Propagación de la pandemia del COVID-19: Entregable de la parte II

Por Emiliano Cabrera, Andrew Dunkerley y Do Hyun Nam

Profesor: Miguel Eduardo Uribe

Modelación Matemática Fundamental

a) Separando variables, encuentre la cantidad de personas x(t) que han contráıdo el COVID-19 en el instante de tiempo t utilizando el modelo matemático del inciso(b) de la Parte I.

Separación de variables:

$\frac{dx}{dt} = kx(n+1-x)$

$\frac{dx}{x(n+1-x)} = k\,dt$

$\int \frac{1}{x(n+1-x)}\,dx = kt + c$

Propiedad lineal:

$\int \frac{1}{x(n+1-x)}\,dx$

Descomponemos a fracciones parciales con $n+1$

$\int (\frac{1}{(n+1)(n+1-x)} + \frac{1}{(n+1)x})\,dx$

$\frac{1}{(n+1)} \int \frac{1}{n+1-x}\,dx + \frac{1}{(n+1)} \int \frac{1}{x}\,dx$

Para la primera integral: $\int \frac{1}{n+1-x}\,dx$

$u = n+1-x --> \frac{du}{dx} = -1 --> dx = -du$

$-\int \frac{1}{u}\,du = -ln(u)$

$= -ln(n+1-x)$

Para la segunda integral: $\int \frac{1}{x}\,dx$

$\int \frac{1}{x}\,dx = ln(x)$

$= ln(x)$

Insertar las integrales resueltas:

$-\frac{1}{(n+1)} ln(n+1-x) + \frac{1}{(n+1)} ln(x))$

$\frac{ln(x)}{n+1} - \frac{ln(n+1-x)}{n+1}$

$\frac{ln(x) - ln(n+1-x)}{n+1}$

Regresando a la igualdad:

$\frac{ln(\frac{x}{n+1-x})}{n+1} = kt + c$

Despeje de x:

$\frac{x}{n+1-x} = e^{kt(n+1)} e^{c}$

$x = -xe^{kt(n+1)} e^{c} + ne^{kt(n+1)} e^{c} + e^{kt(n+1)} e^{c}$

$x + xe^{kt(n+1)} e^{c} = +ne^{kt(n+1)} e^{c} + e^{kt(n+1)} e^{c}$

$x(1 + e^{kt(n+1)} e^{c}) = ne^{kt(n+1)} e^{c} + e^{kt(n+1)} e^{c}$

$x = \frac{ne^{kt(n+1)}e^c + e^{kt(n+1)}e^c}{1+e^{kt(n+1)}e^c}$

$x = \frac{(+n+1)e^{kt(n+1)}e^c}{1+e^{kt(n+1)}e^c}$

$x(t) = \frac{(n+1)e^{kt(n+1)}e^c}{1+e^{kt(n+1)}e^c}$

Considerando a $A = e^c$ como una constante:

$x(t) = \frac{(n+1)Ae^{kt(n+1)}}{1+Ae^{kt(n+1)}}$

Sabiendo que $x(0) = 1$:

$1 = \frac{(n+1)Ae^{k(0)(n+1)}}{1+Ae^{k(0)(n+1)}}$

$1 = \frac{(n+1)A}{1+A}$

$1 + A = (n+1)A$

$\frac{1+A}{A} = n+1$

$\frac{1}{A} + 1 = n+1$

$\frac{1}{A} = n$

$A = \frac{1}{n}$

b) Separando variables, encuentre la cantidad de personas x(t) que han contraído el COVID-19 en el instante de tiempo t utilizando el modelo de difusion lineal. Explique por que, según este modelo, todos contraeran la enfermedad.

Separación de variables:

$\frac{dx}{dt} = r(n-x)$

$\frac{dx}{r(n-x)} = t\,dt$

$\frac{1}{r}\int \frac{1}{n-x}\,dx = t$

$\int \frac{1}{n-x}\,dx = rt + c$

Sustitución de $n - x$

$u = n - x --> \frac{du}{dx} = -1 --> dx = -du$

$-\int \frac{1}{u}\,du = ln(u)$

$= -ln(n-x)$

Regresando a la igualdad:

$-ln(n-x) = rt + c$

$n - x = e^{-rt}e^{-c}$

$-x = -n + e^{-rt}e^{-c}$

$x(t) = n - e^{-rt}e^{-c}$

Considerando a $A = e^{-c}$ como una constante:

$x(t) = n - Ae^{-rt}$

Sabiendo que $x(0) = 1$:

$1 = n - Ae^{-r(0)}$

$1 = n - A$

$A = n - 1$

c) Investigue al menos tres municipios en estados del páıs con baja densidad poblacional y aplique los resultados que se obtuvieron en los incisos a) y b) para predecir la evolucion del COVID-19 en dichos municipios.

Guanajuato, Guanajuato

Densidad poblacional $= 181.7\frac{personas}{km^2}$ (2015)

Habitantes $= 171,709$ personas (2010)

Metepec, Edo. de México

Densidad poblacional $= 80.6\frac{personas}{km^2}$ (2015)

Habitantes $= 11,429$ personas (2010)

Villa de Cos, Zacatecas

Densidad poblacional $= 5.3\frac{personas}{km^2}$ (2015)

Habitantes $= 34,328$ personas (2010)

Fuente: https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/ (https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/)

Guanajuato:

$x(0) = 1$

$x(7) = 2$

$x(18) = 7$

$x(39) = 11$

Modelo 1

$$x(7) = \frac{(171710)e^{k7(171710)}\frac{1}{171709}}{1+e^{k7(171710)}\frac{1}{171709}} = 2$$

$$k = \frac{ln(\frac{171709}{85854})}{1201970} \approx 5.76681 \times 10^{-7}$$

$$x(18) = \frac{(171710)e^{k18(171710)}\frac{1}{171709}}{1+e^{k18(171710)}\frac{1}{171709}} = 7$$

$$k = \frac{ln(\frac{171709}{85854})}{3090780} \approx 2.24265 \times 10^{-7}$$

$$x(39) = \frac{(171710)e^{k39(171710)}\frac{1}{171709}}{1+e^{k39(171710)}\frac{1}{171709}} = 11$$

$$k = \frac{ln(\frac{171709}{85854})}{6696690} \approx 1.03507 \times 10^{-7}$$

$$k_{average} \approx 3.01484 \times 10^{-7}$$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$$x(t) = \frac{(171710)e^{t(3.01484\times 10^{-7})(171710)}\frac{1}{171709}}{1+e^{t(3.01484\times 10^{-7})(171710)}\frac{1}{171709}}$$

Modelo 2

$$x(7) = 171709 - (171708)e^{-r(7)} = 2$$

$$r = -\frac{ln(\frac{171707}{171708})}{7} \approx 8.3198 \times 10^{-7}$$

$$x(18) = 171709 - (171708)e^{-r(18)} = 7$$

$$r = -\frac{ln(\frac{171707}{171708})}{18} \approx 3.23548 \times 10^{-7}$$

$$x(39) = 171709 - (171708)e^{-r(39)} = 11$$

$$r = -\frac{ln(\frac{171707}{171708})}{39} \approx 1.4966 \times 10^{-7}$$

$$r_{average} \approx 4.35063 \times 10^{-7}$$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$$x(t) = 171709 - (171708)e^{-(4.35063\times 10^{-7})t}$$

Metepec:

$x(0) = 1$

$x(11) = 7$

$x(27) = 21$

$x(35) = 30$

Modelo 1

$x(11) = \frac{(11430)e^{k11(11430)\frac{1}{11429}}}{1+e^{k11(11430)\frac{1}{11429}}} = 7$

$k = \frac{ln(\frac{80003}{11423})}{125730} \approx 1.54811 \times 10^{-5}$

$x(27) = \frac{(11430)e^{k27(11430)\frac{1}{11429}}}{1+e^{k27(11430)\frac{1}{11429}}} = 21$

$k = \frac{ln(\frac{80003}{11423})}{308610} \approx 6.3071 \times 10^{-6}$

$x(35) = \frac{(11430)e^{k35(11430)\frac{1}{11429}}}{1+e^{k35(11430)\frac{1}{11429}}} = 30$

$k = \frac{ln(\frac{80003}{11423})}{400050} \approx 4.86548 \times 10^{-6}$

$k_{average} \approx 8.88456 \times 10^{-6}$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$x(t) = \frac{(11430)e^{t(8.88456\times10^{-6})(11430)\frac{1}{11429}}}{1+e^{t(8.88456\times10^{-6})(11430)\frac{1}{11429}}}$

Modelo 2

$x(11) = 11429 - (11428)e^{-r(11)} = 7$

$r = -\frac{ln(\frac{5711}{5714})}{11} \approx 4.77422 \times 10^{-5}$

$x(27) = 11429 - (11428)e^{-r(27)} = 21$

$r = -\frac{ln(\frac{5711}{5714})}{27} \approx 1.94505 \times 10^{-5}$

$x(35) = 11429 - (11428)e^{-r(35)} = 30$

$r = -\frac{ln(\frac{5711}{5714})}{35} \approx 1.50047 \times 10^{-5}$

$r_{average} \approx 2.73991 \times 10^{-5}$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$x(t) = 11429 - (11428)e^{-(2.73991\times10^{-5})t}$

Villa de Cos:

$x(0) = 1$

$x(6) = 6$

$x(22) = 8$

$x(33) = 12$

Modelo 1

$x(6) = \frac{(34329)e^{k6(34329)\frac{1}{34328}}}{1+e^{k6(34329)\frac{1}{34328}}} = 6$

$k = \frac{ln(\frac{68656}{11441})}{205974} \approx 8.69967 \times 10^{-6}$

$x(22) = \frac{(34329)e^{k22(34329)\frac{1}{34328}}}{1+e^{k22(34329)\frac{1}{34328}}} = 8$

$k = \frac{ln(\frac{68656}{11441})}{755238} \approx 2.37264 \times 10^{-6}$

$x(33) = \frac{(34329)e^{k33(34329)\frac{1}{34328}}}{1+e^{k33(34329)\frac{1}{34328}}} = 12$

$k = \frac{ln(\frac{68656}{11441})}{1132857} \approx 1.58176 \times 10^{-6}$

$k_{average} \approx 4.21802 \times 10^{-6}$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$x(t) = \frac{(34329)e^{t(4.21802\times10^{-6})(34329)\frac{1}{34328}}}{1+e^{t(4.21802\times10^{-6})(34329)\frac{1}{34328}}}$

Modelo 2

$x(6) = 34328 - (34327)e^{-r(6)} = 6$

$r = -\frac{ln(\frac{34322}{34327})}{6} \approx 2.42781 \times 10^{-5}$

$x(22) = 34328 - (34327)e^{-r(22)} = 8$

$r = -\frac{ln(\frac{34322}{34327})}{22} \approx 6.6213 \times 10^{-6}$

$x(33) = 34328 - (34327)e^{-r(33)} = 12$

$r = -\frac{ln(\frac{34322}{34327})}{33} \approx 4.4142 \times 10^{-6}$

$r_{average} \approx 1.17712 \times 10^{-5}$

De manera que se puede describir la evolución con el siguiente modelo:

$x(t) = 34328 - (34327)e^{-(1.17712\times10^{-5})t}$

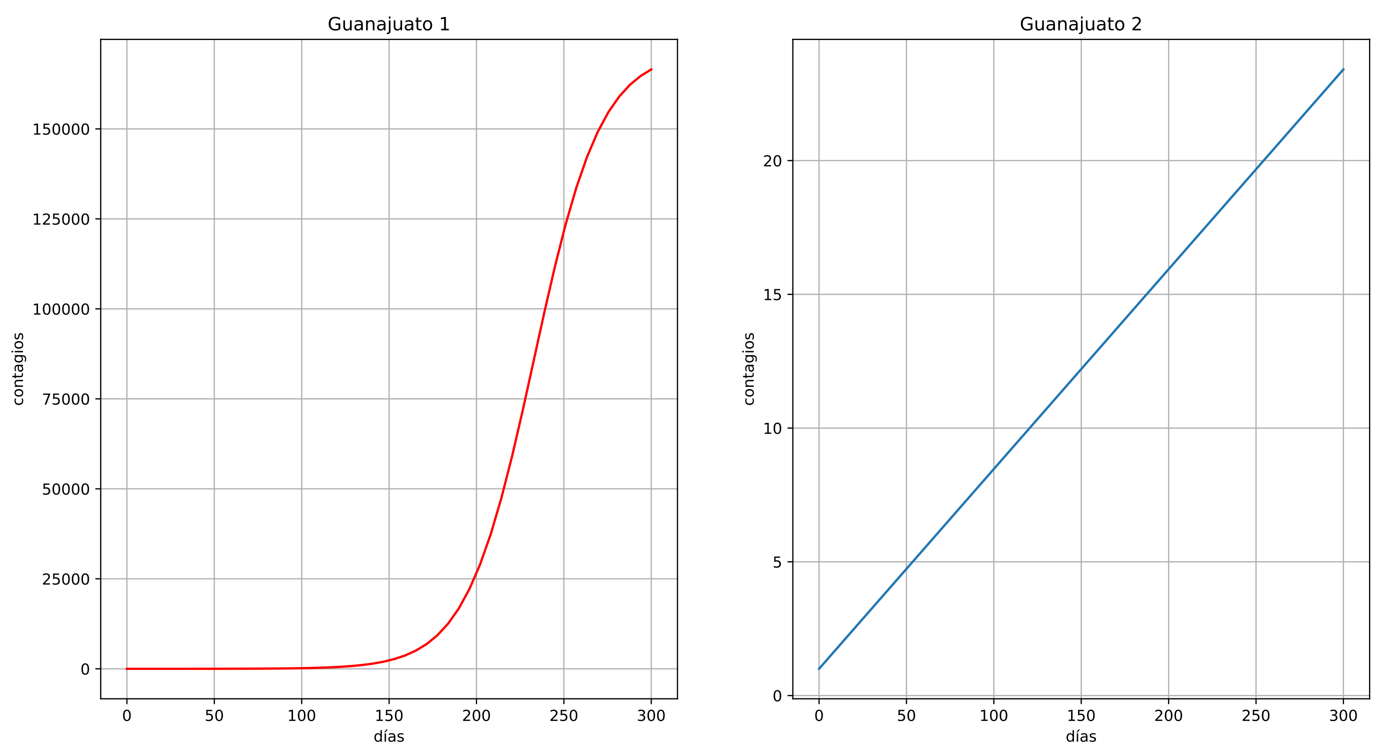
d) Finalmente grafique las respectivas funciones x(t) que arrojo cada modelo para cada municipio y compare dichas gráficas con las gŕaficas oficiales para dichos municipios que proporciona el gobierno. De acuerdo a los resultados obtenidos explique: ¿Cual de los dos modelos resulta mejor para predecir la evolucion del virus?; ¿Seran estos modelos apropiados para modelar el virus COVID-19?.

In [45]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

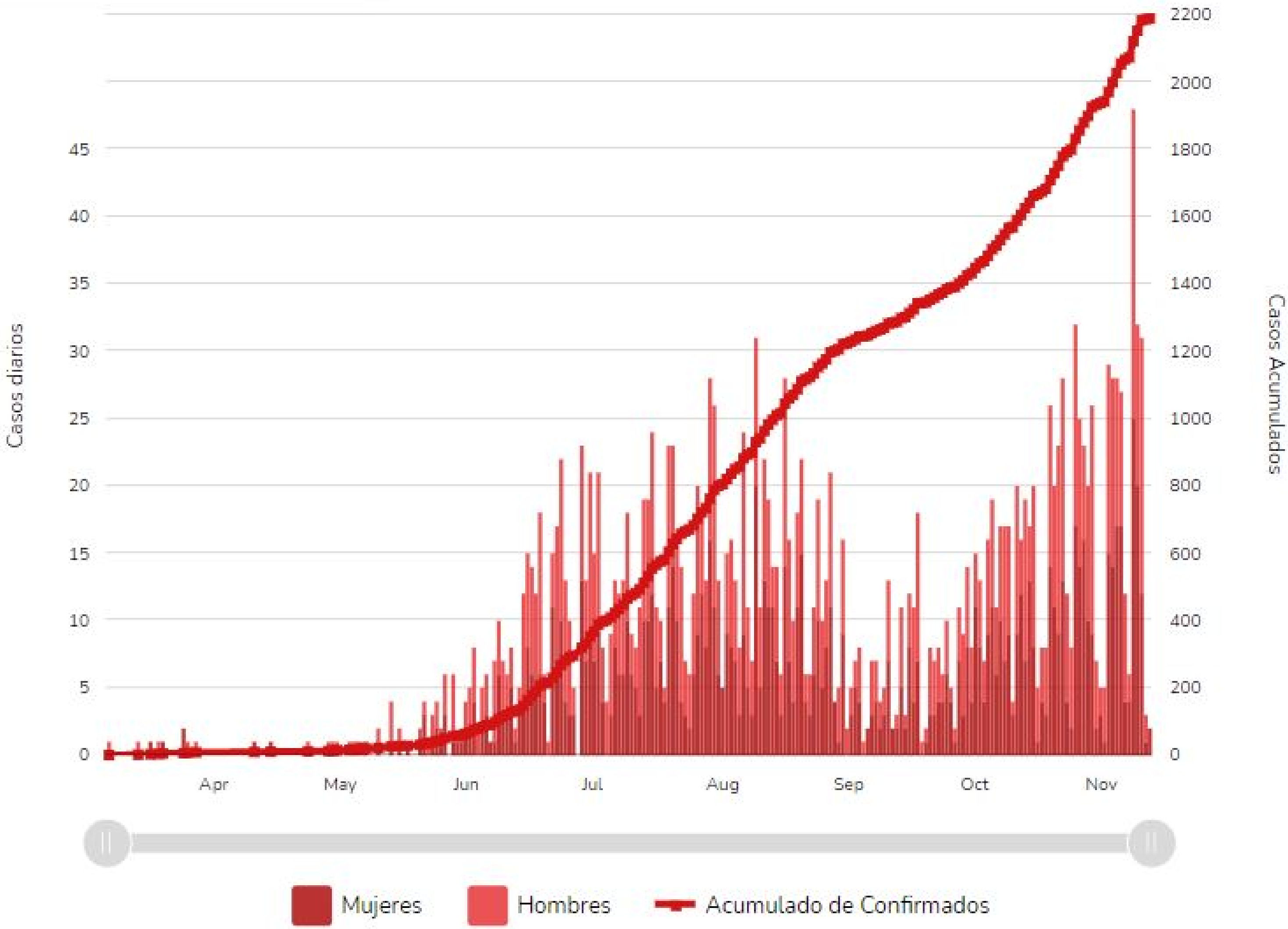
In [46]:
```
t = np.linspace(0,300)
#G
yG1 = (171710 * np.e**(t*3.0148*10**-7*171710)*(1/171709))/(1+np.e**(t*3.01484*(10**-7)*171710)*1/171
709)
yG2 = (171709) - (171708*np.e**(-1*t*4.35063*10**-7))
```

In [47]:
```
fig , ax= plt.subplots(1,2, figsize= (15,8))
#G1
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,yG1, color = 'red')
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Guanajuato 1")
#G2
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,yG2)
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Guanajuato 2")
```

Out[47]: `Text(0.5, 1.0, 'Guanajuato 2')`



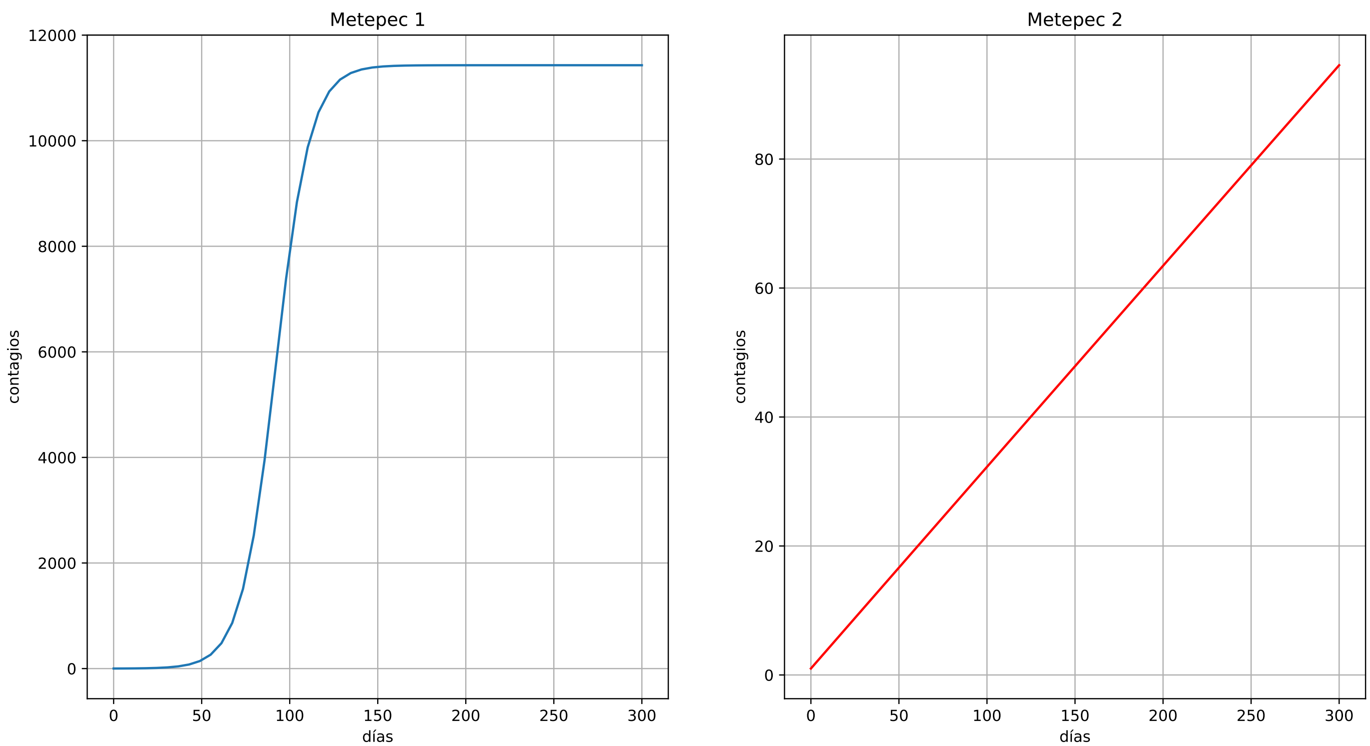
Al analizar las gráficas de Guanajuato, se observa que el primer modelo, es el que tiene un mayor rango a los 300 días (que es un aproximado del total de días desde el primer caso en el municipio). Sin embargo, si bien llega a un aproximado de 150000 casos, el modelo es completamente erróneo; ya que las cifras reales llegan sólamente a los 2200. Por otro lado, el segundo modelo es un número mucho más cercano al modelo gubernamental (con un número de casos de 25 aproximadamente) pero sigue siendo una muy mala aproximación. Por lo tanto, ninguno de estos dos modelos se podría utilizar para definir los casos de Guanajuato.



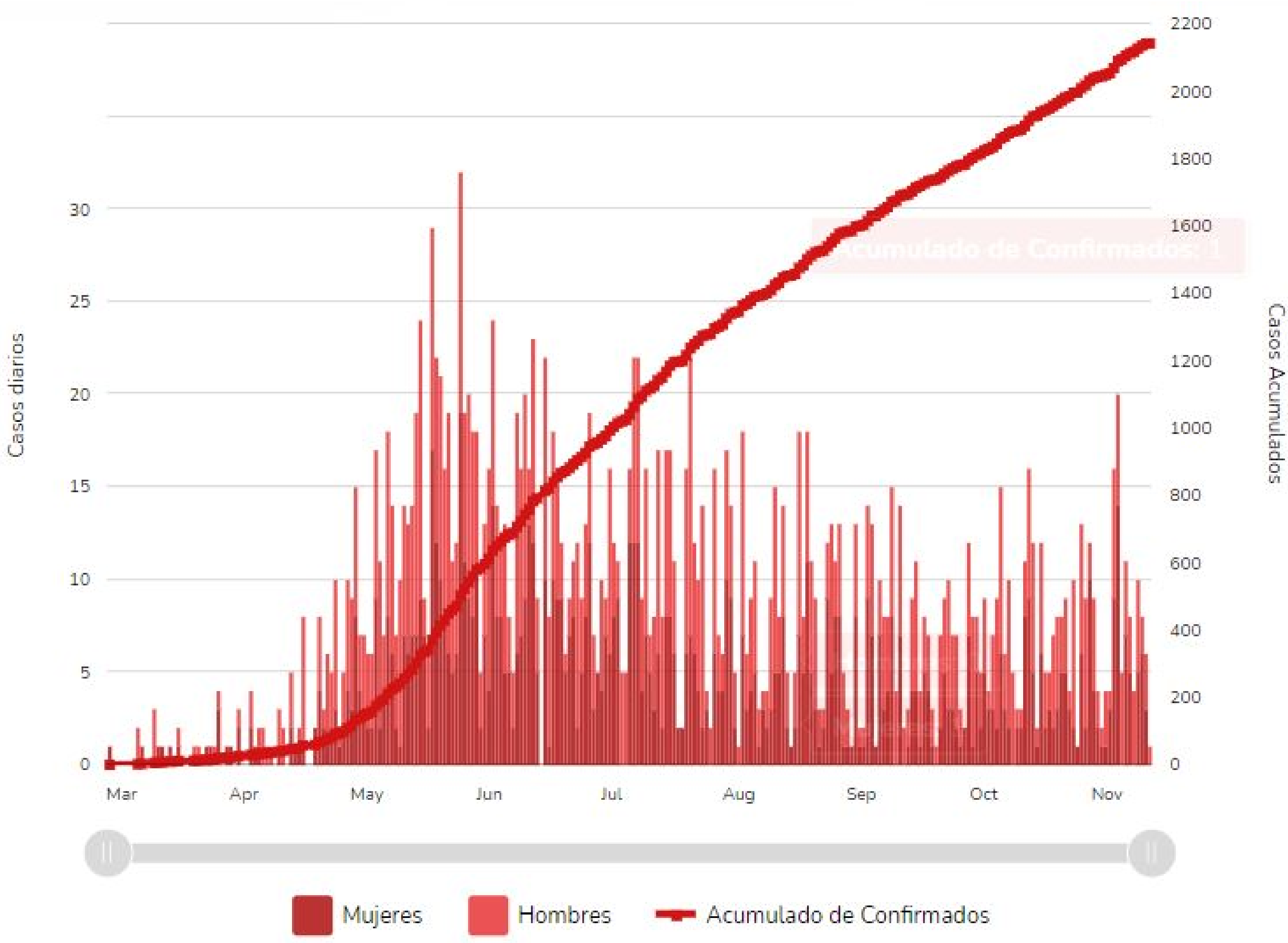
In [48]:
```
#M
yM1 = (11430*np.e**(t*8.88456*(10**-6)*11430)*(1/11429))/((1+np.e**(t*8.88456*(10**-6)*11430)*(1/1142
9)))
yM2 = 11429 - (11428*np.e**(-1*2.73991*10**-5*t))
```

In [49]:
```
fig , ax= plt.subplots(1,2, figsize= (15,8))
#G1
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,yM1)
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Metepec 1")
#G2
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,yM2, color = 'red')
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Metepec 2")
```

Out[49]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Metepec 2')
```



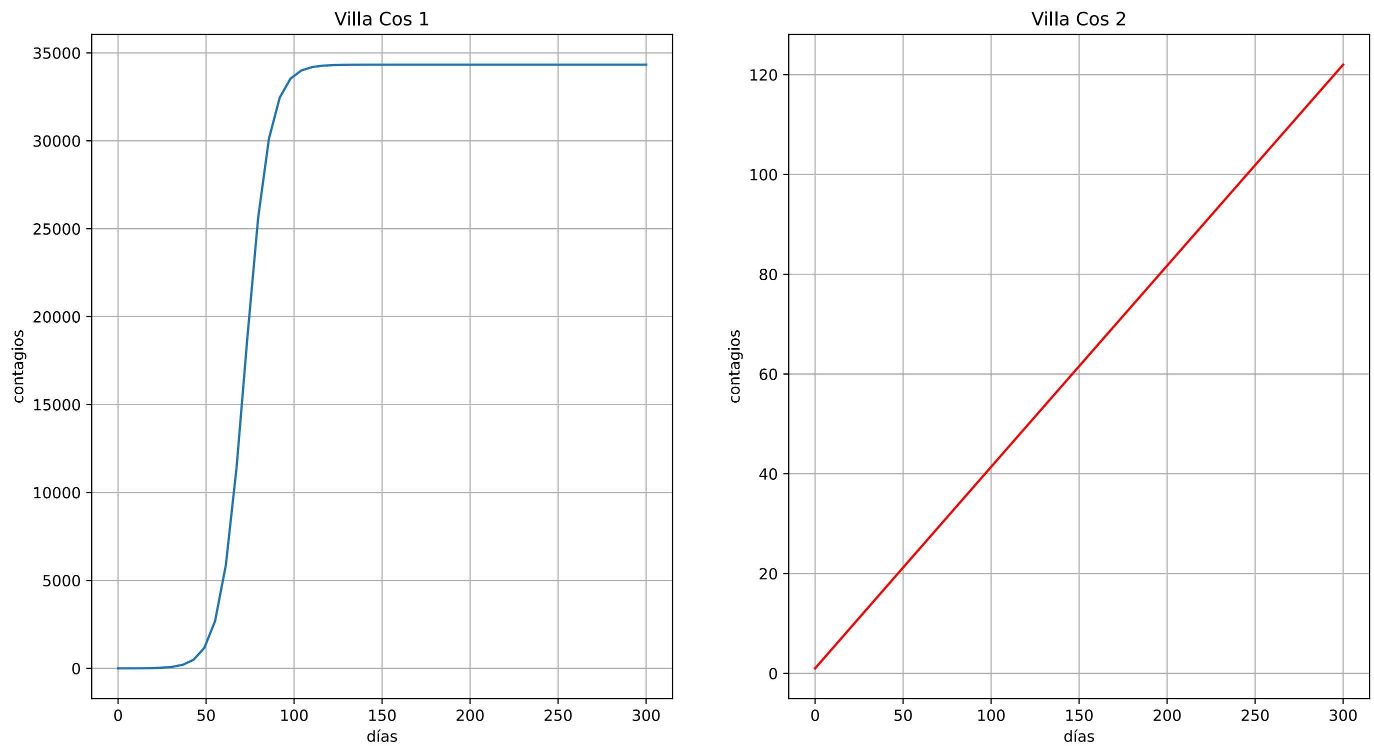
En cuanto a Metepec, las cifras del primer modelo son mucho más razonables pero siguen sin dar resultados cercanos a la realidad. Alrededor del día 100, el modelo llega a más o menos los 12000 casos para entonces estancarse en ese punto. Esto indicaría que ya no habría más contagios a partir de este punto (fenómeno que paso de igual manera en el primer modelo de Guanajuato) lo cual es muy improbable ya que la población de Metepec es de 214000 habitantes y al menos de que el gobierno imponga medidas estrictas, esto no puede pasar; haciéndolo un modelo no ideal. En cuanto al segundo modelo, igualmente que en las gráficas de Guanajuato, el número de casos es despreciable a comparación de las cifras reales; y por lo tanto, es una mala función para representar el fenómeno.



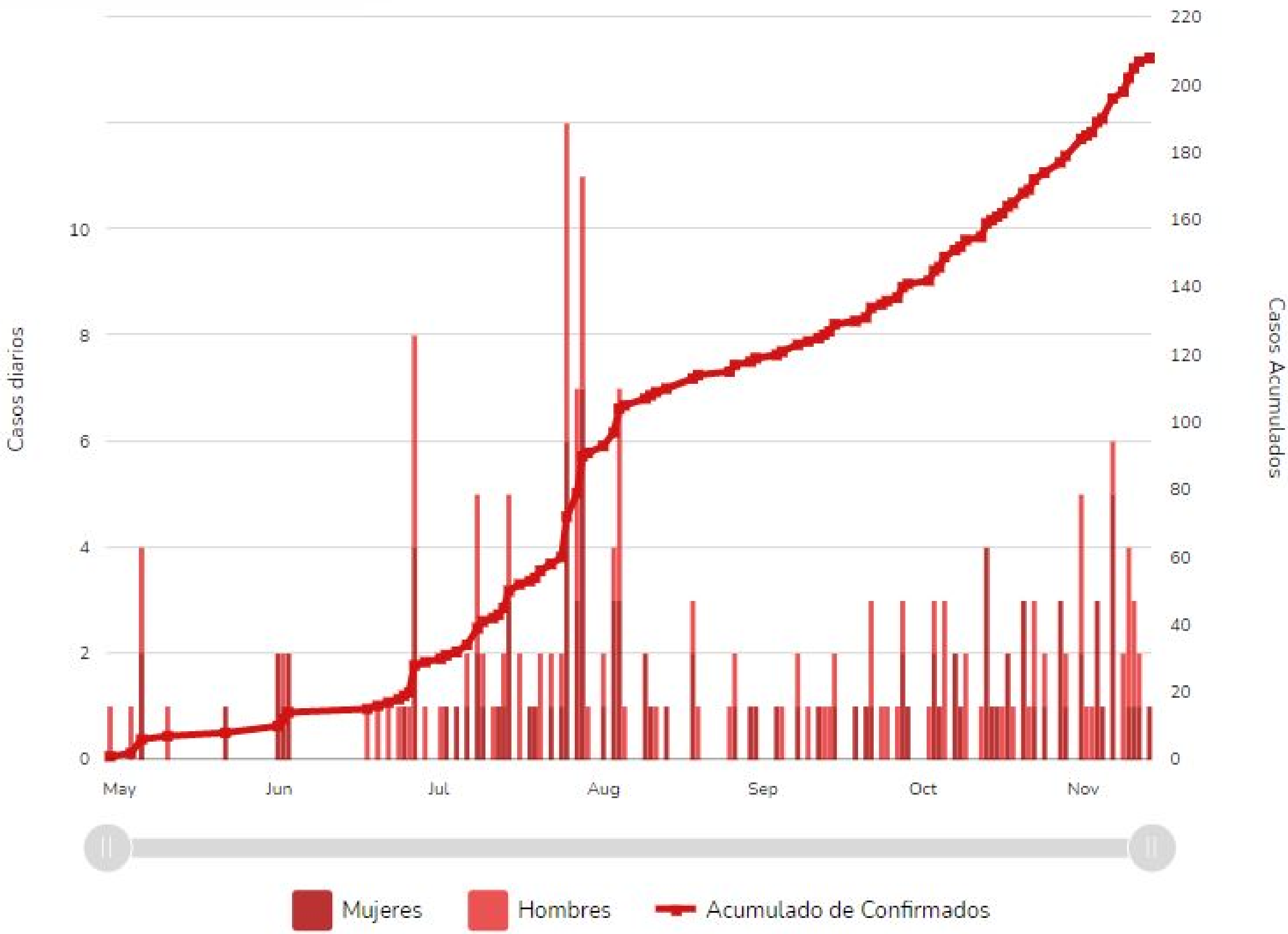
In [50]:
```
#VC
yVC1 = (34329*np.e**(t*4.21802*10**-6*34329)*(1/34328))/(1+np.e**(t*4.21802*10**-6*34329)*(1/34328))
yVC2 = 34328 - (34327*np.e**(-1*1.17712*10**-5*t))
```

In [51]:
```
fig , ax = plt.subplots(1,2, figsize= (15,8))
#G1
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t,yVC1)
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Villa Cos 1")
#G2
plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(t,yVC2, color = 'red')
plt.grid()
plt.ylabel("contagios")
plt.xlabel("días")
plt.title("Villa Cos 2")
```

Out[51]:
```
Text(0.5, 1.0, 'Villa Cos 2')
```



Finalmente, para Villa de Cos, el primero sufre un incremento extremo hasta llegar a los 3500 casos, lo cual lo hace inservible para obtener una buena aproximación. Intrigantemente, el segundo modelo logra encontrarse en un rango cercano a las cifras verdaderas al llegar a los 120 casos en 7 meses. Aunque las cifras reales se encuentran por los 210 casos, es la aproximación más cercana hasta ahora y, aunque no sea fiable, por lo menos es cercano.



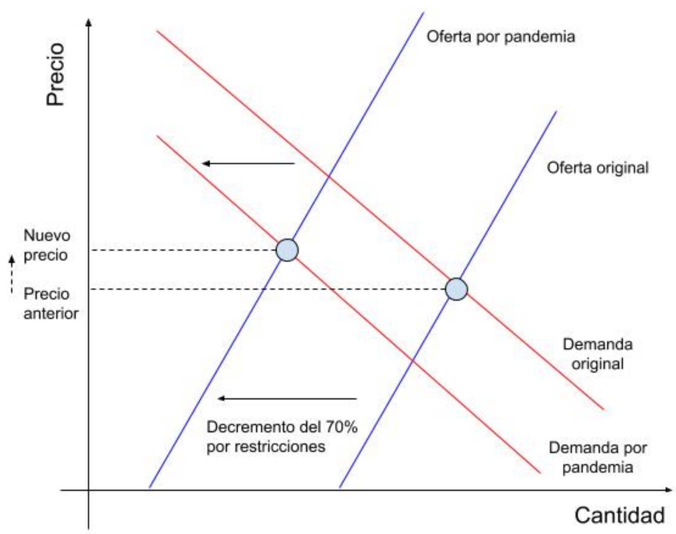
En conclusión, las gráficas gubernamentales se parecen, más que nada, a un modelo lineal (aunque también podría tender a ser cuadrático o exponencial pasando más tiempo). Por estas razones, se determina que el mejor de los dos modelos para predecir el número total de casos de la pandemia es el segundo; ya que este sigue tanto la forma lineal y se aproxima de mejor manera a los resultados reales. Sin embargo, no se recomienda seguir ninguno de estos dos modelos para generar predicciones de la pandemia, ya que en cualquiera de los casos, las precisión de los datos es muy mala como para considerarlos resultados aceptables. Un aspecto curioso del primer modelo, es que después de alcanzar su valor máximo en y, parece que hubiera una asíntota que impidiera aún más progreso. Esto sería razonable si este fenómeno se observara al alcanzar la población total del municipio, pero este no es el caso.

Impacto económico del COVID-19

a) Investiga un producto, bien o servicio que consideres haya sido afectado por la pandemia del COVID-19.

El sector turístico (específicamente los servicios hoteleros) se vieron impactados profundamente, primero que nada por las restricciones nacionales puestas en la capacidad de hospedaje en ellos (30% de la capacidad máxima, puede variar dependiendo del semáforo epidemiológico) y por la creciente preocupación de las personas en visitar y movilizarse en general por posible contagio que pueda ocurrir del COVID-19.

b) Calcula el punto de equilibrio para este producto antes y después de la pandemia de COVID-19 y saca tus conclusiones sobre el impacto económico de la pandemia en este sector productivo.

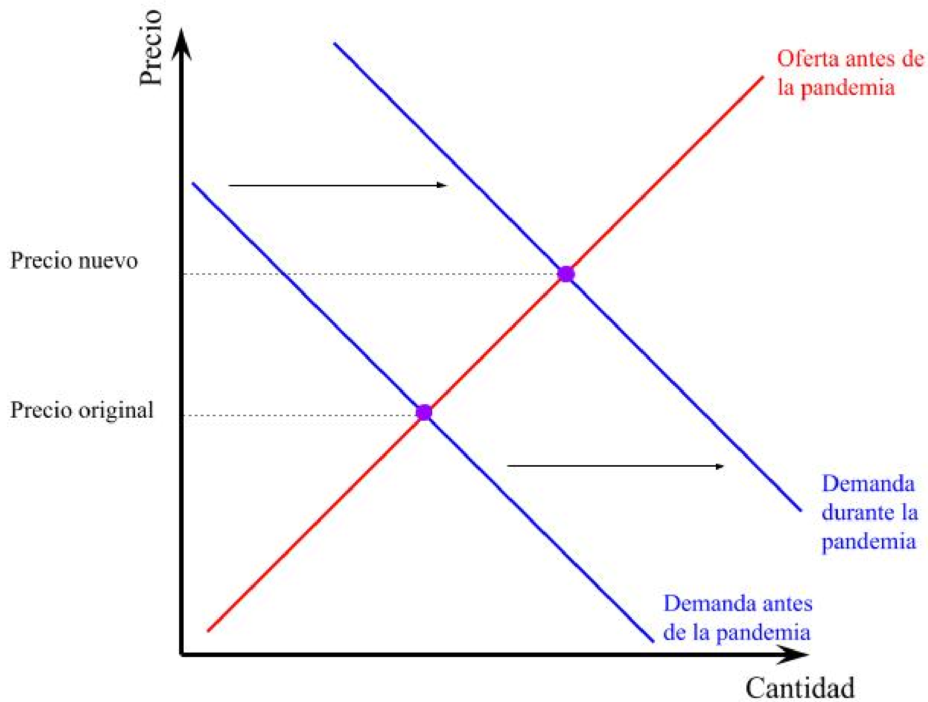


Como podemos observar en la figura anterior, desde un punto de vista microeconómico el precio del servicio hotelero está en un aumento comparado al equilibrio de precio antes de la pandemia, a su vez, observamos que la cantidad del equilibrio disminuirá. Primero que nada se debe a que la curva de oferta es inelástica, significando que un aumento de la cantidad resultará en una elevación de los precios proporcionalmente mayor, los hoteles tenían el poder de fijar el precio (price-makers), pero la pandemia los ha empujado a ser aceptadores de precio (price-takers) y siendo la restricción de un 30% de la capacidad total, la oferta disminuye en un 70% por cuestiones de sanidad comun. En cuanto a la demanda, ciertamente va disminuir, pero no considerablemente como la oferta. Esto se debe a que, siendo francos, las personas que necesitan o desean viajar lo harán sin importar las condiciones sanitarias que se presentan en el mundo. Esta disminución relativamente corta en la demanda causa que exista una cantidad demandada mayor a la ofertada, causando un incremento de los precios en general. En caso de que la curva de la demanda no hubiera sufrido una reducción, los precios serían aún mayores al nuevo precio en el equilibrio post-pandemia. A pesar del incremento del precio, como la cantidad ofertada disminuye, los ingresos que genera una cadena hotelera disminuyen de manera sustancial. Al mismo tiempo podemos ver que ambas partes, comprador y vendedor, pierden excedentes debido a que el equilibrio disminuye en cantidad con un incremento en precio mínimo.

c) Investiga un producto, bien o servicio que haya sido beneficiado por la pandemia del COVID-19.

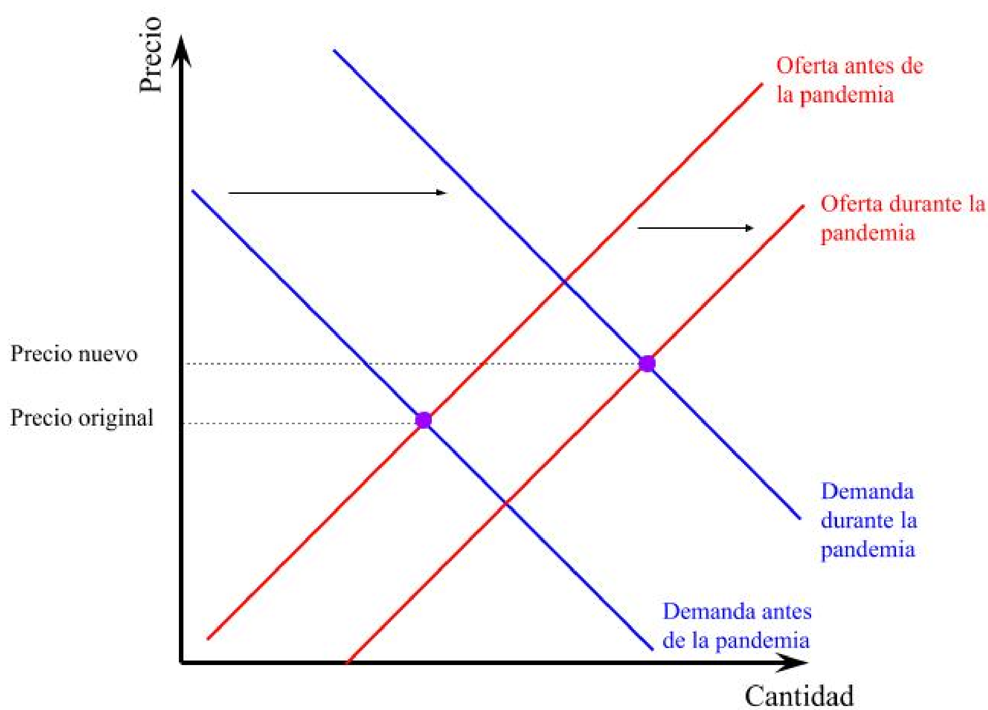
Gel antibacterial. Un producto que se volvió pivotal al inicio de la pandemia y durante, ya que es el limpiador de manos más portátil que puede llevar uno, por ende es muy práctico y demandado.

d) Calcula el punto de equilibrio para este producto antes y después de la pandemia de COVID-19 y saca tus conclusiones sobre el impacto económico de la pandemia en este sector productivo.



Precio
Oferta antes de
la pandemia
Precio nuevo
Precio original
Demanda
durante la
pandemia
Demanda antes
de la pandemia
Cantidad

Como se puede ver en el diagrama anterior, al inicio de la pandemia hubo una demanda incrementada de gel antibacterial por el pánico que se creó, lo cual llevó a un incremento de precio del producto y a una escasez del mismo. Esto se debe a que la oferta del producto previo a la pandemia era muy elástica, es decir, un incremento en la cantidad ofertada incrementa el precio de una manera proporcionalmente menor, ya que no era considerado un bien esencial o necesario en la vida diaria. Tras el inicio de la pandemia el gel antibacterial se volvió algo muy acotado, tanto por individuos que buscaban raciones personales como por personas que deseaban conseguir una ganancia substancial vendiendolo de nuevo. De cualquier manera, la oferta se mantuvo igual durante el inicio, pero con la demanda incrementada se acabó muy rápido, llevando a la escasez.



Una vez que se ajustó la oferta para satisfacer las necesidades, hubo aún un incremento de precio, pero cabe decir que fue menor al anterior. Con ahora una oferta que pudiera acomodar la demanda actual, las venta del producto incrementaron mucho, dando un incremento en retorno utilitario mayor al 60% con base al año anterior. Aunque el precio era menor que durante el inicio de la pandemia, las ventas totales daban suficiente ingreso para que el efecto neto fuera positivo.