Física para Ciências Agrárias - Notas de Aula

Rafael H. Campos

15 de Setembro de 2016

Conteúdo

Apresentação

Este compilado é fruto do meu trabalho como professor do Departamento de Física da UFSC nos anos de 2015 e 2016. Dentre as várias disciplinas que lecionei neste período, o curso *Física para Ciências Agrárias* me chamou a atenção em especial por ser direcionada à estudantes com pouca motivação (tanto profissional como acadêmica) para estudos de exatas. Piorando o cenário, é um curso que já foi chamado de *Monstro de Frankstein* por conter pedaços dos cursos formais de física 1, 2 e 3 e que por ser muito específico não possui um livro-texto adequado. Motivado a ajudar estes estudantes, resolvi escrever este material e disponibilizá-lo aos alunos.

No capítulo 1, medidas físicas, temos uma visão geral do que são grandezas, unidades e de como realizar e representar a medida de uma grandeza. O capítulo 2, vetores, apresenta uma revisão de conhecimentos de geometria analítica que serão fundamentais para um estudo mais apropriado da Física. Este estudo começa no capítulo 3, mecânica, onde são estudadas as leis de Newton da dinâmica e são realizadas aplicações delas nas forças derivadas mais presentes no cotidiano. Além disso, algumas breves considerações sobre energia, momento e torque são feitas.

Todos os capítulos contam com uma lista de exercícios onde os conceitos apresentados são reforçados, as respostas para estes encontram-se no capítulo 4.

É importante perceber que devido à complexidade da ementa, a maior parte dos conteúdos são vistos muito rapidamente. Deste modo, o principal objetivo deste texto é auxiliar o estudante no entendimento dos conceitos básicos por trás de cada uma destas áreas da Física.

Bons estudos!

Capítulo 1

Medidas físicas

1.1 Grandezas e unidades

Grandezas físicas são características da natureza que podem ser representadas quantitavamente. As 7 grandezas básicas da natureza são: distância, tempo, massa inercial, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, quantidade de substância e intensidade luminosa. Todas as outras são derivadas destas, de modo que qualquer outra grandeza que você consiga imaginar (força, velocidade, campo elétrico, frequência, para dar alguns exemplos) pode ser escrita em termos das citadas acima.

Já unidades são as formas de representar as medidas destas grandezas e compará-las. Para cada grandeza tempos várias unidades distintas, para distâncias por exemplo: metro, milha, jarda, pé, polegada, ano-luz e outras.

Usam-se unidades diferentes para mesmas grandezas por dois motivos básicos: convenção histórica ou simplificação da representação (não é pratico medir a massa de uma formiga em toneladas, ou a idade de uma pessoa em segundos).

1.1.1 Sistemas de unidades

Sistemas de Unidades são necessários para compartilhar resultados e propagar o conhecimento. Ao longo da história diversas unidades diferentes foram utilizadas para várias grandezas, muitas ao mesmo tempo, e com o crescimento da interação entre grupos de pesquisa espalhados por todo o planeta foi ficando mais urgente a necessidade de uma uniformização destas unidades.

Hoje, podemos encontrar alguns Sistemas de Unidades distintos no nosso cotidiano, alguns completos e outros parciais: Sistema Britânico Imperial, usado apenas parcialmente; Sistema CGS (centímetro, grama, segundo); Sistema MKS (metro, kilograma, segundo); Sistema Internacional, adaptação do MKS; Sistema Natural, utilizado na física teórica.

1.1.2 Sistema Internacional

Convenção do Metro: França, 1875. Publicação Oficial: 1960.

Desde a publicação da Convenção do Metro, vários países foram pouco a pouco adotando o sistema MKS e suas reformulações, até que em 1960 este foi renomeado como Sistema Internacional. Hoje, apenas três países ainda não o adotam oficialmente (EUA, Burma, Libéria).

1.2 Algarismos significativos

Quando você mede o seu "peso"(na verdade é a massa, mas essa discussão fica para o futuro) em uma balança de farmácia, você ja deve ter percebido que a grande maioria delas tem uma precisão máxima de $100g$, em uma ex-modelo com $77,8$ kg esta imprecisão afeta o terceiro algarismo da medida. Enquanto isso, um biólogo preparando um meio de cultura utiliza as chamadas *balanças de precisão* para medir de modo bem mais exato a massa de um reagente com, digamos, $3,4724$ g.

Agora, assim como não faz o menor sentido o biólogo anotar no seu diário que a massa medida foi $3,5$ g (já que estaria desprezando parte da informação que obteve), também não faz sentido a ex-modelo dizer sua massa é $77,894251223$ g (pois a medida realizada não forneceu uma medida tão precisa).

1.2.1 Precisão de uma medida

Considere a figura 1.1, que mostra uma régua colocada de modo a medir o comprimento de um lápis. Os números marcados nela representam os *centímetros* (cm). Além disso ela possui riscos verticais que representam os *milímetros* (mm, décimos de centímetro), e a cada 5 mm há um risco um pouco maior, para facilitar a leitura.

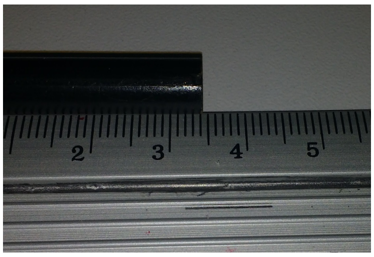

Figura 1.1: Medida de um comprimento.

Sabendo disso, alguém interessado em saber o comprimento do lápis lê a régua e observa que ele certamente é maior que $3,4$ cm e menor que $3,5$ cm, além disso ele vê que a extremidade do lápis está muito mais próxima do 4^o milímetro que do 5^o. Baseado nisso ele estima o comprimento do lápis em $3,42$ cm.

Uma outra pessoa, afirmando possuir uma visão extraordinária, lê a régua e diz que o comprimento do lápis é de $3,4315$ cm.

Antes de saber quem fez a melhor medida é interessante entender um pouco mais sobre *instrumentos de medidas*, que são as ferramentas com as quais avaliamos uma grandeza física em termos de alguma unidade. Quando um instrumento desses é construído ele é *calibrado*[1], isto é, comparamos ele com algum outro sistema onde esta medida seja conhecida.

---

[1] Toda vez que utilizamos uma balança de dois pratos realizamos este processo, em um prato é colocada a massa que desejamos medir e no outro colocamos "pesos"predeterminados até que os pratos se aproximem do equilíbrio.

Assim, quando efetuamos a medida de uma grandeza, a *resolução de escala* é a característica do instrumento que diz o quão precisa a medida pode ser. No caso da régua acima, a resolução de escala é de 1 mm. Qualquer medida menor do que essa não pode ser avaliada com precisão. Voltando ao lápis, de fato temos:

$$3,4 \text{ cm} \leq \text{comprimento} \leq 3,5 \text{ cm}$$

Também é perceptível que o lápis é um pouco maior que $3,4$ cm, de modo que podemos estimar essa diferença. Mas esta estimativa é limitada e normalmente utilizamos apenas um algarismo para representá-la; os algarismos da parte estimada de uma medida são chamados *algarismos duvidosos.*

E, finalmente, para representar a medida, utilizamos os chamados *algarismos significativos*, um conjunto composto de todos os algarismos que temos certeza do valor e do primeiro algarismo duvidoso. Deste modo a medida $3,42$ cm esta de acordo com a capacidade do instrumento. Avaliando ela, percebemos que é composta de três algarismos, dois certos e um duvidoso, e qualquer outra medida realizada com este instrumento deve ter este número de algarismos significativos (exceto quando passarmos às dezenas, que terão quatro *A.S.*).

De modo geral, quanto maior o número de *A.S.* em uma medida maior a sua precisão, a tabela 1.1 demonstra a contagem de A.S. de uma medida.

	Medida	A.S.	Not. Científica
a	$6,\bar{2}3$ m	2	$6,2$ m
b	$0,01537$ m	4	$1,537 \times 10^{-2}$ m
c	$347,5$ s	4	$3,475 \times 10^{2}$ s
d	$84\bar{2}800$ kg	3	$8,43 \times 10^{5}$ kg
e	$0,00547$ cm	3	$5,47 \times 10^{-5}$ m
f	600 min	3	$3,60 \times 10^{4}$ s
g	30 m^3	2	$3,0 \times 10^{1}$ m^3

Tabela 1.1: Contagem de algarismos significativos e representação como notação científica para diversas medidas.

Muitas vezes, como nos itens *a* e *d* da tabela 1.1, utilizamos uma barra sobrescrita em algum algarismo para identificar o último *A.S.* (e consequentemente o primeiro algarismo duvidoso). A ausência da barra implica que todos os algarismos (exceto os zeros à esquerda) são signficativos. Ainda sobre os itens *a* e *d*, ao remover os algarismos duvidosos excedentes da medida devemos arredondá-la obedecendo as regras descritas na seção 1.3.

1.3 Arredondamento

Praticamos o arredondamento quando a medida tem um número de algarismos maior do que o número de A.S. adequado, utilizando a informação dos algarismos a serem descartados para melhorar a informação do último *A.S.* (algarismo duvidoso).

1.3.1 Regras de arrendondamento

Quando o primeiro algarismo a ser descartado for maior que 5 o último *A.S.* é aumentado em 1.

$$15,7\bar{4}61 \implies 15,75$$

Quando o primeiro algarismo a ser descartado for menor que 5 o último *A.S.* permanece inalterado.

$$3,8\bar{9}21 \implies 3,89$$

Quando o primeiro algarismo a ser descartado for igual a 5, e todos os sequentes forem iguais a 0, arredondamos o último *A.S.* para o valor par mais próximo (se ele já for par, permanece inalterado).

$$\begin{array}{rcl} 0,007\bar{5}5002 \text{ m} & \implies & 0,0076 \text{ m} \\ 0,007\bar{5}5000 \text{ m} & \implies & 0,0076 \text{ m} \\ 0,007\bar{6}5000 \text{ m} & \implies & 0,0076 \text{ m} \end{array}$$

1.4 Operações com medidas

Muitas vezes, a medida de uma grandeza é feita através de um processo complicado, onde mais de uma medida intermediária é feita. Um exemplo é o cálculo da área de um terreno retangular, onde medimos o comprimento de dois lados e depois realizamos o produto entre eles. Ou a velocidade média, que relaciona uma medida de tempo com uma de comprimento.

Em várias dessas operações, teremos medidas com diferentes quantidades de algarismos significativos. E esta divergência deve ser levada em consideração na hora de representar o resultado final da operação.

Cada uma das operações matemáticas tem uma regra própria para aferir o número de *A.S.* do resultado, mas em um caráter introdutório trabalharemos apenas com a regra da soma, generalizando-a para todas as demais.

Algarismos significativos nas operações compostas

Quando é realizado um cálculo envolvendo duas ou mais medidas com diferentes quantidades de *A.S.* o resultado final leva a mesma quantidade de algarismos que a medida com o menor número deles.

1.5 Ordens de grandeza

Muitas vezes, para representar de maneira mais compacta uma medida, fazemos o uso de alguns prefixos (como os que estão listados na tabela 1.2), alguns exemplos seguem:

$$10\bar{4}60 \text{ m} = 10,5 \text{ km}$$
$$0,0435 \text{ m/s} = 4,35 \text{ cm/s}$$
$$10\bar{5}6723 \text{ g} = 1,07 \text{ Mg}$$

Importante perceber que ao colocar, remover ou trocar o prefixo de uma medida, devemos respeitar o número de *A.S.* dela.

Nome	Símbolo	Fator	N.C.
iota	I	1000000000000000000000000	10^{24}
zeta	Z	1000000000000000000000	10^{21}
exa	E	1000000000000000000	10^{18}
peta	P	1000000000000000	10^{15}
tera	T	1000000000000	10^{12}
giga	G	1000000000	10^{9}
mega	M	1000000	10^{6}
kilo	k	1000	10^{3}
hecto	h	100	10^{2}
deca	da	10	10^{1}
		1	10^{0}
deci	d	0.1	10^{-1}
centi	c	0.01	10^{-2}
milli	m	0.001	10^{-3}
micro	μ	0.000001	10^{-6}
nano	n	0.000000001	10^{-9}
pico	p	0.000000000001	10^{-12}
femto	f	0.000000000000001	10^{-15}
atto	a	0.000000000000000001	10^{-18}
zepto	z	0.000000000000000000001	10^{-21}
iocto	i	0.000000000000000000000001	10^{-24}

Tabela 1.2: Prefixos das ordens de grandeza.

1.6 Notação Científica

A Física trabalha tanto em escalas astronômicas quanto microscópicas, o que pode tornar a representação de certas medidas bastante incoveniente, veja os exemplos:

$$\text{Carga do elétron: } 0,000000000000000000160217\bar{6}565 \text{ C}$$

$$\text{Massa do Sol: } 198\bar{8}550000000000000000000000000 \text{ kg}$$

Um modo mais prático de representá-las é a chamada *Notação Científica*, onde a medida é apresentada em termos apenas de seus A.S. e de uma potência de 10 apropriada, facilitando tanto a leitura quanto a escrita:

$$\text{Carga do elétron: } 1,6021766 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Massa do Sol: } 1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

Um número, quando escrito na forma de notação científica, contém 3 elementos:

1. O número em si, que é representado com apenas um *A.S.* antes da vírgula e todos os demais após, ou seja:

$$10 > \text{Número} \geq 1$$

2. Uma potência de 10 apropriada.
3. A unidade (geralmente a unidade no *SI*, mas não é uma regra)

1.7 Análise dimensional

A análise dimensional é uma ferramenta bastante útil na física. Em cálculos muito longos ou complexos, pode-se perder facilmente a noção de qual a grandeza estamos calculando. Ao realizar a análise, recuperamos facilmente esta informação.

Para tanto, representamos as sete grandezas fundamentais da física (citadas na seção 1.1) de acordo com a tabela 1.3 e, utilizando qualquer relação conhecida podemos determinar a grandeza (e consequentemente sua unidade) com a qual estamos trabalhando, como nos exemplos a seguir.

Grandeza	Unidade SI	Símbolo dimensional
Comprimento	m	L
Massa	kg	M
Tempo	s	T
Temperatura termodinâmica	K	Θ
Quantidade de substância	mol	N
Corrente elétrica	A	I
Intensidade luminosa	cd	J

Tabela 1.3: Grandezas fundamentais.

1.7.1 Velocidade

A velocidade é uma grandeza derivada (não-fundamental), algumas das unidades utilizadas para representá-la são: m/s, km/h e mi/h.

Em todos os casos é possível perceber que as unidades representam uma medida de comprimento dividida por uma medida de tempo. Ou:

$$[v] = L/T$$

que quer dizer: a grandeza velocidade é a razão entre um comprimento e o tempo.

Podemos também partir de alguma relação, como a velocidade no movimento retilíneo uniforme:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow [v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T}$$

1.7.2 Energia

Podemos deduzir a dimensão da energia partindo, por exemplo, da equação de Einstein:

$$E = mc^2 \Rightarrow [E] = [m] \cdot [c]^2$$

como a grandeza da massa é o M e c, que é a velocidade da luz, tem grandeza L/T:

$$[E] = M \cdot (L/T)^2 = \frac{ML^2}{T^2}$$

Uma das utilidades desta análise é deduzir as unidades do SI. Sabendo que as unidades para massa, comprimento e tempo são o kg, m e s, respectivamente, chegamos a conclusão que o Joule (J, unidade do SI para energia) é:

$$1\ \mathrm{J} = 1 \frac{\mathrm{kg\ m^2}}{\mathrm{s^2}}$$

1.7.3 Grandeza X

Considere uma grandeza desconhecida, calculada:

$$X = \frac{10\ \mathrm{kg}}{2,0\ \mathrm{m} \times (3,0\ \mathrm{s})^2}$$

de onde tiramos que as grandezas associadas à ela são massa, distância e tempo ao quadrado. Analisando a dimensão temos:

$$[X] = \frac{M}{L\ T^2}$$

Consultando esta grandeza em uma tabela, vemos que ela corresponde a uma pressão, medida em kg/m $\mathrm{s^2}$ ou, de acordo com o SI, em $\mathrm{N/m^2}$.

Exemplos

Percebam também o respeito ao número de A.S.:

1. Dias no ano:

$$365\ \mathrm{d} \implies 36,5 \times 10^1\ \mathrm{d} \implies 3,65 \times 10^2\ \mathrm{d}$$

mas

$$1\ \mathrm{d} = 60 \times 60 \times 24\ \mathrm{s} = 86400\ \mathrm{s} \implies (3,65 \times 10^2) \times (86400\ \mathrm{s}) \implies$$
$$3,1\bar{5}36000 \times 10^7\ \mathrm{s}$$

2. Massa de um caminhão

$$25\ \mathrm{t}$$

transformando

$$1\ \mathrm{t} = 1000\ \mathrm{kg} = 1,000 \times 10^3\ \mathrm{kg}$$
$$25\ \mathrm{T} = 25 \times 10^3\ \mathrm{kg} = 2,5 \times 10^4\ \mathrm{kg}$$

3. 1 quilate (diamante)

$$1,00\ \mathrm{ct} = 200\ \mathrm{mg} = 0,200\ \mathrm{g} = 2,00 \times 10^{-1}\ \mathrm{g} = 2,00 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg}$$

1.8 Exercícios

Respostas no capítulo 4.

1. Na tabela 1.4, aponte o número de algarismos significativos de cada medida e reescreva-as obedecendo as regras da notação científica, com as unidades apropriadas do S.I. (*Dica para o item f:* 1 mi = 1609, 34 m = 1760 jd = 5280 ft.)

	Medida	A.S.	Not. Científica
a	$0,823$ kg		
b	$14,59\bar{7}63$ s		
c	$19,4 \times 10^5$ K		
d	387 mm		
e	$7,2$ km		
f	40 mi/h		
g	620 min		

Tabela 1.4: Exercícios 1 e 2.

2. Para os itens da tabela 1.4, efetue as operações a seguir, obedecendo as regras de operações com medidas e de arredondamento:
   (a) $a.b.c$
   (b) $\dfrac{a}{b}$
   (c) $\dfrac{a}{e^2} = \dfrac{a}{e.e}$
   (d) $b + d$

3. Uma pessoa adulta tem, em média, 150000 fios de cabelo na cabeça, que crescem a uma taxa média de $1,25$ cm/mês. Baseado nisso, calcule quantos metros de cabelo a população de Palhoça (119360 hab)[2] produz em $5,00$ anos.*(A título de comparação, a distância entre a Terra e a Lua é da ordem de* 3×10^8 m.*)*

4. A população da Terra, em 2011, era de $7,0 \times 10^9$ habitantes, sendo que dobrou em pouco menos de 50 anos. Considerando um crescimento populacional onde ela dobre a cada 50 anos, estime a população mundial no ano de 3011.

---

[2] Censo de 2010.

Capítulo 2

Vetores

2.1 Grandezas escalares e vetoriais

Considere uma pessoa tentando empurrar um carro sem gasolina. Se ela quer empurrá-lo para a esquerda ela deve aplicar uma força da direita para a esquerda, e se quer empurrá-lo para a direita, o contrário. Vemos aí um exemplo de uma grandeza física, a força, que tem uma característica espacial associada a ela. Isto é, forças idênticas aplicadas em orientações distintas produzem resultados diferentes.

Já a massa do carro não tem essa característica, se ela for, digamos, 1200 kg, tanto faz se o carro está de cabeça para baixo, de lado, se os pneus estão murchos ou se está fazendo sol, a única informação relevante para a medida da massa de um objeto é a magnitude dela.

Essas características distintas correspondem, na física, aos conceitos de *grandezas vetoriais* e *grandezas escalares*, descritos na tabela 2.1.

Vetoriais	**Escalares**
Grandezas físicas que possuem uma característica espacial necessária à sua completa descrição.	Grandezas físicas descritas apenas em termos de sua magnitude.
Representadas por vetores	Representadas por escalares (números)
Exemplos: velocidade, aceleração, campo elétrico, força, momento angular	Exemplos: massa, temperatura, energia, carga elétrica, densidade

Tabela 2.1: Grandezas vetoriais vs. escalares.

2.2 Representação cartesiana de um vetor

Representamos um vetor no plano cartesiano atráves de um par ordenado $(x; y)$, onde x corresponde ao valor da coordenada horizontal e y da vertical. Deste modo o vetor é um objeto que começa na origem do sistema de coordenadas e vai até o ponto $(x; y)$; e é representado:

$$\vec{v} = (x; y)$$

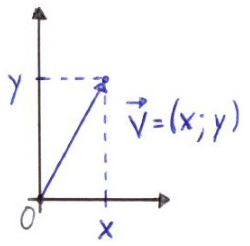

Figura 2.1: Vetor no plano cartesiano.

2.3 Propriedades básicas

2.3.1 Módulo

O módulo de um vetor é a medida do seu comprimento, ou, falando de uma grandeza física, é a medida da sua magnitude. Quando você afirma que as velocidades de dois carros são 80 km/h e 40 km/h, respectivamente, você sabe que o *mais rápido* é o que se move a 80 km/h. Esta noção de intensidade está associada ao módulo.

O módulo de um vetor é representado e calculado em termos das suas coordenadas cartesianas:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.1}$$

A equação 2.1 é o próprio teorema de pitágoras, onde o módulo do vetor pode ser entendido como a hipotenusa de um triângulo retângulo e as coordenadas x e y como os catetos, ilustrados na figura 2.2.

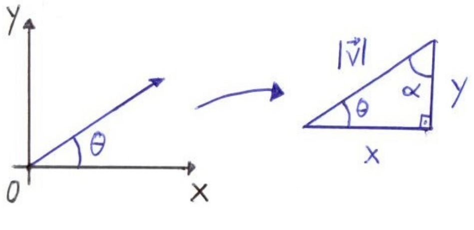

Figura 2.2: Vetor entendido como um triângulo.

2.3.2 Direção e Sentido

A direção e o sentido de um vetor são a reta onde ele está inscrito e o sentido que ele segue nela. Fisicamente é a sua orientação espacial (a mesma característica que o distingue de um escalar), no exemplo dos dois carros corresponde à direção que eles seguem na estrada.

A indicação da direção e sentido de um vetor é feita em termos dos ângulos que ele faz com os eixos coordenados. Utilizando alguns conceitos de trigonometria no vetor da figura 2.2 temos:

$$cos\ \theta = \frac{x}{|\vec{v}|} \quad sen\ \theta = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad tg\ \theta = \frac{y}{x} = \frac{sen\ \theta}{cos\ \theta} \tag{2.2}$$

$$cos\ \alpha = \frac{y}{|\vec{v}|} \quad sen\ \alpha = \frac{x}{|\vec{v}|} \quad tg\ \alpha = \frac{x}{y} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \tag{2.3}$$

$$\tag{2.4}$$

2.3.3 Multiplicação por escalar

Multiplicar um vetor por um escalar é a operação matemática mais simples que podemos efetuar com um vetor. Ao efetuar o produto entre um vetor $\vec{v} = (x; y)$ por um escalar a temos:

$$a\vec{v} = a(x; y) = (ax; ay) \tag{2.5}$$

ou seja, multiplicar o vetor por um número corresponde a multiplicar as suas componentes por este mesmo número, separadamente.

É importante perceber que ao fazer isso, o módulo do novo vetor se altera da seguinte forma:

$$|a.\vec{v}| = |a|.|\vec{v}|$$

Quanto à direção de um vetor, esta permanece inalterada, independente do escalar que o multiplica. O sentido porém, se inverte quando o escalar é negativo, como ilustrado na figura 2.3.

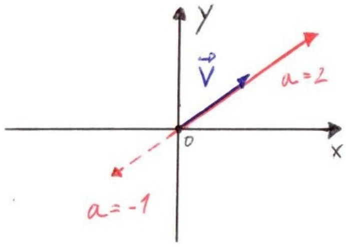

Figura 2.3: Multiplicação de um vetor por um escalar.

2.3.4 Soma e subtração vetorial

Assim como fazemos com escalares, podemos somar vetores. Porém, as componentes em cada eixo são somadas separadamente. Com dois vetores $\vec{a} = (a_x; a_y)$ e $\vec{b} = (b_x; b_y)$ a sua soma é representada como um vetor $\vec{c}$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_x; a_y) + (b_x; b_y) \\ &= (a_x + b_x; a_y + b_y) \\ &= \vec{c} = (c_x; c_y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $c_x = a_x + b_x$ e $c_y = a_y + b_y$ são as componentes do vetor resultante, $\vec{c}$.

Uma intepretação interessante deste resultado é o que chamamos de *soma gráfica*, ilustrado na figura 2.4. Quando somamos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podemos reescrever um deles no final do outro (como se o final dele fosse uma nova origem de sistema coordenado) e, ao traçar um vetor começando na origem e terminando no final do segundo temos o mesmo vetor $\vec{c}$ obtido através da soma analítica. Essa operação independe da quantidade de vetores somados e da ordem em que ela é efetuada, o que a confere o nome *regra do paralelogramo.*

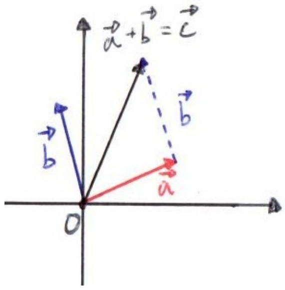

Figura 2.4: Soma vetorial.

No caso da subtração vetorial, podemos manipular a expressão, tornando a sua abstração mais tangível:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$$

ou seja, realizamos a soma de $\vec{a}$ com o vetor oposto a $\vec{b}$, ($\vec{b}$ multiplicado pelo escalar -1).

2.4 Representação em termos de versores canônicos

Utilizando os conceitos das seções anteriores podemos introduzir uma nova maneira de representar os vetores, que será particularmente útil para os cálculos na física, baseado nos *versores canônicos.*

Versores são vetores cujo módulo é igual a um e são representados com um acento circunflexo (versor $a = \hat{a}$, com $|\hat{a}| = 1$).

Na geometria euclidiana, o espaço tridimensional é gerado por três versores específicos, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, para os eixos x, y e z, respectivamente. Estes são os chamados *versores canônicos.*

Utilizando-os, qualquer vetor agora será representado como uma soma dos três versores:

$$\vec{v} = (x; y; z) = (v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) \tag{2.7}$$

Nessa representação, as equações 2.5 e 2.6 são reescritas:

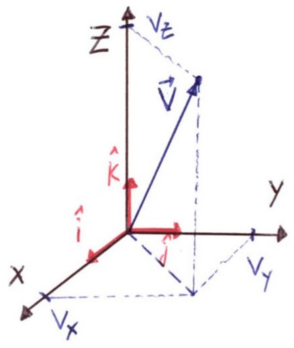

Figura 2.5: Vetor $\vec{v}$ em termos dos versores canônicos.

$$a\vec{v} = a(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}) = av_x\hat{\imath} + av_y\hat{\jmath} + av_z\hat{k} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) + (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) \\ &= (a_x + b_x)\hat{\imath} + (a_y + b_y)\hat{\jmath} + (a_z + b_z)\hat{k} \end{aligned} \tag{2.9}$$

2.5 Multiplicação entre vetores

Ao multiplicar dois escalares temos o que chamamos de *produto*. Vetores porém, por serem entidades matemáticas mais complexas que os escalares não gozam da mesma propriedade, tendo dois modos distintos de serem multiplicados.

2.5.1 Produto escalar

É a operação que ao multiplicar dois vetores resulta em um escalar (desprovido do caráter espacial), o *produto escalar* entre dois vetores é representado e definido:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.cos\ \theta_{ab} \tag{2.10}$$

onde $cos(\theta_{ab})$ é o ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Uma outra forma de calcular o produto escalar, em termos das componentes dos vetores multiplicados, decorre da definição 2.10:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \tag{2.11}$$

2.5.2 Produto vetorial

Também é possível multiplicar dois vetores e obter como resultado um novo vetor, este processo é chamado *produto vetorial* e para vetores tridimensionais é representado e definido:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \end{vmatrix}= \tag{2.12}$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\hat{\imath}+(a_z b_x-a_x b_z)\hat{\jmath}+(a_x b_y-a_y b_x)\hat{k} \tag{2.13}$$

E caso a única informação desejada seja o módulo do vetor resultante, podemos proceder:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|.|\vec{b}|.sen\ \theta_{ab} \tag{2.14}$$

De um modo qualitativo o produto vetorial pode ser avaliado com a regra da mão direita, onde você aponta os dedos na orientação do primeiro vetor, levando-os então na direção do segundo. A orientação do seu polegar indica a direção e o sentido do vetor resultante.

2.6 Exercícios

Respostas no capítulo 4.

1. Calcule o módulo, a direção e o sentido dos seguintes vetores:
   (a) $\vec{v}=3\hat{\imath}+4\hat{\jmath}$
   (b) $\vec{v}=2\hat{\imath}-\sqrt{2}\hat{\jmath}$
   (c) $\vec{v}=5\hat{\jmath}$
   (d) $\vec{v}=-4\hat{\imath}-3\hat{\jmath}$
   (Dica para a resolução, faça o gráfico!)

2. Faça a soma gráfica e algébrica para os seguintes vetores:
   (a) $\vec{a}=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=-\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$
   (b) $\vec{a}=2\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=4\hat{\imath}-5\hat{\jmath}$
   Subtração gráfica e algébrica:
   (c) $\vec{a}=\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}$
   (d) $\vec{a}=4\hat{\imath}-2\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=5\hat{\imath}+\hat{\jmath}$

3. Calcule θ_{ab} e então o produto escalar entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ utilizando:
   $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos(\theta_{ab})$
   (a) $\vec{a}=3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=2\hat{\imath}-2\hat{\jmath}$
   (b) $\vec{a}=3\hat{\imath}+3\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=-2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$
   (c) $\vec{a}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ e $\vec{b}=2\hat{\imath}+\hat{\jmath}$

4. Calcule o produto escalar e o produto vetorial para os seguintes vetores tridimensionais:
   (a) $\vec{a}=3\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}$ e $\vec{b}=-\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-4\hat{k}$
   (b) $\vec{a}=6\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-3\hat{k}$ e $\vec{b}=-4\hat{\imath}+2\hat{\jmath}+\hat{k}$

   (c) $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$ e $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

5. Calcule o módulo dos vetores resultantes (no produto vetorial) no exercício anterior.

6. Um vetor $\vec{a}$ tem módulo de 10,0 unidades e sentido de Oeste para Leste. Um vetor $\vec{b}$ tem módulo de 20,0 unidades e sentido de Sul para Norte. Determine o módulo dos seguintes vetores:
   (a) $\vec{a} + \vec{b}$
   (b) $\vec{a} - \vec{b}$
   (c) $\vec{a} + 2.\vec{b}$
   (d) $-3.\vec{a} + 2.\vec{b}$

7. Dados dois vetores $\vec{a} = 2,0\hat{\imath} - 1,0\hat{\jmath}$ e $\vec{b} = 1,0\hat{\imath} + 2,0\hat{\jmath}$, determine o módulo e a direção de:
   (a) $\vec{a}$
   (b) $\vec{b}$
   (c) $\vec{a} + \vec{b}$
   (d) $\vec{a} - \vec{b}$
   (e) $\vec{a} + 2\vec{b}$

8. A resultante de uma soma vetorial de dois vetores possui módulo igual a $4,0m$. O módulo de um dos vetores componentes é igual a $2,0m$ e o ângulo entre os dois vetores componentes é igual a 60^o. Calcule o módulo do outro vetor componente. *Dica: lei dos cossenos.*

Capítulo 3

Mecânica

Um dos estudos mais fundamentais da física é o movimento, suas causas e sua quantificação. Estes estudos compõem a mecânica, que é dividida em três partes fundamentais:

Estática	Estuda o equilíbrio dos corpos, ou seja, as situações específicas onde um conjunto de forças produz uma resultante nula. Grandemente necessária à engenharia.
Cinemática	Estuda o movimento dos corpos, mas sem considerações sobre as suas causas, apenas estabelecendo relações entre posições, velocidades e acelerações.
Dinâmica	Um estudo mais aprofundado do movimento, onde são feitas considerações sobre forças e energia, aumentando muito a capacidade descritiva da mecânica.

Neste capítulo abordaremos apenas a dinâmica, limitando a descrição matemática dos fenômenos enunciados apenas ao essencial para uma adequada compreensão dos sistemas estudados.

3.1 Leis de Newton da dinâmica

Há muito tempo que a humanidade busca descrever o movimento dos corpos, o interesse para esse estudo advém tanto da própria natureza do homem de tentar compreender o que há ao seu redor quanto de necessidades econômicas. E há uma enormidade de nomes que compõem a parte bem-sucedida do estudo da dinâmica. Nos limitaremos aqui a enunciar os trabalhos de Galileu e Newton, que são os principais responsáveis pelo que conhecemos hoje como *leis de Newton.*

3.1.1 Lei da inércia

Também chamada de primeira lei de Newton, relaciona de maneira sucinta diversos estudos por Galileu.

Lei da inércia

Quando a força líquida externa agindo sobre uma partícula é nula, o seu estado de movimento permanece inalterado.

Este enunciado relaciona o fenômeno que chamamos no cotidiano de *inércia*, um objeto que se move com certa velocidade precisa sofrer alguma ação para que sua velocidade mude. Efeitos análogos também aparecem quando estamos em um veículo em movimento que sofre uma variação de velocidade (o nosso corpo continua com a mesma velocidade que o veículo tinha antes, exigindo alguma interação com a sua estrutura interna para alterá-la) ou ao carregar uma bandeja com pratos e copos (que necessita uma grande atenção da nossa parte para não passarmos vexame em uma praça de alimentação).

Também é interessante enunciar de maneira mais apropriada alguns conceitos que serão abordados em todos os nossos estudos:

Velocidade	É a relação entre a variação da posição de um corpo e o tempo decorrido nesse deslocamento. Chamada também de *estado de movimento*, é esta propriedade que permanece inalterada no escopo da lei da inércia. É uma grandeza vetorial e sua direção e sentido é a mesma indicada pelo movimento instantâneo à que ela está relacionada; um carro que viaja para o norte tem o seu vetor velocidade apontado para o norte.
Aceleração	Variação da velocidade em função do tempo ou, analogamente, alteração do estado de movimento. Também é uma grandeza vetorial e sua direção e sentido correspondem à variação da velocidade; um objeto sendo acelerado tem o vetor aceleração apontando na mesma direção que a velocidade e o oposto para uma desaceleração, no caso de um objeto que faz uma curva a aceleração não está mais na mesma direção que a velocidade.
Força	Forças são interações entre corpos, elas se manifestam de diversas formas e tem diversas origens, elas são as únicas responsáveis por uma alteração da velocidade de uma partícula.
Massa	Massa inercial é a propriedade que a matéria tem de resistir a alteração de sua velocidade ou, analogamente, inércia. Quanto maior a massa de um corpo, mais difícil (uma força maior é necessária) é mudar seu estado de movimento.

3.1.2 Lei fundamental da dinâmica

Conhecida atualmente como segunda lei de Newton, é a grande pérola do trabalho dele no desenvolvimento da mecânica.

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}} \tag{3.1}$$

onde

$\vec{F}$	força total agindo sobre a partícula (se mais de uma força age, é a soma vetorial delas) ($\mathrm{N} = \mathrm{kg.m/s^2}$)

m massa inercial do corpo (kg)

$\vec{a}$ aceleração, alteração do estado de movimento (m/s^2)

Nesta equação, Newton diz que o movimento de um corpo só pode ser alterado quando age sobre ele uma força externa. Além disso, ele diz que alteração do movimento (aceleração) é diretamente proporcional à força total atuante, e que a constante de proporcionalidade é a massa. Ao entendimento desta equação é necessário um domínio dos conceitos enunciados na seção 3.1.1.

Também é importante perceber que a própria primeira lei está contida na segunda. Pois, com uma força total nula, não haverá aceleração e portanto a velocidade permanecerá inalterada.

3.1.3 Lei da ação e reação

Outro efeito importante observado por Newton é que toda vez que uma ação (força) é feita por um corpo sobre um segundo corpo aparece uma reação (também uma força), do segundo sobre o primeiro, e estas forças obedecem a relação:

Ação e reação

$$\vec{F_{ab}} = -\vec{F_{ba}} \tag{3.2}$$

Uma força causada por uma partícula a sobre uma b gera uma segunda força de b sobre a, com igual intensidade e na mesma direção apenas com sentido oposto.

Aqui é importante perceber que como estamos trabalhando com partículas, a direção (reta onde estão inscritos os vetores força) é aquela que passa sobre as duas partículas interagentes. Além disso as forças que formam o chamado *par ação-reação* são sempre de mesma natureza e nunca agem sobre o mesmo corpo (a reação de uma força de atrito, por exemplo, é uma outra força de atrito).

3.2 Forças da natureza

Em nosso cotidiano frequentemente nos referimos a diversas forças (atrito, peso, empuxo, centrípeta, para citar alguns exemplos). Mas dentro da física, a grande maioria delas é explicada em termos de outras forças, mais básicas, chamadas *forças fundamentais.* Desse modo, quaisquer outras forças que necessitem de uma mais básica para a sua descrição são chamadas *forças derivadas.* Como o ponto de vista do nosso estudo é algo mais aplicado, após uma breve descrição das forças fundamentais nos dedicaremos a estudar as três leis de Newton aplicadas às forças derivadas mais importantes do cotidiano.

3.2.1 Forças fundamentais

Com origens ainda explicadas de modo rudimentar, as forças fundamentais são as bases do universo como o conhecemos. Atualmente conhecemos quatro: a força gravitacional, que é a interação sempre atrativa entre corpos que tenham massa; a eletromagnética, onde os efeitos elétricos e magnéticos sobre cargas são quantificados; a nuclear forte, que explica a estabilidade dos núcleos atômicos; e a nuclear fraca, que explica certas anomalias no comportamento das partículas subatômicas.

Newton também foi o primeiro a descrever de modo razoavelmente satisfatório a gravitação, com a sua *teoria da gravitação universal.* Por mais de 200 anos ela permitiu a humanidade estudar o sistema solar e tudo que ele contém, até que em 1915 Einstein, com a sua *teoria geral da relatividade* trouxe luz a diversos outros fenômenos.

O entendimento atual das outras três forças é fruto de trabalhos bem mais experimentais e recentes, e pulando enormemente o seu desenvolvimento temos hoje o chamado *modelo padrão*, teoria que as explica como fruto da interação entre diversas partículas fundamentais.

3.2.2 Força peso

Força originada da interação gravitacional entre a Terra e qualquer objeto que esteja na sua superfície. De acordo com a gravitação universal de Newton, para 2 objetos interagindo deste modo, a força entre eles será:

$$\vec{F_G} = \frac{G m_1 m_2 \hat{r}}{r^2}$$

Quando calculamos a força peso, estamos fazendo na verdade o cálculo desta equação, porém aplicando os valores: m_2 = massa da terra = $5,972 \times 10^{24}$ kg, r = raio da Terra = $6,37 \times 10^6$ m e $G = 6,673 \times 10^{11}$ N m^2/kg^{-2}. Que resulta, vetorialmente:

$$\boxed{\vec{F_P} = m\vec{g}} \tag{3.3}$$

onde

$\vec{F_P}$ força peso (N)

m massa (kg)

$\vec{g}$ aceleração da gravidade na superfície da terra ($\vec{g} \approx -9,8\hat{j}$ m/s^2)

É importante saber que este é um cálculo aproximado, que não leva em consideração a rotação da terra e a sua forma não esférica (o planeta, devido à rotação, tem a forma de um geóide). Além disso, é um cálculo para objetos próximos do nível do mar. A tabela 3.1 mostra vários valores de $|\vec{g}|$ calculados em várias condições.

Local	Latitude	Altitude	$\lvert\vec{g}\rvert$ (m/s^2)
Equador	0^o	0 km	$9,78$
Pólos	90^o	0 km	$9,83$
Florianópolis	$27,6^o$	0 km	$9,80$
Avião	-	10 km	$9,75$
ISS	-	400 km	$8,68$

Tabela 3.1: Vários valores de $|\vec{g}|$.

3.2.3 Força elástica

Essa força está relacionada com uma propriedade dos materiais, a *elasticidade.* Um entendimento completo da elasticidade de um material é algo bastante complexo, já que esta depende de uma série de propriedades microscópicas do mesmo. Aqui, nos bastará somente o entendimento pratico deste fenômeno.

As forças elásticas, então, aparecem quando um objeto sofre uma deformação (compressão ou alongamento). Durante esta perturbação o material reage com o que chamamos de *força restauradora*, uma originada na estrutura interna do material com o efeito de restaurar o equilíbrio (a situação original onde não havia perturbação).

Matematicamente, observamos que para um certo material, a força elástica manifestada é proporcional ao desequilíbrio aplicado a ele:

$$\boxed{F_E = -k\ \Delta x} \tag{3.4}$$

onde

F_E	força elástica (N)
k	elasticidade do material, constante elástica (N/m)
Δx	deslocamento em relação ao equilíbro (m)

É importante perceber que a força elástica é sempre oposta ao desequilíbrio, quando uma mola é comprimida a força elástica tenciona estendê-la, já quando ela é alongada, a força elastica a contrai, na equação 3.4, esta idéia esta presente no sinal negativo no lado direito. Além disso, essa equação é válida apenas no que chamamos *regime linear*, também conhecido como *Lei de Hooke*[1], que ocorre apenas enquanto nao há deformações permanentes no material (e você está bem abaixo do limite de ruptura).

3.2.4 Força de resistência

Analisando de uma forma precisa, todos os materiais tem elasticidade. Porém, na grande maioria dos casos, as deformações manifestadas por eles quando submetidos a forças de compressão ou distensão são negligenciáveis (se você subir em cima de um tijolo, não perceberá a sua compressão).

Mas a ausência de uma resposta visual não significa que o material não reage a uma força aplicada sobre ele (em acordo com a terceira lei de Newton). O que acontece de fato é o aparecimento de uma *força de resistência*, ou força de resposta. No caso de um material que resiste a uma compressão, aferimos a chamada *força normal.* Já no caso de um material que resiste a uma distensão, uma *força de tensão.*

Deste modo, as forças de resistência se manifestam como reações de um objeto a forças impostas sobre ele por algum agente externo. A identificação correta das forças que agem sobre um dado corpo é um assunto bastante complexo, e no âmbito das forças de resistência, é sempre necessário analisar cada situação independentemente, sendo impossível associar a elas uma equação definitiva.

---

[1] Em alusão ao cientista inglês Robert Hooke (1635, 1703).

3.2.5 Força de atrito superficial

Quando tentamos causar um movimento relativo entre duas superfícies através da aplicação de uma força lateral, como na figura 3.1, observa-se uma certa resistência (além das inércias dos objetos em contato). Observa-se também que dependendo da composição dos objetos e das suas estruturas (tanto macroscópicas quanto microscópicas) esta resistência pode ser maior ou menor.

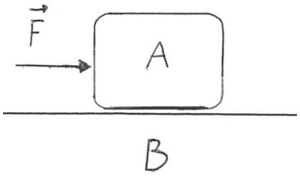

Figura 3.1: Força tangencial.

Chamamos esta resistência de *força de atrito superficial* e observamos que ela está relacionada, em primeira instância, com as rugosidades (ou imperfeições) que as superfícies em contato possuem, de modo geral aparecem várias forças normais nestas regiões quando da aplicação de uma força lateral, como na figura 3.2. Quando a força tangencial é aplicada, aparecem reações à ela em todas as partes que estão diretamente em contato, a soma de todas estas reações é a força de atrito. ALém disso, em segunda instância ocorrem interações químicas entre as moléculas das superfícies nos pontos onde elas estão microscopicamente em contato.

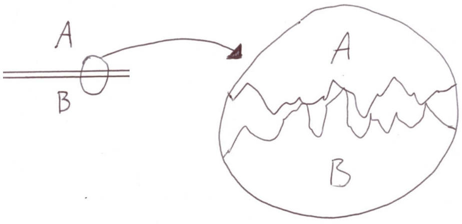

Figura 3.2: Interações microscópicas entre as superfícies.

Para determinar a magnitude da força de atrito podemos fazer um experimento simples: aplicamos uma força tangencial de valor inicialmente pequeno e vamos gradualmente aumentando-a. Observamos que até uma certo valor de $\vec{F}$ a força de atrito tem magnitude exatamente igual a ela, mantendo as superfícies em repouso. Chamamos este comportamento de *regime de atrito estático.*

Em um dado momento, porém, a força de atrito não é mais capaz de impedir o movimento, e à força de atrito máxima obtida chamamos *força de atrito estático máxima*, a partir daí começa um movimento relativo entre as duas superfícies. Dizemos então que o sistema está no *regime de atrito dinâmico.*

Quando começa o movimento relativo entre as placas, as suas imperfeições não tem tempo de interagir do mesmo modo que quando em repouso e isto causa uma imediata redução da força de atrito, que passa a variar em torno de um valor médio chamado de *força de atrito cinético.* A figura 3.3 ilustra estes comportamentos.

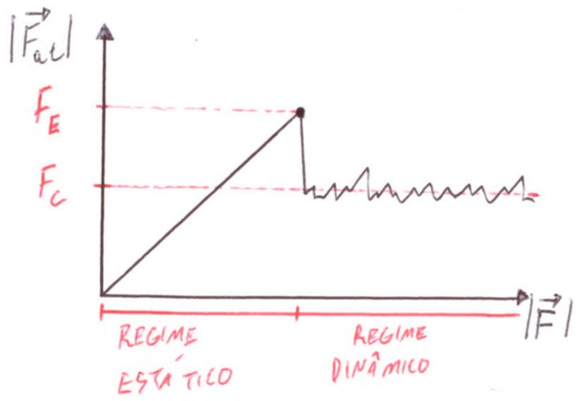

Figura 3.3: Força de atrito em função de uma força tangencial.

Como a força de atrito é proprorcional à intensidade das interações entre as superfícies, temos que um aumento da força de contato entre elas aumenta diretamente o atrito e, matematicamente:

$$\boxed{F_{at} = \mu\ F_N} \tag{3.5}$$

onde

F_{at} força de atrito superficial (N)

μ coeficiente de atrito, uma medida experimental da intensidade das interações entre duas superfícies específicas, além disso tem valores diferentes no caso estático (μ_E) e cinético (μ_C)

F_N força normal, força de contato entre as superfícies (m)

O caráter vetorial da força de atrito aparece naturalmente quando entedemos que ela é sempre contrária ao movimento (ou, no caso de repouso, do movimento que haveria sem atrito).

Contrariamente à intuição de muitos, o atrito não depende da área, pois não está relacionado à pressão de contato, e sim à força. E ele também não depende da velocidade (apesar que em velocidades suficentemente altas, pode haver uma alteração das características das superfícies, o que aí sim levaria a uma variação do atrito).

3.2.6 Força de atrito em fluidos

Se você já andou de bicicleta em um dia com vento, ou colocão a mão para fora da janela de um carro em movimento certamente já presenciou a *resistência do ar*, uma força que dificulta o movimento de objetos na atmosfera.

Esta força não é exclusividade do ar, de fato todos os meios fluidos exercem sobre objetos sólidos o que chamamos de *força de arrasto*, ou *força de atrito viscoso*, uma força de resistência contrária ao movimento. Matematicamente, temos:

$$\boxed{\vec{F_{av}} = -b\ \vec{v}} \tag{3.6}$$

onde

$\vec{F_{av}}$	força de atrito viscoso (N)
b	coeficiente linear de atrito viscoso, uma medida experimental da intensidade das interações entre o fluido e o objeto em movimento, depende da forma do objeto, da sua área e de como as partes interagem quimicamente (kg/s)
$\vec{v}$	velocidade (m/s)

Um resultado direto que a expressão acima implica é que a força de atrito viscoso aumenta com o aumento da velocidade. Este efeito aparece no que chamamos de *velocidade limite*, ou *velocidade terminal*. Que é a velocidade máxima que um objeto em queda livre (sob ação unicamente da gravidade) pode atingir dentro de um fluido:

$$v = \frac{F_P}{b}$$

Este modelo, proposto na equação 3.6, é bastante limitado. Modelos mais complexos tem termos adicionais proporcionais ao quadrado e a outras potências da velocidade, e dentro da engenharia um esforço gigantesco é feito par tentar criar objetos e materiais que minimizem a força de arrasto.

3.2.7 Força centrípeta

Diferentemente das forças estudadas até agora, a força centrípeta não é definida por alguma característica específica. Ironicamente, toda vez que uma partícula tem a sua trajetória alterada continuamente por uma força, costumamos dizer que ela está sobre a ação de uma força centrípeta. Aqui é importante perceber que é justamente a ação da força centrípeta que gera a *alteração da direção do movimento*.

Mas e quem é a força centrípeta então? Ela é apenas a força resultante neste caso. Exatamente por isso que ela pode ser qualquer força. No movimento circular uniforme (onde um sistema gira com velocidade rotacional constante), podemos acompanhar alguns exemplos:

- Em uma usina eólica, um ponto na ponta da pá da hélice tem a sua velocidade alterada o tempo todo, à esta aceleração associamos uma força centrípeta que neste caso é devido à integridade estrutural da pá, ou uma força de tensão dos elementos adjacentes ao ponto.

- Um carro que descreve uma curva em uma estrada está sob a ação de uma força centrípeta que é a força de atrito lateral dos pneus com o solo. Caso esta força seja inferior a necessária para descrever a curva com a velocidade que ele possuir, o carro desliza, um processo quase sempre irreversível (já que a força de atrito no deslizamento é ainda menor que no rolamento).

- A centrífuga de uma máquina de lavar extrai a água das roupas submetendo-as a uma grande velocidade rotacional. Para tanto, as paredes da centrífuga exercem sobre a roupa uma força normal, que neste caso é a força centrípeta do sistema.

3.3 Trabalho e energia

O conceito mais importante da física é, sem sombra de dúvidas, o da conservação da energia. Todos os processos, em todos os experimentos e nas teorias que os descrevem, apontam para este resultado. Mas para entendê-lo, precisamos entender primeiro o que é energia.

Energia nada mais é do que um conceito, só que em cada área da física ele aparece de uma forma distinta e as vezes com significados aparentemente distinto (apenas superficialmente!). A grandeza energia, então, decorre de uma definição. E na mecânica temos a definição de trabalho:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}} \tag{3.7}$$

onde

W	trabalho, quantidade de energia associada ao deslocamento $\vec{\delta r}$ de uma partícula sob a ação de uma força $\vec{F}$ ($\mathrm{J} = \mathrm{kg.m^2/s^2}$)
$\vec{F}$	força
$\vec{\Delta r}$	deslocamento, vetor correspondente às posições inicial e final da partícula (m)

3.4 Momento linear

Momento linear, também chamado *quantidade de movimento*, é uma grandeza física definida:

$$\boxed{\vec{P} = m\, \vec{v}} \tag{3.8}$$

onde

$\vec{P}$	momento linear ($\mathrm{kg\ m/s^2}$)
m	massa inercial (kg)
$\vec{v}$	velocidade (m/s)

Na física, a grande importância desta definição emerge do fato que o momento linear é conservado durante colisões, ou durante qualquer processo físico onde a força resultante externa seja nula (forças internas se anulam devido à terceira lei de Newton). A primeira e a segunda leis de Newton, na verdade, são enunciadas em termos do momento. A equação 3.1 se reeescreve:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \tag{3.9}$$

onde

$\vec{F}$	força total agindo sobre a partícula
$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$	derivada do momento linear em relação ao tempo

É possível, partindo desta expressão, chegar na definição do impulso:

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P} = m\Delta\vec{v}} \tag{3.10}$$

onde

$\vec{I}$	impulso, variação no momento linear (e consequentemente no movimento) causada por uma força aplicada durante um intervalo de tempo (kg m/s^2)
Δt	intervalo de tempo onde a força é aplicada
$\Delta\vec{v}$	variação da velocidade (pode ser tanto em módulo quanto em módulo, direção e sentido)
$\Delta\vec{P}$	variação do momento linear

O impulso é uma grandeza física extremamente útil, e muitas vezes é confundida com forças. Em uma série de processos cotidianos ele é fundamental para a representação correta do fenômeno:

- Um jogador de futebol que realiza um chute na bola; neste processo ele aplica uma força média durante um curto intervalo de tempo na bola. Isto gera um impulso e através dele pode-se calcular a velocidade final da bola.
- Colisões automobilísticas, onde os veículos são projetados com o intuito de maximizar o tempo de interação, Δt, de modo que o mesmo impulso de uma colisão mortal seja gerado por uma força bem menor (aplicada durante um tempo maior), aumentando as chances de sobrevivência.
- Em uma colisão real entre dois objetos, o tempo de interação é finito, e o impulso, junto com as condições iniciais, é utilizado para calcular as velocidades finais.

E, como já mencionado anteriormente, o momento linear é conservado durante as colisões (sejam elas elásticas ou inelásticas). Matematicamene temos:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} &= \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \\ m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} &= m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \end{aligned} \tag{3.11}$$

m	massas das partículas 1 e 2
$\vec{P}_i$	momentos iniciais das partículas 1 e 2, antes da colisão
$\vec{P}_f$	momentos finais das partículas 1 e 2, após a colisão
$\vec{v}_i$	velocidades iniciais das partículas 1 e 2, antes da colisão
$\vec{v}_f$	velocidades finais das partículas 1 e 2, após a colisão

3.5 Torque

3.6 Exercícios

Respostas no capítulo 4.

1. Uma massa padrão ($m_1 = 1,0$ kg) sofre uma aceleração de $5,0$ m/s^2 de uma força desconhecida F, uma segunda massa desconhecida (m_2), sofre da mesma força uma aceleração de 11 m/s^2. Calcule:
   (a) O módulo da força F.
   (b) A massa m_2.
2. Dois blocos estão em contato sobre uma mesa plana sem atrito. Uma força horizontal é aplicada a um dos blocos conforme indicado na figura 3.4.
   (a) Se $m_1 = 3,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg e $F = 6,0$ N, ache a força de contato entre os dois blocos.
   (b) Suponha que a mesma força F seja aplicada a m_2, ao invés de m_1. Obtenha o módulo da força de contato entre os dois blocos.

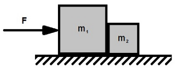

Figura 3.4:

3. Um foguete juntamente com sua carga possui massa igual a $7,0 \times 10^4$ kg. Calcule a força de propulsão do foguete quando:
   (a) O foguete estiver "pairando" acima da plataforma de lançamento.
   (b) O foguete está acelerando para cima a 25 m/s^2.
4. Um astronauta possui massa $m = 70$ kg. Calcule o seu peso, quando estiver em repouso sobre uma balança:
   (a) Em uma farmácia na Terra.
   (b) Em uma farmácia na Lua (onde $g = 1,67$ m/s^2).
   (c) Em uma farmácia em Júpiter (onde $g = 25,9$ m/s^2).
5. Uma mola de constante elástica desconhecida está disposta verticalmente e na sua extremidade inferior um objeto de massa $m = 2,5$ kg é pendurado.
   (a) Qual é a o valor de k se o desequilíbrio que o objeto produz na mola é de 10 cm?
   (b) Trocando o objeto por um de $6,0$ kg, qual é o desequilíbrio que ele produzirá na mola?
6. Qual é a força necessária para comprimir uma mola de $k = 500$ N/m em:
   (a) 10 cm

   (b) 20 cm
   (c) 30 cm

7. Um carro possui massa $m = 1200$ kg, quando quatro passageiros de $m = 80,0$ kg entram nele e as suspensões cedem $6,00$ cm, com base nisso, qual é o valor de k associado à elas?

8. Qual é a força normal exercida por uma mesa plana sobre uma caixa de cenouras que pesa 500 N? *Cuidado! Lembre da questão 8.*

9. Qual é a força normal exercida por uma mesa de inclinação variável sobre uma caixa de batatas com $m = 40,0$ kg para os seguintes ângulos de inclinação com a horizontal:
   (a) $\theta = 0,00^o$
   (b) $\theta = 10,0^o$
   (c) $\theta = 17,0^o$
   (d) $\theta = 25,0^o$

10. Sabendo que a massa do bloco da figura 3.5 é de $7,0$ kg e que os angulos com o teto são $\theta = 45^o$ calcule o módulo das tensões nos cabos.

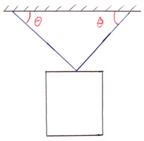

Figura 3.5:

11. Um elevador possui massa igual $4,0$ t, determine a tensão no cabo quando:
   (a) Ele permanece em repouso.
   (b) Ele é puxado de baixo para cima por meio de um cabo com uma aceleração de $1,5$ m/s^2.
   (c) O elevador está descendo com uma aceleração de $1,8$ m/s^2.

12. Qual é a aceleração lateral máxima que um garçom pode impor à uma bandeja sem derrubar (nem inclinar) um copo de *laranjinha água da serra*, cujo coeficiente de atrito estático com a bandeja vale $0,20$ e que tem uma massa $m = 350$ g?

13. Uma força horizontal $F = 70$ N empurra um bloco que pesa 30 N contra uma parede vertical, conforme indicado na figura 3.6. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco vale $0,55$ e o coeficiente de atrito cinético vale 0,35. Suponha que inicialmente o bloco esteja em repouso.
   (a) Com a força aplicada, o corpo começará a se mover?
   (b) Qual seria o valor de F necessário para começar o movimento?
   (c) Determine o valor de F necessário para que o corpo escorregue contra a parede com velocidade constante.

(d) Obtenha o valor de F para que o bloco escorregue contra a aparede com uma aceleração igual a $4,0$ m/s^2.

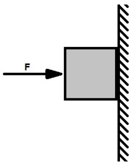

Figura 3.6:

14. Um engradado de cervejas possui massa $m = 29,1$ kg. Um homem puxa o engradado por meio de uma corda que faz um ângulo de $30,0°$ acima da horizontal.
    (a) Se o coeficiente de atrito estático vale $0,500$, qual a tensão necessária na corda para que o engradado comece a se mover?
    (b) Se $\mu_C = 0,350$, qual será a aceleração do engradado?
    (c) Qual a tensão na corda durante uma aceleração igual a g?
    (d) Se após uma decepção amorosa o homem beber todas as cervejas, diminuindo a massa do engradado para $14,7$ kg, os coeficiente de atrito mudam? E a tensão?

15. Dois paraquedistas, de massas $m_1 = 95$ kg e $m_2 = 83$ kg saltam de um avião. Considerando que os coeficientes de atrito viscoso entre eles e o ar seja $b_1 = b_2 = 11$ kg/s, calcule as suas velocidades limite quando em queda livre. Um deles esqueceu de levar um agasalho e sua avó, de massa $m_3 = 70$ kg deve atingir uma velocidade de 100 m/s para alcançá-lo antes que seja tarde. Qual é o b correspondente à esta velocidade? *Despreze uma eventual velocidade horizontal do avião.*

16. Um bloco de massa $m = 5,0$ kg escorrega ao longo de um plano inclinado de 30^o em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético vale $0,35$. Calcule os módulo da força de atrito e da aceleração resultante.

17. Na figura 3.7, um garoto maroto está sentado sobre uma caixa em um plano inclinado. Uma corda está segurando a caixa parada, sabendo que a massa do sistema garoto-caixa é 39 kg, que $\theta = 20^o$ e desconsiderando qualquer forma de atrito:
    (a) Faça um diagrama das forças envolvidas.
    (b) Calcule a tensão na corda.
    (c) Considerando que a corda se rompa, calcule a aceleração da caixa.

    https://www.youtube.com/watch?v=Ytvc1TGAu5s

18. Um homem empurra um bloco de 50 kg aplicando-lhe uma força inclinada de $60°$ em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético vale $0,20$. O corpo se desloca em linha reta. O trabalho realizado pela força aplicada pelo homem vale 800 J, para um deslocamento de $5,0$ m. Calcule o módulo desta força.

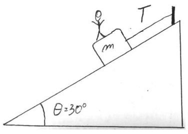

Figura 3.7:

19. Um bloco de massa igual a $4,0$ kg é puxado com velocidade constante através de uma distância $d = 5,0$ m ao longo de um assoalho por uma corda que exerce uma força constante de módulo $F = 8,0$ N formando um ângulo de $20°$ com a horizotal. Calcule:
    (a) O trabalho realizado pela corda sobre o bloco.
    (b) O trabalho realizado pela força de atrito sobre o bloco.
    (c) O trabalho total realizado sobre o bloco.

20. A energia cinética de um corpo de $m = 5,0$ kg é $E_C = 2000$ J. De que altura este corpo deveria cair para que sua energia cinética atingisse esse valor?

21. Um foguete de massa igual a $5,0 \times 10^4$ kg deve atingir uma velocidade de escape de $11,2$ km/s para que possa fugir à atração terrestre. Qual deve ser a quantidade mínima de energia para levá-lo do repouso até esta velocidade?

22. Uma moeda de $4,0$ g é pressionada contra uma mola vertical, comprimindo-a de $2,0$ cm. A constante elástica da mola vale 50 N/m. Até que altura (contada a partir da posição de equilíbrio da mola) a moeda subirá quando a mola for libertada?

23. Para uma certa mola $k = 2500$ N/m. Um bloco de $4,0$ kg cai sobre esta mola de uma altura $h = 0,60$ m. Desprezando o atrito, ache a deformação máxima da mola.

24. Um bloco de $m = 1,0$ kg colide com uma mola horizontal sem massa, cuja constante elástica vale $2,0$ N/m. O bloco comprime a mola $4,0$ m a partir da posição de repouso. Calcule:
    (a) A velocidade do bloco no momento da colisão, desprezando o atrito.
    (b) A velocidade do bloco no momento da colisão, supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal seja $0,25$.

25. A massa de um automóvel vale $1,00$ t.
    (a) Calcule a massa de um caminhão, sabendo que quando ele se desloca com o dobro da velocidade do automóvel, seu momento linear é $p_C = 10p_A$, onde p_A é o momento linear do automóvel.
    (b) Calcule o momento linear deste caminhão quando ele se desloca com velocidade de 36 km/h.

26. Uma espingarda atira balas de $10,0$ g com velocidade de 500 m/s. Calcule o momento linear e a energia cinética de cada bala.

27. Em um saque rápido no tênis, a bola ($m = 57,7$ g) alcança velocidades da ordem de 190 km/h, supondo que a raquete e a bola fiquem em contato por $5,00$ ms, calcule a força média exercida pela raquete sobre a bola. *Não é a toa que o Guga grita.*

28. Calcule os três torques aplicados aos braços de alavanca da figura 3.8, com $|\vec{r_1}| = |\vec{r_3}| = 0,50$ m, $|\vec{r_2}| = 0,30$ m, $\theta_1 = 45^o$, $\theta_2 = 90^o$, $\theta_3 = 120^o$, $|\vec{F_1}| = 20$ N, $|\vec{F_2}| = 25$ N e $|\vec{F_3}| = 15$ N.

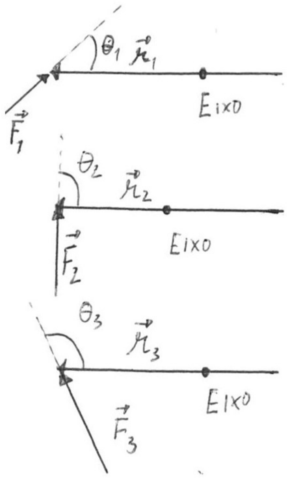

Figura 3.8:

29. Com $|\vec{F_1}| = 300$ N, $|\vec{F_2}| = 500$ N, $d_1 = 30$ cm e $d_2 = 20$ cm determine qual o sentido do movimento da haste da figura 3.9, sabendo que as forças agem perpendicularmente à ela.

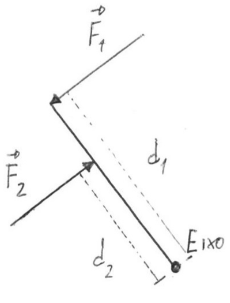

Figura 3.9:

Capítulo 4

Respostas dos exercícios

Medidas físicas

1.

	Medida	A.S.	Not. Científica
a	0,062m	2	$6,2 \times 10^{-2} m$
b	0,00153kg	3	$1,53 \times 10^{-3} kg$
c	3,475cm	4	$3,475 \times 10^{-2} m$
d	42,625g	5	$4,2625 \times 10^{-2} kg$
e	4,2s	2	$4,2 \times 10^{0} s$
f	2,3m	2	$2,3 \times 10^{0} m$
g	300 minutos	3	$1,80 \times 10^{4} s$

2. (a) $3,3 \times 10^{-6} m^2 \cdot kg$
   (b) $4,1 \times 10^{1} m/kg$
   (c) $3,5 \times 10^{-3} m/s^2$
   (d) $4,42 \times 10^{-2} kg$

3. $1,34 \times 10^{10}$ m

4. $7,3 \times 10^{15}$

Vetores

1. (a) $|\vec{v}| = 5$, o vetor $\vec{v}$ faz um ângulo de 53^o acima do eixo x, sentido p/direita
   (b) $|\vec{v}| = 2,45$, o vetor $\vec{v}$ faz um ângulo de 35^o abaixo do eixo x, sentido p/direita
   (c) $|\vec{v}| = 5$, o vetor $\vec{v}$ tem a direção do eixo y, sentido p/cima
   (d) $|\vec{v}| = 5$, o vetor $\vec{v}$ faz um ângulo de 37^o abaixo do eixo $-x$, sentido p/esquerda

2. (a) $\vec{a} + \vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j}$
   (b) $\vec{a} + \vec{b} = 6\hat{i} - 2\hat{j}$
   (c) $\vec{a} - \vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$

   (d) $\vec{a} - \vec{b} = -\hat{i} - 3\hat{j}$

3. (a) $\theta_{ab} = 90^o$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   (b) $\theta_{ab} = 90^o$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
   (c) $\theta_{ab} = 36,7^o$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$

4. (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$, $\vec{a} \times \vec{b} = -11\hat{i} + 11\hat{j} + 11\hat{k}$
   (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -23$, $\vec{a} \times \vec{b} = 8\hat{i} + 6\hat{j} + 20\hat{k}$
   (c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1/2$, $\vec{a} \times \vec{b} = -1/2\hat{i} + 1/2\hat{j} + 1/2\hat{k}$

5. (a) $|\vec{v}| = 19$
   (b) $|\vec{v}| = 22$
   (c) $|\vec{v}| = 0,86 = \sqrt{3}/2$

6. (a) $22,4$ unidades
   (b) $22,4$ unidades
   (c) $41,2$ unidades
   (d) $50,0$ unidades

7. (a) $|\vec{a}| = 2,2$, o vetor $\vec{a}$ faz um ângulo de 27^o com o eixo x e 63^o com o eixo $-y$.
   (b) $|\vec{b}| = 2,2$, o vetor $\vec{a}$ faz um ângulo de 63^o com o eixo x e 27^o com o eixo y.
   (c) $|\vec{a}+\vec{b}| = 3,2$, o vetor $(\vec{a}+\vec{b})$ faz um ângulo de 18^o com o eixo x e 72^o com o eixo y.
   (d) $|\vec{a}-\vec{b}| = 3,2$, o vetor $(\vec{a}-\vec{b})$ faz um ângulo de 18^o com o eixo x e 72^o com o eixo $-y$.
   (e) $|\vec{a} + 2\vec{b}| = 5,0$, o vetor $(\vec{a} + 2\vec{b})$ faz um ângulo de 37^o com o eixo x e 53^o com o eixo y.

8. $2,6m$

Mecânica

1. (a) $F = 5,0$ N
   (b) $m_2 = 0,45$ kg

2. (a) $F = 2,4$ N
   (b) $F = 3,6$ N

3. (a) $F = 6,9 \times 10^5$ N
   (b) $F = 2,4 \times 10^6$ N

4. (a) $F_{PT} = 6\bar{9}0$ N
   (b) $F_{PL} = 1\bar{2}0$ N
   (c) $F_{PJ} = 1\bar{8}00$ N

5. (a) $k = 2\bar{4}5$ N/m
   (b) $\Delta x = 24$ cm

6. (a) $F = 50$ N
   (b) $F = 1\bar{0}0$ N
   (c) $F = 1\bar{5}0$ N

7. $k = 13\bar{0}67$ N/m ou $k = 1,31 \times 10^4$ N/m

8. $F_N = 500$ N

9. (a) $F_N = 392$ N

    (b) $F_N = 386$ N
    (c) $F_N = 375$ N
    (d) $F_N = 355$ N

10. $F_T = 49$ N

11. (a) $T = 3,9 \times 10^4$ N
    (b) $T = 4,5 \times 10^4$ N
    (c) $T = 3,2 \times 10^4$ N

12. $a_{MAX} = 2,0$ m/s^2

13. (a) Não.
    (b) $F = 55$ N
    (c) $F = 86$ N
    (d) $F = 50$ N

14. (a) $T = 128$ N
    (b) $a = 4,57$ m/s^2
    (c) $T = 370$ N
    (d) μ_E e μ_C não mudam, T sim. E atensão também muda, afinal ele está ébrio.

15. $v_1 = 85$ m/s, $v_2 = 74$ m/s e $b_3 = 6,9$ kg/s

16. $F_{at} = 15$ N e $a = 1,9$ m/s^2

17.

18. $F = \bar{3}00$ N

19. (a) $W = 38$ J
    (b) $W = -38$ J
    (c) $W = 0$ J

20. $h = 41$ m

21. $E_C = 3 \times 10^{12}$ J

22. $h = 0,26$ m

23. $\Delta x = 0,12$ m

24. (a) $v = 5,7$ m/s
    (b) $v = 7,2$m/s

25. (a) $m = 5\bar{0}00$ kg
    (b) $p = 5,0 \times 10^4$ kg.m/s

26. $p = 2\bar{5}00$ kg.m/s e $E_C = 6,2 \times 10^5$J

27. $\bar{F} = 609$ N

28. $\tau_1 = 7,1$ N.m, $\tau_2 = 7,5$ N.m e $\tau_3 = 6,5$ N.m

29. Rotação no sentido horário em torno do eixo.

Bibliografia

[1] Banco de dados Wolfram Alpha, em *https://www.wolframalpha.com/*, acessado em julho de 2016.

[2] Piacentini, João J. *et al*; *Introdução ao laboratório de física.*

[3] Chaves, Alaor; *Física Básica, Volume 2.*

[4] Serway, Raymond A.; *Física 2.*

[5] Nussenzveig, H. Moysés; *Curso de Física Básica, Volume 2.*

[6] Halliday; *Fundamentos de Física, Volume 3.*

[7] Gunston, Bill (1999). Development of Piston Aero Engines (2 ed.). Sparkford, UK: Patrick Stephens Ltd. p. 21. ISBN 0-7509-4478-1.

[8] Norma ABNT NBR 5891