerzas que actúan sobre ellas y las condiciones iniciales, esto es las posiciones y velocidades iniciales, podemos hacer un seguimiento matemático del movimiento para todo instante posterior al comienzo ($t=0$) de ese movimiento.

Para cualquier instante $t > 0$ podemos hacer predicciones de las posiciones y velocidades de las masas.

A partir de las leyes de Newton con las herramientas del cálculo infinitesimal: cálculo diferencial y cálculo integral



se obtiene la descripción cuantitativa completa del movimiento para todo tiempo posterior: trayectoria y velocidad para todo instante t .

Hoy con las facilidades computacionales podemos modelar muy exitosamente el movimiento:

Conociendo masas y fuerzas hallamos las aceleraciones: Es la aplicación de la segunda ley de Newton. Con las aceleraciones y las velocidades del momento hallamos las nuevas velocidades, que son nuevas porque van cambiando por efecto de las fuerzas. Con las nuevas velocidades hallamos las nuevas posiciones a partir de las posiciones anteriores. Así avanzando en el tiempo, podemos construir las trayectorias de las masas en movimiento, siempre avanzando en pasos pequeños del tiempo, pasando de la posición anterior a la nueva posición. Y el procedimiento sigue a continuación.

Procedimiento:

En una dimensión que sea el movimiento a lo largo del eje X. Podemos hacer coincidir el origen de este sistema, $X=0$, con la posición de la masa M en el instante inicial $t_0=0$. Entonces vale: $X(t_0)=0$.

Imaginamos que el tiempo transcurre desde $t_0=0$ en pasos muy pequeños Δt :

$$t \rightarrow t + \Delta t$$

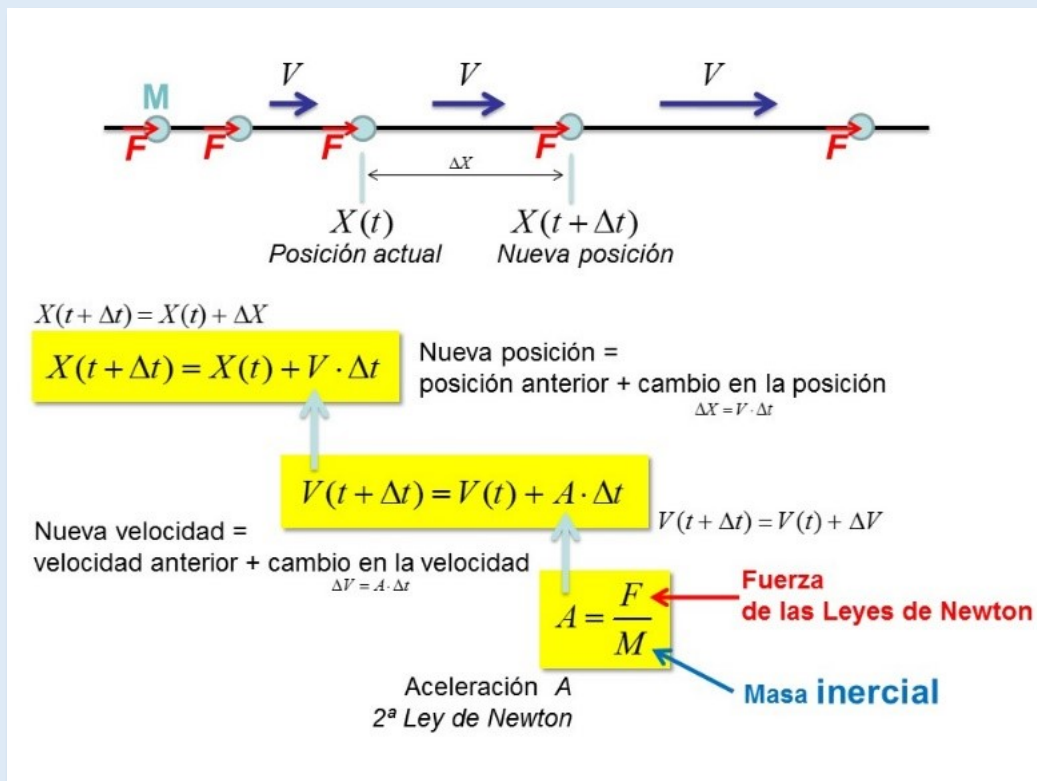
En el instante t la posición de la masa M es $X(t)$, la posición actual.

En el intervalo de tiempo Δt cambia la posición, así que la nueva posición es: $X(t+\Delta t)$, la nueva posición.

Esta nueva posición se obtiene de la posición anterior, diciendo que es la posición anterior más el cambio en la posición ΔX :

$$X(t+\Delta t) = X(t) + \Delta X$$

$$\Delta X = V_X \cdot \Delta t$$



¿Y cuál es la velocidad V_x ?

La velocidad también va cambiando con el tiempo. Utilizamos entonces la más reciente velocidad, la más nueva, que obtenemos de la velocidad anterior, sumándole el cambio $\Delta V_x = A_x \cdot \Delta t$.

Así la nueva velocidad es: $V_x(t + \Delta t) = V_x(t) + \Delta V_x$

$$V_x(t + \Delta t) = V_x(t) + A_x \cdot \Delta t$$

Nos preguntamos ahora por la aceleración y la obtenemos de la Segunda Ley de Newton:

$$A_x = \frac{F_x}{M}$$

Recordemos que la masa, que aquí aparece, es la medida de la resistencia del objeto a cambiar su estado de movimiento, es su inercia. Así la masa M es la masa inercial.

Entonces, si conocemos la masa M y la fuerza F_x que actúa sobre la masa, conocemos su aceleración A_x . Con ella hallamos el cambio de velocidad $\Delta V_x = A_x \cdot \Delta t$ y así la nueva velocidad $V_x(t + \Delta t)$. Con la nueva velocidad hallamos el cambio en la posición del objeto $\Delta X = V_x \cdot \Delta t$ y con este ΔX obtenemos la nueva posición $X(t + \Delta t)$.

Esto lo repetimos paso a paso a medida que avanza el tiempo $t \rightarrow t + \Delta t$.

La secuencia de posiciones $X(t) \rightarrow X(t + \Delta t)$ nos da la **trayectoria**, aquí en una dimensión.

IMPORTANTE:

Requerimos para iniciar el modelo las **CONDICIONES INICIALES**:

Posición y Velocidad en el instante inicial $t_0 = 0$: $\{ X(t_0 = 0) , V_x(t_0 = 0) \}$.

Resumiendo:

Para masa y fuerza conocidas

$$\{ M, F_x \} \text{ conocidas}$$

Y dadas las condiciones iniciales:

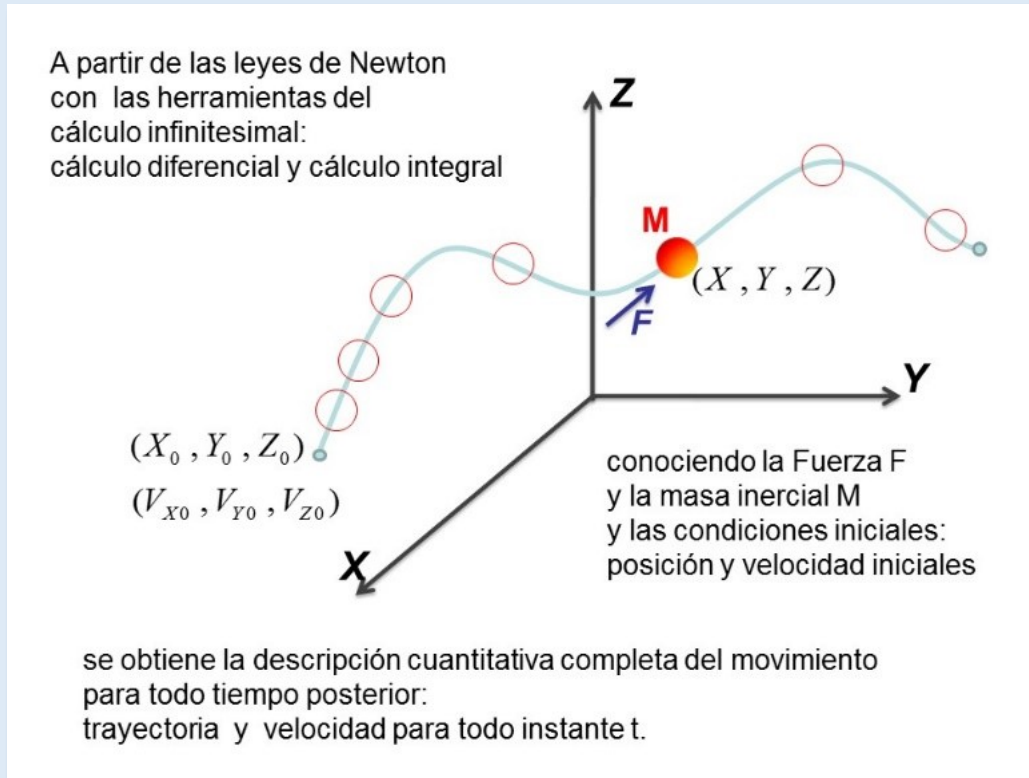
$$\{ X(t_0 = 0) , V_x(t_0 = 0) \} \text{ conocidas}$$

Construimos así la trayectoria avanzando en el tiempo paso a paso: $t \rightarrow t + \Delta t$:

$$\{ M, F_x \} \rightarrow \{ A_x, V_x, X \} \big|_t \rightarrow \{ A_x, V_x, X \} \big|_{t+\Delta t}$$

En tres dimensiones:

Lo que hicimos en una dimensión a lo largo del eje-X, lo hacemos también en dos dimensiones más:



Aplicaciones:

Estudiamos ahora casos especiales de movimiento de cargas eléctricas en campos eléctricos y magnéticos con vistas a aplicaciones para aceleradores de partículas:

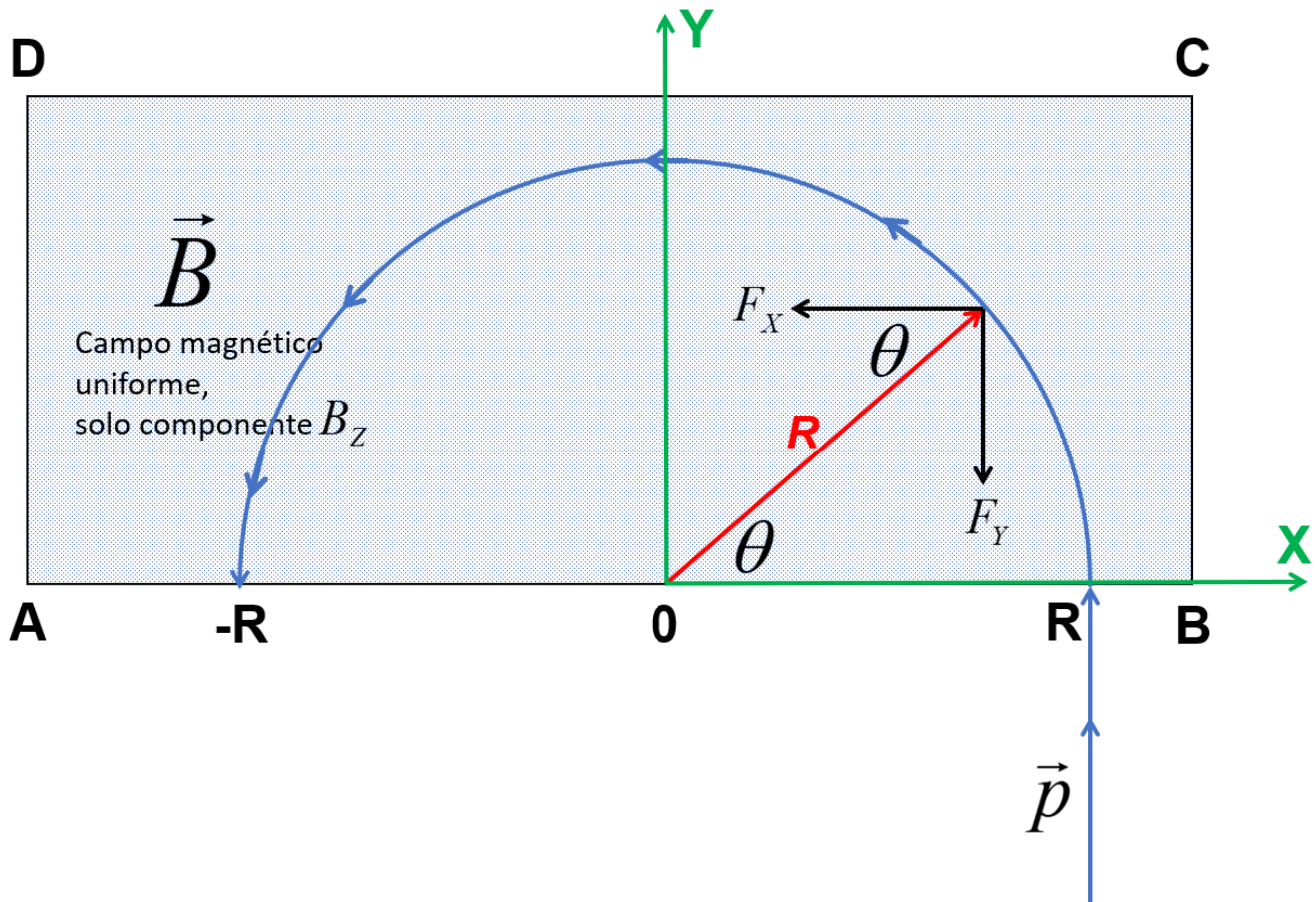
- Monocromador.
- Movimiento de carga positiva en campo magnético para sincrotrón, campo magnético con dependencia radial.
- Exploración enfoque débil comparando con enfoque fuerte de gradiente alterno.

1 - Monocromador:

En la región del espacio ABCD hay un campo magnético \vec{B} espacialmente uniforme, constante en el tiempo. Partículas de masa M , carga eléctrica q , inciden con momento \vec{p} , como lo muestra la figura.

Modelamos la trayectoria numéricamente, avanzando paso a paso en el tiempo, $t \rightarrow t + \Delta t$.

El punto $(-R)$ por donde emergen las partículas, saliendo de la zona ABCD, da la medida del momento de la partícula, si se conoce la carga eléctrica q y el campo magnético \vec{B} .



La fuerza magnética sobre la carga eléctrica es fuerza centrípeta:

$$F_{mag} = qvB = \frac{Mv^2}{R} \quad \rightarrow \quad qBR = Mv = p$$

En esto consiste el monocromador.

Se mide R , se obtiene p . Con ventana, diafragma ubicado en $(-R)$, se admiten únicamente partículas con momento $p = qBR$.

Para el cálculo numérico de la trayectoria requerimos la fuerza en cada punto (x,y):

Conociendo previamente que $F = qvB$ y que $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ y como muestra la figura:

$$F_X = -F \cos(\theta) \leftarrow \cos(\theta) = \frac{x}{R} \Rightarrow F_X = -(qvB) \frac{x}{R}$$

$$F_Y = -F \sin(\theta) \leftarrow \sin(\theta) = \frac{y}{R} \Rightarrow F_Y = -(qvB) \frac{y}{R}$$

Además conocemos la velocidad en (x,y), la velocidad actualizada como se va obteniendo punto por punto en el cálculo numérico: $v = \sqrt{(v_X^2 + v_Y^2)}$.

Conocidas las fuerzas, se obtienen las aceleraciones: $a_X = \frac{F_X}{M}$ y $a_Y = \frac{F_Y}{M}$.

Con las aceleraciones el procedimiento numérico se sigue:

$$a_X = \frac{F_X}{M} \rightarrow v_{nuevaX} = v_{antX} + a_X \Delta t \rightarrow x_{nuevo} = x_{anterior} + v_X \Delta t$$

$$a_Y = \frac{F_Y}{M} \rightarrow v_{nuevaY} = v_{antY} + a_Y \Delta t \rightarrow y_{nuevo} = y_{anterior} + v_Y \Delta t$$

Y se avanza en el tiempo... $t \rightarrow t + \Delta t$.

En cada paso, obteniendo los nuevos valores de (x_{nuevo}, y_{nuevo}) se determina el ángulo θ :

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_{nuevo}}{x_{nuevo}}\right).$$

Cuando este ángulo llega a π radianes, esto es 180° , se concluye el cálculo de la trayectoria y se obtiene el resultado $(x, y) = (-R, 0)$. Se obtiene de la coordenada x , el valor de $-R$ y así el momento p de la partícula.

Graficar:

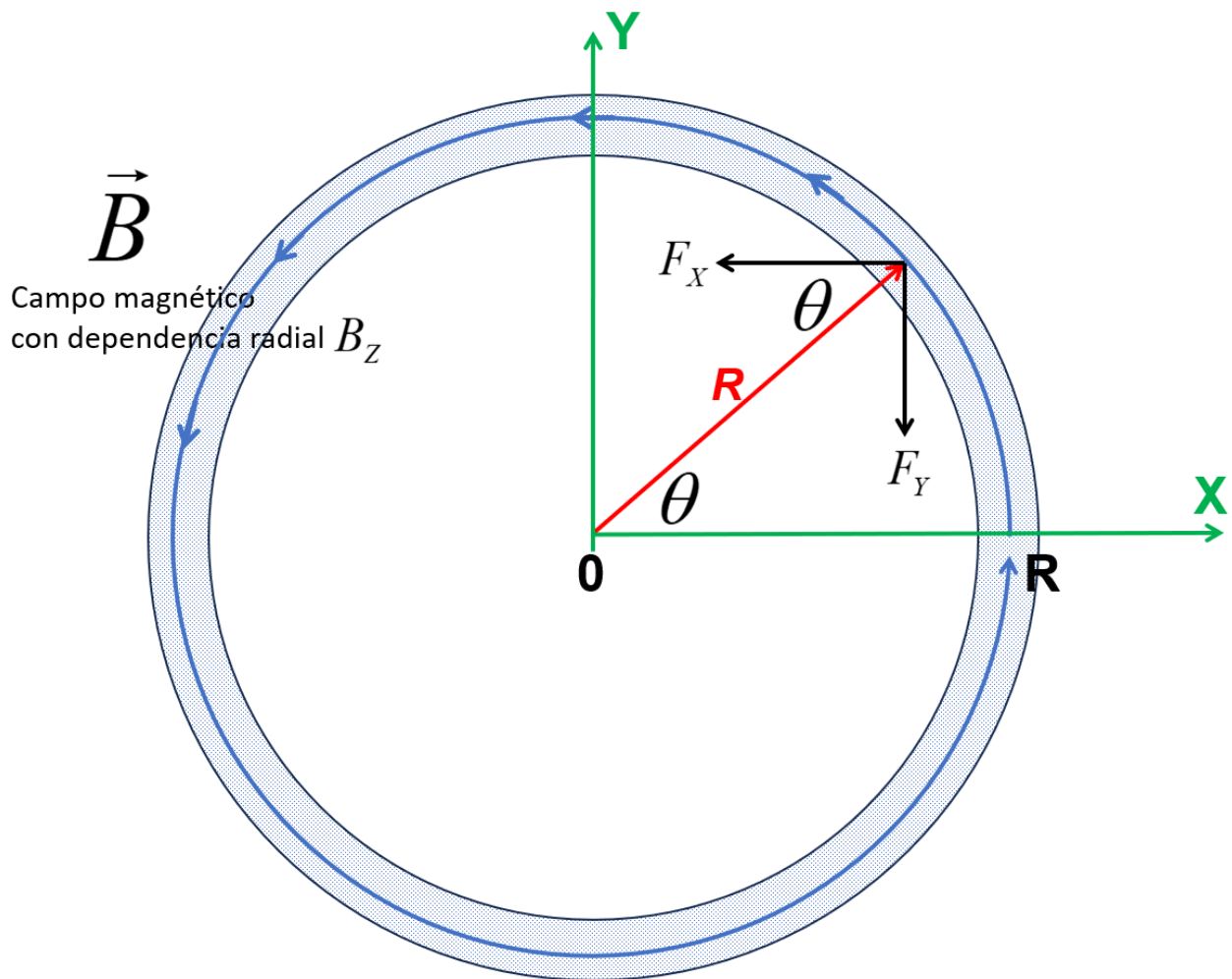
Scatterplot: **y vs. x**. { trayectoria }.

Scatterplot: **R vs. t** { a partir de $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ calculado en cada paso, para cada t }.

2 – Movimiento de partícula positiva en campo magnético de sincrotrón, campo magnético con dependencia radial:

Parte 2.1: A partir del modelo anterior de monocromador, ampliamos el cálculo numérico de la trayectoria, simplemente permitiendo que el ángulo que se obtiene en cada paso pueda llegar hasta 360° , completando un circuito en presencia de campo del mismo campo magnético espacialmente uniforme y constante en el tiempo.

En la práctica el campo magnético no llena todo el plano de la trayectoria, sino apenas la región alrededor de la trayectoria circular, esto es dentro de un tubo toroidal con alto vacío por donde circulan las partículas, como lo muestra la siguiente figura.



Graficar:

Scatterplot: **y vs. x**. { trayectoria }.

Scatterplot: **R vs. t**

{ a partir de $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ calculado en cada paso, para cada t }.

Parte 2.2: En la realidad el campo magnético en un sincrotrón de primera y segunda generación, **no es espacialmente uniforme**, sino que tiene dependencia radial para enfocar las partículas que se alejan radialmente de la trayectoria a ideal.

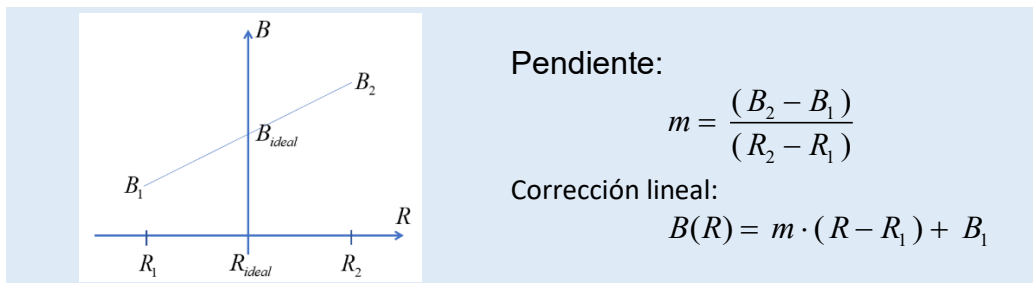
La idea: Fuerza para recuperar la trayectoria ideal, con $R_{ideal} = \frac{p}{qB}$

- Si la partícula se aleja de la trayectoria circular ideal hacia el exterior: $R_{particula} > R_{ideal}$ debe actuar fuerza restauradora hacia el interior.
- Si la partícula se aleja de la trayectoria circular ideal hacia el interior: $R_{particula} < R_{ideal}$ debe actuar fuerza restauradora hacia el exterior.

El efecto restaurador de la trayectoria ideal con el campo magnético que tenga dependencia radial:

- Para $R_{particula} > R_{ideal}$ un campo magnético allí, en el exterior, que sea mayor, logra fuerza centrípeta mayor que obliga a la partícula a regresar al R_{ideal} .
- Para $R_{particula} < R_{ideal}$ un campo magnético allí, en el interior, que sea menor, da una fuerza centrípeta menor que lo requerido y la partícula “se sale”, se aleja, acercándose al R_{ideal} .

Hacemos entonces una pequeña corrección lineal del campo magnético, dependiendo del valor de R :



Ponemos: $B(R) = m \cdot (R - R_1) + B_1$

Al avanzar en el cálculo de la trayectoria, en cada paso calculamos $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ y para este R calculamos el campo magnético $B(R) = m \cdot (R - R_1) + B_1$ valor del campo magnético que utilizamos en la fuerza $F = qvB$.

¿Y por qué el radio R no siempre es el R_{ideal} ?

¿Y por qué el radio R no siempre es el R_{ideal} ?

Porque en el sincrotrón las partículas circulan en “paquetes de partículas” llamados “bunches”, que llevan 10^{11} protones. Así cada partícula por su carga eléctrica está en interacción con las 10^{11} vecinas, recibiendo movimiento transversal, movimiento radial, de forma aleatoria unas veces al interior $R_{particula} < R_{ideal}$, otras veces al exterior $R_{particula} > R_{ideal}$.

Este efecto lo simulamos sumando al $R = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ un pequeño ΔR , a veces positivo, a veces negativo:

$$R \rightarrow R = R + [2 \cdot \text{random}(1) - 1] \cdot \Delta R$$

- Si el número aleatorio $\text{random}(1)$, distribuido uniformemente entre 0 y 1, tiene valor 0, restamos ΔR .
- Si el número aleatorio $\text{random}(1)$, tiene valor 0.5, la corrección es 0.
- Si el número aleatorio $\text{random}(1)$, tiene valor 1, la corrección es sumar $+\Delta R$.

Así modificamos aleatoriamente el valor del radio R en cada paso y aplicamos entonces la fuerza para campo magnético que depende de R . Estudiamos así la capacidad del sistema de mantener estabilidad.

Graficar: Scatterplot: **y vs. x**. { trayectoria }.
Scatterplot: **R vs. t**

Parte 2.3: Exploramos el “Gradiente Alterno”.

En nuestra aproximación, reproducimos completo la **Parte 2.2**, excepto que para el campo magnético dependiente del radio R , invertimos la pendiente de la recta que da la dependencia radial del campo magnético, así que en lugar de enfocar las partículas al radio ideal, desenfoca.

Pero esta inversión de la pendiente, pendiente negativa, la realizamos solo **alternando** con la pendiente positiva de la **Parte 2.2**, así:

En cada paso calculamos el ángulo $\theta = \arctan\left(\frac{y_{nuevo}}{x_{nuevo}}\right)$ y en sectores de 60° alternamos la pendiente de la corrección lineal al campo magnético.

En cada paso calculamos el ángulo $\theta = \arctan\left(\frac{y_{nuevo}}{x_{nuevo}}\right)$ y en la secuencia de sectores de 60°

alternamos la pendiente m de la corrección lineal al campo magnético: $B(R) = m \cdot (R - R_1) + B_1$

- Sectores con pendiente m **positiva**: $0^\circ \rightarrow 60^\circ$, $120^\circ \rightarrow 180^\circ$, $240^\circ \rightarrow 300^\circ$
- Sectores con pendiente m **negativa**: $60^\circ \rightarrow 120^\circ$, $180^\circ \rightarrow 240^\circ$, $300^\circ \rightarrow 360^\circ$

Exploramos así el “**Gradiente Alterno**” para enfocar rayos de partículas en sincrotrones.

la realidad el campo magnético en un sincrotrón de primera y segunda generación, **no es espacialmente uniforme**, sino que tiene dependencia radial para enfocar las partículas que se alejan radialmente de la trayectoria a ideal.

Graficar: Scatterplot: **y vs. x**. { trayectoria }.
Scatterplot: **R vs. t**

Referencias

The Feynman LECTURES ON PHYSICS

<https://www.feynmanlectures.caltech.edu/>

The Feynman LECTURES ON PHYSICS, Vol.II - Chapter 29

The Motion of Charges in Electric and Magnetic Fields:

https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_29.html