

CURSO DE INVERNO DE
INTRODUÇÃO À FÍSICA I
AGOSTO/2013



Pró-Reitoria de Pós-Graduação/UFSC
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação/UFSC
Projeto REUNI - Reestruturação e Expansão das Universidades Federais
Programa de Pós Graduação em Física/UFSC

Apostila elaborada e revisada por:

Bruno Pavani Bertolino (Doutorando em Física)

Luis Cesar Nunes Dos Santos (Doutorando em Física)

Luiz Laércio Lopes (Doutorando em Física)

Rafael Heleno Campos (Mestrando em Física)

Rodrigo Sergio Tiedt (Mestrando em Física)

Germano Scmann Bortolotto (Mestrando em Física)

Victor Alexandre Veit Schmachtenberg (Doutorando em Física)

David Velasco Villamizar (Doutorando em Física)

Giovani Safanelli

Fabio Moreira de Oliveira (Doutorando em Física)

William Martarello (Mestrando em Física)

Luana Lacy de Mattos (Doutoranda em Física)

Juan Camilo Macias Ramirez (Doutorando em Física)

Marcelo Gomes de Paoli (Doutorando em Física)

Coordenação:

Rafael Heleno Campos (Mestrando em Física)

Supervisão:

Prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg

(Departamento de Física e Programa de Pós Graduação em Física da UFSC)

Cronograma do curso e ministrantes:

05/08/2013 - Cinemática unidimensional (Victor Alexandre Veit Schmachtenberg)

06/08/2013 - Vetores (Bruno Pavani Bertolino)

07/08/2013 - Cinemática bidimensional (Gabriel Fernandes)

08/08/2013 - Leis de Newton (Rodrigo Sergio Tiedt)

09/08/2013 - Aplicação das leis de Newton (Luis Cesar Nunes Dos Santos)

Mais informações em: <http://cursos.ppgfsc.posgrad.ufsc.br/>

Versão atual: 1.7 - 1 de Agosto de 2013

Índice

1	Movimento em Uma Dimensão	6
1.1	Sistemas de referência	6
1.2	Velocidade média e velocidade escalar média.	6
1.3	Velocidade instantânea	7
1.4	Aceleração	8
1.5	Movimento uniforme	9
1.6	MUA - Movimento uniformemente acelerado	10
1.7	Queda livre	11
1.8	Questões	11
1.9	Exercícios	12
2	Vetores	14
2.1	Introdução	14
2.2	Representação de um Vetor	14
2.3	Operações de Adição e Subtração de Vetores	15
2.4	Multiplicação de um Vetor por um Escalar	16
2.5	Produto Escalar de Vetores	16
2.6	Produto Vetorial	17
2.7	Versores	18
2.8	Componentes de um Vetor em 2 Dimensões	18

2.9	Vetores em 3 Dimensões	20
2.10	Adição e Subtração de Vetores na Forma de Componentes (Método Analítico)	21
2.11	Produtos de Vetores na Forma de Componentes	21
2.12	Exercícios	22
3	Movimento em Duas Dimensões	24
3.1	Introdução	24
3.2	Movimento em Duas Dimensões com Aceleração Constante	24
3.3	Movimento de Projéteis em Duas Dimensões	25
3.3.1	Movimento Horizontal	25
3.3.2	Movimento Vertical	25
3.3.3	Alcance Horizontal	26
3.3.4	Altura Máxima	26
3.4	Movimento Circular Uniforme	27
3.5	Aceleração Tangencial e Radial	28
3.6	Exercícios	30
4	Leis de Newton	31
4.1	Referenciais, Repouso e Forças	31
4.2	1 ^a lei de Newton	32
4.3	2 ^a Lei de Newton	33
4.4	Exemplos de forças	34
4.5	A 3 ^a Lei de Newton	35
4.6	Exercícios	39
5	Aplicações das Leis de Newton	42
5.1	Força de Atrito	42

ÍNDICE

		5
5.2	Movimento Circular	
	Uniforme	48
5.3	Forças de Arrasto	51
5.4	Exercícios	52
6	Respostas dos Exercícios	56
7	Referências Bibliográficas	58

Capítulo 1

Movimento em Uma Dimensão

CINEMÁTICA: Denomina-se cinemática a descrição dos movimentos sem a preocupação de se definir quais são os agentes causadores dos mesmos.

1.1 Sistemas de referência

O movimento é um fenômeno relativo, quando falamos que um corpo se move, temos que ter implicitamente em mente algum outro corpo em relação ao qual ele se move. Por exemplo, se você está sentado em um avião, a poltrona está imóvel em relação a você, mas ambos estão em movimento em relação a alguém que esteja no aeroporto. Se você se levanta e começa a andar, para quem está no aeroporto, sua velocidade é uma combinação de sua velocidade no interior da aeronave com a velocidade de vôo do próprio avião. Portanto, para descrever o movimento de um corpo, temos que escolher previamente um sistema de referência em relação ao qual os deslocamentos sejam medidos.

O sistema de referência deve conter orientações fixas em relação as quais o movimento pode ser definido sem ambiguidades. No caso unidimensional, consideraremos que o corpo esteja sobre uma reta, além disso, consideraremos movimento de partículas. Isto é, as dimensões do corpo são muito menores do que o desloca-

mento efetuado pelo corpo, de tal forma que podemos tratar o corpo como um ponto.

O sistema de referência é então uma reta denominada pela letra x , cuja origem é escolhida arbitrariamente (Figura 1.1). Um observador é uma entidade que possui relógio para marcar o tempo. No instante t , a partícula terá então coordenada $x(t)$.

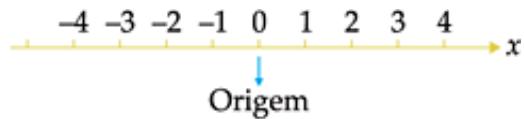


Figura 1.1: Sistema de referência unidimensional

1.2 Velocidade média e velocidade escalar média.

Informalmente, velocidade expressa a rapidez que um corpo se move. Vamos todavia definila de maneira mais precisa. Seja $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$ as coordenadas da partícula nos instantes t_1 e t_2 respectivamente. A velocidade média é por definição:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.1)$$

Definindo-se $\Delta x = x_2 - x_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$ podemos reescrever

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

$$|\bar{v}| = \frac{15.0}{3.0} = 5.0 \text{ m/s}.$$

Ressalta-se que a definição de velocidade média não menciona o trajeto realizado pela partícula em seu deslocamento, não tendo nada a ver com a distância total percorrida. A grandeza relacionada com a distância total percorrida é a velocidade escalar média.

$$|\bar{v}| = \frac{\Sigma |\Delta x|}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

onde Σ indica soma (neste caso, soma sobre todos os deslocamentos) e $||$ indica valor absoluto, por exemplo $| - 5 | = 5$. A velocidade escalar média é sempre uma grandeza positiva, enquanto a velocidade média pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção do movimento.

EXEMPLO 1:

Em $t_1 = 2.0$ seg uma partícula estava em $x_1 = 1.5$ m. A partir desse instante ela moveu-se 5.5 m para a direita, retornou e em $t_2 = 5.0$ seg encontrava-se em $x_2 = -2.5$ m.

1 -) Qual foi sua velocidade média no intervalo de tempo $(t_2 - t_1)$?

2 -) Qual sua velocidade escalar média neste mesmo intervalo de tempo?

RESPOSTAS

1 -) Pelo emprego direto da Eq. (1.1) obtemos:

$$\bar{v} = \frac{-2.5 - 1.5}{5.0 - 2.0} = -1.33 \text{ m/s}.$$

2 -) No intervalo de tempo $\Delta t = 3.0$ seg a partícula percorreu uma distância de 15.0 m, pois deslocou-se 5.5 m para a direita e após isso 9.5 m para a esquerda. Portanto, pela Eq. (1.3):

1.3 Velocidade instantânea

Considere a seguinte tabela:

$t(s)$	$x(m)$	$\bar{v}(m/s)$
$t_0 = 3.000$	20.8594	
3.005	20.9314	14.398
3.01	21.0037	14.430
3.02	21.1491	14.485
3.05	21.5924	14.660
3.10	22.3546	14.952
3.20	23.9716	15.561
3.50	29.6500	17.581

Podemos ver a variação da velocidade média a medida que variamos o intervalo de tempo $(t - t_0)$. Mas como podemos calcular qual a velocidade no instante exato $t = 3.000\text{s}$? O limite de \bar{v} quando o intervalo de tempo $(t - t_0)$ tende a zero é por definição a velocidade instantânea da partícula no instante t_0 . Formalmente podemos definir a velocidade instantânea como:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}. \quad (1.4)$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Definindo-se agora $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ podemos escrever a velocidade instantânea de uma partícula no instante t como:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Esta por outro lado é a definição da derivada de função $x(t)$ no instante t . Formalmente:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (1.7)$$

Essas operações matemáticas que acabamos de realizar tem uma interpretação geométrica muito conveniente, que pode ser obtida através da análise da Figura 1.2 abaixo.

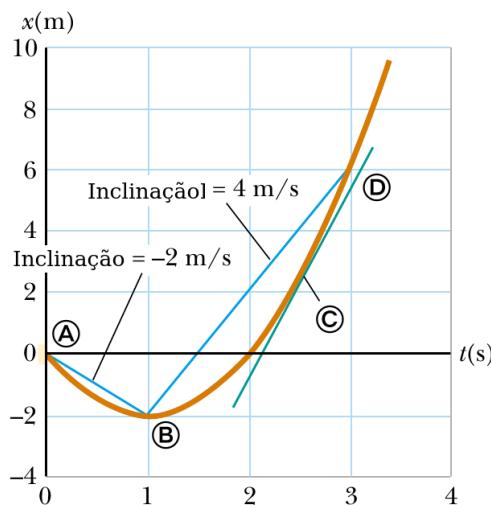


Figura 1.2: Posição em função do tempo para uma partícula no eixo x que move-se de acordo com a expressão $x = -4t + 2t^2$.

A velocidade média entre os instantes de tempo t_1 e t_2 (por exemplo, $t_1 = 1.0s$ e $t_2 = 3.0s$) é igual ao coeficiente angular (inclinação) da corda que une os pontos indicando a partícula nesses dois instantes. Quando t_1 e t_2 tendem ao mesmo ponto (por exemplo, $t = 2.5s$) a corda se alinha com a tangente da curva $x(t)$ no instante t . Portanto, a velocidade instantânea da partícula no instante t é igual ao coeficiente angular da tangente à curva $x(t)$ naquele instante.

EXEMPLO 2:

1 -) Calcule a velocidade média entre $t = 1s$ e $t = 3s$ do deslocamento da figura 1.2.

2 -) Calcule a velocidade instantânea $v(t)$, e avalie-a no ponto $t = 2.5s$.

RESPOSTAS

1 -) Da definição de velocidade média:

$$\bar{v} = \frac{6 - (-2)}{3 - 1} = 4m/s$$

Este resultado é exatamente o mesmo previsto pela interpretação geométrica, coeficiente angular da corda que une os pontos inciais e finais.

2 -) Da definição de velocidade instantânea:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 4t - 4, \rightarrow v(2.5) = 6m/s.$$

Na interpretação geométrica a velocidade instantânea é o coeficiente angular da tangente à curva no ponto desejado.

1.4 Aceleração

Define-se aceleração como a taxa de variação da velocidade com o tempo.

Seja v_1 e v_2 as velocidades nos tempos t_1 e t_2 respectivamente. A aceleração média neste intervalo é definida por:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.8)$$

Por exemplo, se um carro vai do repouso a 30 m/s em 12 seg, nesse intervalo de tempo ele possui uma aceleração média de:

$$\bar{a} = \frac{30 - 0}{12 - 0} = 2.5m/s^2 \quad (1.9)$$

Analogamente à velocidade, podemos definir a aceleração instantânea como:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \quad (1.10)$$

Uma vez que a aceleração instantânea é a derivada em relação ao tempo da velocidade instantânea, e esta última é a derivada em relação ao tempo da posição, a aceleração instantânea é então a derivada segunda da posição em relação ao tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.11)$$

O termo INSTANTÂNEO geralmente é omitido na descrição do movimento. Quando se diz velocidade ou aceleração estamos nos referindo a velocidade instantânea ou aceleração instantânea. Utilizaremos essa linguagem simplificada daqui pra frente.

A interpretação geométrica da aceleração é também análoga à da velocidade. A aceleração da partícula no instante t é igual ao coeficiente angular da tangente à curva $v(t)$ naquele instante como pode ser visto na figura 1.3.

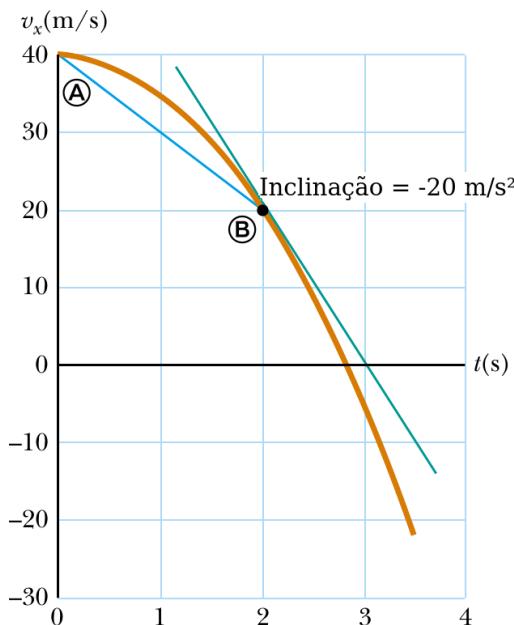


Figura 1.3: velocidade em função do tempo para uma partícula que move-se de acordo com a expressão $v(t) = 40 - 5t^2$.

EXEMPLO 3

A partir da figura 1.3 calcular:

1 -) A aceleração média entre 0 e 2 seg.

2 -) A aceleração no instante $t = 2$ seg.

RESPOSTAS

1 -) Da definição de aceleração média:

$$\bar{a} = \frac{20 - 40}{2 - 0} = -10 \text{ m/s}^2.$$

2 -) Da definição de aceleração instantânea:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -10t, \quad a(2) = -20 \text{ m/s}^2.$$

1.5 Movimento uniforme

O movimento mais simples de todos é o MOVIMENTO UNIFORME, no qual a velocidade da partícula é constante durante todo movimento. O velocidade em função do tempo está representada na figura 1.4 e o deslocamento em função do tempo está representada na figura 1.5.

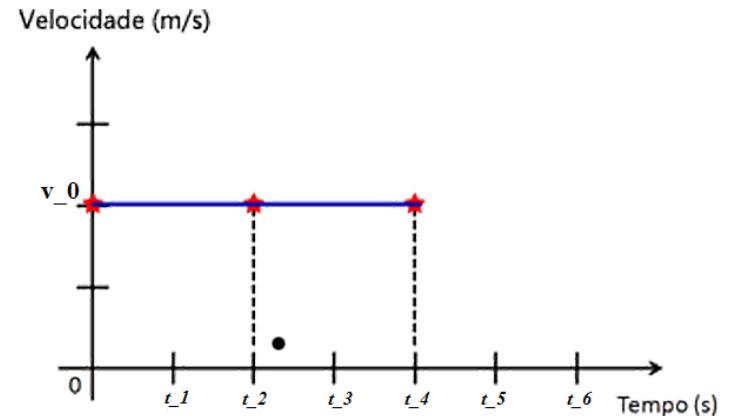


Figura 1.4: Gráfico que descreve a velocidade em função do tempo de um corpo com velocidade constante.

O deslocamento no intervalo de t_0 até t é então:

$$x - x_0 = v_0(t - t_0). \quad (1.12)$$

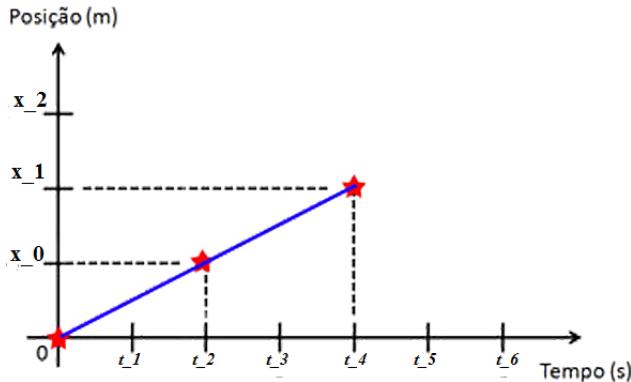


Figura 1.5: Gráfico que descreve o deslocamento em função do tempo de um corpo com velocidade constante.

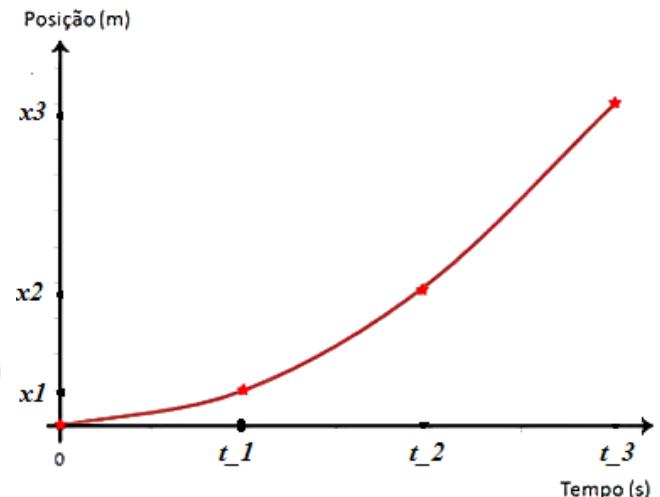


Figura 1.7: Gráfico que descreve o deslocamento em função do tempo de um corpo com aceleração constante.

1.6 MUA - Movimento uniformemente acelerado

Por definição o movimento uniformemente acelerado tem a aceleração constante, seja esta positiva ou negativa. Neste caso:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0}, \quad \rightarrow \quad v = v_0 + a(t - t_0) \quad (1.13)$$

Graficamente, a velocidade pode ser descrita pela figura 1.6, enquanto o deslocamento é descrito pela figura 1.7.

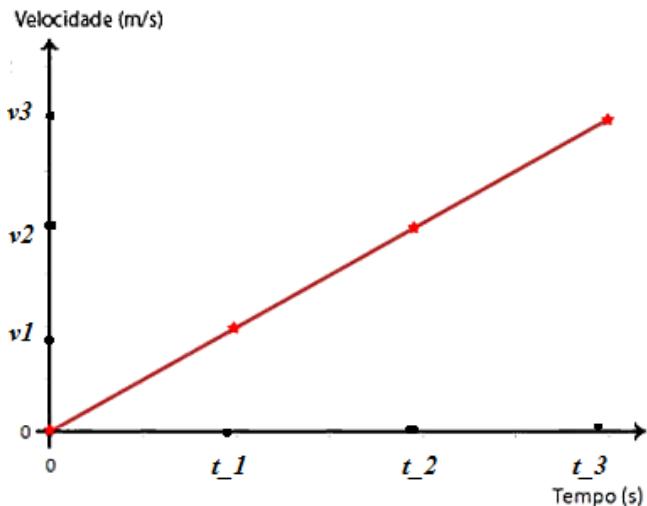


Figura 1.6: Gráfico que descreve a velocidade em função do tempo de um corpo com aceleração constante.

O deslocamento entre x e x_0 é então:

$$x - x_0 = v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (1.14)$$

Por outro lado, podemos isolar o termo $(t - t_0)$ na Eq. (1.13) e substituir na Eq. (1.14), obtemos assim:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0). \quad (1.15)$$

Esta é a chamada equação de Torricelli.

EXEMPLO 4

Jim Clark possui velocidade inicial de 30 m/s freia com aceleração constante e percorre 20 metros até parar. Qual é sua aceleração? (Figura 1.8)

RESPOSTA

Pela Eq. (1.15) temos que:

$$a = \frac{1}{2} \frac{0 - 30^2}{20 - 0} = -22.5 \text{ m/s}^2.$$



Figura 1.8: Jim Clark (1966).

EXEMPLO 5

Um avião, partindo do repouso, tem aceleração uniforme na pista e percorre 800 metros até levantar vôo à velocidade de 100 m/s. Quanto tempo ele gasta neste processo?

RESPOSTA

Primeiramente utilizamos a equação de Torricelli para determinar a aceleração:

$$a = \frac{100^2}{2 \times 800} = 6.25 \text{ m/s}^2.$$

E por fim utilizamos a Eq. (1.13):

$$t = \frac{v}{a} = \frac{100}{6.25} = 16.0 \text{ s.}$$

1.7 Queda livre

Ignorando-se a resistência que o ar oferece ao movimento, todos os corpos em um dado ponto da terra caem com a mesma aceleração g , denominada aceleração da gravidade. O valor de g varia com a altitude e a latitude, mas é em boa aproximação igual a:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2. \quad (1.16)$$

Em geral, utiliza-se o valor $g = 10 \text{ m/s}^2$ para fins acadêmicos.

Se um corpo cai partindo do repouso no instante inicial $t_0 = 0$, do ponto $x_0 = h$, a variação da sua coordenada x com o tempo pode ser obtida imediatamente das equações do MUA fazendo-se $a = -g$:

$$x = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (1.17)$$

EXEMPLO 6

1 -)Calcule o tempo gasto para cair de uma altura h partindo do repouso

2 -) Calcule a velocidade final.

RESPOSTAS

1 -) Fazendo $x = 0$ na Eq. (1.17) obtemos o tempo de queda:

$$h = \frac{1}{2}gt_c^2, \quad \rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Já a velocidade final:

$$v_f = gt_c, \quad v_f = \sqrt{2gh}. \quad (1.18)$$

1.8 Questões

Questão 1.1: Se a velocidade média é diferente de zero num intervalo estabelecido, será que a velocidade instantânea nunca poderá ser zero? Explicar os argumentos.

Questão 1.2: Um estudante no topo de um prédio de altura h lança uma bola verticalmente para cima com uma velocidade inicial de módulo v_{y0} e lança uma segunda bola para baixo com uma velocidade inicial de mesmo módulo. Qual é o módulo da velocidade final das bolas quando elas chegam ao chão?

Questão 1.3: Dois carros estão se movendo em direções paralelas ao longo de uma rodovia.

Num instante a velocidade escalar do carro A é maior que a velocidade escalar do carro B. Isto significa que a aceleração do carro A é maior que a que tem o carro B?

Questão 1.4: Em outro planeta que tem o valor da gravidade três vezes maior que a gravidade da terra, $g' = 3g$, quanto tempo precisará um corpo que cai desde uma altura h do repouso até chegar ao chão? Compare o resultado quando o mesmo corpo encontra-se na terra.

Questão 1.5: Faça um esboço do gráfico da velocidade escalar em função do tempo para um corpo que cai num queda livre partindo de uma posição de equilíbrio, desprezando o atrito com o ar. Como o gráfico poderia variar ao levar em consideração o atrito com o ar?

1.9 Exercícios

Exercício 1.1: O deslocamento como função do tempo de uma partícula ao longo do eixo x é mostrado na Figura 1.9. Achar a velocidade média nos seguintes intervalos (a) 0 a 2 s, (b) 0 a 4 s, (c) 2 s a 4 s, (d) 4 s a 7 s, (e) 0 a 8 s.

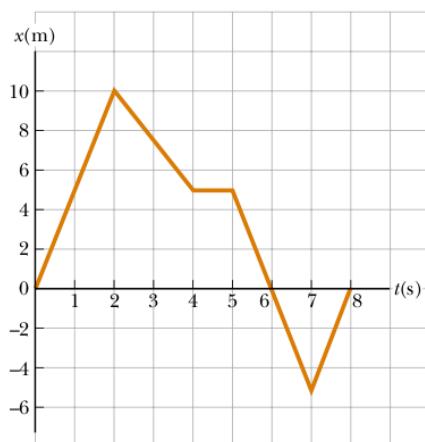


Figura 1.9: Exercício 1.1.

Exercício 1.2: Uma pessoa está caminhando

com uma velocidade constante de módulo v_1 ao longo de uma linha reta formada pelos pontos A e B e depois volta ao longo da mesma linha com uma velocidade constante de módulo v_2 .

(a) Qual sua velocidade escalar média em todo o percurso? (b) Qual sua velocidade média em todo o percurso?

Exercício 1.3: A posição de uma partícula varia em relação ao tempo ao longo do eixo x , como é mostrado na Figura 1.10. (a) Achar a velocidade média no intervalo de tempo de $t = 1,5\text{ s}$ até $t = 4,0\text{ s}$. (b) Determine a velocidade instantânea em $t = 2,0\text{ s}$ por medição da reta tangente à curva como é mostrada no gráfico da Figura ???. (c) Qual é o valor de t para qual a velocidade instantânea é zero?

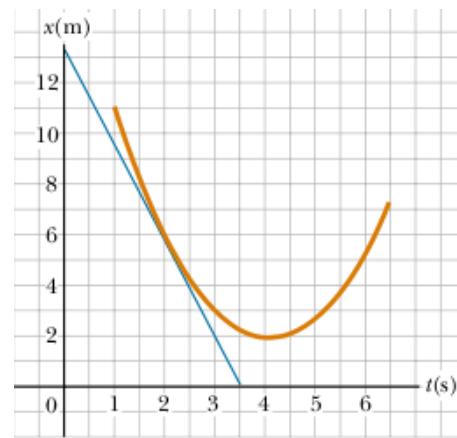


Figura 1.10: Exercício 1.3.

Exercício 1.4: Utilizando-se dos dados da Tabela 1.1 para a posição x em metros para um dado tempo t em segundos para um carro movimentando-se ao longo de uma reta:

$x(m)$	0,0	2,3	9,2	20,7	36,8	57,5
$t(s)$	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Tabela 1.1: Exercício 1.4.

(a) Construa uma curva suave da posição versus o tempo. (b) Construindo a reta tangente a curva $x(t)$, achar a velocidade instantânea

em qualquer instante de tempo. (c) Fazer o gráfico da velocidade instantânea como função do tempo e determinar o valor da aceleração média do carro. (d) Qual é a velocidade inicial do carro dada pela equação da velocidade instantânea obtida na questão (b)?

Exercício 1.5: Uma partícula viaja com uma velocidade de $60,0 \text{ m/s}$ ao longo do eixo x no instante inicial $t = 0,0 \text{ s}$. Num tempo $t = 15,0 \text{ s}$ após o início a velocidade é zero, pois ela diminuiu a velocidade a uma taxa constante neste intervalo. Qual é o valor da aceleração média neste intervalo? O que significa o sinal da resposta?

Exercício 1.6: Um objeto está se movendo ao longo do eixo x de acordo com a expressão $x(t) = (3,00t^2 - 2,00t + 3,00) \text{ m}$. Determinar, (a) a velocidade média no intervalo de $t = 2,00 \text{ s}$ até $t = 3,00 \text{ s}$, (b) a velocidade instantânea nos dois valores de tempo anteriores, (c) a aceleração média neste intervalo e (d) a aceleração instantânea para os dois valores de tempo mencionados.

Exercício 1.7: A Figura 1.11 mostra o gráfico da velocidade em função do tempo de um motoqueiro que começa seu movimento partindo do repouso, movendo-se ao longo do eixo x . (a) Achar a aceleração média no intervalo de $t = 0,00 \text{ s}$ até $t = 6,00 \text{ s}$. (b) Estimar o tempo no qual ele adquire o valor máximo positivo da aceleração e o valor dela. (c) Quando a aceleração é zero? (d) Estimar o valor máximo negativo da aceleração e o tempo no qual ocorre.

Exercício 1.8: Um avião aproxima-se da terra para aterrissar com uma velocidade de 100 m/s e pode desacelerar a uma taxa de $-5,00 \text{ m/s}^2$ até chegar ao repouso. (a) Desde o instante no qual o avião encosta na terra, qual é o tempo mínimo para que o avião possa estar comple-



Figura 1.11: Exercício 1.7.

tamente em repouso? (b) Pode o avião aterrissar no aeroporto de uma ilha tropical que tem $0,800 \text{ km}$ de pista?

Exercício 1.9: Um mulher pula do 17° andar de um prédio a uma altura de 49 m , quando chega a altura $h = 0,0 \text{ m}$ ela cai sobre um colchão de ar amortecendo seu movimento numa distância de $1,6 \text{ m}$. Calcular: (a) A velocidade escalar da mulher justamente no instante de tempo antes de ela tocar o colchão. (b) A aceleração média quando está em contato com o colchão. (c) O tempo de queda. (d) O tempo de contato com o colchão até que sua velocidade seja zero.

Exercício 1.10: A altura de um helicóptero com respeito ao chão é $h = 3,00t^2$. Partindo do chão, após $2,00 \text{ s}$ ele deixa cair uma sacola de massa M . Quanto tempo precisará a sacola para chegar a terra?

Capítulo 2

Vetores

2.1 Introdução

Muitas grandezas físicas, tais como massa, carga elétrica e temperatura, são chamadas grandezas escalares, e necessitam apenas de um número seguido de uma unidade de medida apropriada para serem definidas. Outro conjunto de grandezas físicas, como força, velocidade e deslocamento são chamadas grandezas vetoriais, e representadas por flechas no espaço às quais damos o nome de vetores. As grandezas vetoriais, de certa forma, carregam informações adicionais se comparadas às grandezas escalares. No caso das grandezas vetoriais citadas acima, geralmente não gostaríamos apenas de saber a sua intensidade, mas também para onde elas estão direcionadas. Essas informações estão contidas no vetor.

Por ser um objeto matemático diferente dos números, não podemos realizar operações tais como adição, subtração, multiplicação e divisão entre vetores da maneira usual, e de fato o próprio conceito do que significa realizar uma operação com vetores pode ser um pouco diferente. Ao longo deste capítulo, definiremos e aplicaremos vários tipos de operações com vetores.

2.2 Representação de um Vetor

Para representar graficamente um vetor, consideramos, inicialmente, um segmento de reta \overline{AB} sobre a reta r , na Figura 2.1

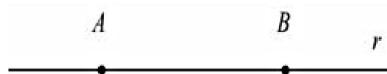


Figura 2.1: Segmento de reta.

orientando esse segmento com uma seta, que inicia em A e termina em B , obtemos a representação gráfica de um vetor, conforme a Figura 2.2.



Figura 2.2: Vetor \vec{a} .

Um vetor é completamente especificado por três informações:

1 - Módulo: Dado por um número seguido de uma unidade, o módulo está associado ao tamanho do vetor, isto é, ele especifica a intensidade da grandeza associada a ele. Se representarmos um vetor por uma letra com uma flecha em cima, por exemplo \vec{a} , podemos representar simbolicamente o seu módulo por $|\vec{a}|$, ou, simplesmente, a .

2 - Direção: É a inclinação ou ângulo de um vetor em relação a um eixo de um determinado sistema de referência (Figura 2.3).

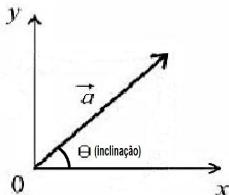


Figura 2.3: Direção.

3- Sentido: Coincidindo com a orientação do vetor, o sentido indica para onde aponta o vetor, conforme é mostrado na Figura 2.4.

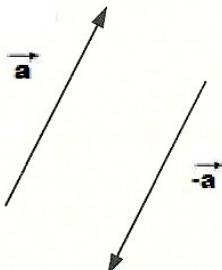


Figura 2.4: Sentido.

Para todo vetor com um determinado sentido, existe um vetor com sentido oposto. Por exemplo, o vetor \vec{a} possui um vetor com sentido oposto representado por $-\vec{a}$.

2.3 Operações de Adição e Subtração de Vetores

Para que possamos manipular equações envolvendo vetores, devemos saber como estes objetos matemáticos se comportam ao efetuarmos

operações matemáticas conhecidas. Representando dois vetores quaisquer por \vec{a} e \vec{b} , podemos formar um terceiro vetor \vec{s} com a definição de soma vetorial

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} \quad (2.1)$$

A operação de soma pode facilmente ser visualizada geometricamente. Na Figura 2.5, representamos a soma dos vetores \vec{a} e \vec{b} .

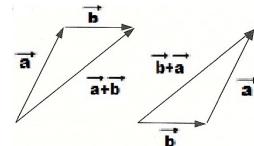


Figura 2.5: Soma de vetores.

A técnica para desenhar uma soma vetorial consiste em: (1) Desenhar o vetor \vec{a} preservando a sua orientação. (2) Desenhar o vetor \vec{b} com seu início na extremidade do vetor \vec{a} . (3) O vetor soma será feito desenhandando uma flecha ligando o início do vetor \vec{a} com a extremidade do vetor \vec{b} .

Pode-se notar que a operação de soma $\vec{a} + \vec{b}$ tem o mesmo resultado da operação de soma $\vec{b} + \vec{a}$, ou seja, a adição de vetores é comutativa.

A operação de subtração de vetores pode ser construída levando em conta que o vetor $-\vec{b}$ é o vetor \vec{b} com sentido oposto. A subtração de dois vetores \vec{a} e \vec{b} é então obtida usando a equação (2.1), ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \vec{a} - \vec{b}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

geometricamente, a subtração de dois está ilustrada na Figura 2.6.

É possível representar graficamente a operação de soma vetorial com um número arbitrário de vetores. Para exemplificar, consideramos os

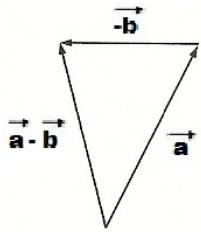
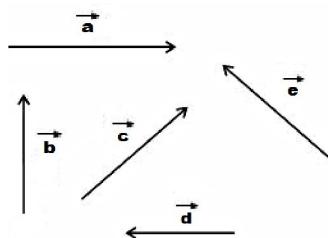


Figura 2.6: Subtração de vetores.

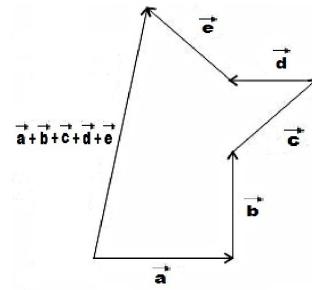
vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} , representados na Figura 2.7. O vetor resultante da soma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$ é obtido de forma análoga à soma de dois vetores. Inicialmente o vetor \vec{a} é fixado em uma posição, desloca-se paralelamente o vetor \vec{b} de forma que sua origem coincida com a extremidade do vetor \vec{a} . Repete-se o processo para os vetores \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} , e ao final o vetor soma terá sua origem no início do vetor \vec{a} e sua extremidade estará junto com a extremidade do vetor \vec{e} , conforme ilustrado na Figura 2.8.

Podemos pensar no deslocamento de uma partícula como a soma vetorial de deslocamentos intermediários. Dessa maneira, é fácil interpretar a regra da soma geométrica de vetores como uma sequência de deslocamentos.

Figura 2.7: Vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} .

2.4 Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor \vec{a} por um escalar s obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de \vec{a} pelo valor absoluto de

Figura 2.8: Soma dos vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} .

s , cuja direção é a mesma de \vec{a} e cujo sentido é o mesmo de \vec{a} , se s for positivo, e o sentido oposto, se s for negativo. Para dividir \vec{a} por s , multiplicamos \vec{a} por $1/s$. Os resultados da multiplicação de um vetor \vec{a} por 2 e $-1/3$ são mostrados na Figura 2.9.

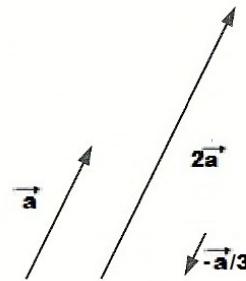


Figura 2.9: Multiplicação por escalar.

2.5 Produto Escalar de Vetores

Certas grandezas físicas são especificadas apenas por um número seguido de uma unidade, e são chamadas grandezas escalares. A operação de produto escalar entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} tem como resultado um escalar, é representada por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (lê-se \vec{a} escalar \vec{b}) e definida como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta, \quad (2.3)$$

onde a e b são os módulos de \vec{a} e \vec{b} , respectivamente, e θ é o ângulo entre \vec{a} e \vec{b} , como mostrado na Figura 2.10.

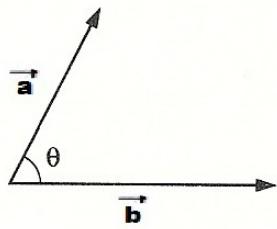


Figura 2.10: Ângulo entre dois vetores.

Um exemplo de uma grandeza escalar obtida através do produto escalar de vetores é o trabalho de uma força constante sobre um corpo, dado por:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (2.4)$$

Onde \vec{F} é a força aplicada e \vec{d} o deslocamento do corpo.

O produto escalar possui as propriedades:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- 2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- 3) $(n\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (n\vec{b}) = n(\vec{a} \cdot \vec{b})$

sendo n um número real. A primeira propriedade é a comutatividade, a segunda é a distributividade, e a última é a associatividade em relação a uma multiplicação por escalar.

2.6 Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores \vec{a} e \vec{b} , representado por $\vec{a} \times \vec{b}$ (lê-se \vec{a} vetorial \vec{b}) é definido de forma que o vetor \vec{c} , resultante desse produto, tenha as seguintes características:

Módulo: O módulo do vetor \vec{c} é igual ao produto do módulo do vetor \vec{a} pelo módulo de \vec{b} multiplicado pelo seno do ângulo formado por \vec{a} e \vec{b} , ou seja,

$$c = ab \sin \theta. \quad (2.5)$$

Geometricamente, o módulo do vetor \vec{c} é igual

à área do paralelogramo gerado pelos vetores \vec{a} e \vec{b} , como mostrado na Figura 2.11.

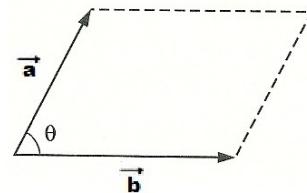


Figura 2.11: Módulo do produto vetorial.

Direção: O vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ será perpendicular ao plano determinado pelos vetores \vec{a} e \vec{b} , ou seja, será simultaneamente perpendicular a \vec{a} e \vec{b} , caso os vetores \vec{a} e \vec{b} não sejam paralelos. Se os vetores \vec{a} e \vec{b} forem paralelos o resultado do produto vetorial entre eles é $\vec{0}$.

Sentido: O sentido do vetor é dado pela regra da mão direita. Os vetores \vec{a} e \vec{b} determinam um plano. Imagine que seu dedo indicador é o primeiro vetor, \vec{a} e seu dedo médio é o segundo, \vec{b} . O eixo perpendicular passando pela origem dos dois vetores \vec{a} e \vec{b} é representado pelo seu polegar. O sentido para onde seu polegar aponta indicará o sentido do vetor $\vec{a} \times \vec{b}$, conforme ilustra a Figura 2.12

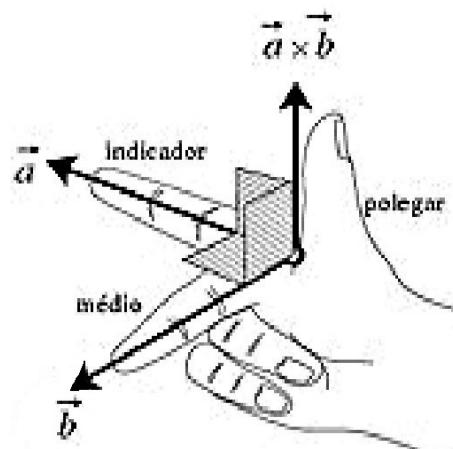


Figura 2.12: Regra da mão direita.

O produto vetorial possui as seguintes propriedades algébricas:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- 2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- 3) $(n\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (n\vec{b}) = n(\vec{a} \times \vec{b})$
- 4) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$

sendo n um número real. A primeira propriedade é a anticomutatividade, a segunda é a distributividade, a terceira é a associatividade em relação a uma multiplicação por escalar, e a última é a identidade de Jacobi.

Exemplos de grandezas físicas obtidas através do produto vetorial são a força de Lorentz e o torque de uma força.

2.7 Versores

Um versor é um vetor unitário, isto é, com módulo igual a 1, que aponta em uma dada direção. Versores são denotados por uma letra com um chapéu acima. O versor \hat{a} é definido como:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (2.6)$$

Devido a esta definição, qualquer vetor \vec{a} pode ser escrito como:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \hat{a} \quad (2.7)$$

Onde \hat{a} é o versor com a mesma direção e sentido do vetor \vec{a} .

Os versores são muito práticos para exprimir a decomposição de um vetor em suas componentes como veremos na seção seguinte. É especialmente útil definir versores na direção dos eixos cartesianos x, y e z e sentido positivo. Esses versores são tipicamente denominados \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , respectivamente.

Na Figura 2.13, abaixo, damos um exemplo de como se observa a soma geométrica de dois versores em uma dimensão, no caso, o eixo x. Pela figura, fica claro que o vetor $\hat{i} + \hat{i}$ tem a mesma direção e sentido que o vetor (ou versor) \hat{i} e módulo duas vezes maior, sendo, portanto, o vetor $2\hat{i}$.

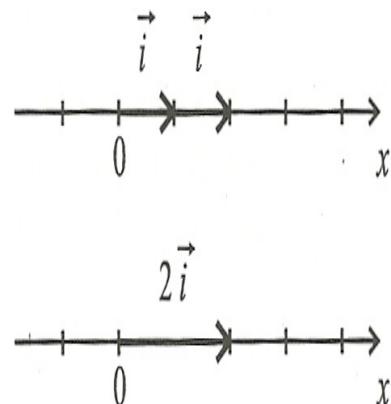


Figura 2.13: Soma de dois versores \hat{i} .

2.8 Componentes de um Vetor em 2 Dimensões

Podemos escrever um vetor qualquer como a soma de outros vetores. Consideramos inicialmente um sistema cartesiano xy de coordenadas. Sejam \vec{a}_x um vetor que possui a mesma direção do eixo x e \vec{a}_y um vetor que possui a mesma direção do eixo y. A soma destes vetores fornece um vetor \vec{a} dado por

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y, \quad (2.8)$$

conforme ilustrado na Figura 2.14. Os vetores \vec{a}_x e \vec{a}_y são as chamadas componentes do vetor \vec{a} .

Dessa forma é possível construirmos vetores com tamanho arbitrário através da multiplicação de suas componentes por um escalar. A multiplicação de um vetor por escalar preserva a

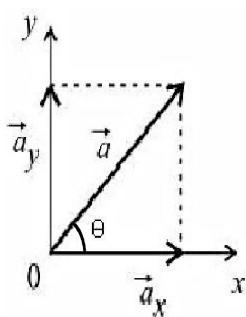


Figura 2.14: Componentes de um vetor.

direção, no entanto pode alterar o módulo e o sentido.

Definindo os versores \hat{i} e \hat{j} , vetores unitários que possuem a mesma direção e apontam no sentido positivo dos eixos x e y respectivamente, como na Figura 2.15, abaixo:

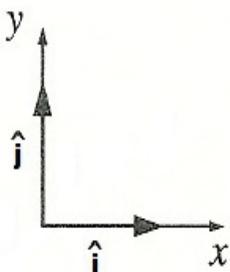


Figura 2.15: Versores no espaço bidimensional.

Os vetores \vec{a}_x e \vec{a}_y que aparecem na equação (2.8) podem ser escritos com módulo e sentido arbitrários:

$$\begin{aligned}\vec{a}_x &= a_x \hat{i}, \\ \vec{a}_y &= a_y \hat{j},\end{aligned}\quad (2.9)$$

onde a_x e a_y são escalares. Substituindo a equação (2.9) na equação (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y \\ &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j},\end{aligned}\quad (2.10)$$

Em muitos problemas envolvendo vetores não dispomos de informações diretas sobre o módulo, a direção e o sentido dos vetores. Em vez disso, dispomos de informação acerca de suas componentes escalares. Para exemplificar, imaginamos um plano representado por um sistema de coordenadas cartesiano, conforme indica a Figura 2.14. Iremos chamar de a_x a componente escalar do vetor no eixo x e a_y a componente escalar no eixo y .

Sabendo o ângulo θ que o vetor \vec{a} forma com o eixo x , teremos as relações

$$\begin{aligned}a_x &= a \cos \theta, \\ a_y &= a \sin \theta,\end{aligned}\quad (2.11)$$

onde a é o módulo de \vec{a} , que é obtido pelo teorema de Pitágoras

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad (2.12)$$

as quantidades a_x e a_y são as componentes escalares do vetor \vec{a} .

Exemplo 2.1: Sabe-se que, após deixar o aeroporto, um avião foi avistado a uma distância de 215 km, voando em uma direção que faz um ângulo de 22° com o norte para leste. Qual é a distância percorrida a norte e a leste do aeroporto?

Solução: O problema pode ser facilmente resolvido se escolhermos um sistema de coordenadas em que o eixo y corresponda a direção norte e o eixo x corresponda ao leste, conforme a Figura 2.16.

Nesse sistema de coordenadas, o módulo do vetor \vec{a} é justamente a distância percorrida pelo avião. Como os eixos x e y formam um ângulo de 90° , então o ângulo do eixo x com o vetor deslocamento do avião é $90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$. Aplicando a equação (2.11) temos

$$\begin{aligned}a_x &= a \cos \theta = (215 \text{ km}) (\cos 68^\circ) = 81 \text{ km}, \\ a_y &= a \sin \theta = (215 \text{ km}) (\sin 68^\circ) = 199 \text{ km}.\end{aligned}$$

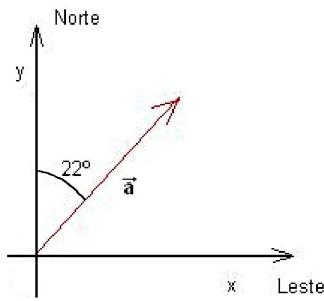


Figura 2.16: Sistema de coordenadas em que o eixo y aponta para o norte e o eixo x aponta para o leste.

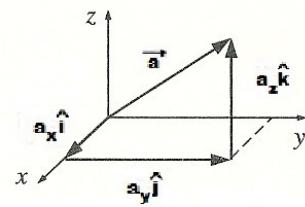


Figura 2.18: Componentes de um vetor no espaço tridimensional.

2.9 Vetores em 3 Dimensões

Até agora trabalhamos com vetores com componentes em uma e duas dimensões. Considerando o espaço tridimensional, utilizamos os eixos cartesianos de coordenadas xyz . Para representarmos um vetor \vec{a} em termos de vetores unitários, devemos introduzir um novo vetor unitário apontando para o sentido positivo do eixo z , como mostra a Figura 2.17. Denotaremos este vetor por \hat{k} .

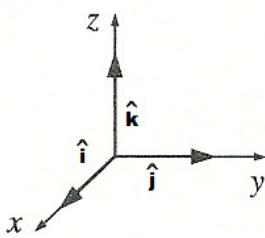


Figura 2.17: Versores no espaço tridimensional.

Dessa forma a expressão (2.10) é escrita como

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (2.13)$$

o que pode ser visualizado na Figura 2.18.

O módulo a de um vetor em 3 dimensões, também representado por $|\vec{a}|$, pode ser obtido com a

equação

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.14)$$

Exemplo 2.2: Demonstre a validade da equação (2.14) aplicando o teorema de Pitágoras duas vezes às componentes do vetor.

Solução: A projeção \vec{a}_p do vetor \vec{a} no eixo xy é a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos $a_x \hat{i}$ e $a_y \hat{j}$, como vemos na Figura 2.18. Segundo o teorema de Pitágoras, o módulo do vetor projeção \vec{a}_p é dado por:

$$|\vec{a}_p| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

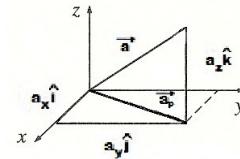


Figura 2.19: Vetor projeção.

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras para obter o módulo de \vec{a} , agora com os catetos \vec{a}_p e $a_z \hat{k}$, obtemos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

2.10 Adição e Subtração de Vetores na Forma de Componentes (Método Analítico)

A soma de \vec{a} com um vetor $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ é obtida somando-se as componentes de mesma direção:

$$\begin{aligned}\vec{s} &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}) \\ &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Exemplo 2.3: Os vetores abaixo estão expressos em termos de vetores unitários

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 4, 2\hat{i} - 1, 6\hat{j}, \\ \vec{b} &= -1, 6\hat{i} + 2, 9\hat{j}, \\ \vec{c} &= -3, 7\hat{k}.\end{aligned}$$

Ache o vetor soma dos vetores acima.

Solução: Com base nos resultados obtidos na equação (2.15), podemos obter a fórmula

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (a_x + b_x + c_x)\hat{i} + (a_y + b_y + c_y)\hat{j} + \\ &\quad (a_z + b_z + c_z)\hat{k}\end{aligned}$$

substituindo os valores numéricos

$$\begin{aligned}\vec{s} &= (4, 2 - 1, 6 + 0)\hat{i} + (-1, 6 + 2, 9 + 0)\hat{j} \\ &\quad + (0 + 0 - 3, 7)\hat{k} \\ &= 2, 6\hat{i} + 1, 3\hat{j} - 3, 7\hat{k}.\end{aligned}$$

2.11 Produtos de Vetores na Forma de Componentes

Para multiplicar um vetor na forma de componentes por um escalar, multiplicamos todos os componentes do vetor pelo escalar. Isto é:

$$s\vec{a} = sa_x\hat{i} + sa_y\hat{j} + sa_z\hat{k} \quad (2.16)$$

Os produtos escalar e vetorial podem ser realizados utilizando os componentes dos vetores envolvidos. Para efetuar o produto escalar, notamos que:

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = \cos 0^\circ = 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

Isto ocorre porque \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são mutuamente perpendiculares.

Dados dois vetores $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ e $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$, o produto escalar entre eles na forma de componentes é dado por (ver exercício 2.10):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.17)$$

Exemplo 2.4: Qual é o ângulo formado pelos vetores $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$?

Solução: A definição de produto escalar, dada anteriormente, deve ser coerente com a notação de vetores unitários, para representar um vetor qualquer. Então a equação (2.3) pode ser usada para calcular o produto das componentes dos vetores:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta \\ &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \cdot (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= -6\hat{i} \cdot \hat{i} + 9\hat{i} \cdot \hat{k} + 8\hat{j} \cdot \hat{i} - 12\hat{j} \cdot \hat{k} \\ &= -6 \cos 0^\circ + 9 \cos 90^\circ + 8 \cos 90^\circ - 12 \cos 90^\circ \\ &= -6,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\cos \theta = \frac{-6}{ab},$$

onde

$$a = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$b = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

$$ab = 5\sqrt{13} \simeq 18,$$

dessa forma o ângulo pode ser escrito como

$$\cos \theta = \frac{-1}{3},$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) = 109^\circ.$$

Agora vamos efetuar o produto vetorial. Devido à definição do produto vetorial, os vetores unitários \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} devem satisfazer as relações

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j},$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0.$$

Exemplo 2.5: Se $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, obtenha o vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Solução: Aplicando a propriedade distributiva do produto vetorial temos:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k}) \\ &= -6(\hat{i} \times \hat{i}) + 9(\hat{i} \times \hat{k}) + 8(\hat{j} \times \hat{i}) - 12(\hat{j} \times \hat{k}) \\ &= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \end{aligned}$$

O produto vetorial entre dois vetores e pode ser escrito de maneira sucinta como o determinante de uma matriz (ver exercício 2.13):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

2.12 Exercícios

Exercício 2.1: Dados os vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ na Figura 2.20, abaixo, faça um esboço do vetor \vec{s} resultante da operação $\vec{s} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$.

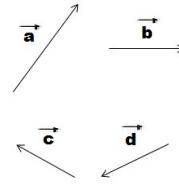


Figura 2.20: Exercício 2.1.

Exercício 2.2: O vetor \vec{a} ilustrado na Figura 2.21 tem módulo igual a 5 cm e faz um ângulo de 120° com o semi-eixo positivo OX . Determine as suas componentes nas direções x e y .

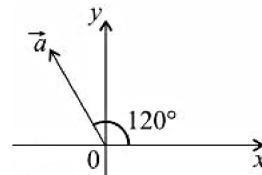


Figura 2.21: Exercício 2.2.

Exercício 2.3: A componente x de um vetor vale -25 unidades e a componente y vale 40 unidades. Qual o ângulo entre esse vetor e o sentido positivo dos x ?

Exercício 2.4: Determine o módulo dos vetores:

a) $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$,

b) $\vec{w} = 7\hat{i} + \hat{j} - 7\hat{k}$.

Exercício 2.5: Sejam os vetores $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$ e $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$. Calcule:

a) $\vec{a} + \vec{b}$,

b) $\vec{a} - \vec{b}$,

c) \vec{c} tal que $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Exercício 2.6: Dados os vetores $\vec{t} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$, $\vec{v} = -5\hat{i} + \hat{j}$ e $\vec{z} = -12\hat{i} + 6\hat{j}$, determinar k_1 e k_2 para que $\vec{z} = k_1\vec{t} + k_2\vec{v}$.

Exercício 2.7: Verifique que os vetores $\vec{u} = -\hat{i}$ e $\vec{v} = \hat{j}$, são ortogonais.

Exercício 2.8: Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = 8\hat{i} - 6\hat{j}$.

Exercício 2.9: Encontre o ângulo entre as diagonais das faces de um cubo. Você pode utilizar um cubo de lado 1 para as suas contas, como se vê na Figura 2.22.

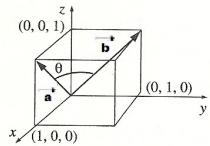


Figura 2.22: Exercício 2.9.

Exercício 2.10: Demonstre a equação (2.17) para o produto escalar de dois vetores na forma de componentes, isto é:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Exercício 2.11: Com os vetores $\vec{u} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ e $\vec{v} = \hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$.

Exercício 2.12: Seja $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{k}$ e $\vec{b} = -5\hat{j} + 7\hat{k}$. Encontre o vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

Exercício 2.13: verifique que o produto vetorial de dois vetores $\vec{a} \times \vec{b}$ pode ser escrito como o determinante da matriz $\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$, como dado na equação (2.18).

Capítulo 3

Movimento em Duas Dimensões

3.1 Introdução

Neste capítulo, apresentaremos a generalização do movimento unidimensional, que foi exposto no primeiro capítulo, para o movimento em duas dimensões. A idéia é utilizar os resultados obtidos no capítulo 2, referentes a álgebra vetorial e com o uso dessa ferramenta matemática, tratar o problema do movimento em duas dimensões de forma idêntica ao movimento em uma dimensão. A descrição do movimento em duas dimensões através da decomposição do movimento em duas direções perpendiculares (eixo x e eixo y do plano cartesiano) é possível devido à independência dos movimentos, isto é, o movimento em uma determinada direção não afeta o movimento na outra direção, na seção 3.2 apresentaremos uma discussão sobre esse fato empírico. Exemplos de movimento em duas dimensões são o lançamento de projeteis e o movimento circular uniforme. Nesses exemplos sempre iremos desprezar o atrito com ar e considerar que corpo que se move é uma partícula. Estas aproximações deixam os problemas relativamente simples de tratar matematicamente. Quando analisamos o movimento de corpos precisamos definir um sistema de referencia, pois grandezas como velocidade e posição de uma partícula no espaço apresentam valores diferentes para referenciais distintos. Por exemplo, uma pessoa que observa um

objeto se movendo em um barco, que navega em um rio, atribuirá um valor diferente para a velocidade do objeto de um observador localizado no barco. Assim, no movimento bidimensional, é fundamental estabelecermos referenciais apropriados e, além disso, saber como as medidas mudam de um referencial para o outro.

3.2 Movimento em Duas Dimensões com Aceleração Constante

No movimento em duas dimensões as componentes x e y dos vetores posição e velocidade que descrevem o movimento podem ser analisadas separadamente. Assim :

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (3.1)$$

onde

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (3.2)$$

e

eixo x positivo:

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \quad (3.3)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad e \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \quad (3.5)$$

sendo

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad e \quad v_y = v_{0y} + a_y t \quad (3.4)$$

3.3 Movimento de Projéteis em Duas Dimensões

Podemos modelar o problema do movimento de projéteis, desprezando a força de arrasto¹ com o ar, considerando o projétil como sendo uma partícula, e assumindo que como a trajetória é próxima a superfície da terra, onde a gravidade pode ser considerada constante e dirigida para baixo.

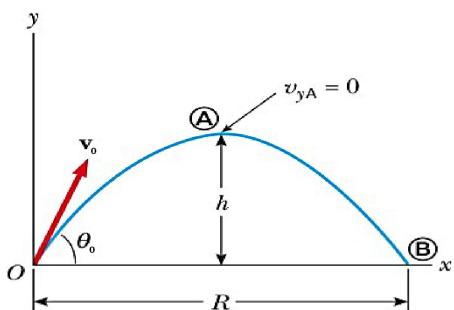


Figura 3.1: Trajetória descrita por um projétil lançado com velocidade inicial (v_0) que faz um ângulo θ_0 com a horizontal.

A partir da Figura 3.1, podemos ver que as componentes v_{0x} e v_{0y} podem ser obtidas decompondo o vetor \vec{v}_0 com o ângulo θ_0 com o

O movimento de projéteis como visto na Figura 3.1 pode parecer complicado, mas torna-se bastante simplificado ao usarmos a propriedade (monstrada experimentalmente, como visto na Figura 3.2) que o *movimento horizontal* e o *movimento vertical* são independentes, logo um não afeta o outro. Na prática temos na horizontal um *movimento uniforme* e na vertical um *movimento uniformemente variado*, como será enfatizado mais adiante.

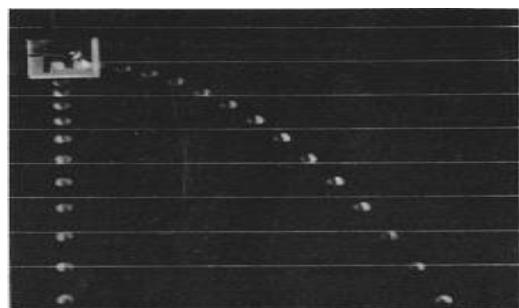


Figura 3.2: Lançamento queda livre na bola da esquerda e lançamento com velocidade inicial horizontal na bola da direita, as linhas indicam o tempo decorrido

3.3.1 Movimento Horizontal

Como nesta parte temos um movimento uniforme, a aceleração é zero, logo a componente x da Equação(3.2), usando as Equações(3.5) torna-se:

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t \quad (3.6)$$

3.3.2 Movimento Vertical

Neste movimento, o tratamento é o mesmo que o da queda livre. A aceleração a será substituída por $-g$, onde a componente y da Equação(3.2),

¹Quando existe uma velocidade relativa entre um fluido e um corpo sólido (seja porque o corpo se move através do fluido, seja porque o fluido passa pelo corpo), o corpo experimenta uma força de arrasto que se opõem ao movimento relativo e é paralela à direção do movimento relativo do fluido.

da Equação(3.4) e da equação de Torricelli, usando a Equação(3.5) tornam-se:

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (3.7)$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (3.8)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g \Delta y \quad (3.9)$$

3.3.3 Alcance Horizontal

Vamos supor que o projétil é lançado desde o origem em $t = 0$ e com velocidade positiva \vec{v}_0 , como é mostrado na Figura 3.1. Dois pontos são de especial interesse para analisar: O ponto de altura máxima (A), que tem coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, e o ponto (B), com coordenadas $(R, 0)$. A distância R é chamada *alcance horizontal*. Vamos encontrar R e h em termos de v_0 , θ_0 e g :

Podemos determinar h , notando que em (A), a velocidade $v_{Ay} = 0$. Portanto podemos usar as equações (3.5), para determinar o tempo t_A em que o projétil chega na altura máxima (A):

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ 0 &= v_0 \sin \theta_0 - gt_A \quad (3.10) \\ t_A &= \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \end{aligned}$$

O alcance horizontal R é a posição do projétil em um tempo t_B , tempo esse que é duas vezes o tempo que ele demora para chegar à altura máxima. Assim, $t_B = 2t_A$. Agora fazemos uso da parte x das equações (3.2) para escrever, com $v_{Bx} = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$

$$\begin{aligned} R &= v_{0x} t_B = (v_0 \cos \theta_0) 2t_A \\ R &= (v_0 \cos \theta_0) \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (3.11) \end{aligned}$$

Usando a identidade $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, escrevemos R de um jeito mais compacto

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad (3.12)$$

3.3.4 Altura Máxima

Para encontrar a altura máxima, utilizamos a expressão para t_A da Equação (3.10) na parte y das equações (3.2), onde $y_A = h$ obtemos:

$$h = (v_0 \sin \theta_0) \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \right)^2 \quad (3.13)$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad (3.14)$$

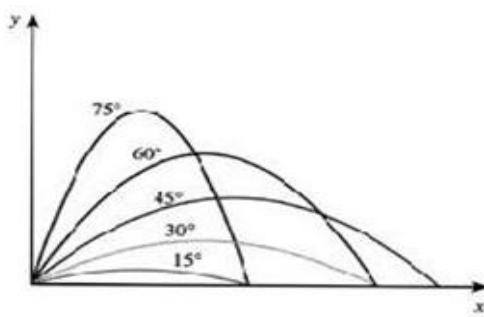


Figura 3.3: Trajetórias para alguns ângulos.

A Figura 3.3 ilustra as trajetórias que teria um projétil lançado de diferentes ângulos com uma determinada velocidade inicial. Como você pode ver o alcance é máximo para $\theta_0 = 45^\circ$.

Exemplo 3.1: Em um bar local, o barman depois de encher uma caneca com chopp, desliza a caneca para o cliente que, momentaneamente distraído, não vê a caneca, e esta desliza para fora da mesa com velocidade horizontal v_0 . A altura da mesa é h . (a) Com que velocidade a caneca deixa a mesa, se a distância em que ela atinge o piso fica a uma distância d da base da mesa, e (b) qual era a direção da velocidade da caneca antes de atingir o piso?

Solução: Considere a Figura 3.4 que representa esquematicamente o problema.

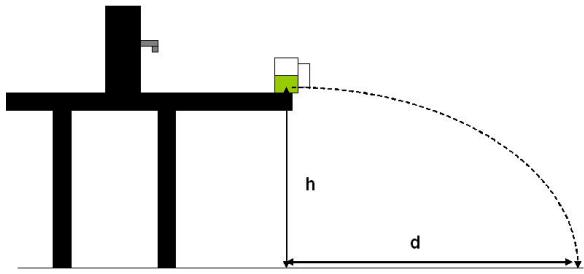


Figura 3.4: Exemplo 3.1

Tomando o origem do sistema de coordenadas no ponto onde a caneca cai da mesa. Como a aceleração na direção x é zero e a velocidade inicial é na *horizontal*, teremos que, $v_{0x} = v_0$ e $v_{0y} = 0$. Então, as coordenadas da caneca em qualquer instante são dadas por

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \\ y &= -\frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Quando a caneca chega ao piso, $y = -h$, então

$$-h = -\frac{1}{2} g t^2, \quad (3.16)$$

Que nos permite calcular o instante do impacto

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.17)$$

(a) Substituindo $x = d$ e a equação (3.17) na equação (3.15) para x , obtemos

$$\begin{aligned} d &= v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ , v_0 &= d \sqrt{\frac{g}{2h}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

(b) No instante antes do impacto a componente da velocidade em x ainda é

$$v_x = v_0 \quad (3.19)$$

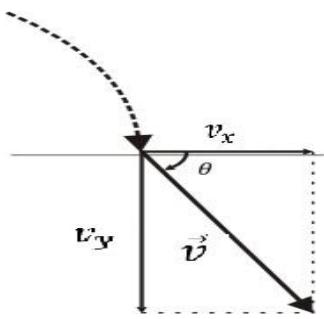


Figura 3.5: Velocidade Resultante

e a componente y é

$$v_y = -gt = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (3.20)$$

Então a direção e sentido da velocidade no instante em que a caneca toca o piso é vertical para baixo da horizontal, com um ângulo θ com a horizontal, dada por:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{|v_y|}{v_x} \right) \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{g \sqrt{\frac{2h}{g}}}{d \sqrt{\frac{g}{2h}}} \right) \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{2h}{d} \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.4 Movimento Circular Uniforme

A Figura 3.6 mostra um carro que se move em uma rotatória com o módulo de sua velocidade constante v . Este tipo de movimento é chamado *movimento circular uniforme*. Quando estudamos o movimento de projéteis o vetor velocidade mudava tanto de direção quanto de módulo. No movimento circular uniforme, o vetor velocidade somente muda de direção, o módulo da velocidade permanece constante. Neste tipo movimento o vetor velocidade está

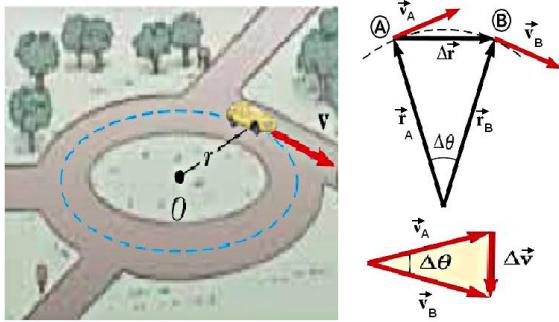


Figura 3.6: Movimento circular

mudando, então o movimento é acelerado. A direção do vetor aceleração é dirigida para o centro da trajetória. Podemos obter uma fórmula matemática para expressar a aceleração centripeta. Inicialmente observamos na figura 3.6 que o tempo para uma partícula percorrer a distância entre o A e o ponto B é dado por $\Delta t = r\theta/v$, onde v é a velocidade da partícula. A aceleração centripeta, que está direcionada para o centro da trajetória, é a variação da velocidade pela variação do tempo, isto é,

$$a_c = \frac{v_{Bc} - v_{Ac}}{\Delta t}, \quad (3.22)$$

as velocidades v_{Bc} e v_{Ac} apontam para a mesma direção do raio, logo são dadas por $v_{Bc} = -v\sin(\theta/2)$ e $v_{Ac} = v\sin(\theta/2)$. Assim a expressão para a aceleração centripeta fica

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v_{Bc} - v_{Ac}}{\Delta t} \\ &= \frac{-v\sin(\theta/2) - v\sin(\theta/2)}{r\theta/v} \\ &= -\frac{v^2}{r} \frac{2\sin(\theta/2)}{\theta}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

para ângulos pequenos temos $\frac{\sin(\theta/2)}{\theta} \approx \frac{1}{2}$, então a relação anterior fornece

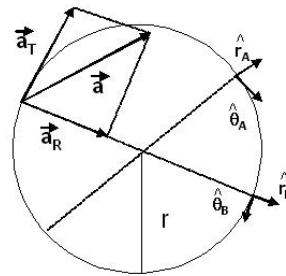
$$a_c = -\frac{v^2}{r}. \quad (3.24)$$

Em varias aplicações é conveniente falar do período T . O período é definido como o tempo

que a partícula demora para fazer uma revolução. Assim, como a distância percorrida é o perímetro do círculo, $p = 2\pi r$, então

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (3.25)$$

3.5 Aceleração Tangencial e Radial

Figura 3.7: Descrição dos vetores unitários \hat{r} e $\hat{\theta}$ e Aceleração total de uma partícula que se movimenta em uma trajetória curva.

Dependendo do problema em questão talvez melhor escrever a aceleração de uma partícula em termos de vetores unitários. Fazemos isso definindo \hat{r} e $\hat{\theta}$, mostrados na Figura 3.7, onde \hat{r} é um vetor unitário que fica na direção do raio do círculo e no sentido de aumento do raio, e $\hat{\theta}$ é um vetor unitário tangente à trajetória do círculo e seu sentido é o de aumento do ângulo θ . Fazendo uso desta notação podemos escrever a aceleração total como

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{r}. \quad (3.26)$$

Estes vetores são descritos na Figura 3.7. Com base em argumentos semelhantes aos dados para a aceleração centrípeta temos que a aceleração tangencial a_t é dada por

$$a_t = \frac{v \cos \theta - v \cos \theta}{\Delta t} = 0. \quad (3.27)$$

Exemplo 3.2: Um astronauta em um planeta estranho, percebe que pode saltar 15 m se a velocidade inicial dele for 3 m/s. Qual é a aceleração da gravidade no planeta?

Solução: Da Equação (3.12) com $R = 15\text{ m}$, $v_0 = 3\text{ m/s}$, $\theta_{\max} = 45^\circ$

$$g = \frac{v_0^2}{R} = \frac{9}{15} = 0,6\text{ m/s}^2 \quad (3.28)$$

Exemplo 3.3: Uma pedra é lançada do nível da terra e atinge uma altura máxima igual ao alcance horizontal d . (a) Qual foi o ângulo em que a pedra foi lançada?. (b) A sua resposta da parte (a) seria diferente em outro planeta? (c) Qual é o alcance horizontal d_{\max} que a pedra pode atingir se for lançada com a mesma velocidade, mas com o ângulo de alcance máximo?

Solução: (a) Para identificar a altura máxima, fazemos A o ponto de lançamento, e B o ponto mais alto:

$$\begin{aligned} v_{By}^2 &= v_{Ay}^2 + 2a_y(y_B - y_A) \\ 0 &= v_A^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 + 2(-g)(y_{\max} - 0) \quad (3.29) \\ y_{\max} &= \frac{v_A^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g}. \end{aligned}$$

Agora fazemos C o ponto de impacto, onde t é diferente de zero:

$$\begin{aligned} y_C &= y_A + v_{Ay}t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \\ 0 &= 0 + v_A \operatorname{sen} \theta_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.30) \\ t &= \frac{2v_A \operatorname{sen} \theta_0}{g}; \end{aligned}$$

Usando o resultado de (3.30) encontramos o alcance na horizontal,

$$\begin{aligned} x_C &= x_A + v_{Ax}t \\ d &= v_A \cos \theta_0 \frac{2v_A \operatorname{sen} \theta_0}{g}. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Como o problema dizia que $d = y_{\max}$, podemos igualar (3.29) = (3.30)

$$\begin{aligned} \frac{v_A^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0}{2g} &= \frac{2v_A^2 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0}{g}, \\ \frac{\operatorname{sen} \theta_0}{\cos \theta_0} &= \tan \theta_0 = 4. \quad (3.32) \\ \therefore \theta_0 &= 76^\circ \end{aligned}$$

(b) Como g se cancela, a resposta não depende de g , e portanto é a mesma em qualquer planeta.

(c) O alcance máximo é atingido para $\theta_0 = 45^\circ$

$$\begin{aligned} \frac{d_{\max}}{d} &= \frac{v_A \cos 45^\circ 2v_A \operatorname{sen} 45^\circ g}{v_A \cos 76^\circ 2v_A \operatorname{sen} 76^\circ g} \\ \frac{d_{\max}}{d} &= 2,125 \quad (3.33) \\ d_{\max} &= \frac{17}{8}d \end{aligned}$$

Exemplo 3.4: Um carro faz uma curva leve de raio 100,0m a uma velocidade constante de 72km/h. (a) Qual a aceleração centrípeta do carro?. Se tomarmos essa aceleração centrípeta como sendo a máxima permitida, (b) qual deve ser a velocidade do carro ao circundar uma rotatória de $r = 4,0\text{m}$? (c) Qual seria o período desse movimento?

Solução:

(a) Usando a Equação (??) encontramos a_c , lembrando de converter km/h para m/s

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{v^2}{r} = \frac{20^2}{100} \\ a_c &= 4\text{m/s}^2 \quad (3.34) \end{aligned}$$

(b) Usando o resultado de (a) e encontrando uma expressão para v

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{a_c r} \\ v &= \sqrt{4 \times 4} \\ v &= 4,0\text{m/s} \quad (3.35) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{v} \\ T &= \frac{2\pi 4}{4} \quad (3.36) \end{aligned}$$

$$T = 2\pi \text{segundos}$$

3.6 Exercícios

Exercício 3.1: Um jogador de futebol chuta uma bola horizontalmente de um trampolim de 4 m de altura de uma piscina. Se o jogador observa a bola atingindo a água $20,0\text{ m}$ a frente do trampolim, qual foi a velocidade inicial dada para a pedra?

Exercício 3.2: Num jogo de vôlei, desde uma distância de $14,5\text{ m}$ da rede, é dado um saque do tipo "jornada nas estrelas". A bola sobe 20 m acima da altura de lançamento, e desce até a altura do lançamento num ponto do campo adversário situado a 1 m da rede e 8 m à esquerda do lançamento. (a) Em que ângulo a bola foi lançada? (b) Com que velocidade (em km/h) volta a atingir a altura do lançamento? (c) Quanto tempo decorre neste percurso?

Exercício 3.3: Robin Hood lança uma flecha com um ângulo de 60° com a horizontal. Um ajudante está a uma distância de 150 m dele e lança uma maçã verticalmente com a uma velocidade inicial para atingir a trajetória da flecha. (a) Qual é a velocidade inicial da maçã? (b) Quanto tempo depois do disparo da flecha a maçã deve ser lançada para atingir a flecha?

Exercício 3.4: Um pneu de $0,5\text{ m}$ de raio gira a uma taxa constante de 200 rev/min . Encontre o valor da aceleração centrípeta de uma pequena pedra que está cravada na superfície do pneu.

Exercício 3.5: Encontre a taxa de rotação em rev/s que deve ter um aparelho girante de raio $9,5\text{ m}$ construído para simular acelerações de $3g$ em seus extremos.

Exercício 3.6: Um jogador de basquete quer

encestar a bola levantando-a desde uma altura de $2,0\text{ m}$ do chão, com velocidade inicial de $7,0\text{ m/s}$. A distância da bola à vertical que passa pelo centro do cesto é de $3,0\text{ m}$, e o aro do cesto está a $3,05\text{ m}$ de altura do chão. Em que ângulo a bola deve ser levantada?

Exercício 3.7: Qual é a hora entre 9 h e 10 h em que o ponteiro dos minutos de um relógio coincide com o das horas? Depois de meio dia, qual é a primeira vez que os três ponteiros voltam a coincidir?

Exercício 3.8: Numa ultracentrífuga girando a 50000 rpm (rotações por minuto), uma partícula se encontra a 20 cm do eixo de rotação. Calcule a relação entre a aceleração centrípeta dessa partícula e a aceleração da gravidade g .

Capítulo 4

Leis de Newton

4.1 Referenciais, Repouso e Forças

Um referencial é um lugar no espaço ao qual nos referimos para descrever as grandezas físicas de um *sistema físico* (velocidade, posição, aceleração). Associamos a ele, também, um *sistema de coordenadas*. Nesse sistema, damos ao referencial uma posição. Já ao sistema físico que queremos descrever podemos associar uma posição no nosso sistema de coordenadas de referência, ou em um novo sistema. Quando na relação entre estes sistemas de coordenadas não houver aceleração relativa, o nosso *referencial* é dito *inercial*.

Assim, imagine-se dentro de um ônibus que percorre uma avenida muito extensa e com asfalto liso e sem buracos, em linha reta e com velocidade constante. Você pode “equilibrar-se” dentro deste ônibus da mesma maneira que se equilibraria se ele estivesse parado em relação a estrada (cuidado ao tentar isto: em geral o asfalto *contém* buracos!). Se considerarmos que os demais passageiros dentro do ônibus constituem um referencial inercial (quando o ônibus não está acelerando e nem freando) pode-se observar que sua posição em relação a eles não se altera (caso você esteja realmente se equilibrando em pé no meio do corredor), ou seja, você estará em repouso em relação os passa-

geiros, pois não muda sua posição em relação a eles. Mas, se considerarmos a avenida como referencial, veremos que você estará em movimento, pois estará mudando de posição em relação a ela.

Uma definição de força pode ser dada como:

Quantidade vetorial, capaz de alterar o estado de movimento de um corpo.

Assim, considerando-se um corpo de massa m . Quando for aplicada a este corpo uma força \vec{F} , o mesmo será sujeito a uma mudança de velocidade, dada pela aceleração média:

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Esta mudança de velocidade será tanto maior, quanto menor for a massa do corpo para uma mesma força e podem ser relacionadas por:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}. \quad (4.2)$$

Pode-se rearranjar a expressão (4.2), criando uma definição operacional de força:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (4.3)$$

A unidade de força no Sistema Internacional de Unidades (SI) é o Newton (N), que de acordo com 4.3 é, em termos das unidades fundamentais do SI, dado por:

$$1 \text{ } N = 1 \text{ } kg \cdot 1 \text{ } m/s^2. \quad (4.4)$$

Vê-se ainda de (4.3) que, como a aceleração é uma quantidade vetorial, então a força também deve ser uma quantidade vetorial (uma vez que a massa é um escalar). Sendo assim, cabe para a força o princípio da superposição, definido como:

Quando duas ou mais forças atuam sobre um corpo, o efeito resultante será a soma dos efeitos devidos a cada força em separado, ao que se chama comumente de força resultante.

4.2 1^a lei de Newton

O enunciado moderno da primeira lei de Newton, ou *Lei da Inércia*, é:

Os corpos tendem a manter seu estado de movimento, seja repouso ou velocidade constante, quando nenhuma força resultante age sobre eles.

Parece simples, mas hoje em dia, vivemos imersos nas implicações desta 1^a lei todos os dias, em todos os lugares, por exemplo:

1 - Os cintos de segurança nos veículos visam impedir que os passageiros sejam arremessados através do pára-brisas do veículo em situações de colisão ou frenagens bruscas (Figura 4.1)



Figura 4.1: Utilidade do cinto de segurança.

2 - Os encostos de cabeça dos bancos dos veículos visam evitar que os passageiros quebrem o pescoço quando ocorrerem colisões traseiras em seus veículos. Eles tendem também a evitar

o chamado “efeito chicote”, que ocorre quando o veículo bate em um obstáculo e os passageiros são arremessados para frente. Após serem impedidos pelo cinto de segurança, tendem a voltar para trás, quando então podem ter o corpo detido pelo encosto e a cabeça não, quebrando o pescoço (Figura 4.2).

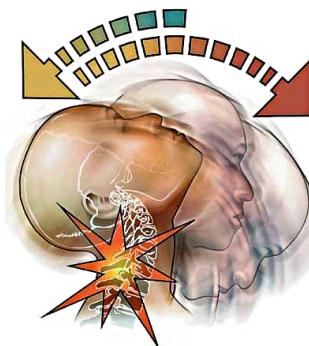


Figura 4.2: Efeito chicote.

Das conclusões de Newton torna-se óbvio que deve existir uma força mantendo os planetas em órbitas em torno do sol (Figura 4.3), pois caso não existisse tal força, os planetas deveriam manter o estado de movimento livre de forças, ou seja, deveriam deslocar-se em linhas retas ou permanecerem parados no céu em relação ao sol.

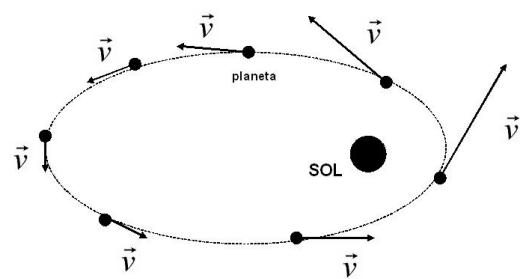


Figura 4.3: Variações no vetor velocidade de um planeta durante o movimento numa órbita elíptica em torno do sol.

4.3 2^a Lei de Newton

Como já foi mencionado na seção anterior, uma força aplicada a um corpo de massa m , gera como consequência uma aceleração \vec{a} no corpo, de maneira que se pode relacionar aceleração, força e massa através da equação (4.3).

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Quando houver duas ou mais forças atuando no mesmo corpo, então pode-se falar em uma força resultante, que nada mais é do que a soma vetorial de todas as forças envolvidas, como mostrado na equação (4.5)

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n, \quad (4.5)$$

ou seja:

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (4.6)$$

Então, podemos reescrever (4.3) como:

$$\vec{F}_r = m\vec{a}. \quad (4.7)$$

Literalmente, pode-se enunciar a 2^a. lei de Newton como:

A força resultante sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela sua aceleração.

Exemplo 4.1: Na vista superior da figura abaixo, uma lata de biscoitos de 2,0 kg é acelerada a 3,0 m/s² no sentido definido por \vec{a} , sobre uma superfície horizontal sem atrito. A aceleração é causada por três forças horizontais, das quais apenas duas são mostradas: \vec{F}_1 de módulo 10 N e \vec{F}_2 de módulo 20 N. Qual é a força \vec{F}_3 ? Determine ainda, o módulo de \vec{F}_3 .

Solução: Pela 2^a lei de Newton, podemos escrever as componentes das forças em cada direção do plano xy como:

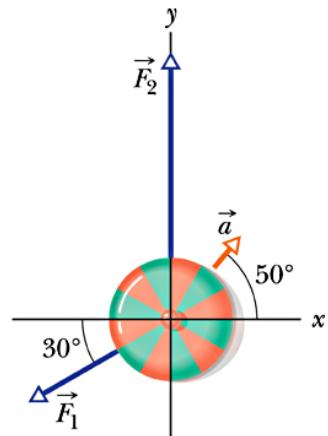


Figura 4.4:

No eixo x :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{rx} &= m\vec{a}_x, \\ \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} &= m\vec{a}_x, \\ -(10 \text{ N}) \cos 30^\circ + (20 \text{ N}) \cos 90^\circ + F_{3x} &= \\ (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2) \cos 50^\circ, \\ -8,66 \text{ N} + F_{3x} &= 3,86 \text{ kg.m/s}^2, \\ F_{3x} &= 12,51 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

No eixo y :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ry} &= m\vec{a}_y, \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} &= m\vec{a}_y, \\ -(10 \text{ N}) \sin 30^\circ + (20 \text{ N}) \sin 90^\circ + F_{3y} &= \\ (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}^2) \sin 50^\circ, \\ -5 \text{ N} + 20 \text{ N} + F_{3y} &= 4,60 \text{ kg.m/s}^2, \\ F_{3y} &= 4,60 \text{ kg.m/s}^2 + 5N - 20N, \\ F_{3y} &= -10,40 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Logo, a força \vec{F}_3 será dada por:

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= F_{3x}\hat{i} + F_{3y}\hat{j} \\ &= (12,51 \text{ N})\hat{i} + (-10,40 \text{ N})\hat{j}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

O módulo de \vec{F}_3 é dado por:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_3| &= \sqrt{(F_{3x})^2 + (F_{3y})^2} \\ &= \sqrt{(12,51 \text{ N})^2 + (-10,40 \text{ N})^2} \\ &= 16,27 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.4 Exemplos de forças

Algumas forças merecem atenção especial, sendo elas:

i. A Força Gravitacional e a Força Peso.

O lendário episódio de Newton, sentado sob uma macieira, quando dela caiu uma maçã sobre sua cabeça, provavelmente não ocorreu, mas demonstra uma aplicação da lei da inércia:

Se não atuasse sobre a maçã uma força ela permaneceria em repouso, ainda que solta da macieira. Quando a força gravitacional precipitou a maçã para baixo, em direção ao centro do planeta, esta adquiriu uma aceleração para baixo.

O que torna a força da gravidade uma força especial, está no fato de que a maçã (e na verdade, qualquer outro corpo em queda livre) adquire uma aceleração de mesmo valor, representada por g , e dada por:

$$g \cong 9,81 \text{ m/s}^2. \quad (4.12)$$

Assim, a força da gravidade pode ser representada por

$$\vec{F} = m\vec{g}. \quad (4.13)$$

ou simplesmente

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad (4.14)$$

onde g representa a gravidade da Terra, mas pode representar a gravidade de qualquer outro planeta considerado. Então, pode-se dizer que...

o peso de um corpo sobre a superfície de um planeta é a força de interação entre a massa do corpo e o campo gravitacional do planeta.

ii. A Força Normal.

Se um bloco de madeira, de massa m , está em repouso sobre uma mesa, no referencial da

própria mesa, em um ponto qualquer na superfície da Terra, então este corpo está sendo solicitado em direção ao centro do planeta pela força da gravidade. Mas e porque o corpo não acelera para o centro do planeta?

Uma breve observação na equação (4.7) mostra que a aceleração do bloco deve ser zero (o que é o caso) se a força resultante que estiver atuando sobre o bloco for nula.

Então, deve-se observar que a mesa exerce uma força sobre o bloco, contrária à força da gravidade, e que equilibra esta, fazendo com que o bloco permaneça em repouso sobre a mesa.

Essa força exercida pela mesa sobre o bloco chama-se *força normal* e é representada como \vec{F}_N . Então, para o caso analisado pode-se escrever:

$$\vec{P} + \vec{F}_N = 0. \quad (4.15)$$

iii. A Força de Atrito.

A força de atrito é uma força de contato, e manifesta-se como a “dificuldade” de um corpo escorregar sobre outro. Por isso mesmo, o *vetor força de atrito entre superfícies* (\vec{F}_a) é sempre contrário ao movimento relativo das superfícies (isto será melhor visto no próximo capítulo). Como exemplo, seja um bloco de madeira que desce uma ladeira de asfalto. Se a inclinação da ladeira não for suficiente, a força de atrito pode impedir o deslocamento do bloco.

iv. Forças em Cordas (Tensões).

Eventualmente, em problemas que envolvem leis de Newton, serão utilizadas cordas para transmitir forças entre dois corpos diferentes, como na Figura 4.5.

Em geral, nos exercícios de física básica, as cordas e barbantes de ligação são considerados apenas como transmissores de forças e por

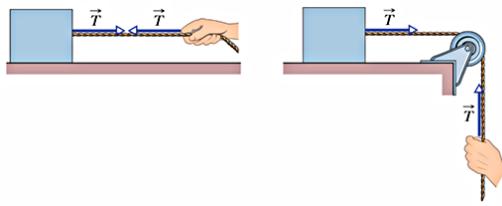


Figura 4.5: Tensões de tração em cordas.

isso mesmo, possuem massa desprezível e não deformam sob ação das forças aplicadas. Tais forças em geral são chamadas de trações e representadas por T , como mostrado na Figura (4.5), e possuem módulos iguais quando consideradas em uma mesma corda.

4.5 A 3^a Lei de Newton

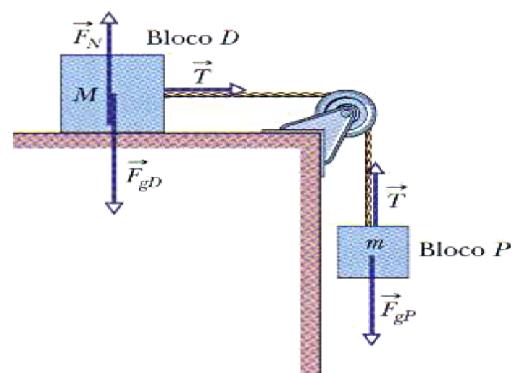
A 3^a lei de Newton é conhecida como Lei da ação e reação, e pode ser enunciada como segue:

Para cada ação (força) de um corpo sobre outro, existe sempre uma reação (força de), de mesma intensidade e direção, mas em sentido oposto, do outro corpo sobre o primeiro.

Como exemplo, pode-se observar que na primeira situação à esquerda da Figura (4.5), quando a mão aplica uma tração T sobre a corda, está é transmitida ao bloco e esta representada na extremidade esquerda da corda. Como reação, o bloco exerce uma força de mesma intensidade T sobre a mão na mesma direção (definida pela corda esticada), mas no sentido contrário, e que está representada na extremidade direita da corda. É imperativo observar-se que, embora o desenho coloque as duas forças sobre a mesma corda, elas são sentidas por corpos diferentes (a ação é sentida pelo bloco e a reação é sentida pela mão). Por isso, *um par de forças de ação e reação jamais se anula, pois são aplicadas em corpos diferentes.*

Pode-se ainda analisar o caso da força normal, abordado no item ii da seção anterior. A força peso é causada pelo planeta sobre o bloco de madeira sobre a mesa, como foi discutido. A reação a esta força é uma força de atração, de mesma intensidade, exercida pelo bloco sobre o centro de massa do planeta. Por outro lado, ao ser puxado para baixo, o bloco comprime a mesa que reage com a força normal sobre o mesmo. Então, as forças peso (devido à gravidade do planeta) e normal (devido ao apoio da mesa) são aplicadas no mesmo corpo (bloco) e *não constituem um par de forças de ação e reação*, de acordo com a definição apresentada.

Exemplo 4.2: A Figura 4.6 mostra um bloco D (o bloco deslizante) de massa $M = 3,3 \text{ kg}$. O bloco está livre para se movimentar ao longo de uma superfície horizontal sem atrito e está ligado por uma corda que passa por uma polia sem atrito, a um segundo bloco P (o bloco pendente), de massa $m = 2,1 \text{ kg}$. A massa da corda e da polia podem ser desprezadas em comparação com a massa dos blocos. Enquanto o bloco pendente P desce, o bloco deslizante D acelera para a direita. Determine (a) a aceleração do bloco D , (b) a aceleração do bloco P e (c) a tensão na corda.

Figura 4.6: Um bloco D de massa M está conectado a um bloco P de massa m por uma corda que passa por uma polia.

Solução: Como o bloco D não possui aceleração

vertical temos

$$F_N - F_{gD} = 0 \quad \text{ou} \quad F_N = F_{gD}. \quad (4.16)$$

Assim, na direção y o módulo da força normal é igual ao módulo da força gravitacional.

Na direção x existe apenas uma componente de força que é T , assim

$$T = Ma. \quad (4.17)$$

Como esta equação possui duas incógnitas, T e a , ainda não podemos resolvê-la. Lembre-se, porém, de que ainda não dissemos nada a respeito do bloco P .

Como para o bloco P a aceleração é ao longo do eixo y , vamos escrever

$$T - F_{gP} = ma_y. \quad (4.18)$$

Podemos agora substituir F_{gP} por mg e a_y por $-a$ (o valor é negativo porque o bloco P sofre uma aceleração no sentido negativo do eixo y). O resultado é

$$T - mg = -ma. \quad (4.19)$$

Temos portanto um sistema de duas equações com duas incógnitas T e a . Subtraindo estas equações, eliminamos T . Explicitando a , temos:

$$a = \frac{m}{M+m}g. \quad (4.20)$$

Substituindo a na primeira equação, obtemos:

$$T = \frac{Mm}{M+m}g. \quad (4.21)$$

Substituindo os valores numéricos, temos:

$$a = \frac{m}{M+m}g = \frac{2,1}{3,3+2,1}9,8 = 3,8 \text{ m/s}^2 \quad (4.22)$$

e

$$T = \frac{Mm}{M+m}g = \frac{3,3 \cdot 2,1}{3,3+2,1}9,8 = 13 \text{ N}. \quad (4.23)$$

Exemplo 4.3: Na Figura 4.7, um bloco de massa $M = 15,0 \text{ kg}$ está pendurado por uma

corda a partir de um nó de massa desprezível, o qual está pendurado no teto por intermédio de duas outras cordas. As cordas têm massas desprezíveis, e o módulo da força gravitacional sobre o nó é desprezível comparado com a força gravitacional sobre o bloco. Quais são as tensões sobre as três cordas?

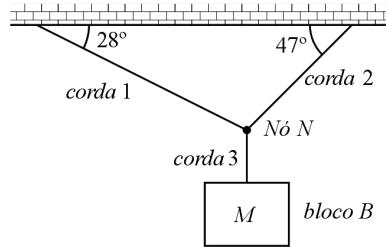


Figura 4.7: Enunciado do Exemplo 4.3.

Solução: Inicialmente, identificamos um sistema de coordenadas ortogonais, como mostrado na Figura 4.8.

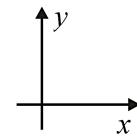


Figura 4.8: Sistema de coordenadas ortogonais.

Após, identificamos as forças que atuam em cada corda, como mostrado na Figura 4.9.

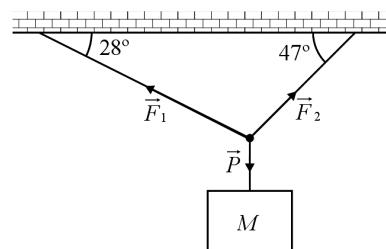


Figura 4.9: Vectors force que atuam sobre o nó da corda.

Então podemos escrevemos os vetores força em termos de suas componentes, mostradas na Figura 4.10.

Adotando a contagem dos ângulos a partir do eixo dos x positivos, teremos:

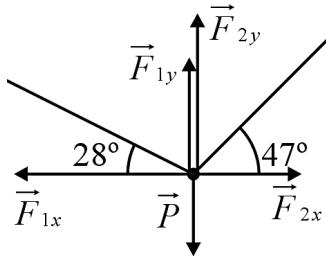


Figura 4.10: Componentes ortogonais dos vetores força.

No eixo x:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} &= 0, \\ F_1 \cos 152^\circ + F_2 \cos 47^\circ &= 0, \\ -0,88F_1 + 0,68F_2 &= 0, \\ F_2 &= \frac{0,88}{0,68}F_1, \\ F_2 &= 1,29F_1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

No eixo y:

$$\begin{aligned} F_{1y} + F_{2y} &= 0, \\ F_1 \operatorname{sen} 152^\circ + F_2 \operatorname{sen} 47^\circ + M g \operatorname{sen} 270^\circ &= 0, \\ 0,47F_1 + 0,73F_2 - (15 \text{ kg})(9,71 \text{ m/s}^2) &= 0, \\ F_2 &= \frac{0,88}{0,68}F_1. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Substituindo o resultado (4.24), teremos:

$$\begin{aligned} 0,47F_1 + 0,73(1,29F_1) - 147,15 \text{ N} &= 0, \\ 1,41F_1 &= 147,15 \text{ N}, \\ F_1 &= 104,36 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Voltando com este resultado em (4.24), resulta:

$$\begin{aligned} F_2 &= 1,29F_1, \\ &= 1,29(104,36 \text{ N}), \\ &= 134,63 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Exemplo 4.4: Na Figura 4.11, uma corda prende um bloco de 15 kg, mantendo-o estacionário sobre um plano sem atrito, inclinado de um ângulo $\theta = 27^\circ$. Determine o módulo

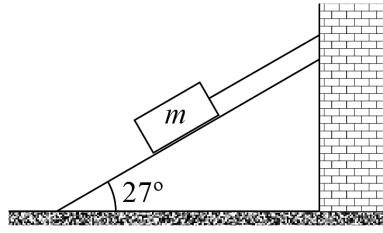


Figura 4.11: Enunciado do Exemplo 4.4.

da tensão na corda e da força normal exercida pelo apoio sobre o bloco.

Solução: Desta vez, devemos escolher um sistema de coordenadas cartesianas, de maneira que o eixo dos x fique paralelo ao plano inclinado, como mostrado na Figura 4.12.

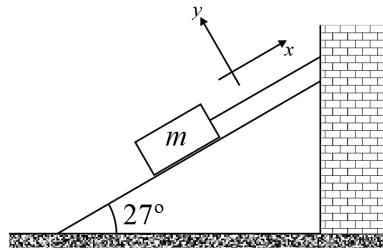


Figura 4.12: Referencial cartesiano escolhido.

Então, podemos escrever as forças envolvidas, como mostrado na Figura 4.13, e as respectivas componentes na direção dos eixos coordenados, como na Figura 4.14.

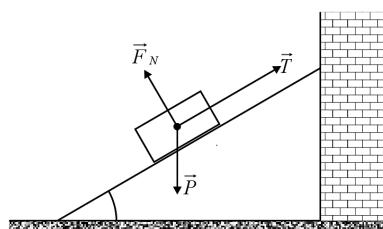


Figura 4.13: Forças que atuam sobre o bloco.

Os ângulos, tomados a partir do eixo dos x positivos, podem ser compreendidos através do esquema mostrado na Figura 4.15.

Então, como foi feito no exemplo anterior, podemos decompor as forças:

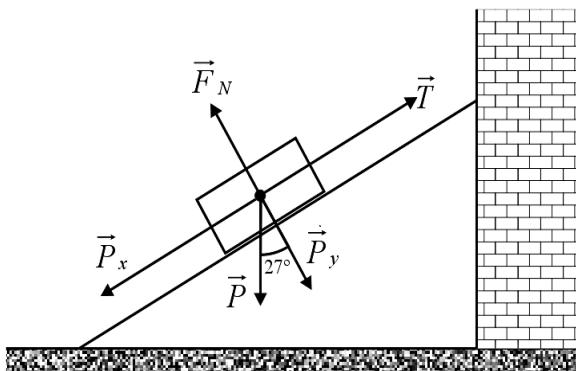


Figura 4.14: Componentes das Forças que atuam sobre o bloco.

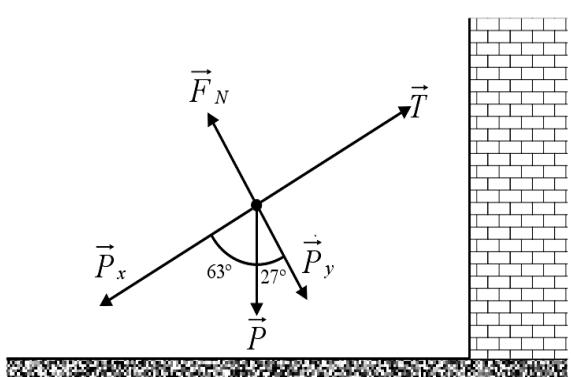


Figura 4.15: Visualização dos ângulos para o Exemplo 4.4

No eixo x :

$$\begin{aligned}\vec{P}_x + \vec{T} &= \vec{0}, \\ mg \cos(180^\circ + 63^\circ) + T &= 0, \\ (15 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(-0,45) + T &= 0, \\ T &= 66,80 \text{ N}.\end{aligned}\quad (4.28)$$

No eixo y :

$$\begin{aligned}\vec{P}_y + \vec{F}_N &= \vec{0}, \\ mg \sin(180^\circ + 63^\circ) + F_N &= 0, \\ (15 \text{ kg})(9,81 \text{ m/s}^2)(-0,89) + F_N &= 0, \\ F_N &= 131,11 \text{ N}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Exemplo 4.5: Um passageiro de massa $m = 72,2 \text{ kg}$ está de pé em uma balança no interior de um elevador. Estamos interessados nas leituras da balança quando o elevador está parado e quando se movendo para cima e para baixo. (a) Escreva uma equação para a leitura da balança em função da aceleração vertical do elevador. (b) Qual é a leitura da balança se o elevador está parado ou se movendo para cima com uma velocidade constante de $0,5 \text{ m/s}$? (c) Qual é a leitura da balança se o elevador sofre uma aceleração para cima de $3,2 \text{ m/s}^2$? Qual é a leitura se o elevador sofre uma aceleração para baixo de $3,2 \text{ m/s}^2$? (d) Durante a aceleração para cima do item (c), qual é o módulo F_{res} da força resultante a que esta submetido o passageiro no referencial do elevador? Considere $\vec{a}_{p,el}$ a aceleração do passageiro em relação ao elevador. Nesta circunstância, a equação $\vec{F}_{res} = m\vec{a}_{p,el}$ é obedecida?

Solução: (a) Como as duas forças e a aceleração a que o passageiro está sujeito são verticais (direção do eixo y), podemos usar a segunda lei de Newton para as componentes y e escrever

$$F_N - F_g = ma \quad \text{ou} \quad F_N = F_g + ma. \quad (4.30)$$

Isto nos diz que a leitura da balança, que é igual a F_N , depende da aceleração vertical. Substituindo

F_g por mg , obtemos

$$F_N = m(g + a) \quad (4.31)$$

para qualquer valor da aceleração a .

(b) Para qualquer velocidade constante (zero ou diferente de zero), a aceleração do passageiro é zero.

$$F_N = 72,2(9,8 + 0) = 708 \text{ N.} \quad (4.32)$$

Este é o peso do passageiro, e é igual ao módulo F_g da força gravitacional a que está submetido.

(c) Para $a = 3,20 \text{ m/s}^2$:

$$F_N = 72,2(9,8 + 3,2) = 939 \text{ N.} \quad (4.33)$$

Para $a = -3,20 \text{ m/s}^2$:

$$F_N = 72,2(9,8 - 3,2) = 477 \text{ N.} \quad (4.34)$$

Se a aceleração é para cima (ou seja, se a velocidade do elevador para cima está aumentando ou se a velocidade do elevador para baixo está diminuindo), a leitura da balança é maior que o peso do passageiro. Essa leitura é uma medida do peso aparente, pois é realizada em um referencial não-inercial. Se a aceleração é para baixo (ou seja, se a velocidade do elevador para cima está diminuindo ou se a velocidade do elevador para baixo está aumentando), a leitura da balança é menor que o peso do passageiro.

(d) O módulo F_g da força gravitacional a que está submetido o passageiro não depende da sua aceleração; assim, de acordo com o item (b), $F_g = 708 \text{ N}$. De acordo com o item (c), o módulo F_N da força normal a que está submetido o passageiro durante a aceleração para cima é o valor de 939 N indicado pela balança. Assim, a força resultante a que o passageiro está submetido é

$$F_{res} = F_N - F_g = 939 - 708 = 231 \text{ N,} \quad (4.35)$$

durante a aceleração para cima. Entretanto a aceleração do passageiro em relação ao elevador, $a_{p,el}$, é zero. Assim, no referencial não-inercial do elevador acelerado F_{res} não é igual a $ma_{p,el}$, e a segunda lei de Newton não é obedecida.

4.6 Exercícios

Exercício 4.1: Três astronautas, impulsionados por mochilas a jato, empurram e dirigem um asteroide de $120,0 \text{ kg}$ em direção a uma doca de processamento, exercendo as forças mostradas na Figura 4.16, com $F_1 = 32 \text{ N}$, $F_2 = 55 \text{ N}$, $F_3 = 41 \text{ N}$, $\theta_1 = 30^\circ$ e $\theta_3 = 60^\circ$. Determine a aceleração do asteroide (a) em termos dos vetores unitários, (b) o seu módulo e (c) o seu ângulo em relação ao semi-eixo x positivo.

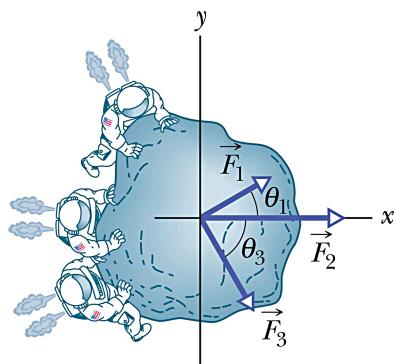


Figura 4.16: Exercício 4.1

Exercício 4.2: A Figura 4.17 mostra um sistema em que quatro discos estão suspensos por cordas. A mais comprida no topo passa por uma polia sem atrito e exerce uma força de 98 N sobre a parede a qual esta presa. As tensões nas cordas menores são $T_1 = 58,8 \text{ N}$, $T_2 = 42,0 \text{ N}$ e $T_3 = 9,8 \text{ N}$. Quais são as massas (a) do disco A , (b) do disco B , (c) do disco C , e (d) do disco D ?

Exercício 4.3: Um homem de 85 kg desce de uma altura de $10,0 \text{ m}$ em relação ao solo segurando em uma corda que passa por uma roldana sem atrito e que está presa na outra extremidade a um saco de areia de 65 kg . Com que velocidade o homem atinge o solo se o mesmo partiu do repouso?

Exercício 4.4: Um bloco de massa $m_1 = 3,70 \text{ kg}$ sem atrito inclinado de um ângulo $\theta = 30,0^\circ$

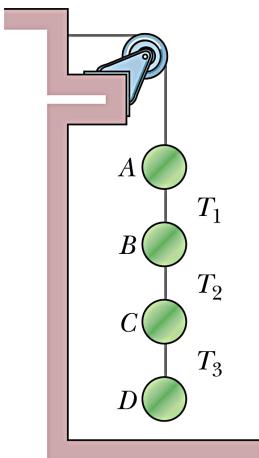


Figura 4.17: Exercício 4.2

está preso a uma corda de massa desprezível que passa por uma polia de massa e atrito desprezíveis, segurando verticalmente na outra extremidade um outro bloco de massa $m_2 = 2,30 \text{ Kg}$, como representado na Figura 4.18. Quais são (a) o módulo da aceleração de cada bloco, (b) o sentido da aceleração do bloco que está pendurado e (c) a tensão na corda?

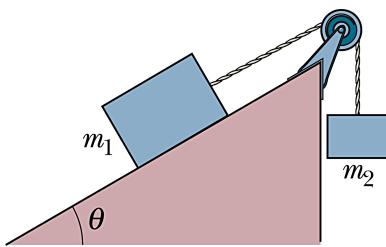


Figura 4.18: Exercício 4.4

Exercício 4.5: A Figura 4.19 mostra uma caixa de massa $m_2 = 1,0 \text{ kg}$ preso sobre um plano inclinado de um ângulo $\theta = 30^\circ$ sem atrito. Ela está conectada por uma corda de massa desprezível a uma caixa de massa $m_1 = 3,0 \text{ kg}$ sobre uma superfície horizontal sem atrito. A polia não tem atrito e sua massa é desprezível. (a) Se o módulo da força horizontal \vec{F} é 2,3 N, qual é a tensão na corda? (b) Qual é o maior valor que o módulo de \vec{F} pode ter sem que a corda fique frouxa?

Exercício 4.6: Três forças atuam sobre uma

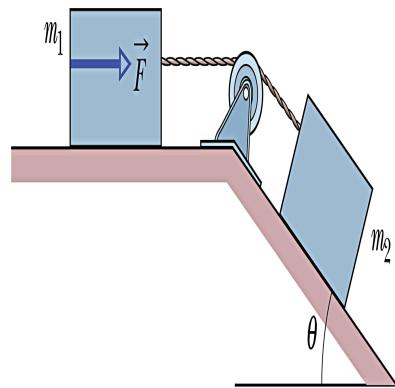


Figura 4.19: Exercício 4.5

partícula que se move com velocidade constante $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} + (-7 \text{ m/s})\hat{j}$. Duas das forças são $\vec{F}_1 = (2 \text{ N})\hat{i} + (3 \text{ N})\hat{j} + (-2 \text{ N})\hat{k}$ e $\vec{F}_2 = (-5 \text{ N})\hat{i} + (8 \text{ N})\hat{j} + (-2 \text{ N})\hat{k}$. Qual é a terceira força?

Exercício 4.7: A Figura 4.20 mostra uma caixa de massa $m_1 = 3,0 \text{ kg}$ sobre um plano sem atrito e inclinado de um ângulo $\theta_1 = 30^\circ$. A caixa está conectada por uma corda de massa desprezível a uma outra caixa de massa $m_2 = 2,0 \text{ kg}$ sobre um plano sem atrito e inclinado de um ângulo $\theta_2 = 60^\circ$. A polia não tem atrito e sua massa é desprezível. Qual é a tensão na corda?

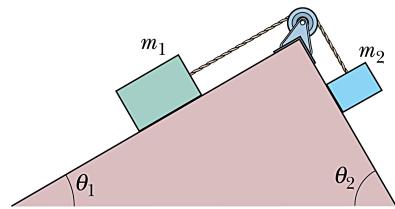


Figura 4.20: Exercício 4.7

Exercício 4.8: Calcule o peso de um astronauta de 75 kg (a) sobre a Terra, (b) sobre a superfície de Marte, onde $g = 3,8 \text{ m/s}^2$, e (c) no espaço interplanetário, onde $g = 0 \text{ m/s}^2$. (d) Qual é a massa do astronauta em cada lugar?

Exercício 4.9: Se o padrão de 1 kg é acelerado por apenas $\vec{F}_1 = (3 \text{ N})\hat{i} + (4 \text{ N})\hat{j}$ e

$\vec{F}_2 = (-2 \text{ N})\hat{i} + (-6 \text{ N})\hat{j}$, então qual é a força resultante \vec{F}_{res} (a) em termos dos vetores unitários e em termos de seus (b) módulo e (c) ângulo em relação ao sentido positivo do eixo x ? Quais são (d) o módulo e (e) o ângulo de \vec{a} ?

Capítulo 5

Aplicações das Leis de Newton

No capítulo anterior introduzimos as três leis de Newton e as aplicamos em situações simplificadas em que os efeitos do atrito eram desprezados. Nesta unidade, vamos ampliar nosso estudo para corpos em movimento sujeitos à atrito, o que vai nos permitir modelar mais realisticamente as situações. Também aplicaremos as leis de Newton na dinâmica do movimento circular uniforme.

5.1 Força de Atrito

Primeiro, trataremos de forças de atrito que existem entre duas superfícies sólidas estacionárias ou se movendo uma em relação a outra em baixa velocidade.

Se lançarmos um bloco de massa m com velocidade inicial \vec{v}_0 sobre uma mesa horizontal, ele acabará parando. Isto significa que, enquanto o bloco se move, ele possui uma aceleração de sentido oposto ao seu movimento (desaceleração). De acordo com a segunda lei de Newton, sempre que há aceleração existe uma força resultante diferente de zero agindo no corpo. Portanto, existe uma força que age sobre o bloco e faz com que ele pare. Essa força é conhecida como força de atrito.

Realmente, sempre que a superfície de um corpo escorrega sobre a de outro, surge uma certa resistência ao movimento (atrito). A força de

atrito sobre cada corpo é tangencial à superfície de contato e tem sentido oposto ao movimento.

Embora tenhamos ignorado seus efeitos até agora, o atrito é muito importante em nossa vida diária. Sem o atrito não conseguiríamos caminhar como o fazemos; não poderíamos segurar um lápis na mão e, se pudéssemos, ele não escreveria; não seria possível o transporte sobre rodas, etc.

As experiências mostram que a força de atrito surge no contato entre superfícies, devido às suas asperezas ou rugosidades. O contato é feito apenas em alguns pontos dificultando, assim, o escorregamento (deslizamento) entre elas (Figura 5.1).

Vamos tentar explicar como a força de atrito se comporta. Na Figura 5.2a um bloco está em repouso sobre uma mesa, com a força gravitacional \vec{F}_g equilibrada pela força normal \vec{F}_N . Na Figura 5.2b, você exerce uma força \vec{F} sobre o bloco, tentando puxá-lo para a esquerda. Em resposta, surge uma força de atrito \vec{f}_s para a direita, que equilibra a força que você aplicou. A força \vec{f}_s é chamada de **força de atrito estático**. O bloco permanece imóvel.

As Figuras 5.2c e 5.2d mostram que, à medida que você aumenta a intensidade da força aplicada, a intensidade da força de atrito estático \vec{f}_s também aumenta e o bloco permanece em repouso. Entretanto, quando a força aplicada atinge uma certa intensidade o bloco "se des-

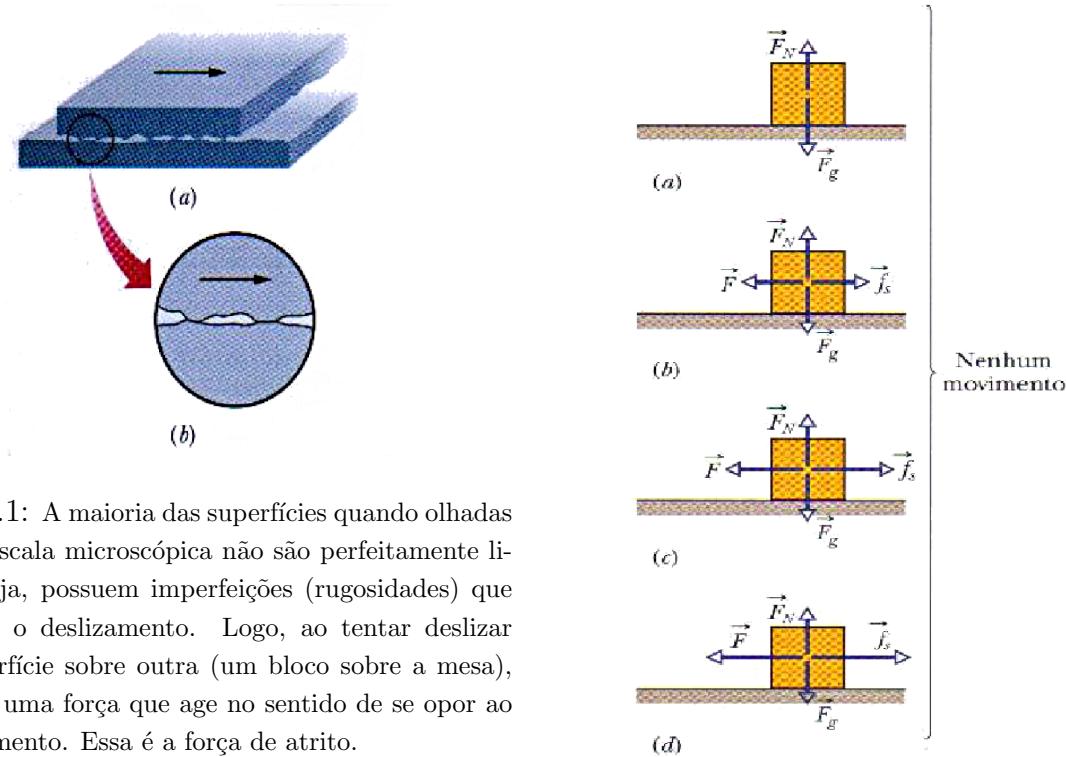


Figura 5.1: A maioria das superfícies quando olhadas em uma escala microscópica não são perfeitamente lisas, ou seja, possuem imperfeições (rugosidades) que dificultam o deslizamento. Logo, ao tentar deslizar uma superfície sobre outra (um bloco sobre a mesa), aparecerá uma força que age no sentido de se opor ao escorregamento. Essa é a força de atrito.

prende” da superfície da mesa e sofre uma aceleração para a esquerda (Figura 5.2e). A força de atrito \vec{f}_k que se opõe ao movimento nessa nova situação é chamada de **força de atrito cinético**.

Para que o bloco se move sobre a superfície com velocidade constante você terá que diminuir a intensidade da força aplicada assim que o bloco começar a se mover, como mostra a Figura 5.2f. A Figura 5.2g mostra o resultado de um experimento no qual a força aplicada ao bloco foi aumentando lentamente até ele começar a se mover.

Verificou-se experimentalmente que, com boa aproximação, o comportamento da força de atrito obedece as seguintes propriedades.

Propriedade 1 : Se o corpo não se move, a força de atrito estático \vec{f}_s e a componente de \vec{F} paralela à superfície se equilibraram. Elas tem o mesmo módulo, e \vec{f}_s tem sentido oposto ao da componente de \vec{F} .

Propriedade 2 : O módulo de \vec{f}_s possui um

valor máximo $f_{s,max}$ que é dado por

$$f_{s,max} = \mu_s F_N, \quad (5.1)$$

onde μ_s é o **coeficiente de atrito estático** e F_N é o módulo da força normal que a superfície exerce sobre o corpo. Se o módulo da componente de \vec{F} paralela à superfície excede $f_{s,max}$, o corpo começa a deslizar ao longo da superfície.

Propriedade 3 : Se o corpo começa a deslizar ao longo da superfície, o módulo da força de atrito diminui rapidamente para um valor f_k dado por

$$f_k = \mu_k F_N, \quad (5.2)$$

onde μ_k é o **coeficiente de atrito cinético**. Daí em diante, durante o deslizamento uma força de atrito cinético \vec{f}_k se opõe ao movimento.

Propriedade 4 : Os coeficientes μ_k e μ_s dependem da natureza dos corpos que estão em

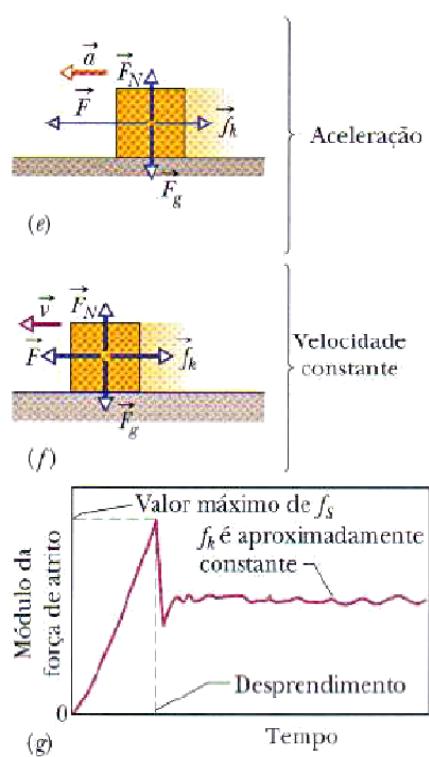


Figura 5.2: (a) As forças que agem sobre um bloco estacionário. (b-d) Uma força externa \vec{F} , aplicada ao bloco é equilibrada por uma força de atrito estático \vec{f}_s . Quando \vec{F} aumenta, \vec{f}_s também aumenta, até atingir um certo valor máximo. (e) O bloco então "se desprendem" acelerando subitamente na direção de \vec{F} . (f) Para que o bloco se move com velocidade constante é preciso reduzir o valor de \vec{F} . (g) Alguns resultados experimentais para a sequência de (a) a (f).

contato. Normalmente μ_k é menor que μ_s . Valores típicos para esses coeficientes estão entre 0 e 1,0. Com boa aproximação, eles não dependem da área de contato entre os corpos.

Na propriedade 4, quando nos referimos a área de contato, nos referimos a área de contato *efetivo* e não *aparente*. A área de contato aparente é a superfície do corpo no qual está apoiado na outra superfície, e área de contato efetiva são os reais pontos de apoio a nível atômico, pois se olharmos com um bom microscópio, até a superfície mais lisa será rugosa. A área efetiva é sempre menor que a área aparente, e ela depende da força normal aplicada, por exemplo se um bloco retangular apoiado na maior área aparente, terá uma área efetiva menor que se o mesmo bloco for apoiado em um dos outros lados de área aparente menor, porque a pressão sofrida na região de contato é maior na segunda configuração, se a pressão for maior aumentará o número pontos de apoio da área efetiva, isto equilibra a força de atrito, fazendo com que ela fique aproximadamente constante.

Usando estas propriedades juntamente com as leis de Newton e as equações de movimento, podemos resolver uma série de problemas da mecânica. Apesar de se modificar com a velocidade, trataremos μ_k como constante para este estudo inicial. Abaixo discutimos alguns exemplos considerando a existência do atrito entre as superfícies.

Exemplo 5.1:

Se as rodas de um carro ficam "travadas" (impedidas de girar) durante uma frenagem de emergência o carro desliza na pista. Pedaços de borracha arrancados dos pneus e pequenos trechos de asfalto fundido formam as "marcas da derrapagem". O recorde de marcas de derrapagem em via pública foi estabelecido em 1960 pelo motorista de um Jaguar na rodovia M1,

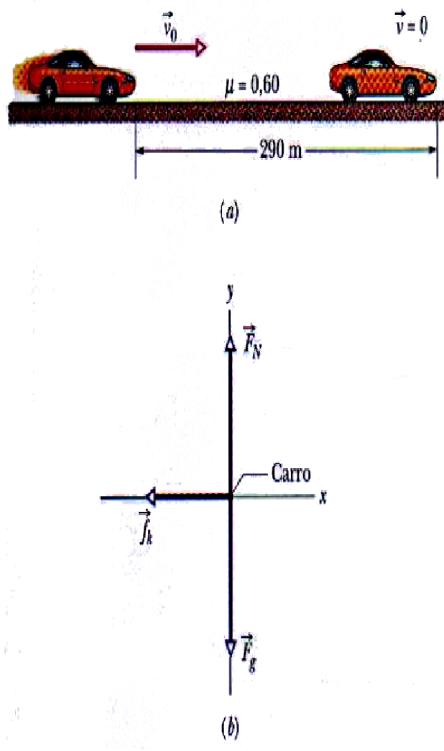


Figura 5.3: (a) Um carro deslizando para a direita e finalmente parando após se deslocar 290 m. (b) Diagrama de corpo livre do carro.

na Inglaterra (Figura 5.3): as marcas tinham 290 m de comprimento! Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre as rodas do carro e a rodovia seja $\mu_k = 0,60$ e que a aceleração do carro se manteve constante durante a frenagem, qual era a velocidade do carro quando as rodas travaram?

Solução: O módulo da força de atrito cinético é $f_k = \mu_k F_N$. Como o carro não está acelerando verticalmente sabemos que o módulo de \vec{F}_N é igual ao módulo da força gravitacional \vec{F}_g que age sobre o carro. Assim, $F_N = mg$.

Pela segunda lei de Newton temos que

$$-f_k = ma, \quad (5.3)$$

o sinal negativo indica o sentido da força de atrito cinético. Explicitando a e fazendo $f_k = \mu_k F_N = \mu_k mg$, temos:

$$a = -\frac{f_k}{m} = -\frac{\mu_k mg}{m} = -\mu_k g, \quad (5.4)$$

onde o sinal negativo indica que a aceleração ocorre no sentido negativo do eixo x , o sentido oposto ao da velocidade. Em seguida usamos a equação de Torricelli,

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \quad (5.5)$$

Sabemos que o deslocamento $x - x_0$ foi de 290 m e supomos que a velocidade final v foi 0(zero). Substituindo a por seu valor e explicitando v_0 , obtemos

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2\mu_k g(x - x_0)} = \sqrt{2 \cdot 0,60 \cdot 9,8 \cdot 290} \\ &= 58 \text{ m/s} = 210 \text{ Km/h}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Assumimos que $v = 0$ na extremidade das marcas de derrapagem. Na verdade, as marcas terminaram apenas porque o Jaguar saiu da estrada depois de percorrer 290 m com as rodas travadas. Assim o valor de v_0 era pelo menos 210 km/h.

Exemplo 5.2:

Na Figura 5.4 um bloco de massa $m = 3,0 \text{ kg}$ escorrega em um piso enquanto uma força \vec{F} de módulo 12 N, fazendo um ângulo $\theta = 30^\circ$ para cima com a horizontal, é aplicada ao bloco. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o piso é $\mu_k = 0,40$. Qual a aceleração do bloco?

Solução: Cálculo de F_N : Como precisamos conhecer o módulo da força de atrito cinético f_k , vamos calcular primeiro o módulo F_N da força normal. A Figura 5.4b é um diagrama de corpo livre que mostra as forças paralelas ao eixo vertical y . A força normal é para cima, a força gravitacional \vec{F}_g , de módulo mg , é para baixo e a componente vertical F_y da força aplicada é para cima. Essa componente aparece na Figura 5.4c, onde podemos ver que $F_y =$

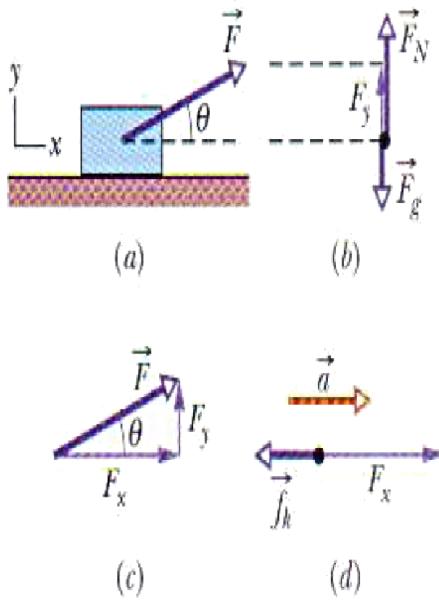


Figura 5.4: (a) Uma força é aplicada a um bloco em movimento. (b) As forças verticais. (c) As componentes da força aplicada. (d) As forças horizontais e a aceleração.

$F \sin \theta$. Podemos escrever a segunda lei de Newton para essas forças ao longo do eixo y como

$$F_N + F \sin \theta - mg = 0, \quad (5.7)$$

onde tomamos a aceleração ao longo do eixo y como sendo zero (o bloco não se move ao longo desse eixo). Assim,

$$F_N = mg - F \sin \theta. \quad (5.8)$$

Cálculo da aceleração a : A Figura 5.4d é um diagrama de corpo livre para o movimento ao longo do eixo x . O sentido da componente horizontal F_x da força aplicada é para a direita; de acordo com a Figura 5.4c, $F_x = F \cos \theta$. A força de atrito tem módulo $f_k = \mu_k F_N$ e aponta para a esquerda. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento ao longo do eixo x , temos:

$$F \cos \theta - \mu_k F_N = ma. \quad (5.9)$$

Substituindo F_N por seu valor dado na equação (5.8) e explicitando a , obtemos:

$$a = \frac{F}{m} \cos \theta - \mu_k \left(g - \frac{F}{m} \sin \theta \right). \quad (5.10)$$

Aplicando os valores dados ($F = 12 \text{ N}$; $m = 3,0 \text{ kg}$; $\mu_k = 0,40$ e $\theta = 30^\circ$) temos que $a = 0,34 \text{ m/s}^2$.

Exemplo 5.3:

Determinação experimental do coeficiente de atrito estático μ_s . Suponha que um bloco seja colocado sobre uma superfície áspera inclinada em relação a horizontal, como mostrado na Figura 5.5. O ângulo do plano inclinado é aumentado até que o bloco inicie seu movimento. Como está relacionado o coeficiente de atrito estático com o ângulo crítico θ no qual o bloco começa a se mover?

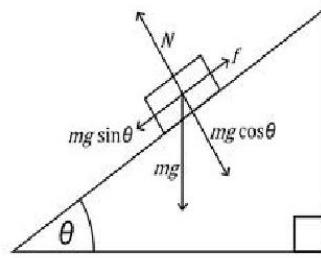


Figura 5.5: Forças que atuam sobre um bloco que está num plano inclinado com atrito.

Solução: As forças sobre o bloco, como mostrado na Figura 5.5, são a força gravitacional, a força normal, e a força de atrito estático. Enquanto o bloco não está em movimento, essas forças estão equilibradas. Aplicando a segunda lei de Newton para as componentes das forças na direção x (paralela ao plano inclinado) e na direção y (perpendicular ao plano inclinado):

Direção x :

$$mg \sin \theta - f_s = 0. \quad (5.11)$$

Direção y :

$$F_N - mg \cos \theta = 0 \quad \text{ou} \quad F_N = mg \cos \theta. \quad (5.12)$$

Como o bloco está prestes a se mover e a força de atrito estático tem o maior valor possível, $f_s = f_{s,\max} = \mu_s F_N$. Portanto, substituindo F_N na equação (5.11) pelo seu valor dado na equação (5.12), temos:

$$mg \operatorname{sen} \theta - \mu_s mg \cos \theta = 0, \quad (5.13)$$

Isolando μ_s encontramos:

$$\mu_s = \tan \theta, \quad (5.14)$$

Assim, o coeficiente de atrito estático é igual à tangente do ângulo em que o bloco começa a deslizar.

Exemplo 5.4:

Embora muitas estratégias engenhosas tenham sido atribuídas aos construtores da Grande Pirâmide, os blocos de pedra foram provavelmente içados com o auxílio de cordas. A Figura 5.6 mostra um bloco de 2000 kg no processo de ser puxado ao longo de um lado acabado (liso) da Grande Pirâmide, que constitui um plano inclinado com um ângulo $\theta = 52^\circ$. O bloco é sustentado por um trenó de madeira e puxado por várias cordas (apenas uma é mostrada na figura). O caminho do trenó é lubrificado com água para reduzir o coeficiente de atrito estático para 0,40. Suponha que o atrito no ponto (lubrificado) no qual a corda passa pelo alto da pirâmide seja desprezível. Se cada operário puxa com uma força de 686 N (um valor razoável), quantos operários são necessários para que o bloco esteja prestes a se mover?

Solução: A Figura 5.6c é um diagrama de corpo livre do bloco, mostrando a força \vec{F} aplicada pelas cordas, a força de atrito estático \vec{f}_s e as duas componentes da força gravitacional. Podemos escrever a segunda lei de Newton

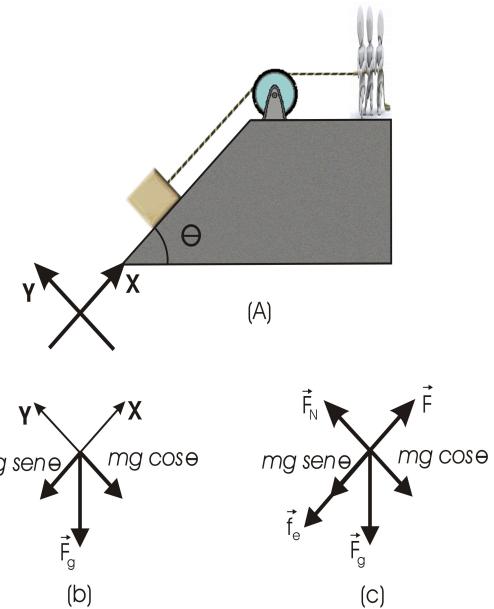


Figura 5.6: (a) Um bloco de pedra na iminência de ser içado para o alto da Grande Pirâmide. (b) As componentes da força gravitacional. (c) Diagrama de corpo livre do bloco.

para as componentes das forças em relação ao eixo x :

$$F - mg \operatorname{sen} \theta - f_s = 0. \quad (5.15)$$

Como o bloco está prestes a se mover, a força de atrito estático tem o maior valor possível, $f_s = f_{s,\max} = \mu_s F_N$. Podemos também escrever a segunda lei de Newton para as componentes das forças em relação ao eixo y :

$$F_N - mg \cos \theta = 0 \quad \text{ou} \quad F_N = mg \cos \theta. \quad (5.16)$$

Substituindo F_N , f_s na equação (5.15) e explicitando F , obtemos:

$$F = \mu_s mg \cos \theta + mg \operatorname{sen} \theta, \quad (5.17)$$

Fazendo $m = 2000$ kg, $\theta = 52^\circ$ e $\mu_s = 0,40$, descobrimos que a força necessária para colocar o bloco de pedra prestes a se mover é de

$2,027 \times 10^4$ N. Dividindo este valor pela força de 686 N que cada operário é supostamente capaz de aplicar, descobrimos que o número necessário de operários é

$$N = \frac{2,027 \times 10^4}{686} = 29,5 \approx 30 \text{ operários.} \quad (5.18)$$

Comentários: Depois que o bloco de pedra começa a se mover o atrito passa a ser o atrito cinético, e o coeficiente de atrito diminui para aproximadamente 0,20. É fácil mostrar que, neste caso, o número de operários diminui para 26 ou 27. Assim, os grandes blocos de pedra da Grande Pirâmide puderam ser colocados na posição por um número relativamente pequeno de operários.

5.2 Movimento Circular Uniforme

Como vimos no capítulo 3, quando um corpo se move em uma circunferência (ou um arco de circunferência) com uma velocidade escalar constante v , dizemos que se encontra em movimento circular uniforme. Neste estado o corpo possui uma aceleração centrípeta (dirigida para o centro da circunferência e sempre perpendicular a direção de \vec{v}) de módulo constante dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad (\text{aceleração centrípeta}), \quad (5.19)$$

onde R é o raio do círculo (não devemos esquecer que estamos observando o corpo do ponto de vista de um referencial inercial, no qual valem as leis de Newton). De acordo com a segunda lei de Newton, se ocorre aceleração ela

tem que ser causada por uma força resultante. Como a aceleração é em direção ao centro do círculo, a força resultante tem que ser direcionada também para o centro do círculo. Chamamos esta força resultante de força centrípeta F_c . Pela segunda lei de Newton o módulo desta força é dado por:

$$F_c = m \frac{v^2}{R} \quad (\text{módulo da força centrípeta}). \quad (5.20)$$

Portanto, quando uma partícula se desloca em uma trajetória circular, tem que estar agindo sobre ela uma força apontando para o centro da trajetória que ocasiona o movimento circular. Os módulos da aceleração centrípeta e da força centrípeta são constantes, no entanto as direções variam continuamente, de modo a sempre apontar para o centro do círculo. Veremos agora alguns exemplos de força centrípeta.

Exemplo 5.5:

Em 1901, em um espetáculo do circo, Allo "Dare Devil" Diavolo apresentou pela primeira vez um número de acrobacia que consistia em descrever um *loop* vertical pedalando uma bicicleta (Figura 5.7). Supondo que o *loop* seja um círculo de raios $R = 2,7$ m, qual é a menor velocidade v que Diavolo podia ter no alto do *loop* para permanecer em contato com a pista?

Solução: As forças que agem sobre a partícula quando ela está no alto do *loop* aparecem no diagrama de corpo livre da Figura 5.7b. A força gravitacional \vec{F}_g aponta para baixo ao longo do eixo y ; o mesmo acontece com a força normal \vec{F}_N exercida pelo *loop* sobre a partícula. A segunda lei de Newton para as componentes y nos dá

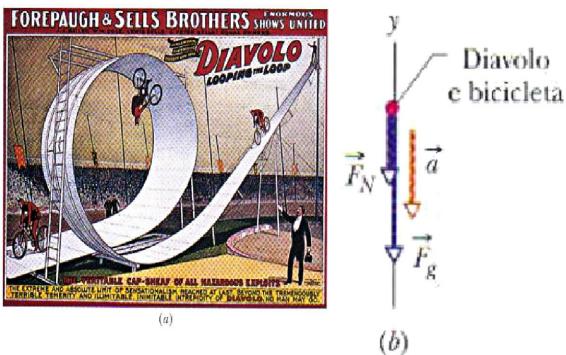


Figura 5.7: (a) Cartaz anunciando o número de Diavolo e (b) Diagrama de corpo livre do artista no alto do *loop*.

$$\begin{aligned} -F_N - F_g &= m(-a) \\ -F_N - mg &= m \left(-\frac{v^2}{R} \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Se a partícula possui a menor velocidade v necessária para permanecer em contato com a pista, ela está na iminência de perder contato com o *loop* (cair do *loop*), o que significa que $F_N = 0$ no alto do *loop* (a partícula e o piso se tocam, mas não há força normal). Substituindo F_N por zero, explicitando v e substituindo os valores conhecidos, obtemos

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{9,8 \cdot 2,7} = 5,1 \text{ m/s}. \quad (5.22)$$

Comentários: Diavolo certificou-se de que sua velocidade no alto do *loop* era maior do que 5,1 m/s, a velocidade necessária para não perder contato com o *loop* e cair. Note que essa velocidade necessária é independente da massa de Diavolo e sua bicicleta. Se ele tivesse se empanturrado antes de se apresentar, bastaria exceder a mesma velocidade de 5,1 m/s para não cair do *loop*.

Exemplo 5.6:

Até algumas pessoas acostumadas a andar de montanha russa empalidecem quando pensam em andar no Rotor, um grande cilindro oco que gira rapidamente em torno de seu eixo central (Figura 5.8). A pessoa entra no cilindro por uma porta lateral e fica de pé sobre um piso móvel, encostada em uma parede acolchoada. A porta é fechada. Quando o cilindro começa a girar a pessoa, a parede e o piso se movem juntos. Quando a velocidade atinge um certo valor o piso desce de forma abrupta e assustadora. A pessoa não desce junto com o piso, mas fica presa à parede enquanto o cilindro gira, como se um espírito invisível (e não muito amistoso) a pressionasse contra a parede. Algum tempo depois, o piso retorna a posição inicial, o cilindro gira mais devagar e a pessoa desce alguns centímetros até que seus pés encontrem novamente o piso (algumas pessoas acham tudo isso muito divertido). Suponha que o coeficiente de atrito estático entre a roupa da pessoa e a parede do Rotor seja 0,40 e que o raio do cilindro seja $R = 2,0 \text{ m}$. (a) Qual é a menor velocidade v que o cilindro e a pessoa devem ter para que a pessoa não caia quando o piso é removido? (b) Se a massa da pessoa é 50 kg, qual é o módulo da força centrípeta que age sobre ela?

Solução: (a) **Cálculos para o eixo vertical:** Para começar, introduzimos um eixo vertical y passando pela pessoa, com o sentido positivo para cima. Podemos aplicar a segunda lei de Newton à pessoa, escrevendo-a para as componentes y na forma

$$f_s - mg = 0 \quad (5.23)$$

onde m é a massa da pessoa e mg é o módulo de \vec{F}_g . Como a pessoa está na iminência de escorregar, substituímos f_s nesta equação pelo

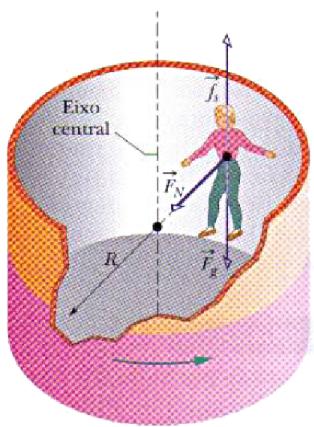


Figura 5.8: Rotor de um parque de diversões, mostrando as forças que atuam sobre a pessoa. A força centrípeta é a força normal \vec{F}_N , com a qual a parede empurra a pessoa para dentro.

valor máximo $\mu_s F_N$, obtendo

$$\mu_s F_N - mg = 0 \quad \text{ou} \quad F_N = \frac{mg}{\mu_s}. \quad (5.24)$$

Cálculos para o eixo radial: Em seguida, introduzimos um eixo radial r passando pela pessoa, com o sentido positivo para fora. Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo desse eixo como

$$-F_N = m \left(-\frac{v^2}{R} \right). \quad (5.25)$$

Substituindo F_N pelo seu valor e explicitando v , obtemos

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 2,0}{0,40}} \\ &= 7,0 \text{ m/s.} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que o resultado é independente da massa; ele é válido para qualquer pessoa que ande no rotor, de uma criança a um lutador de sumô, de modo que ninguém precisa se pesar para andar de Rotor.

(b) Substituindo os valores na equação

$$F_N = m \frac{v^2}{R} = 50 \frac{7^2}{2} = 1225 \text{ N.} \quad (5.27)$$

Embora esta força aponte para o eixo central, a pessoa tem a clara sensação de que a força que a prende contra a parede está dirigida radialmente para fora. Esta impressão vem do fato de que a pessoa se encontra em um referencial não-inercial (ela e o referencial estão acelerados). As forças medidas nesse tipo de referencial podem ser ilusórias. A ilusão faz parte da atração do Rotor.

Exemplo 5.7:

As curvas das rodovias costumam ser compensadas (inclinadas) para evitar que os carros derrapem. Quando a estrada está seca, a força de atrito entre os pneus e o piso pode ser suficiente para evitar as derrapagens. Quando a pista está molhada, porém, a força de atrito diminui muito e a compensação se torna essencial. A Figura 5.9 mostra um carro de massa m que se move com uma velocidade escalar constante v de 20 m/s em uma pista circular compensada com $R = 190$ m de raio. Se a força de atrito exercida pelo piso é desprezível, qual é o valor do ângulo de elevação θ mais adequado para que o carro não derrapa?

Solução: Cálculo na direção radial: Como mostra a Figura 5.9b, o ângulo que a força \vec{F}_N faz com a vertical é igual ao ângulo de inclinação θ da pista. Assim, a componente radial F_{Nr} é igual a $F_N \sin \theta$. Podemos agora escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo r como

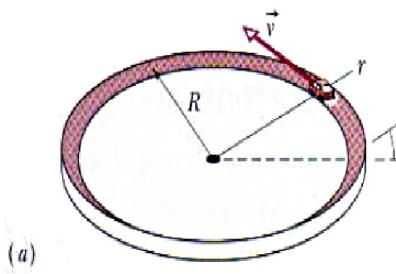
$$-F_N \sin \theta = m \left(-\frac{v^2}{R} \right). \quad (5.28)$$

Não podemos obter o valor de θ nesta equação, porque ela também contém as incógnitas F_N e m .

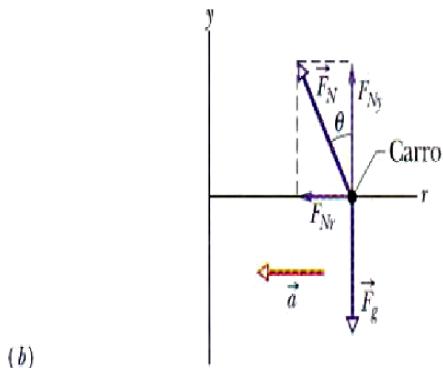
Cálculo na direção vertical: Vamos considerar as forças e acelerações ao longo do eixo y da Figura 5.9b. A componente vertical da

força normal é $F_{Ny} = F_N \cos \theta$, a força gravitacional \vec{F}_g tem módulo mg e a aceleração do carro ao longo do eixo y é zero. Assim, podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo do eixo y como

$$F_N \cos \theta - mg = 0 \quad \text{ou} \quad F_N \cos \theta = mg \quad (5.29)$$



(a)



(b)

Figura 5.9: (a) Um carro faz uma curva compensada com uma velocidade escalar constante v . O ângulo de inclinação está exagerado para maior clareza. (b) Diagrama de corpo livre do carro, supondo que o atrito entre os pneus e a estrada é nulo. A componente radial para dentro F_{Nr} da força normal (ao longo do eixo radial r) fornece a força centrípeta e a aceleração radial necessárias.

Combinação de resultados: Observe que dividindo as duas equações anteriores, eliminamos as duas incógnitas. Procendendo dessa forma, substituindo $\sin \theta / \cos \theta$ por $\tan \theta$ e explicitando θ , obtemos

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v^2}{gR} = \tan^{-1} \frac{20^2}{9,8 \cdot 190} = 12^\circ. \quad (5.30)$$

5.3 Forças de Arrasto

Na primeira seção deste capítulo se descreveu a ação das forças de atrito no movimento relativo de superfícies de corpos em contato. Na ocasião nós ignoramos os efeitos da interação do meio com os corpos, o que devemos discutir a partir de agora. O meio em que o corpo vai se deslocar pode ser um líquido ou um gás. O meio exerce uma força resistiva ao deslocamento do objeto por este meio. Como exemplo temos a resistência do ar ou forças devido à viscosidade de um líquido. A magnitude da força resistiva do meio depende de fatores como a velocidade relativa do corpo com o meio. A sua direção é sempre oposta ao sentido do deslocamento do corpo em relação ao meio, e a magnitude da força resistiva quase sempre aumenta com o aumento da velocidade relativa, mas a sua dependência nem sempre é de uma forma simples.

Para ilustrar o conceito de forças de arraste vamos considerar um corpo abandonado a partir

do repouso e nas proximidades da superfície terrestre, portanto sob a influência da força constante da gravidade. A ação da gravidade faz com que o corpo seja acelerado verticalmente para baixo, em direção ao chão. Ao se deslocar no ar, passa a experimentar a resistência do ar no sentido oposto ao do seu movimento (que neste caso é para baixo). Vamos imaginar que a ação da resistência do ar possa ser expressa por uma força de módulo dado por:

$$F_{resistiva} = bv^n \quad (5.31)$$

dirigida para cima visto que o corpo está se movendo verticalmente para baixo. A constante b dependendo da forma do corpo e das propriedades do meio. Colocando o nosso referencial com o sentido positivo do eixo y sendo para baixo, a segunda Lei de Newton nos fornece

$$\sum F_y = mg - bv^n = ma_y \quad (5.32)$$

Devido a ação da gravidade o módulo da velocidade do corpo aumenta com o tempo, e com isso também aumenta $F_{resistiva}$. Em um dado instante a $F_{resistiva}$ irá assumir um valor numérico igual ao da força da gravidade, mg , e a força resultante será nula, implicando em uma aceleração nula e na velocidade passando a ser constante a partir daí, com um valor v_t . Resolvendo a equação 5.32 para o caso em que $a_y = 0$, temos:

$$bv_t^n = mg \quad (5.33)$$

e isolando v_t :

$$v_t = \left[\frac{mg}{b} \right]^{\frac{1}{n}} \quad (5.34)$$

v_t é conhecida como *velocidade terminal*, pois o regime de deslocamento do corpo passa a ser um MRU nas atuais condições. Quanto maior for a constante b , menor será a velocidade terminal. Os pára-quedas são projetados de modo a terem um grande valor de b , enquanto que os carros de corrida são feitos para terem um b pequeno a fim de minimizar a resistência do ar.

5.4 Exercícios

Exercício 5.1: Uma cômoda com uma massa de 45 kg, incluindo as gavetas e as roupas está em repouso sobre o piso. (a) Se o coeficiente de atrito estático entre a cômoda e o piso é 0,45, qual é o módulo da menor força horizontal necessária para fazer a cômoda entrar em movimento? (b) Se as gavetas e as roupas, com uma massa total de 17 kg, são removidas antes de empurrar a cômoda, qual é o novo módulo mínimo?

Exercício 5.2: Uma barra horizontal é usada para sustentar um objeto de 75 kg entre duas paredes, como mostra a Figura 5.10. As forças iguais F exercidas pela barra nas paredes podem ser variadas ajustando-se o comprimento da barra. Apenas o atrito entre os extremos da barra e as paredes seguram o sistema. O coeficiente de atrito estático entre a barra e as paredes é 0,41. Ache o valor mínimo das forças F para haver equilíbrio.



Figura 5.10: Barra horizontal e o objeto sustentados apenas pela força de atrito da barra com as paredes.

Exercício 5.3: Uma pessoa empurra horizontalmente um caixote de 55 kg com uma força de 220 N para deslocá-lo em um piso plano. O coeficiente de atrito cinético é 0,35. (a) Qual é o módulo da força de atrito? (b) Qual é o módulo da aceleração do caixote?

Exercício 5.4: Um trabalhador quer empilhar areia em uma área circular em seu quintal. O raio do círculo é R . Nenhuma areia deve sair para fora da área determinada. Mostre que o volume máximo de areia que pode ser estocado dessa maneira é $\mu_s > R^3/3$, onde μ_s é o coeficiente de atrito estático da areia com a areia (O volume do cone é $Ah/3$, onde A é a área da base e h é a altura).

Exercício 5.5: Um bloco de massa $m = 2,0$ kg é lançado com velocidade inicial de 6,0 m/s em uma superfície horizontal, parando em 3,0 s. Calcule: (a) o módulo da força de atrito (b) o coeficiente de atrito cinético.

Exercício 5.6: A é um bloco de 4,4 kg e B é um bloco de 2,6 kg (Figura 5.11). Os coeficientes de atrito estático μ_s e atrito cinético μ_k entre A e a mesa são 0,18 e 0,15 respectivamente. a) Determine a massa mínima de um bloco C que deve ser colocado sobre A para impedi-lo de deslizar. b) O bloco C é repentinamente retirado de cima de A. Qual é a aceleração de A?

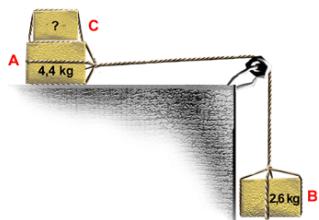


Figura 5.11: Barra horizontal e o objeto sustentados apenas pela força de atrito da barra com as paredes.

Exercício 5.7: Um bloco está apoiado sobre um plano que faz um ângulo θ com a hori-

zontal. Determine (a) o coeficiente de atrito estático deste bloco com o plano supondo que o bloco esteja na iminência de escorregar. (b) o coeficiente de atrito cinético do bloco com o plano considerando que o bloco esteja deslizando com uma aceleração a .

Exercício 5.8: O cabo de um escovão de massa m faz um ângulo θ com a vertical. Seja μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o escovão e o assoalho e μ_s o coeficiente de atrito estático. Despreze a massa do cabo. Ache o módulo da força F , dirigida ao longo do cabo, necessária para fazer com que o escovão deslize com velocidade uniforme sobre o assoalho.

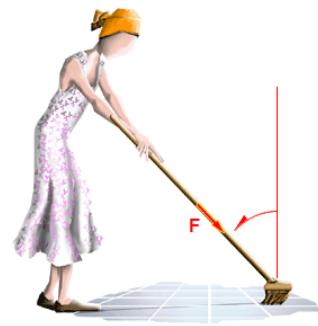


Figura 5.12: Sistema envolvendo o cabo, o escovão e o chão.

Exercício 5.9: Dois blocos, com massas 3,0 kg e 8,0 kg, estão ligados por uma corda sem massa e deslizam para baixo em um plano inclinado de 30° . O coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais leve e o plano é de 0,10, e o coeficiente de atrito cinético entre o bloco mais pesado e o plano é de 0,20. Supondo que o bloco mais leve desce na frente, determine (a) o módulo da aceleração dos blocos e a (b) a tensão da corda.

Exercício 5.10: Qual é o menor raio de uma curva sem compensação (plana) que permite que um ciclista a 29 km/h faça a curva sem derrapar se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é de 0,32?

Exercício 5.11: Um gato está cochilando em um carrossel parado, a uma distância de 5,4 m do centro. O brinquedo é ligado e logo atinge a velocidade normal de funcionamento, na qual completa uma volta a cada 6,0 s. Qual deve ser, no mínimo, o coeficiente de atrito estático entre o gato e o carrossel para que o gato permaneça no mesmo lugar, sem escorregar?

Exercício 5.12: Um disco de massa m sobre uma mesa sem atrito está ligado a um cilindro de massa M suspenso por uma corda que passa através de um orifício da mesa. Encontre a velocidade com a qual o disco deve se mover em um círculo de raio r para que o cilindro permaneça em repouso (Figura 5.13).

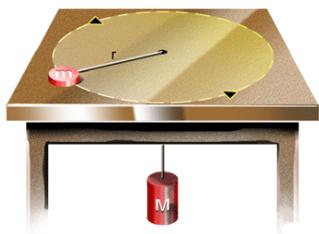


Figura 5.13: Sistema descrito no exercício 5.12.

Exercício 5.13: Um corpo de massa de $0,500 \text{ kg}$ é ligado à extremidade de um fio com comprimento de $1,50 \text{ m}$. Gira-se o corpo em um círculo horizontal. Se o fio pode suportar a tensão máxima de $50,0 \text{ N}$, qual é a velocidade escalar máxima que o corpo pode ter antes que o fio se rompa?

Exercício 5.14: Um carro se move com velocidade constante em uma estrada reta mas montanhosa (Figura 5.14). Um trecho tem um morro e uma depressão de mesmo raio, 250 m. a) Quando o carro passa pelo morro, a força normal no carro é a metade do seu peso, que é de 16000 N . Qual será a força normal no carro ao passar pelo fundo da depressão? b) Qual é a maior velocidade com a qual o carro pode se mover sem sair da estrada no topo do

morro? c) Se o carro se mover com a velocidade encontrada no item (b), qual será a força centrípeta no carro quando ele estiver se movendo no fundo da depressão?

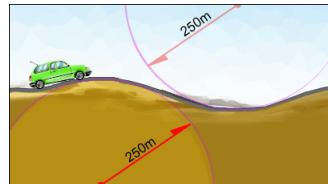


Figura 5.14: Carro passando pela estrada montanhosa.

Exercício 5.15: Um viciado em movimento circulares, com 80 kg de massa, está andando em uma roda-gigante que descreve uma circunferência vertical de 10 m de raio a uma velocidade escalar constante de $6,1 \text{ m/s}$. (a) Qual é o período do movimento? Qual é o módulo da força normal exercida pelo assento sobre o viciado quando ambos passam (b) pelo ponto mais alto da trajetória circular e (c) pelo ponto mais baixo?

Exercício 5.16: Na Figura 5.15, uma bola de $1,34 \text{ kg}$ é ligada por meio de dois fios de massa desprezível, cada um com comprimento $L = 1,70 \text{ m}$, a uma haste vertical giratória. Os fios estão amarrados à haste a uma distância $d = 1,70 \text{ m}$ um do outro e estão esticados. A tensão do fio de cima é de 35 N . Determine (a) a tensão do fio de baixo; (b) o módulo da força resultante \vec{F}_{res} a que está sujeita a bola; (c) a velocidade escalar da bola; (d) a orientação de \vec{F}_{res} .

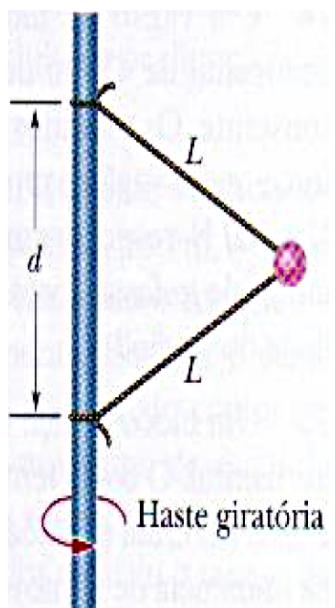


Figura 5.15: Exercício 5.10.

Capítulo 6

Respostas dos Exercícios

Capítulo 1

- 1.1: (a) $5,00 \text{ m/s}$, (b) $1,25 \text{ m/s}$, (c) $-2,50 \text{ m/s}$.
(d) $-3,33 \text{ m/s}$, (a) $0,00 \text{ m/s}$.
- 1.2: (a) $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$, (b) $0,00 \text{ m/s}$.
- 1.3: (a) $-2,40 \text{ m/s}$, (b) $-3,71 \text{ m/s}$, (c) 4 s .
- 1.4: Valores aproximados: $v_0 \approx 0,0 \text{ m/s}$, $v_1 \approx 4,25 \text{ m/s}$, $v_2 \approx 9,27 \text{ m/s}$, $v_3 \approx 14,02 \text{ m/s}$, $v_4 \approx 18,31 \text{ m/s}$, $v_5 \approx 23,01 \text{ m/s}$.
- 1.5: $a = -4 \text{ m/s}^2$.
- 1.6: (a) 13 m/s , (b) 10 m/s 16 m/s , (c) 6 m/s^2 , (d) 6 m/s^2 .
- 1.7: (a) $a = 1,33 \text{ m/s}^2$, (b) em três partes da curva, (c) $a \approx -1,35 \text{ m/s}^2$, $t \approx 8,00 \text{ s}$.
- 1.8: (a) 20 s , (b) Sim, pode sim.
- 1.9: (a) $30,1 \text{ m/s}$, (b) $-30,0 \text{ m/s}^2$, (c) $3,16 \text{ s}$, (d) $1,00 \text{ s}$.
- 1.10: $3,21 \text{ s}$.

Capítulo 2

- 2.2: $a_x = -2,5 \text{ cm}$, $a_y = 4,33 \text{ cm}$.
- 2.3: 122° .
- 2.4: (a) 7 , (b) $\sqrt{99}$.
- 2.5: $16,26^\circ$.
- 2.6: $k_1 = -1$, $k_2 = 2$.
- 2.8: (a) $3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$, (b) $5\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$, (c) $-5\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.
- 2.9: 60° .
- 2.11: $-29\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k}$.
- 2.12: $-5\vec{i} - 21\vec{j} - 15\vec{k}$.

Capítulo 3

- 3.1: $22,5 \text{ m}$.
- 3.2: (a) $77,7^\circ$, (b) 73 km/h , (c) 4 s .
- 3.3: (a) $65,2 \text{ m/s}$, (b) 0 .
- 3.4: $5,78 \text{ m/s}^2$.
- 3.5: $1,8 \text{ rps}$.
- 3.6: $67,8^\circ$.
- 3.7: (a) $9h49min5,45s$, (b) meia noite.
- 3.8: $5,6 \times 10^5 \text{ g}$

Capítulo 4

- 4.1: (a) $\vec{a} = (0,86 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (-0,16 \text{ m/s}^2)\hat{j}$, (b) $|\vec{a}| = 0,88 \text{ m/s}^2$, (c) $\theta = -11^\circ$.
- 4.2: (a) $m = 4 \text{ kg}$, (b) $m = 1 \text{ kg}$, (c) $m = 4 \text{ kg}$, (d) $m = 1 \text{ kg}$.
- 4.3: $v = 5,1 \text{ m/s}$
- 4.4: (a) $a = 0,783 \text{ m/s}^2$, (b) o bloco m_1 acelera plano acima e o bloco m_2 acelera para baixo, (c) $T = 20,8 \text{ N}$.
- 4.5: (a) $T = 3,1 \text{ N}$, (b) $F = 14,7 \text{ N}$.
- 4.6: $\vec{F}_3 = (3 \text{ N})\hat{i} + (-11 \text{ N})\hat{j} + (4 \text{ N})\hat{k}$.
- 4.7: $T = 16 \text{ N}$.
- 4.8: (a) $P = 7,4 \times 10^2 \text{ N}$, (b) $P = 2,9 \times 10^2 \text{ N}$, (c) $P = 0 \text{ N}$, (d) $m = 75 \text{ kg}$.
- 4.9: (a) $\vec{F}_{res} = (1,0 \text{ N})\hat{i} + (-2,0 \text{ N})\hat{j}$, (b) $F_{res} = 2,2 \text{ N}$, (c) $\theta = -63^\circ \text{ N}$, (d) $a = 2,2 \text{ m/s}^2$, (e) $\theta = -63^\circ \text{ N}$.

Capítulo 5

- 5.1: (a) 198 N , (b) 123 N .

5.2: 896, 34 N.

5.3: (a) 189 N, (b) 0,56 m/s².

5.5: (a) 4,0 N, (b) 0,2.

5.6: (a) 10,04 kg, (b) 4,32 m/s².

5.7: (a) $\mu_s = \tan \theta$, (b) $\mu_c = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta}$.

5.8: $\frac{\mu_k mg}{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}$.

5.9: (a) 3,4 m/s², (b) 2 N.

5.10: 20 m.

5.11: 0,60.

5.12: $\sqrt{\frac{Mgr}{m}}$.

5.13: 12,2 m/s.

5.14: (a) 24000 N, (b) 49,50 m/s, (c) 15681,6 N.

5.15: (a) 10 s, (b) $4,9 \times 10^2$ N, (b) $1,1 \times 10^3$ N.

5.16: (a) 8,74 N, (b) 37,9 N, (c) 6,45 m/s,
(d) na direção da haste.

Capítulo 7

Referências Bibliográficas

Capítulo 1 - Cinemática unidimensional

As imagens e informações foram todas tiradas do Physics for Scientists and Engineers, do Serway e Jewett, 6 edição, Thomson Brooks/Cole, 2004 e da edição em português da terceira edição: Princípios de Física, vol 1 - Mecânica Clássica, editora Thomson (também do Raymond Serway e John Jewett).

Capítulo 2 - Vetores

[1] Halliday, Resnick. Fundamentos de Física vol 4 , 8ed ,editora LTC, Rio de Janeiro , 2009. [2] Boulos, Paulo e Camargo, Ivan de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. Makron Books, São Paulo, 1987. [3]Steinbruch, A. . Geometria Analítica. Makron Books, São Paulo, 1987. [4] Iezzi, G.. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 1, Atual Editora. [5] Iezzi, G.. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 2, Atual Editora. [6] Griffiths, D. J.. Introduction to Electrodynamics. 3rd edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999. [7] Peduzzi, L. O. Q.; Peduzzi, S. S. Curso de Licenciatura em Física na Modalidade à Distância - Física Básica A. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

Capítulo 3 - Cinemática bidimensional

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos de física. 8. ed. Rio de Janeiro (RJ): LTC, c2009. ...v. ISBN 9788521616078 (v.1)

Capítulo 5 - Aplicação das leis de Newton

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. Fundamentals of Physics. 8^a edição, Vol. 1. Wiley, 2007. TIPLER, P. A. Física. Vol. 1, 3^a edição. Rio de Janeiro: LTC, 2000. e-física - ensino de Física on-line. [Online] [Citado em: 16 de Junho de 2012.]<http://efisica.if.usp.br/>.

Observação A atual apostila é uma colaboração de diversos alunos do Programa de Pós Graduação em Física da Universidade Federal de Santa Catarina, estando assim submetida à constantes atualizações.