VALENTINA VOLKENSTEIN

PROBLEMAS DE FÍSICA GERAL

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

EXERCÍCIOS SELECIONADOS

CAP 12: PG 177 - 184

5, 6, 7, 18, 19, 22, 25

26, 31, 32, 44, 45, 50, 55

CAP 13: PG 184 - 188

27, 29, 31, 33

Campus Universitário Reitor João David F. Lima/Trindade - Florianópolis - SC - Brasil
CEP: 88040-900 - Telefone: +55 (48) 3721-9000 - Site: http://www.ufsc.br
Impressão - Imprensa Universitária

A energia total é

$$W_t = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2.$$

Um exemplo de movimento harmónico oscilatório consiste nas pequenas oscilações dum pêndulo. O período das oscilações do pêndulo símples é dado pela expressão

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

onde l é o comprimento do pêndulo, g é a aceleração da queda livre.

Ao se adicionarem duas oscilações harmónicas com direcções e períodos iguais obtém-se uma oscilação harmónica que possui o mesmo período com a amplitude

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

e com a fase inicial determinada segundo a equação

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

onde A_1 e A_2 são as amplitudes das componentes das oscilações, φ_1 e φ_2 são as suas fases iniciais.

Ao se adicionarem duas oscilações perpendiculares entre si de períodos iguais, a equação da trajectória do movimento resultante tem a seguinte forma:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Se, além da força elástica (F) igual a $-kx$, uma massa puntiforme m se encontrar sujeito à força de atrito (F_{atr}) igual a $-rv$, onde r é o coeficiente de atrito e v é a velocidade do ponto, as oscilações serão amortecidas. A equação do movimento oscilatório amortecido tem a seguinte forma:

$$x = Ae^{-\delta t} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

onde δ [s^{-1}] é o coeficiente de amortecimento. Neste caso, $\delta = r/2m$ e $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, onde ω_0 e a frequência angular das oscilações próprias. A grandeza $\varkappa = \delta T$ chama-se descrescimento logarítmico do amortecimento.

Se uma massa puntiforme m, cuja oscilação é dada na forma a seguir

$$x_1 = Ae^{-\delta t} \operatorname{sen} \omega_0 t,$$

for sujeito à acção de uma força estranha periódica $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$, as oscilações do ponto serão forçadas, e a equação do seu movimento tomará o aspecto

$$x_2 = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi),$$

onde

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

A ressonância ocorre quando a relação entre a frequência das oscilações forçadas ω for relacionada com a frequência das oscilações próprias ω_0 e o coeficiente de amortecimento (δ) pela expressão a seguir

$$\omega = \sqrt{w_0^2 - 2\delta^2}.$$

No caso de se propagarem oscilações não amortecidas com a velocidade (c) ao longo de certa direcção, chamada raio, o deslocamento de qualquer ponto, que se encontra no raio e é afastado da fonte de oscilações à distância l, é dado pela equação

$$x = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi l}{\lambda},$$

onde A é a amplitude dos pontos em oscilação, sendo λ o comprimento da onda. Neste caso, $\lambda = cT$. Dois pontos que se encontram num raio às distâncias l_1 e l_2 da fonte de oscilações têm a diferença de fases a seguir

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{l_2 - l_1}{\lambda}.$$

No caso de interferência de ondas o máximo e o mínimo da amplitude obtêm-se respectivamente com as seguintes condições

$$l_2 - l_1 = 2n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$l_2 - l_1 = (2n + l)\frac{\lambda}{2} \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Aqui, $l_2 - l_1$ é a diferença da trajectória dos raios.

12.1. Escrever a equação do movimento oscilatório harmónico com a amplitude (A) igual a 5 cm, se durante o tempo (t) igual a 1 min se efectuarem 150 oscilações e a fase inicial das oscilações (φ) for igual a $\pi/4$. Traçar o gráfico deste movimento.

12.2. Escrever a equação do movimento harmómico oscilatório com a amplitude (A) igual a 0,1 m, o período (T) igual a 4 s e a fase inicial (φ) igual a 0.

12.3. Escrever a equação do movimento harmónico oscilatório com a amplitude (A) igual a 50 mm, o período (T) igual a 4 s e a fase inicial (φ) igual a $\pi/4$. Determinar o deslocamento (x) de um ponto em oscilação em relação à posição de equilíbrio, se $t = 0$ e $t = 1{,}5$ s. Traçar o gráfico deste movimento.

12.4. Determinar a equação do movimento harmónico oscilatório com a amplitude (A) igual a 5 cm e o período (T) igual a 8 s, a fase inicial (φ) das oscilações for igual a: a) 0; b) $\pi/2$; c) π; d) $3\pi/2$; e) 2π. Traçar o gráfico deste movimento em todos os casos.

12.5. Traçar num gráfico duas oscilações harmónicas com amplitudes iguais ($A_1 = A_2$) de 2 cm e períodos iguais ($T_1 = T_2$) de 8 s, mas com a diferença de fases $\varphi_2 - \varphi_1$ igual a: 1) $\pi/4$; b) $\pi/2$; c) π; d) 2π.

12.6. Ao fim de que tempo após o início do movimento um ponto que efectua uma oscilação harmónica, se desloca em relação à posição em metade da amplitude? O período das oscilações (T) é igual a 24 s, a fase inicial (φ) é igual a 0.

12.7. A fase inicial (φ) das oscilações harmónicas é igual a 0. Ao fim de que fracção do período a velocidade do ponto será igual a metade da sua velocidade máxima?

12.8. Ao fim de que tempo após o início do movimento um ponto que efectua o movimento oscilatório de acordo com a equação $x = 7 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}t$, percorre a distância desde a posição de equilíbrio até ao deslocamento máximo?

12.9. A amplitude de uma oscilação harmónica (A) é igual a 5 cm, o período (T) é igual a 4 s. Determinar a velocidade máxima (v_{max}) de um ponto em oscilação e a sua aceleração máxima (a_{max}).

12.10. A equação do movimento de um ponto é dada sob a forma $x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm. Determinar o período de oscilações (T), a velocidade máxima (v_{max}) e a aceleração máxima (a_{max}) do ponto.

12.11. A equação de movimento de um ponto é dada na forma $x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}t$. Determinar os instantes (t) nos quais são atingidas a velocidade e a aceleração máximas.

12.12. Um ponto efectua uma oscilação harmónica. O período das oscilações (T) é igual a 2 s, a amplitude (A) é igual a 50 mm, a fase inicial (φ) é igual a 0. Determinar a velocidade (v) do ponto no momento em que o deslocamento do ponto em relação à posição de equilíbrio (x) é igual a 25 mm.

12.13. Escrever a equação do movimento oscilatório harmónico, se a aceleração máxima do ponto (a_{max}) for igual a 49,3 cm/s², o período das oscilações (T) for igual a 2 s e o deslocamento do ponto em relação à posição de equilíbrio (x_0) no momento inicial for igual a 25 mm.

12.14. A fase inicial (φ) de uma oscilação harmónica é igual a 0. Ao se deslocar o ponto da posição de equilíbrio em $x_1 = 2{,}4$ cm, a velocidade do ponto (v_1) é igual a 3 cm/s, e ao se deslocar em $x_2 = 2{,}8$ cm a sua velocidade (v_2) é igual a 2 cm/s. Determinar a amplitude (A) e o período (T) destas oscilações.

12.15. A equação da oscilação de um ponto material de 16 g de massa (m) tem a forma $x = 0{,}1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{4}\right)$ m. Construir o gráfico de dependência entre o tempo (t) (dentro de um só período) e a força (F) que actua sobre um ponto. Determinar a força máxima (F_{max}).

12.16. A equação das oscilações de um ponto material de 10 g de massa (m) tem a forma $x = 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm. Determinar a força máxima (F_{max}) que actua sobre o ponto, e a energia total (W) do ponto em oscilação.

12.17. A equação das oscilações de um ponto material de 16 g de massa (m) tem a forma $x = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{4}{\pi}t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm. Traçar o gráfico de dependência entre o tempo (t) (dentro de um só período) e a energia cinética (W_{cin}), a energia potencial (W_{pot}) e a energia total (W_{total}) do ponto.

12.18. Determinar a relação entre a energia cinética (W_c) de um ponto que efectua uma oscilação harmónica, e a sua energia potencial (W_p) para os seguintes instantes: a) $t = T/12$; b) $t = T/8$; c) $t = T/6$. A fase inicial das oscilações (φ) é igual a 0.

12.19. Determinar a relação entre a energia cinética (W_c) de um ponto, que efectua uma oscilação harmónica, e a sua energia potencial (W_p) para os momentos quando o deslocamento do ponto em relação à posição da equilíbrio constituir: a) $x = A/4$; b) $x = A/2$; c) $x = A$, onde A é a amplitude das oscilações.

12.20. A energia total de um corpo, que efectua o movimento oscilatório harmónico, (W_t) é igual a 30 μJ; a força máxima que actua sobre o corpo (F_{max}) é igual a 1,5 mN. Escrever a equação do movimento deste corpo, se o período das oscilações (T) for igual a 2 s e a fase inicial (φ) for igual a $\pi/3$.

12.21. A amplitude das oscilações harmónicas (A) de um ponto material é igual a 2 cm, a energia total das oscilações (W_t) é igual a 0,3 μJ. Determinar o deslocamento (x) em relação à posição de equilíbrio em que a força (F) igual a 22,5 μN actua sobre o ponto em oscilação.

12.22. Uma bola, pendurada num fio de 2 m de comprimento (l), é desviada no ângulo (α) igual a 4°, observando-se as suas oscilações. Considerando que as oscilações são harmónicas não amortecidas, determinar a velocidade da bola, ao passar pela posição de equilíbrio. Verificar a resolução obtida, ao se determinar a velocidade da bola quando a mesma passa pela posição de equilíbrio, a partir das equações da Mecânica.

12.23. Uma carga de 10 kg de massa (m) está pendurada numa mola. Sabendo que a mola é distendida em $l = 1{,}5$ cm sob a acção da força (F) igual a 9,8 N, determinar o período (T) das oscilações verticais da carga.

12.24. Uma carga está pendurada numa mola. A energia cinética máxima ($W_{c\,max}$) das oscilações da carga é igual a 1 J. A amplitude das oscilações (A) é igual a 5 cm. Determinar a rigidez (k) da mola.

12.25. Como variará o período das oscilações verticais da carga pendurada em duas molas iguais, se em vez da ligação em série das molas se utilizar a sua ligação em paralelo?

12.26. Uma bola de cobre pendurada numa mola efectua oscilações verticais. Como variará o período das oscilações, se em vez da bola de cobre, uma bola de alumínio do mesmo raio ser pendurada na mola?

12.27. Um prato de balança com pesos está pendurado numa mola. Nestas condições, o período das oscilações verticais (T_1) é igual a 0,5 s. Depois de os pesos adicionais terem sido colocados no prato da balança o período (T_2) das oscilações verticais tornou-se igual a 0,6 s. Como dilatou-se a mola graças à adição deste peso?

12.28. Um peso de 0,5 kg de massa (m) está pendurado numa corda de borracha de 40 cm de comprimento (l) e de 1 mm de raio (r). Sabendo que o módulo de Young da borracha (E) é igual a 3 MN/m^2, é necessário determinar o período (T) das oscilações verticais do peso. *Indicação.* Tomar em consideração que a rigidez (k) da borracha depende do módulo de Young (E) segundo a relação $k = SE/l$, onde S é a área da secção transversal da borracha, l é o seu comprimento.

12.29 *). Um areómetro de 0,2 kg de massa (m) flutua num líquido. Se o mesmo se mergulhar um pouco no líquido, soltando-o, ele começará a efectuar oscilações com o período (T) igual a 3,4 s. Considerando que as oscilações não são amortecidas, determinar a densidade do líquido (ρ) no qual flutua o areómetro. O diâmetro do tubo cilíndrico vertical (d) do areómetro é igual a 1 cm.

12.30. Escrever a equação do movimento resultante da composição de duas oscilações harmónicas com a mesma direcção, o mesmo período (T), igual a 8 s e a mesma amplitude (A) igual a 0,02 m. A diferença de fases entre estas oscilações ($\varphi_2 - \varphi_1$) é igual a $\pi/4$. A fase inicial de uma destas oscilações é igual a zero.

12.31. Determinar a amplitude (A) e a fase inicial (φ) da oscilação harmónica resultante da composição de duas oscilações com a mesma direcção representadas pelas equações $x_1 = 0{,}02$ sen $(5\pi t + \pi/2)$ m e $x_2 = 0{,}03$ sen $(5\pi t + \pi/4)$ m.

12.32. A composição de duas oscilações harmónicas com a mesma direcção e com períodos e amplitudes iguais dá como resultado uma oscilação com o mesmo período e a mesma amplitude. Determinar a diferença de fases ($\varphi_2 - \varphi_1$) das oscilações a combinar.

12.33. Determinar a amplitude (A) e a fase inicial (φ) da oscilação harmónica que é resultado da adição das oscilações iguais representadas pelas equações $x_1 = 4$ sen πt cm e $x_2 = 3$ sen $(\pi t + \pi/2)$ cm. Escrever a equação da oscilação resultante. Traçar o diagrama de vectores da composição de amplitudes.

---

*) Ver também os parágrafos 1.2 e 1.3.

12.34. Na fig. 12.1 está representado o espectro de uma oscilação resultante. Utilizando os dados desta figura, é necessário escrever as equações das oscilações que formam a oscilação resultante. Traçar o gráfico destas oscilações. Considerar que no momento (t) igual a 0 a diferença de fases entre estas oscilações ($\varphi_2 - \varphi_1$) é igual a 0. Traçar o gráfico da oscilação resultante.

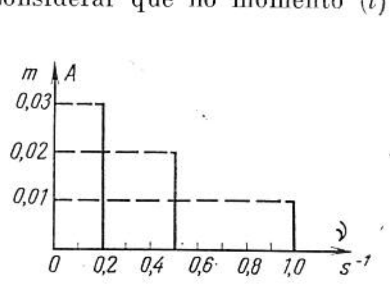


Fig. 12.1

12.35. As equações de duas oscilações harmónicas têm a forma $x_1 = 3$ sen $4\pi t$ cm e $x_2 = 6$ sen $10\pi t$ cm. Traçar o gráfico destas oscilações. Determinar graficamente a composição destas oscilações e construir o gráfico da oscilação resultante. Traçar o espectro da oscilação resultante.

12.36. A equação das oscilações tem a forma $x = A$ sen $2\pi\nu_1 t$, sendo que a amplitude (A) varia com o decorrer do tempo segundo a lei $A = A_0\,(1 + \cos 2\pi\nu_2 t)$. Determinar as oscilações harmónicas que formam a oscilação em questão. Construir o gráfico das oscilações a adicionar e da oscilação resultante para $A_0 = 4$ cm, $\nu_1 = 2$ Hz, $\nu_2 = 1$ Hz. Traçar o espectro da oscilação resultante.

12.37. Escrever a equação de uma oscilação resultante que é originada pela composição de duas oscilações perpendiculares com a mesma frequência ($\nu_1 = \nu_2$) igual a 5 Hz e com a mesma fase inicial ($\varphi_1 = \varphi_2$), igual a $\pi/3$. As amplitudes das oscilações (A_1 e A_2) são iguais a 0,10 e 0,05 m.

12.38. Um ponto participa em duas oscilações de igual período com as mesmas fases iniciais. As amplitudes das oscilações (A_1 e A_2) são iguais a 3 e 4 cm respectivamente. Determinar a amplitude (A) da oscilação resultante, se as oscilações se efectuarem: a) na mesma direcção; b) em duas direções perpendiculares.

12.39. Um ponto participa em duas oscilações perpendiculares $x = 2$ sen ωt m e $y = 2$ cos ωt m. Determinar a trajectória do movimento resultante do movimento do ponto.

12.40. Um ponto participa em duas oscilações perpendiculares $x = \cos \pi t$ e $y \cos \frac{\pi}{2} t$. Determinar a trajectória do movimento resultante do ponto.

12.41. Um ponto participa em duas oscilações mutuamente perpendiculares $x =$ sen πt e $y = 2$ sen $(\pi t + \pi/2)$. Determinar a trajectória do movimento resultante do ponto e traçar a mesma com escala.

12.42. Um ponto participa em duas oscilações perpendiculares $x =$ sen πt e $y = 4$ sen $(\pi t + \pi)$. Determinar a trajectória do movimento resultante do ponto e traçar a mesma com escala.

12.43. O período das oscilações amortecidas (T) é igual a 4 s; o decrescimento logarítmico do amortecimento ($\varkappa$) é igual a 1,6; a fase inicial (φ) é igual a 0. Sendo t = T/4, o deslocamento do ponto x é igual a 4,5 cm. Escrever a equação do movimento desta oscilação. Construir o gráfico desta oscilação dentro de dois períodos.

12.44. Construir o gráfico da oscilação amortecida dado pela equação $x = e^{-0,1t} \text{ sen } \frac{\pi}{4}t$ m.

12.45. A equação das oscilações amortecidas é dada na seguinte forma: $x = 5e^{-0,25t} \text{ sen } \frac{\pi}{2}t$ m. Determinar a velocidade (v) do ponto em oscilação nos seguintes momentos (t): 0, T, $2T$, $3T$ e $4T$.

12.46. O decrescimento logarítmico de amortecimento de um pêndulo simples ($\varkappa$) é igual a 0,2. Quanto se reduzirá a amplitude das oscilações durante uma oscilação completa do pêndulo?

12.47. Determinar o decrescimento logarítmico de amortecimento ($\varkappa$) de um pêndulo simples, se durante o tempo (t) igual a 1 min a amplitude de oscilações se reduziu para metade. O comprimento do pêndulo (l) é igual a 1 m.

12.48. Um pêndulo simples de 24,7 cm de comprimento (l) efectua oscilações amortecidas. Determinar o tempo (t) ao fim do qual a energia das oscilações do pêndulo se reduzirá em 89,34%. Resolver o problema considerando que o decrescimento logarítmico de amortecimento ($\varkappa$) é igual a: a) 0,01; b) 1.

12.49. O pêndulo simples efectua oscilações amortecidas com o decrescimento logarítmico de amortecimento ($\varkappa$) igual a 0,2. Quanto se reduzirá a aceleração total do pêndulo na sua posição extrema durante uma só oscilação?

12.50. A amplitude das oscilações amortecidas de um pêndulo simples reduziu-se para metade durante o tempo (t) igual a 1 min. Quanto se reduzirá a amplitude durante o tempo (t) igual a 3 min?

12.51. Um pêndulo simples desequilibrado de 0,5 m de comprimento (l) desviou durante a primeira oscilação em x_1 = 5 cm e durante a segunda (no mesmo sentido), em x_2 = 4 cm. Determinar o tempo de relaxação (t), isto é, o tempo durante o qual a amplitude das oscilações se reduzirá em e vezes, onde e é a base dos logaritmos naturais.

12.52. Um peso é pendurado numa mola disposta verticalmente. Nestas condições, a mola alonga-se em Δl = 9,8 cm. Puxando para baixo este peso e soltando-o, o mesmo começa a efectuar oscilações. Qual é o valor do coeficiente de amortecimento (δ), sabendo que: a) as oscilações cessam ao fim de 10 s (t) (considerar convencionalmente que as oscilações cessaram, se a sua amplitude se reduziu até 1% do seu valor inicial); b) o peso volta à posição de equilíbrio periodicamente; c) o decrescimento logarítmico do amortecimento das oscilações (δ) é igual a 6?

12.53. Um corpo de 10 g de massa (m) efectua oscilações amortecidas com a amplitude máxima (A_{max}) igual a 7 cm, a fase inicial (φ) igual a 0 e o coeficiente de amortecimento (δ) igual a 1,6 s^{-1}. Este corpo começa a experimentar uma força periódica externa(F) sob cuja acção se estabelecem oscilações forçadas. A equação das oscilações forçadas tem a forma $x = 5 \text{ sen } (10\pi t - 3\pi/4)$ cm. Determinar (com coeficientes numéricos) a equação das oscilações próprias e a equação da força periódica exterior.

12.54. Um peso de 0,2 kg de massa (m) que está pendurado numa mola vertical efectua oscilações amortecidas com o coeficiente de amortecimento (δ) igual a 0,75 s^{-1}. A rigidez da mola (k) é igual a 0,5 kN/m. Traçar a variação da amplitude (A) das oscilações do peso em função da frequência (ω) da força periódica externa, sabendo que o valor máximo da força exterior (F_0) é igual a 0,98 N. Para se construir o gráfico é necessário determinar o valor (A) para as seguintes frequências: $\omega = 0$, $\omega = 0,5\ \omega_0$, $\omega = 0,75\ \omega_0$, $\omega = \omega_0$, $\omega = 1,5\ \omega_0$ e $\omega = 2\omega_0$, onde ω_0 é a frequência das oscilações próprias do peso pendurado.

12.55. Por um caminho de terra passou um trator, deixando covas no chão, dispostas à distância (l) igual a 30 cm umas das outras. Por este caminho circulou um carrinho de bebé que possui duas molas iguais, cada uma das quais forma uma flecha (x_0) igual a 2 cm sob a acção de um peso de 1 kg de massa (m_0). Com que velocidade (v) foi rodado o carrinho, se ele, devido aos solavancos nas covas, começou a balançar intensamente em ressonância? A massa (M) do carrinho é igual a 10 kg.

12.56. Determinar o comprimento de onda (λ) das oscilações, cujo período (T) é igual a 10^{-14}s. A velocidade de propagação das oscilações (c) é igual a $3 \cdot 10^8$ m/s.

12.57. As oscilações sonoras com a frequência (ν) igual a 500 Hz e a amplitude (A) igual a 0,25 mm propagam-se no ar. O comprimento de onda (λ) é igual a 70 cm. Determinar a velocidade (c) de propagação das oscilações e a velocidade máxima (v_{max}) das partículas do ar.

12.58. A equação das oscilações não amortecidas tem a forma $x = 10 \text{ sen } \frac{\pi}{2}t$ cm. Determinar a equação de onda, se a velocidade de propagação das oscilações (c) é igual a 300 m/s. Escrever e representar graficamente a equação das oscilações para o ponto que se encontra à distância (l) igual a 600 m da fonte de oscilações. Escrever e representar graficamente a equação das oscilações para os pontos da onda no momento (t) igual a 4 s após o início das oscilações.

12.59. A equação das oscilações não amortecidas tem a forma $x = 4 \text{ sen } 600\ \pi t$ cm. Determinar o deslocamento (x) em relação à posição de equilíbrio de um ponto que se encontra à distância (l) igual a 75 cm da fonte de oscilações. A velocidade de propagação das oscilações (c) é igual a 300 m/s.

12.60. A equação das oscilações não amortecidas tem a forma $x = \text{sen}\ 2{,}5\ \pi t$ cm. Determinar o deslocamento (x) em relação à posição de equilíbrio, a velocidade (v) e a aceleração (a) do ponto que se encontra à distância (l) de 20 m da fonte de oscilações para o momento (t) igual a 1 s após o início das oscilações. A velocidade de propagação de oscilações (c) é igual a 100 m/s.

12.61. Calcular a diferença de fases das oscilações de dois pontos, afastados da fonte de oscilações às distâncias $l_1 = 10$ m e $l_2 = 16$ m. O período das oscilações é $T = 0{,}04$ s; a velocidade de propogação é $c = 300$ m/s.

12.62. Determinar a diferença de fases ($\Delta\varphi$) das oscilações de dois pontos que se encontram no mesmo raio à distância (l) igual a 2 m um do outro, se o comprimento de onda (λ) for igual a 1 m.

12.63. Determinar o deslocamento (x) em relação à posição de equilíbrio dum ponto que se encontra à distância (l) igual a $\lambda/12$ da fonte de oscilações para o momento (t) igual a $T/6$. A amplitude das oscilações (A) é igual a 0,05 m.

12.64. O deslocamento da posição de equilíbrio dum ponto, que dista da fonte das oscilações 4 cm (l) no momento (t) igual a $T/6$ é igual a metade da amplitude. Determinar o comprimento (λ) da onda móvel.

12.65. Determinar a posição dos nodos e antinodos e traçar o gráfico da onda estacionária, se: a) a reflexão se der num meio de menor densidade; b) a reflexão se der num meio de maior densidade. O comprimento da onda móvel (λ) é igual a 12 cm.

12.66. Determinar o comprimento da onda (λ) das oscilações, se a distância entre o primeiro e o quarto antinodo (l) da onda estacionária é igual a 15 cm.

4.13. Acústica

A velocidade de propagação das oscilações acústicas em certo meio é determinada pela seguinte fórmula

$$c = \sqrt{E/\rho},$$

onde E é o módulo de Young do meio, ρ é a densidade do meio.

Nos gases a velocidade de propagação é

$$c = \sqrt{\varkappa RT/\mu},$$

onde μ é a massa molar do gás, T é a temperatura termodinâmica do gás, R é a constante dos gases, $\varkappa = C_p/C_V$ (C_p é a capacidade calorífica do gás a pressão constante e C_V, a capacidade calorífica do gás a volume constante).

O nível da pressão acústica (L_p) (em decibéis) e a amplitude da pressão acústica (p) relacionam-se através da expressão

$$L_p = 20 \lg \frac{p}{p_0},$$

onde p_0 é a amplitude da pressão acústica ao nível zero do volume. O nível do volume L_I (em fones) e a intensidade do som relacionam-se através da expressão $L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, onde I_0 é a audibilidade mínima (nível zero do volume) do som. Convencionalmente se considera que $I_0 = 10^{-12}$ W/m² e $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

Segundo o princípio de Doppler, a frequência de Doppler, percebida por um observador, é determinada pela fórmula

$$\nu' = \frac{c+v}{c-u}\,\nu,$$

onde ν é a frequência do som transmitida pela fonte de som, u é a velocidade de movimento da fonte de som, v é a velocidade do observador, c é a velocidade de propagação do som. A velocidade tem o valor $v > 0$, se o observador se mover em direcção à fonte de som; a velocidade $u > 0$, se a fonte de som se mover em direcção ao observador.

A frequência do som fundamental da corda é determinado pela fórmula

$$\nu = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

onde l é o comprimento da corda, F é a força de tensão, S é a área da secção transversal, ρ é a densidade do material do meio.

13.1. Determinar o comprimento da onda (λ) do tom fundamental lá (a frequência ν é igual a 435 Hz). A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

13.2. O ouvido humano pode perceber os sons das frequências desde $\nu_1 = 20$ Hz até $\nu_2 = 20\,000$ Hz. Determinar os comprimentos de ondas entre os quais permanece o intervalo de audibilidade de oscilações acústicas. A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

13.3. Determinar a velocidade (c) de propagação do som no aço.

13.4. Determinar a velocidade (c) de propagação do som no cobre.

13.5. A velocidade de propagação do som no petróleo (c) é igual a 1330 m/s. Determinar a compressibilidade (β) do petróleo.

13.6. A profundidade do mar foi medida com a auxílio de uma sonda de eco. Qual é a profundidade do mar, se o intervalo de tempo (t) entre a formação do som e a sua recepção igual a 2,5 s? A compressibilidade da água (β) é igual a $4{,}6 \cdot 10^{-10}$ Pa^{-1}, a densidade da água de mar (ρ) é igual a $1{,}03 \cdot 10^3$ kg/m³.

13.7. Determinar a velocidade (c) de propagação do som no ar, às seguintes temperaturas t: —20, 0 e 20 °C.

13.8. Quantas vezes é maior a velocidade (c_1) de propagação do som no ar no Verão (t = 27 °C) do que a velocidade (c_2) de propagação do som no Inverno (t = —33 °C)?

13.9. Sabendo que a velocidade média quadrática (v) das moléculas de um gás biatómico nas condições do ensaio é igual a 461 m/s, determinar a velocidade (c) de propagação do som nesse gás.

13.10. Determinar a velocidade (c) de propagação do som num gás biatómico, sabendo que à pressão (p) igual a $1{,}01\cdot10^5$ Pa a densidade (ρ) do gás é igual a 1,29 kg/m³.

13.11. Sabendo que a energia cinética molar média do movimento de translação das moléculas de azoto ($W_{c\mu}$) é igual a 3,4 kJ/mol, determinar a velocidade (c) de propagação do som nestas condições.

13.12. Para determinar a temperatura das camadas superiores da atmosfera não se pode utilizar um termómetro, já que devido à baixa densidade do gás o termómetro não atinge o equilíbrio térmico com o meio ambiente. Com este fim são lançados foguetes com granadas que explodem, ao atingirem uma altitude determinada. Determinar a temperatura (t) à altitude (h), igual a 20 km, da superfície da Terra, sabendo que o som devido à explosão, produzida à altitude (h_1) igual a 21 km, chegou Δt = 6,75 s mais tarde do que o som devido à explosão produzida à altitude (h_2) igual a 19 km.

13.13. Determinar o índice de refracção (n) das ondas acústicas na linha divisória ar-vidro. O módulo de Young do vidro (E) é igual a $6{,}9\cdot10^{10}$ Pa, a densidade do vidro (ρ) é igual a $2{,}6\cdot10^3$ kg/m³, a temperatura do ar (t) é igual a 20 °C.

13.14. Determinar o ângulo limite (α) da refléxão interna total das ondas acústicas na linha divisória ar-vidro. Aplicar os dados necessários do problema precedente.

13.15. Dois sons diferenciam-se pelo nível do volume em ΔL_1 = = 1 fone. Determinar a razão (I_2/I_1) entre as intensidades destes sons.

13.16. Dois sons diferenciam-se pelo nível de pressão acústica em ΔL_p = 1 dB. Determinar a razão (p_2/p_1) entre as amplitudes da pressão acústica.

13.17. Um ruído produzido na rua com o nível de volume (L_{I1}) igual a 70 fones é ouvido dentro duma sala como um ruído com o nível de volume (L_{I2}), igual a 40 fones. Determinar a relação (I_1/I_2) entre as intensidades dos sons na rua e na sala.

13.18. A intensidade do som aumentou 1000 vezes. Que aumento registou o nível da pressão acústica? E a amplitude da pressão acústica?

13.19. A intensidade do som (I) é igual a 10 mW/m². Determinar o nível de volume (L_I) e a amplitude (p) da pressão acústica.

13.20. Que aumento registou o nível do volume (L) do som, se a sua intensidade se tornou: a) 3000 vezes maior; b) 30 000 vezes maior?

13.21. Determinar a distância (l) entre os dentes adjacentes da estria acústica num disco para o tom lá (cuja frequência ν é igual a 435 Hz): a) no início da gravação à distância (r), igual a 12 cm, do centro; b) no fim da gravação, a distância (r) igual a 4 cm, do centro. A frequência de rotação do disco (n) é igual a 78 min⁻¹.

13.22. Determinar a distância (l) entre os dentes adjacentes da estria acústica num disco de vitrola para: a) ν = 100 Hz; b) ν = = 2000 Hz. A distância média do centro do disco (r) é igual a 10 cm. A frequência de rotação do disco (n) é igual a 78 min⁻¹.

13.23. Ao se formar uma onda estacionária num tubo de Kundt, numa coluna de ar são observados seis antinodos (n). Qual é o comprimento (l_2) da coluna de ar, se a barra de aço estiver fixa: a) no ponto médio; b) numa extremidade? O comprimento (l_1) da barra é igual a 1 m. A velocidade de propagação do som no aço (c_1) é igual a 5250 m/s, no ar (c_2) é igual a 343 m/s.

13.24. Qual é o comprimento (l_1) de uma barra de vidro no tubo de Kundt, se, ao se fixar a mesma no ponto médio, na coluna de ar são observados cinco antinodos (n)? O comprimento da coluna (l_2) de ar é igual a 0,25 m. O módulo de Young para o vidro (E) é igual a $6{,}9\cdot10^{10}$ Pa; a densidade do vidro (ρ) é igual a $2{,}5\cdot10^3$ kg/m³. A velocidade de propagação do som (c) no ar é igual a 340 m/s.

13.25. Para que frequências máximas é aplicável o método de Kundt de determinação da velocidade do som, considerando que a mínima distância distinguível entre os antinodos (l) é igual a 4 mm aproximadamente? A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

13.26. Dois comboios vão um ao encontro de outro com as velocidades (v_1 e v_2) iguais a 72 e 54 km/h. O primeiro comboio solta um assobio com a frequência (ν) igual a 600 Hz. Determinar a frequência (ν') das oscilações do sonido que ouve um passageiro do segundo comboio: a) antes do encontro dos comboios; b) depois do encontro dos comboios. A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

13.27. Quando o comboio passa junto a um observador imóvel, a frequência do tom do apito da locomotiva varia num salto. Que percentagem da frequência real do tom constitui o salto de frequência, se o comboio se mover à velocidade (v) igual a 60 km/h?

13.28. Um observador na beira-mar ouve o som do apito dum barco. Quando o observador e o barco se encontram em repouso, a frequência do som percebido pelo observador (ν) é igual a 420 Hz. Durante o movimento do barco a frequência será igual a 430 Hz (ν_1'), se o barco se aproximar do observador, e igual a 415 Hz (ν_2'), se o barco se afastar do mesmo. Determinar a velocidade (v) do barco no primeiro e segundo caso, se a velocidade de propagação do som no ar (c) for igual a 338 m/s.

13.29. Uma bala de espingarda voa com a velocidade (v) igual a 200 m/s. Quanto variará a frequência do tom do assobio para o observador imóvel junto ao qual passa a bala? A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 333 m/s.

13.30. Dois comboios vão um ao encontro do outro com a mesma velocidade. Qual deve ser a sua velocidade (v) para que a frequência do assobio de um deles, que é ouvido noutro, varie em 11,25%? A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 335 m/s.

13.31. Um morcego voa perpendicularmente à parede com a velocidade (v) igual a 6,0 m/s, produzindo um ultra-som de 45 kHz de frequência (ν). Quais são as duas frequências do som (ν_1 e ν_2) ouvidos pelo morcego? A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

13.32. Determinar o comprimento (l) que deve ter uma corda de aço de 0,05 cm de raio (r) para que, sendo a força de tensão (f) igual a 0,49 kN, ela produza um tom de 320 Hz de frequência (ν).

13.33. Qual é a força (F) necessária para esticar uma corda de aço de 20 cm de comprimento (l) e de 0,2 mm de diâmetro (d) para que ela produza o tom lá (cuja frequência (ν) é igual a 435 Hz)?

13.34. Sabendo o valor do limite de resistência para o aço, determinar a máxima frequência (ν) para a qual pode ser afinada uma corda de 1 m de comprimento (l).

13.35. Uma corda, esticada com a força (F_1) igual a 147 N, produz com o diapasão uma frequência de batimentos (ν_b) igual a 8 Hz. Depois de esta corda ter sido esticada com a força (F_2) igual a 156,8 N, ela ficou afinada em uníssono com o diapasão. Determinar a frequência (ν_2) das oscilações do diapasão.

13.36. O diapasão do problema precedente produz, juntamente com outro diapasão batimentos com a frequência (ν_b) igual a 2 Hz. Determinar a frequência das oscilações (ν) do segundo diapasão.

13.37. Determinar a frequência (ν) do tom fundamental duma corda esticada com a força (F) igual a 6 kN. O comprimento da corda (l) é igual a 0,8 m, a sua massa (m) é igual a 30 g.

13.38. Determinar a frequência (ν) do tom fundamental: a) de um tubo aberto; b) de um tubo fechado.

13.39. Um tubo fechado produziu o tom fundamental dó (cuja frequência (ν_1) é igual a 130,5 Hz). O tubo foi aberto. Determinar a frequência (ν_2) do tom fundamental neste caso. Qual é o comprimento (l) do tubo? A velocidade de propagação do som no ar (c) é igual a 340 m/s.

4.14. Oscilações e Ondas Electromagnéticas

O período (T) das oscilações electromagnéticas num circuito constituído pela capacidade (C), indutância (L) e a resistência (R), é determinado pela fórmula

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/LC - (R/2L)^2}}.$$

Se a resistência (R) do circuito for tão pequena que

$$(R/2L)^2 \ll 1/LC,$$

o período das oscilações é

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Se a resistência do circuito (R) não for igual a zero, as oscilações serão amortecidas. Neste caso, a diferença de potenciais nas armaduras do condensador varia com o tempo segundo a lei

$$U = U_0 e^{-\delta t} \cos \omega t,$$

se o tempo for contado a partir do momento correspondente à máxima diferença de potenciais nas armaduras do condensador. Aqui, $\delta = R/2L$ é o coeficiente de amortecimento. A grandeza ($\varkappa$) igual a δT chama-se decrescimento logarítmico de amortecimento. Se $\delta = 0$, as oscilações serão não amortecidas, e então poder-se-á escrever

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Se o tempo se contar a partir do momento em que a diferença de potenciais nas armaduras do condensador for igual a zero, será válida a seguinte relação

$$U = U_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

A lei de Ohm para a corrente alternada é dada na seguinte forma

$$I_{ef} = \frac{U_{ef}}{Z},$$

onde I_{ef} e U_{ef} são valores eficientes de corrente e tensão relacionados com os seus valores de amplitude (I_0 e U_0) da maneira seguinte:

$$I_{ef} = I_0/\sqrt{2}, \quad U_{ef} = U_0/\sqrt{2},$$

sendo Z a impedância do circuito. Se o circuito tiver a resistência (R), a indutância (L) e a capacidade (C), ligadas em série

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Neste caso, a desfasagem entre a tensão e a corrente é determinada pela fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

11.111. $\mu = 1400$.
11.112. $I = 1$ A.
11.113. $N = 500$.
11.114. $\mu = 1400$; $I = 1,6$ A.
11.115. $\mu = 640$; $L = 64$ mH.
11.116. a) $L = 9,0$ H; b) $L = 5,8$ H; c) $L = 0,83$ H.
11.117. Consideremos as igualdades

$$L_1 = \mu_0 \mu n_1^2 lS, \quad L_2 = \mu_0 \mu n_2^2 lS. \qquad (1)$$

A indutância mútua das bobinas com o núcleo comum determina-se pela fórmula

$$L_{12} = \mu_0 \mu n_1 n_2 lS. \qquad (2)$$

Multiplicando uma das igualdades (1) pela outra, obteremos

$$L_1 L_2 = (\mu_0 \mu lS)^2 n_1^2 n_2^2, \quad \text{daqui} \quad n_1 n_2 = \sqrt{L_1 L_2}/\mu_0 \mu lS. \qquad (3)$$

Colocando (3) em (2), obtemos $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$. Dado que $\mathscr{E}_2 = -L_{12} dI_1/dt$, a corrente média na segunda bobina tem o valor

$$I_2 = \frac{L_{12}}{R} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{R} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = 0,2 \text{ A}.$$

11.118. A quantidade de electricidade induzida no quadro é a seguinte

$$q = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = -\frac{1}{R} (\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (1)$$

onde Φ_1 é o fluxo magnético através do quadro na primeira posição e Φ_2 é o fluxo magnético através do quadro na segunda posição. Verifica-se que $\Phi_2 = 0$; além disso,

$$R = \rho l/s = \rho 4a/s = \rho 4 \sqrt{S}/s, \qquad (2)$$

onde a é o lado do quadro. Dado que $\Phi_1 = BS$,

$$q = Bs\sqrt{S}/4\rho = 74 \text{ mC}.$$

11.119. $q = 0,15$ mC.
11.120. $q = 0,25$ mC.
11.121. $C = 10^{-8}$ C/div.
11.122. $B = 0,2$ T.
11.123. A intensidade do campo magnético no toróide tem o valor

$$H = IN_1/l. \qquad (1)$$

Se o sentido da corrente se inverter na bobina primária, o galvanómetro será percorrido pela quantidade de electricidade (q) igual a $2\Phi N_2/R$, onde Φ é o fluxo magnético que atravessa a área da secção transversal do toróide. Mas $\Phi = BS = \mu_0 \mu HS = \mu_0 \mu SIN_1/l$; por conseguinte,

$$q = 2N_2 \mu_0 \mu SIN_1/Rl, \quad \text{daqui} \quad \mu = qRl/2\mu_0 N_1 N_2 SI.$$

Dado que $q = C\alpha$,

$$\mu = C\alpha Rl/2\mu_0 N_1 N_2 SI. \qquad (2)$$

Colocando em (1) e (2) valores diferentes de I e os respectivos valores de α, dados nas condições do problema, obteremos a seguinte tabela:

I, A	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
H, A/m	133	266	400	533	667
μ	1440	2190	2050	1790	1520

11.124. $\mu = 1200$.
11.125. $t = 126$ ms.
11.126. $t = 0,25$ ms.
11.127. Em 33%.
11.128. $t = 10$ ms.
11.130. a) $\Phi = B_0 S \text{ sen } \omega t = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ sen } 100\pi t$ Wb, $\Phi_{max} = 25$ μWb b) $\mathscr{E} = -7,85 \cdot 10^{-3} \cos 100\pi t$ V, $\mathscr{E}_{max} = 7,85$ mV; c) $I = -2,3 \cos 100\pi t$ A, $I_{max} = 2,3$ A.
11.131. a) $\mathscr{E} = -33 \cos 100\pi t$ V; b) $W = LI^2/2 = 0,263 \text{ sen}^2\, 100\pi t$ J.
11.132. $\mathscr{E}_2 = -L_{12} dI/dt = -L_{12} I_0 \omega \cos \omega t = -15,7 \cos 100\pi t$ V; $\mathscr{E}_{2max} = 15,7$ V.

4. Oscilações e Ondas

4.12. Oscilações Harmónicas e Ondas

12.1. $x = 5 \text{ sen } (5\pi t + \pi/4)$ cm.

12.2. $x = 0,1 \text{ sen } \frac{\pi}{2} t$ m.

12.3. $x = 50 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{4}\right)$ mm; $x_1 = 35,2$ mm, $x_2 = 0$.

12.4. a) $x = 5 \text{ sen } \frac{\pi}{4} t$ cm; b) $x = 5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm.

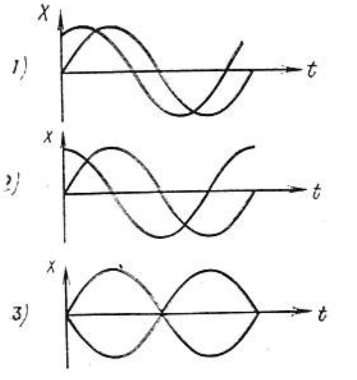
c) $x = 5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{4} t + \pi\right)$ cm; d) $x = 5 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{3\pi}{2}\right)$ cm;

e) $x = 5 \text{ sen } \frac{\pi}{4} t$ cm.

12.5. Ver fig. 36.

12.6. Utilizemos a fórmula $x = A \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right)$. De acordo com a condição $x = A/2$. Por conseguinte, $0,5 = \text{sen } (\pi t/12)$, isto é, $\pi t/12 = \pi/6$; daqui $t = 2$ s.
12.7. $t = T/6$.
12.8. $t = 1$ s.
12.9. $v_{max} = 7,85$ cm/s; $a_{max} = 12,3$ cm/s².
12.10. $T = 4$ s; $v_{max} = 3,14$ cm/s; $a_{max} = 4,93$ cm/s².

12.11. A velocidade $v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} t$. A velocidade será máxima se $\pi t/6 = 1$, isto é, se $\pi t/6 = n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, \ldots$ Deste modo, a velocidade máxima é atingida nos momentos (t) iguais a 0, 6, 12 s, . . . A aceleração será máxima se sen $(\pi t/6) = 1$, isto é, se $\pi t/6 = (2n + 1)\, \pi/2$. Deste modo, a aceleração máxima é atingida nos seguintes momentos (t): 3, 9, 15 s, . . .



4) Ambas as sinusóides coincidem

Fig. 36

12.12. $v = 13{,}6$ cm/s.

12.13. $x = 5$ sen $(\pi t + \pi/6)$ cm.

12.14. $A = 3{,}1$ cm; $T = 4{,}1$ s.

12.15. $F_{max} = 246$ μN.

12.16. $F_{max} = 197$ μN; $W = 4{,}93$ μJ.

12.17. Ver fig. 37. Do gráfico deduz-se que o período das oscilações da energia é igual à metade do período do próprio movimento oscilatório.

12.18. a) $W_c/W_p = 3$; b) $W_c/W_p = 1$; c) $W_c/W_p = 1/3$.

12.19. a) $W_c/W_p = 15$; b) $W_c/W_p = 3$; c) $W_c/W_p = 0$.

12.20. $x = 0{,}04$ sen $(\pi t + \pi/3)$ m.

12.21. $x = FA^2/2W = 1{,}5$ cm.

12.22. O período das oscilações da bola (T) é igual a $2\pi \sqrt{l/g} = 2{,}8$ s. A amplitude das oscilações (A) com pequenos desvios da bola em relação à posição de equilíbrio é igual a l sen $\alpha = 2 \cdot 0{,}0698$ m $\approx$ $\approx 0{,}14$ m. Então, a equação de movimento da bola será escrita na seguinte forma:

$$x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T} t = 0{,}14 \text{ sen } \frac{2\pi}{2{,}8} tm,$$

se o tempo for contado da posição de equilíbrio. Ao passar a bola a posição de

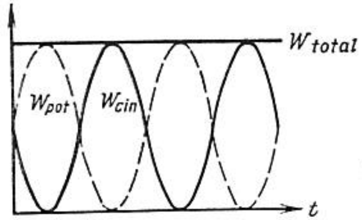


Fig. 37

equilíbrio, a sua velocidade atingirá o valor máximo. Dado que $v = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}9} \times$ $\times \cos \frac{2\pi}{2{,}9} t$ m/s, temos

$$v_{max} = \frac{0{,}14 \cdot 2\pi}{2{,}8} \text{ m/s} = 0{,}31 \text{ m/s}.$$

Podemos determinar a mesma velocidade a partir da seguinte relação: $mgh = mv^2/2$, onde h é a altitude de ascensão da bola; daqui $v = \sqrt{2gh}$. Não

é difícil concluir que $h = l\,(1 - \cos\alpha)$. Então, $v = \sqrt{2gl\,(1 - \cos\alpha)} =$ $= 0{,}31$ m/s. Sendo grandes os desvios do pêndulo em relação à posição de equilíbrio, as oscilações do pêndulo já não serão harmónicas.

12.23. $T = 0{,}78$ s.

12.24. $k = 805$ N/m.

12.25. Ele reduzir-se-á para metade.

12.26. Ele reduzir-se-á em 45%.

12.27. Temos

$$T_1 = 2\pi \sqrt{m/k}, \quad \text{ou} \quad T_1^2 = 4\pi^2 m/k. \tag{1}$$

Depois de se adicionar o peso (Δm), temos

$$T_2 = 2\pi \sqrt{(m + \Delta m)/k}, \quad \text{ou} \quad T_2^2 = 4\pi^2\,(m + \Delta m)/k. \tag{2}$$

Subtraindo (1) de (2), obteremos $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \Delta m/k$. Mas $k = F/\Delta l =$ $= \Delta mg/\Delta l$, onde F é a força que origina um alongamento da mola (Δl). Deste modo,

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta l}{g}, \quad \text{ou} \quad \Delta l = \frac{g}{4\pi^2}(T_2^2 - T_1^2) = 2{,}7 \text{ cm}.$$

12.28. $T = 0{,}93$ s.

12.29. A força de gravidade (dirigida para baixo) e a força de Arquímedes (dirigida para cima) actuam sobre o areómetro que flutua. Por isso, na posição

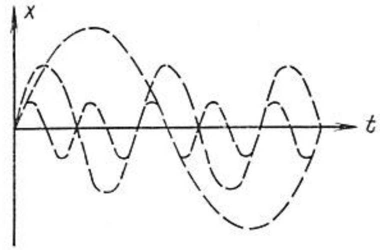


Fig. 38

de equilíbrio $mg = \rho g\,(V + Sh)$, onde $(V + Sh)$ é a parte do volume do areómetro que se encontra mergulhada no líquido. Se o areómetro se mergulhar à profundidade (x), a força de repulsão resultante tem o valor

$$F = \rho g\,[V + S\,(h + x)] - mg =$$
$$= \rho g\,[V + S\,(h + x)] - \rho g\,(V + Sh) = \rho g S x = kx,$$

onde $k = \rho g S$. Dado que $T = 2\pi \sqrt{m/k}$, temos

$$T = \frac{4}{d} \sqrt{\frac{m\pi}{\rho g}}, \quad \text{daqui} \quad \rho = \frac{16\pi m}{T^2 d^2 g} = 0{,}89 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

12.30. $x = 3{,}7$ sen $\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{8}\right)$ cm.

12.31. $A = 4{,}6$ cm; $\varphi = 62°46'$.

12.32. $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi/3$.

12.33. $A = 5$ cm; $\varphi = 36°52' \approx 0{,}2\pi$; $x = 5$ sen $(\pi t + \pi/5)$ cm.

12.34. Do espectro duma oscilação complexa (fig. 12.1) conclui-se que a primeira oscilação tem a amplitude (A_1) igual a 0,03 m e a frequência (ν_1)

igual a 0,2 Hz, a segunda, $A_2 = 0,02$ m e $\nu_2 = 0,5$ Hz e a terceira, $A_3 = 0,01$ m e $\nu_3 = 1$ Hz. Deste modo, as equações destas oscilações serão as seguintes:

$$x = 0,03 \text{ sen } \frac{2\pi}{5} t \text{ m}, \quad x = 0,02 \text{ sen } \pi t \text{ m}, \quad x = 0,01 \text{ sen } 2\pi t \text{ m}.$$

Os gráficos destas oscilações são dados na fig. 38. Propõe-se que os estudantes componham as tabelas $x = f(t)$ para todas estas oscilações e determinem o gráfico da oscilação resultante, somando as ordenadas das sinusóides para uma série de pontos no eixo das abcissas.

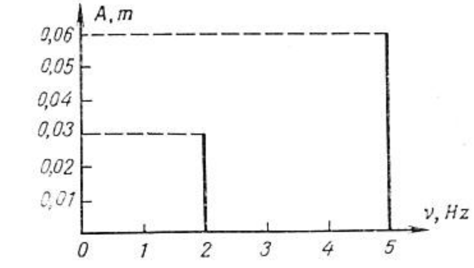


Fig. 39

12.35. Na fig. 39 está representado o espectro da oscilação resultante.
12.36. Consideremos as equações

$$x = A \text{ sen } 2\pi\nu_1 t, \qquad A = A_0 (1 + \cos 2\pi\nu_2 t).$$

Colocando a segunda equação na primeira, obteremos

$$x = A^0 (1 + \cos 2\pi\nu_2 t) \text{ sen } 2\pi\nu_1 t = A_0 \text{ sen } 2\pi\nu_1 t +$$
$$+ A_0 \cos 2\pi\nu_2 t \cdot \text{sen } 2\pi\nu_1 t = A_0 \text{ sen } 2\pi\nu_1 t +$$
$$+ \frac{A_0}{2} \text{ sen } [2\pi(\nu_1 - \nu_2) t] + \frac{A_0}{2} \text{ sen } [2\pi(\nu_1 + \nu_2) t].$$

Deste modo, a oscilação em questão pode ser decomposta na soma de três movimentos oscilatórios harmónicos com as seguintes frequências (ν_1, $\nu_1 - \nu_2$, $\nu_1 + \nu_2$) e amplitudes (A_0, $A_0/2$, $A_0/2$). A amplitude da oscilação resultante variará com o tempo. Uma oscilação desta índole já não é um movimento oscilatório harmónico mas sim uma oscilação modulada.

12.37. Ao somarem-se duas oscilações reciprocamente perpendiculares com mesmo período, a equação da trajectória da oscilação resultante tem o aspecto seguinte:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{sen}^2 (\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

Dado que $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, a equação (1) adquirirá a seguinte forma:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0, \quad \text{daqui} \quad y = \frac{A_2}{A_1} x$$

ou seja, a equação de uma recta. Deste modo, a oscilação resultante efectuar-se-á ao longo duma recta. O ângulo de inclinação da linha recta será determinado a partir da seguinte equação: $\text{tg}\,\alpha = A_2/A_1 = 0,5$, isto é, $\alpha = 26°34'$. O período da oscilação resultante é igual ao período das oscilações componentes, e a amplitude da oscilação resultante (A) é igual a $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11,2$ cm. Por conseguinte, a equação da oscilação resultante tem a seguinte forma: $s = 11,2 \times \times \text{ sen } (10\pi t + \pi/3)$ cm.

12.38. a) $A = 7$ cm; b) $A = 5$ cm.
12.39. $x^2/4 + y^2/4 = 1$ é a equação duma circunferência de 2 m de raio (R).
12.40. Consideremos as equações

$$x = \cos \pi t, \quad y = \cos \frac{\pi}{2} t = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi t}{2}},$$

ou $2y^2 - 1 = \cos \pi t$.
Daqui $(2y^2 - 1)/x = 1$, ou $2y^2 - x = 1$ é a equação duma parábola.
12.41. $x^2/1 + y^2/4 = 1$ é a equação duma elipse.
12.42. $y = -0,75x$ é a equação duma recta.
12.43. A equação das oscilações amortecidas tem o aspecto seguinte

$$x = A e^{-\delta t} \text{ sen } (\omega t + \varphi). \qquad (1)$$

No nosso caso, $\omega = 2\pi/T = \pi/2$, $\varphi = 0$ e $\delta = \varkappa/T = 1,6/4 = 0,4 \text{ s}^{-1}$. A amplitude ($A$) será determinada da seguinte condição: $x = 4,5$ cm, se $t = T/4 = 1$ s. Não é difícil determinar, a partir de (1), que $A = 6,7$ cm. Deste modo, a equação (1) adquirirá o seguinte aspecto:

$$x = 6,7 e^{-0,4t} \text{ sen } \frac{\pi}{2} t \text{ cm}. \qquad (2)$$

Para se traçar o gráfico das oscilações, determinemos os momentos de tempo (t_1, t_2, t_3, . . .,) correspondentes aos valores máximos do deslocamento x. O máximo (x) será determinado da condição $v = dx/dt = 0$. Da equação (1) determinemos (para sen $\varphi = 0$).

$$v = A\omega e^{-\delta t} \cos \omega t - A\delta e^{-\delta t} \text{ sen } \omega t = 0, \quad \text{daqui} \quad \text{tg}\,\omega t = \omega/\delta = 2\pi/\varkappa. \qquad (3,)$$

Da equação (3) conclui-se que somente se as oscilações forem não amortecidas, ou seja, quando $\varkappa = 0$, a grandeza $\text{tg}\,\omega t = \infty$, ou $\omega t = \pi/2$, isto é, $2\pi t/T = \pi/2$, ou $t = T/4$. No nosso caso, $\text{tg}\,\omega t = 2\pi/\varkappa = 3,925$, isto é, $\omega t = 75°42' \approx 0,421\pi$, daqui $t = 0,421\pi/\omega = 0,842$ s. Deste modo, $x = x_{max}$, se $t_1 = 0,842$ s; $t_2 = t_1 + T/2 = 2,842$ s; $t_3 = t_1 + T = 4,842$ s e $t_4 = t_1 + + 3T/2 = 6,842$ s, etc. Colocando os valores determinados de t na equação (2), não é difícil determinar os respectivos valores de x_1, x_2, x_3, ...

12.44. Ver a solução 12.43.
12.45. $v_1 = 7,85$ m/s, $v_2 = 2,88$ m/s, $v_3 = 1,06$ m/s, $v_4 = 0,39$ m/s, $v_5 = 0,14$ m/s.
12.46. De acordo com as fórmulas para as oscilações amortecidas, temos

$$A_1 = A_0 \exp\left(-\varkappa \frac{t}{T}\right); \quad A_2 = A_0 \exp\left(-\varkappa \frac{t+T}{T}\right),$$

daqui $A_1/A_2 = e^{\varkappa}$. Segundo a condição, $\varkappa = 0,2$; daqui $A_1/A_2 = 1,22$.
12.47. $\varkappa = 0,023$.
12.48. a) $t = 120$ s; b) $t = 1,22$ s.
12.49. Em 18%.
12.50. Reduzir-se-á a 1/8 (em 87,5%).
12.51. $t = 6,4$ s.

12.52. a) $\delta = 0{,}46\ s^{-1}$; b) $\delta = 10\ s^{-1}$; c) $\delta = \varkappa/T = \varkappa\omega_0/\sqrt{4\pi^2 + \varkappa^2} = 7{,}2\ s^{-1}$.

12.53. A equação das próprias oscilações tem o seguinte aspecto

$$x = A_0 e^{-\delta t} \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{1}$$

De acordo com as condições a desfasagem entre as oscilações próprias e amortecidas é igual a $-3\pi/4$; por conseguinte,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}(-3\pi/4) = 1,$$

daqui

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}, \tag{2}$$

Sabemos que $\omega - 10\pi$ e $\delta = 1{,}6\ s^{-1}$. Colocando estes valores em (2), obteremos $\omega_0 = 10{,}5\pi$ e então a equação das oscilações próprias adquirirá a seguinte forma

$$x = 7e^{-1{,}6t} \operatorname{sen} 10{,}5\pi t \text{ cm}.$$

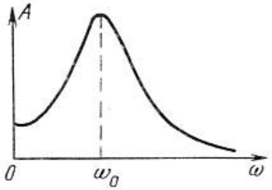


Fig. 40

A equação da força externa periódica tem o seguinte aspecto:

$$F = F_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

O valor máximo da força externa periódica é

$$F_0 = Am\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72\text{mN},$$

logo, a equação da força externa periódica terá o seguinte aspecto:

$$F = 72 \operatorname{sen} 10\pi t\ mN.$$

12.54. A fig. 40 caracteriza a dependência entre a amplitude (A) das oscilações amortecidas e a frequência (ω) da força externa periódica.

12.55. O carrinho começará a balançar-se fortemente, se o intervalo entre dois pontos sucessivos nas covas for igual ao período das oscilações próprias do carrinho. O período das oscilações próprias do carrinho calcula-se a partir da seguinte fórmula $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Sabemos que $m = 10$ kg/2 = 5 kg é a massa que se apoia sobre cada mola, $k = m_0 g/x_0 = (9{,}8/2)$ N/cm = 490 N/m, e, por conseguinte, $T = 0{,}63$ s. O tempo entre dois solavancos sucessivos (t) é igual a $l/v = T$; daqui obteremos $v = l/T = (0{,}3/0{,}63)$ m/s = 1,7 km/h.

12.56. $\lambda = 3\ \mu m$.

12.57. $c = 350$ m/s; $v_{max} = 0{,}785$ m/s.

12.58. A equação de onda tem o aspecto seguinte

$$x = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t - \frac{\pi l}{6 \cdot 10^4}\right) \text{cm}. \tag{1}$$

Deste modo, $x = f(t, l)$, isto é, o deslocamento dos pontos que se encontram no raio depende do tempo (t) e da distância (l) entre o ponto e a fonte das oscilações.

Para um ponto, afastado à distância (l) igual a 600 m da fonte de oscilações, a equação (l) adquirirá o aspecto $x = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi} t - \pi\right)$cm, isto é, se l = const, obteremos $x = f(t)$ — o deslocamento dum ponto fixo, situado no raio, que varia com o tempo.

Se $t = 4$ s, a equação (l) tomará a seguinte forma: $x = 10 \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi \cdot l}{6 \cdot 10^4}\right)$ cm. Neste caso, t = const e $x = f(l)$, ou seja, pontos diferentes, situados no raio, têm diferentes deslocamentos no momento dado.

12.59. $x = 0{,}04$ m.

12.60. $x = 0$; $v = 7{,}85$ cm/s; $a = 0$.

12.61. $\Delta\varphi = \pi$, ou seja, os pontos oscilam em fases opostas.

12.62. $\Delta\varphi = 4\pi$, ou seja, os pontos oscilam em fases iguais.

12.63. $x = 2{,}5$ cm.

12.64. $\lambda = 0{,}48$ m.

12.65. a) As posições dos nodos são as seguintes: $x = 3, 9, 15, \ldots$ cm; as posições de antinodos são: $x = 0, 6, 12{,}18, \ldots$ cm. b) As posições dos nodos são as seguintes; $x = 0, 6, 12, 18, \ldots$ cm; as posições dos antinodos são: $x = 3, 9, 15, \ldots$, cm.

12.66. $\lambda = 0{,}1$ m.

4.13. Acústica

13.1. $\lambda = 0{,}78$ m.

13.2. Entre $\lambda_1 = 17$ mm e $\lambda_2 = 17$ m.

13.3. $c = 5300$ m/s.

13.4. $c = 3700$ m/s.

13.5. Dado que o módulo de Young (E) e a compressibilidade (β) se relacionam por meio da seguinte expressão $\beta = 1/E$, obtém-se $\beta = 1/\rho c^2 = 7{,}1 \times 10^{-10}\ Pa^{-1}$.

13.6. $l = 1810$ m.

13.7. $c_1 = 318$ m/s; $c_2 = 330$ m/s; $c_3 = 343$ m/s.

13.8. 1,12 vezes.

13.9. $c = 315$ m/s.

13.10. $c = 330$ m/s.

13.11. $c = 336$ m/s.

13.12. $t = -54$ °C.

13.13. $n = c_1/c_2 = 0{,}067$.

13.14. $\alpha = 3°51'$.

13.15. $I_2/I_1 = 1{,}26$ (ver o problema 2 na pág. 176).

13.16. $p_2/p_1 = 1{,}12$.

13.17. $I_1/I_2 = 1000$.

13.18. $\Delta L_p = 30$ dB; $p_2/p_1 = 31{,}6$.

13.19. $L = 100$ fones; $p = 2$ Pa.

13.20. a) $\Delta L_I = 34{,}8$ fones; b) $\Delta L_I = 44{,}8$ fones.

13.21. A distância entre os dentes adjacentes da estria acústica do disco do vitrola é determinada pela fórmula $l = \omega r/\nu$, onde ω é a velocidade angular de rotação do disco. Colocando os dados numéricos, obteremos: a) $l = 2{,}25$ mm; b) $l = 0{,}75$ mm.

13.22. a) $l = 8{,}15$ mm; b) $l = 0{,}41$ mm.

13.23. Ao se gerarem oscilações numa barra de aço, na mesma formar-se-á uma onda estacionária com nodos nos pontos de aperto e antinodos nas extremidades livres. Na onda estacionária da coluna de ar a distância entre os antinodos adjacentes é igual à metade do comprimento da onda acústica excitada. Sabemos que

$$\lambda_1/\lambda_2 = c_1/c_2. \tag{1}$$

O comprimento (l_2) da coluna de ar, com base no exposto, será determinado a partir da seguinte condição:

$$n\lambda_2/2 = l_2. \tag{2}$$

De (1) e (2) obtém-se $l_2 = n\lambda_1 c_2/2c_1$. Então: a) $\lambda_1 = 2l_1$, $l_2 = 0{,}392$ m; b) $\lambda_1 = 4l_1$, $l_2 = 0{,}784$ m.

13.24. $l_1 = 0{,}715$ m.

13.25. $\nu = 43$ kH, ou seja, uma frequência ultra-sónica.

13.26. a) $\nu' = 666$ Hz; b) $\nu' = 542$ Hz.

12.52. a) $\delta = 0{,}46\ s^{-1}$; b) $\delta = 10\ s^{-1}$; c) $\delta = \varkappa/T = \varkappa\omega_0/\sqrt{4\pi^2 + \varkappa^2} = 7{,}2\ s^{-1}$.

12.53. A equação das próprias oscilações tem o seguinte aspecto

$$x = A_0 e^{-\delta t} \operatorname{sen} \omega_0 t. \qquad (1)$$

De acordo com as condições a desfasagem entre as oscilações próprias e amortecidas é igual a $-3\pi/4$; por conseguinte,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \operatorname{tg}(-3\pi/4) = 1,$$

daqui

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + 2\delta\omega}, \qquad (2)$$

Sabemos que $\omega = 10\pi$ e $\delta = 1{,}6\ s^{-1}$. Colocando estes valores em (2), obteremos $\omega_0 = 10{,}5\pi$ e então a equação das oscilações próprias adquirirá a seguinte forma

$$x = 7e^{-1{,}6t} \operatorname{sen} 10{,}5\pi t \text{ cm}.$$

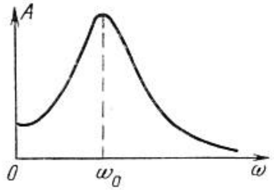


Fig. 40

A equação da força externa periódica tem o seguinte aspecto:

$$F = F_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

O valor máximo da força externa periódica é

$$F_0 = Am\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2} = 72\text{mN},$$

logo, a equação da força externa periódica terá o seguinte aspecto:

$$F = 72 \operatorname{sen} 10\pi t\ mN.$$

12.54. A fig. 40 caracteriza a dependência entre a amplitude (A) das oscilações amortecidas e a frequência (ω) da força externa periódica.

12.55. O carrinho começará a balançar-se fortemente, se o intervalo entre dois pontos sucessivos nas covas for igual ao período das oscilações próprias do carrinho. O período das oscilações próprias do carrinho calcula-se a partir da seguinte fórmula $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Sabemos que $m = 10$ kg/2 = 5 kg é a massa que se apoia sobre cada mola, $k = m_0 g/x_0 = (9{,}8/2)$ N/cm = 490 N/m, e, por conseguinte, $T = 0{,}63$ s. O tempo entre dois solavancos sucessivos (t) é igual a $l/v = T$; daqui obteremos $v = l/T = (0{,}3/0{,}63)$ m/s = 1,7 km/h.

12.56. $\lambda = 3$ µm.

12.57. $c = 350$ m/s; $v_{max} = 0{,}785$ m/s.

12.58. A equação de onda tem o aspecto seguinte

$$x = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi l}{6\cdot 10^4}\right) \text{cm}. \qquad (1)$$

Deste modo, $x = f(t, l)$, isto é, o deslocamento dos pontos que se encontram no raio depende do tempo (t) e da distância (l) entre o ponto e a fonte das oscilações.

Para um ponto, afastado à distância (l) igual a 600 m da fonte de oscilações, a equação (l) adquirirá o aspecto $x = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi}t - \pi\right)$cm, isto é, se $l =$ const, obteremos $x = f(t)$ — o deslocamento dum ponto fixo, situado no raio, que varia com o tempo.

Se $t = 4$ s, a equação (l) tomará a seguinte forma: $x = 10 \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi\cdot l}{6\cdot 10^4}\right)$ cm. Neste caso, $t =$ const e $x = f(l)$, ou seja, pontos diferentes, situados no raio, têm diferentes deslocamentos no momento dado.

12.59. $x = 0{,}04$ m.

12.60. $x = 0$; $v = 7{,}85$ cm/s; $a = 0$.

12.61. $\Delta\varphi = \pi$, ou seja, os pontos oscilam em fases opostas.

12.62. $\Delta\varphi = 4\pi$, ou seja, os pontos oscilam em fases iguais.

12.63. $x = 2{,}5$ cm.

12.64. $\lambda = 0{,}48$ m.

12.65. a) As posições dos nodos são as seguintes: $x = 3, 9, 15, \ldots$ cm; as posições de antinodos são: $x = 0, 6, 12, 18, \ldots$ cm. b) As posições dos nodos são as seguintes; $x = 0, 6, 12, 18, \ldots$ cm; as posições dos antinodos são: $x = 3, 9, 15, \ldots$, cm.

12.66. $\lambda = 0{,}1$ m.

4.13. Acústica

13.1. $\lambda = 0{,}78$ m.

13.2. Entre $\lambda_1 = 17$ mm e $\lambda_2 = 17$ m.

13.3. $c = 5300$ m/s.

13.4. $c = 3700$ m/s.

13.5. Dado que o módulo de Young (E) e a compressibilidade (β) se relacionam por meio da seguinte expressão $\beta = 1/E$, obtém-se $\beta = 1/\rho c^2 = 7{,}1 \times 10^{-10}\ Pa^{-1}$.

13.6. $l = 1810$ m.

13.7. $c_1 = 318$ m/s; $c_2 = 330$ m/s; $c_3 = 343$ m/s.

13.8. 1,12 vezes.

13.9. $c = 315$ m/s.

13.10. $c = 330$ m/s.

13.11. $c = 336$ m/s.

13.12. $t = -54$ °C.

13.13. $n = c_1/c_2 = 0{,}067$.

13.14. $\alpha = 3°51'$.

13.15. $I_2/I_1 = 1{,}26$ (ver o problema 2 na pág. 176).

13.16. $p_2/p_1 = 1{,}12$.

13.17. $I_1/I_2 = 1000$.

13.18. $\Delta L_p = 30$ dB; $p_2/p_1 = 31{,}6$.

13.19. $L = 100$ fones; $p = 2$ Pa.

13.20. a) $\Delta L_I = 34{,}8$ fones; b) $\Delta L_I = 44{,}8$ fones.

13.21. A distância entre os dentes adjacentes da estria acústica do disco do vitrola é determinada pela fórmula $l = \omega r/v$, onde ω é a velocidade angular de rotação do disco. Colocando os dados numéricos, obteremos: a) $l = 2{,}25$ mm; b) $l = 0{,}75$ mm.

13.22. a) $l = 8{,}15$ mm; b) $l = 0{,}41$ mm.

13.23. Ao se gerarem oscilações numa barra de aço, na mesma formar-se-á uma onda estacionária com nodos nos pontos de aperto e antinodos nas extremidades livres. Na onda estacionária da coluna de ar a distância entre os antinodos adjacentes é igual à metade do comprimento da onda acústica excitada. Sabemos que

$$\lambda_1/\lambda_2 = c_1/c_2. \qquad (1)$$

O comprimento (l_2) da coluna de ar, com base no exposto, será determinado a partir da seguinte condição:

$$n\lambda_2/2 = l_2. \qquad (2)$$

De (1) e (2) obtém-se $l_2 = n\lambda_1 c_2/2c_1$. Então: a) $\lambda_1 = 2l_1$, $l_2 = 0{,}392$ m; b) $\lambda_1 = 4l_1$, $l_2 = 0{,}784$ m.

13.24. $l_1 = 0{,}715$ m.

13.25. $\nu = 43$ kH, ou seja, uma frequência ultra-sónica.

13.26. a) $\nu' = 666$ Hz; b) $\nu' = 542$ Hz.

13.27. 10%.
13.28. $v_1 = 28{,}3$ km/h; $v_2 = 14{,}7$ km/h.
13.29. 4 vezes.
13.30. $v = 71$ km/h.
13.31. $\nu_1 = 45$ kHz, $\nu_2 = 46{,}6$ kHz.
13.32. $l = 0{,}45$ m.
13.33. $F = 7{,}3$ N.
13.34. $\nu_{max} = 158$ Hz.
13.35. Temos

$$\nu_1/\nu_2 = \sqrt{F_1/F_2} = \sqrt{15/16}, \quad \nu_0 = \nu_2 - \nu_1 = 8 \text{ Hz}.$$

Resolvendo estas equações em conjunto, obteremos $\nu_2 = 252$ Hz.
13.36. $\nu = 250$ Hz ou $\nu = 254$ Hz.
13.37. $\nu = 250$ Hz.
13.38. a) No tubo aberto forma-se uma onda acústica estacionária com antinodos em ambas as extremidades. É evidente que, neste caso, no comprimento (l) do tubo cabem n semi-ondas, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, isto é, $l = n\lambda/2$ e $\nu = c/\lambda = nc/2l$. Se $n = 1$, obteremos a frequência do tom fundamental $\nu = c/2l$. b) No tubo fechado a onda estacionária tem um nodo numa extremidade e um antinodo na outra. É evidente que, no nosso caso, $l = n\lambda/4$ e $\nu = c/\lambda = nc/4l$. Se $n = 1$, obteremos a frequência do tom fundamental (ν) igual a $c/4l$.
13.39. $\nu = 261$ Hz; $l = 0{,}65$ m.

4.14. Oscilações e Ondas Electromagnéticas

14.1. $\lambda = 2500$ m.
14.2. Entre $\lambda_1 = 700$ m e $\lambda_2 = 1950$ m.
14.3. $L = 12{,}7$ mHz.
14.4. $\varepsilon = 6$.
14.5. $U = 100 \cos(2\pi 10^3 t)$ V, $I = -15{,}7 \operatorname{sen}(2\pi 10^3 t)$ mA; $U_1 = 70{,}7$ V; $I_1 = -11{,}1$ mA; $U_2 = 0$; $I_2 = -15{,}7$ mA; $U_2 = -100$ V, $I_3 = 0$.
14.6. $W_{el} = 125 \cos^2(2\pi \cdot 10^3 t)$ μJ, $W_m = 125 \operatorname{sen}^2(2\pi \cdot 10^3)$ μJ, $W = 125$ μJ; $W_{el1} = 62{,}5$ μJ, $W_{m1} = 62{,}5$ μJ, $W_1 = 125$ μJ; $W_{el2} = 0$, $W_{m2} = 125$ μJ, $W_2 = 125$ μJ; $W_{el3} = 125$ μJ, $W_{m3} = 0$, $W_3 = 125$ μJ.
14.7. $T = 0{,}2$ ms; $L = 10{,}15$ mH; $I = -157 \operatorname{sen} 10^4 \pi t$ mA; $\lambda = 60$ km.
14.8. $T = 5$ ms; $C = 0{,}63$ μF; $U = 25{,}2$ V; $W_m = 0{,}2$ mJ; $W_{el} = 0{,}2$ mJ.
14.9. Sabemos que $U = U_0 \cos \omega t$ e $I = CdU/dt = -CU\omega_0 \operatorname{sen} \omega t$; por conseguinte

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LC^2U_0^2\omega^2}{2} \operatorname{sen}^2 \omega t,$$

$$W_{el} = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \cos^2 \omega t.$$

Daqui

$$\frac{W_m}{W_{el}} = LC\omega^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \omega t}{\cos^2 \omega t} = LC\omega^2 \operatorname{tg}^2 \omega t.$$

Se $t = T/8$, verificar-se-á $\operatorname{sen} \omega t = \sqrt{2}/2$ e $\cos \omega t = \sqrt{2}/2$. Dado que $LC = T^2/4\pi^2 = 1/\omega^2$, temos

$$W_m/W_{el} = \operatorname{sen}^2 \omega t / \cos^2 \omega t = 1.$$

14.10. $T = 8$ ms, $\varkappa = 0{,}7$; $U = 80e^{-87t} \cos 250\pi t$ V; $U_1 = -56{,}5$ V, $U_2 = 40$ V, $U_3 = -28$ V, $U_4 = 20$ V.

14.11. Considerando que a resistência (R) é bastante pequena, determinemos o período de oscilações de acordo com a fórmula $T = 2\pi\sqrt{LC} = 0{,}2$ ms. Por outro lado, sabemos que

$$U_1 = U_0 \exp(-\varkappa t/T), \quad \text{daqui} \quad \varkappa t/T = \ln(U_0/U_1).$$

De acordo com as condições se $t = 1$ ms, a relação (U_0/U_1) é igual a 3. Por conseguinte,

$$\varkappa = \frac{T \ln(U_0/U_1)}{t} = 0{,}22.$$

A resistência do circuito (R) é igual a 11,1 Ohms. Não é difícil comprovar que este valor de R satisfaz a condição de aplicação da fórmula $T = 2\pi\sqrt{LC}$.
14.12. Em 4%.
14.13. $\varkappa = 8\rho\sqrt{\pi/C}/d^2\sqrt{\mu_0\mu} = 0{,}018$.
14.14. $t = (T \ln 100)\, 2\varkappa = 6{,}8$ ms.
14.15. $C = 0{,}7$ μF.
14.16. $R = 4{,}1\Omega$.
14.17. $\nu = 300$ Hz.
14.18. $I = 4{,}6$ mA; $U_{C1} = 73{,}4$ V, $U_{C2} = 146{,}6$ V.
14.19. 74%, 68%.
14.20. 72,5%; 68,5%.
14.21. $C = 3{,}74$ μF.
14.22. $L = 55$ mH.
14.23. a) $Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1/R\omega C$; b) $Z = \dfrac{R}{\sqrt{R^2\omega^2C^2 + 1}}$, $\operatorname{tg} \varphi = -R\omega C$; c) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \omega L/R$; d) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi = R/\omega L$; e) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$.
14.24. a) $Z = 4{,}38$ kΩ; b) $Z = 2{,}18$ kΩ.
14.25. $I = 1{,}34$ A; $U_C = 121$ V; $U_R = 134$ V; $U_L = 295$ V.
14.26. 12,3Ω.
14.27. $R = 40\Omega$; $L = 74$ mH.
14.28. $U_R = 156$ V.

5. Óptica

5.15. Óptica Geométrica e Fotometria

15.1. $\vartheta = 2\alpha$.
15.2. $a_2 = -15$ cm, $y_2 = 5$ mm; a imagem é real, invertida e reduzida.
15.3. $a_2 = 0{,}12$ m, $y_2 = -8$ mm; a imagem é virtual, directa e reduzida.
15.4. $a_2 = 7{,}5$ cm, $y_2 = -1{,}5$ cm; a imagem é virtual, directa e reduzida.
15.5. $a_1 = -0{,}6$ m, $a_2 = -0{,}3$ m.
15.6. $F = -10$ cm; $D = -10$ dptr.
15.7. $k = 6$.
15.8. $a_2 = R/2$, ou seja, a imagem encontrar-se-á no foco do espelho; $y_2 = 7{,}5$ cm.
15.9. Do triângulo isósceles OAM (fig. 15.1) temos $OA = R/2 \cos \alpha$. Mas $x = AF = OA - OF = OA - R/2$, isto é,

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right).$$