

Firstly, we define:

$$F_{\ell\ell'L'}^{s_x} \stackrel{\text{def}}{=} [-\ell(\ell+1) + \ell'(\ell'+1) + L'(L'+1)] \sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell'+1)(2L'+1)}{16\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L' \\ -s_x & s_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\epsilon_{\ell\ell'L'} = \frac{1 + (-1)^{\ell+\ell'+L'}}{2} \quad (2)$$

$$\beta_{\ell\ell'L'} = \frac{1 - (-1)^{\ell+\ell'+L'}}{2i} \quad (3)$$

This is the original formula for the lensed field in Hu's paper.

$$\delta X_l^m \approx \sum_{L'M'} \sum_{\ell'm'} \phi_{L'}^{M'} (-1)^{m'} \begin{pmatrix} l & \ell' & L' \\ m & -m' & -M' \end{pmatrix} F_{\ell\ell'L'}^{s_x} [\epsilon_{\ell\ell'L'} X_{\ell'}^{m'} + \beta_{\ell\ell'L'} \bar{X}_{\ell'}^{m'}] \quad (4)$$

$$\delta X_l^m \approx \sum_{L'M'} \sum_{\ell'm'} \phi_{L'}^{M'} (-1)^{m'} \begin{pmatrix} l & \ell' & L' \\ m & -m' & -M' \end{pmatrix} F_{\ell\ell'L'}^{s_x} [\epsilon_{\ell\ell'L'} X_{\ell'}^{m'} + \beta_{\ell\ell'L'} \bar{X}_{\ell'}^{m'}] \quad (5)$$

$$= \sum_{L'M'} \sum_{\ell'm'} \phi_{L'}^{-M'} (-1)^{M'} (-1)^{m-m'-M'} \begin{pmatrix} l & \ell' & L' \\ m & m' & M' \end{pmatrix} F_{\ell\ell'L'}^{s_x} (-1)^{m'} [\epsilon_{\ell\ell'L'} X_{\ell'}^{-m'} + \beta_{\ell\ell'L'} \bar{X}_{\ell'}^{-m'}] \quad (6)$$

We know that

$$m - m' - M' = 0, \quad (-1)^{m-m'-M'} = 1 \quad (7)$$

$$(-1)^{M'} \phi_{L'}^{-M'} = \phi_{L'}^{M'*} \quad (8)$$

$$(-1)^{m'} X_{\ell'}^{-m'} = X_{\ell'}^{m'*} \quad (9)$$

$$(-1)^{m'} \bar{X}_{\ell'}^{-m'} = \bar{X}_{\ell'}^{m'*} \quad (10)$$

Then we got:

$$\delta X_l^m \approx \sum_{L'M'} \sum_{\ell'm'} \phi_{L'}^{-M'*} \begin{pmatrix} l & \ell' & L' \\ m & m' & M' \end{pmatrix} F_{\ell\ell'L'}^{s_x} [\epsilon_{\ell\ell'L'} X_{\ell'}^{m'*} + \beta_{\ell\ell'L'} \bar{X}_{\ell'}^{m'*}] \quad (11)$$

Then I'll manipulate the formular to give a form easier to use. ...

$$F_{\ell\ell'\ell'}^0 \epsilon_{\ell\ell'L'} = F_{\ell\ell'\ell'}^0 \quad (12)$$

$$F_{\ell\ell'\ell'}^2 \epsilon_{\ell\ell'L'} = \frac{F_{\ell_1\ell_2\ell}^2 + F_{\ell_1\ell_2\ell}^{-2}}{2} \quad (13)$$

$$F_{\ell\ell'\ell'}^2 \beta_{W'L'} = \frac{F_{\ell_1\ell_2\ell}^2 - F_{\ell_1\ell_2\ell}^{-2}}{2i} \quad (14)$$

So we get:

$$T_\ell^{m\ len} = \sum_{\ell'm'L'M'} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L' \\ m & m' & M' \end{pmatrix} F_{\ell\ell'L'\ell'}^0 \phi_{L'}^{My'*} \quad (15)$$

$$E_\ell^{m\ len} = \sum_{\ell'm'L'M'} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L' \\ m & m' & L' \end{pmatrix} \left(\frac{F_{\ell\ell'L'}^2 + F_{\ell\ell'L'}^{-2}}{2} E_{\ell'}^{m'*} \phi_{L'}^{M'*} - \frac{F_{\ell\ell'L'}^2 - F_{\ell\ell'L'}^{-2}}{2i} B_{\ell'}^{m'*} \phi_{L'}^{M'*} \right) \quad (16)$$

$$B_\ell^{m\ len} = \sum_{\ell'm'L'M'} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L' \\ m & m' & M' \end{pmatrix} \left(\frac{F_{\ell\ell'L'}^2 + F_{\ell\ell'L'}^{-2}}{2} B_{\ell'}^{m'*} \phi_{L'}^{M'*} + \frac{F_{\ell\ell'L'}^2 - F_{\ell\ell'L'}^{-2}}{2i} E_{\ell'}^{m'*} \phi_{L'}^{M'*} \right) \quad (17)$$

if we neglect the unlensed B:

$$B_\ell^{m\ len} = \sum_{\ell'm'\ell'm'} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & \ell' \\ m & m' & M' \end{pmatrix} \frac{F_{\ell\ell'L}^2 - F_{\ell\ell'L}^{-2}}{2i} E_{\ell'}^{m'*} \phi_{\ell'}^{M'*} \quad (18)$$