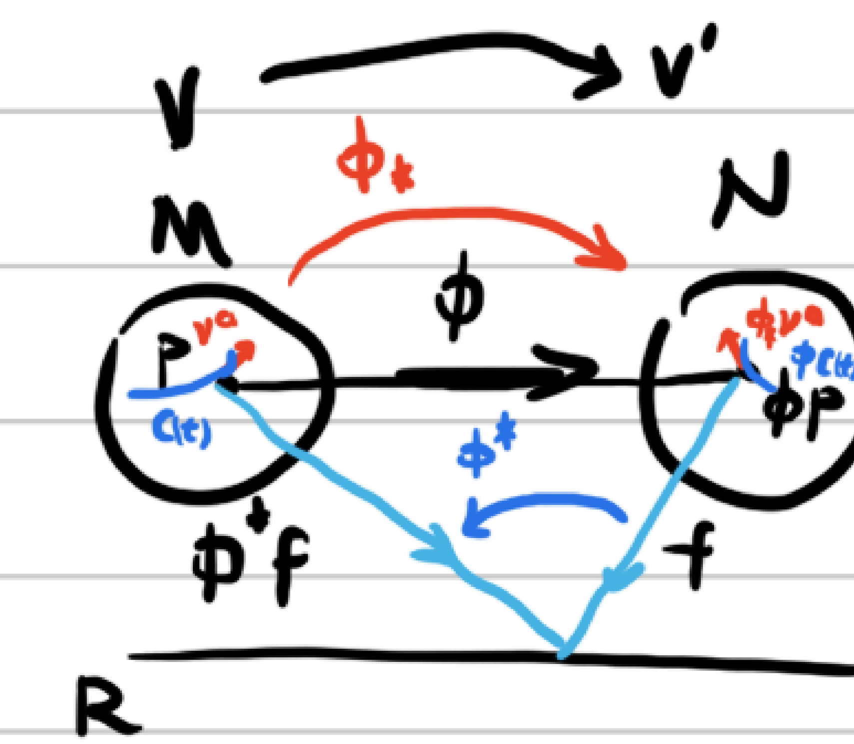
四、李导数，Killing场与超曲面

1、流形间的映射

$\phi: M\to N$ 为光滑映射，$\mathscr{F}_M(k,l)$ 与 $\mathscr{F}_N(k,l)$ 为张量场集合（无指标为标量函数）



拉回映射：$\phi^*: \mathscr{F}_N \to \mathscr{F}_M$，$(\phi^* f)|_p := f|_{\phi(p)}$ $(p\in M, \forall f\in \mathscr{F}_N)$

pull back map

1) $\phi^*(af+bg) = a\phi^* f + b\phi^* g$ 是线性映射

2) $\phi^*(fg) = (\phi^* f)(\phi^* g)$ （用定义证明）

推前映射：$\phi_*: V_p \to V_{\phi(p)}$，$\phi_* v^a \in V_{\phi(p)}$ 有：$\phi_* v^a(f) := v^a(\phi^* f)$ $(\forall f\in \mathscr{F}_N)$

push forward map （或叫 切映射）

（是线性映射，$\phi_*(\alpha v+\beta u) = \alpha\phi_* v+\beta\phi_* u$） 回忆：向量→方向导数

Pf: $\phi_*(\alpha v^a+\beta u^a)(f) = (\alpha v^a+\beta u^a)(\phi^* f) = \alpha v^a(\phi^* f)+\beta u^a(\phi^* f)$

1) 切关系不变：对 $C(t)$，T^a 为 $C(t_0)$ 切矢，$\phi_* T^a \in V_{\phi(C(t_0))}$ 切 $\phi C(t)$ 于 $\phi(C(t_0))$

Pf: $\phi_* T^a(f\circ\phi C(t)) = T^a \phi^* f(C(t))$

↳ T^a 为 $C(t)$ 切矢

$\phi_* T^a$ 为 $\phi C(t)$ 切矢

延拓

拉回映射 → $\phi^*: \mathscr{F}_N(0,l) \to \mathscr{F}_M(0,l)$ $\quad \phi^* T_{a_1\cdots a_l}|_p (v_1)^{a_1}\cdots(v_l)^{a_l} := T_{a_1\cdots a_l}|_{\phi(p)} (\phi_* v_1)^{a_1}\cdots(\phi_* v_l)^{a_l}$ 张量场→张量场

推前映射 → $\phi_*: \mathscr{T}_{V_p}(k,0) \to \mathscr{T}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$ (M) (N) $\quad (\phi_* T)^{a_1\cdots a_k}(w^1)_{a_1}\cdots(w^k)_{a_k} := T^{a_1\cdots a_k}(\phi^* w^1)_{a_1}\cdots(\phi^* w^k)_{a_k}$ 张量→张量（可能存在

故若M与N同胚时，可为张量场→张量场）

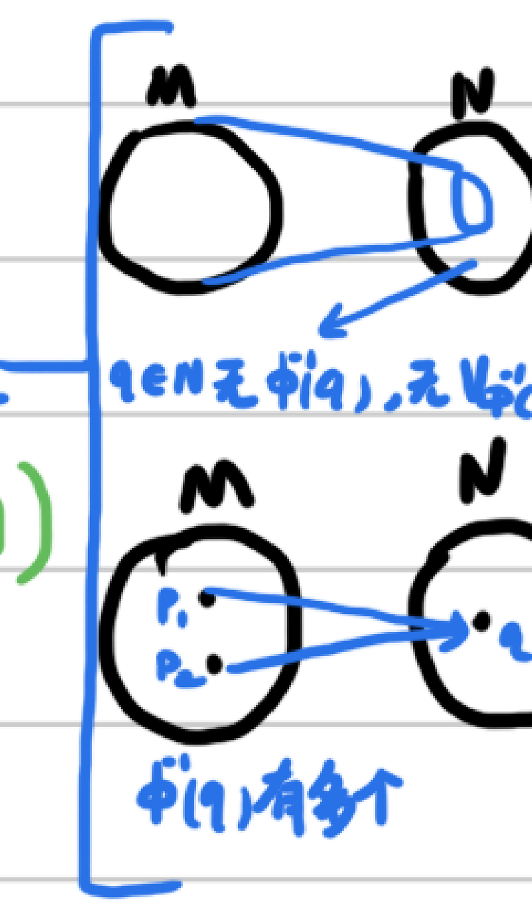
双射（同胚）

进一步延拓

$(\phi_* T)^a{}_b|_q w_a v^b := T^a{}_b|_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* w)_a (\phi^* v)^b$ $\quad [\phi^* v^b = \phi_*^{-1} v^b]$（同理 ϕ_*）

ϕ 为双射 → 此时 $\phi^{*-1} = \phi_*$

则：$\phi_*^{-1} = \phi^*$（互逆）



坐标

微分同胚时，$\phi: M\to N$ 双射，维数相同，则 $\phi: M\to N$ 可看作 坐标变换

	点	局部坐标系	坐标域
M	p	$\{x^\mu\} \to x'^\mu(p) := y^\mu(\phi(p))$	$p\in O_1$, $p\in\phi^{-1}[O_2]$
N	$\phi p = q$	$\{y^\mu\}$	$q\in O_2$

逆 $\quad \phi_*[(\partial/\partial x'^\mu)^a|_p] = (\partial/\partial y^\mu)^a|_{\phi(p)}$

协 $\quad \phi_*[(dx'^\mu)_a|_p] = (dy^\mu)_a|_{\phi(p)}$

对 $\phi: M\to N$ 的两种观点：

（两者等价）

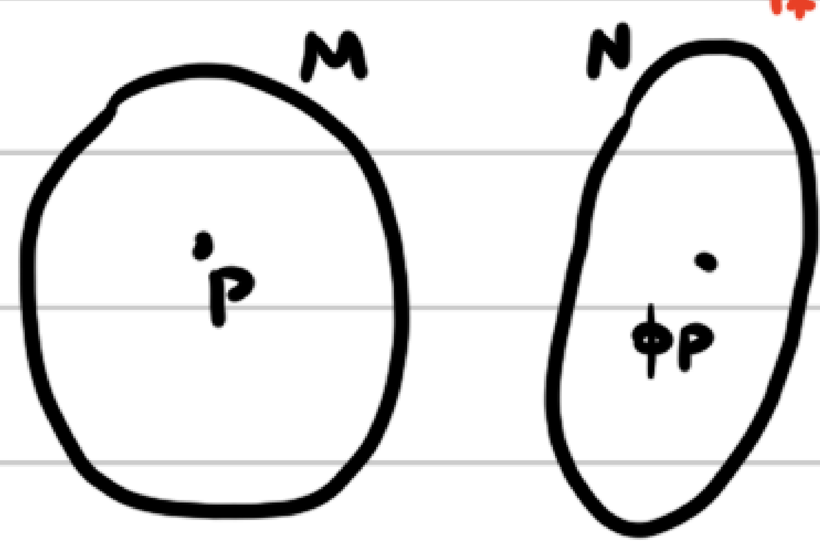
1) $P \xrightarrow{\phi} \phi(P)$ ↓导致 $T\in V_p \xrightarrow{\phi_*} \phi_* T$ （主动观点）

$(\phi_* T)^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_{\phi(p)} = T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}|_p \quad \forall T\in \mathscr{T}_M(k,l)$

pf: 将 $T^{a\cdots}{}_{b\cdots}$ 分解为 $T^{\mu_1\cdots}{}_{\nu_1\cdots}\cdots(\partial/\partial x^{\mu})_{\mu_i}(dx^{\nu})^{\nu_i}$

2) P, T $[x^{\mu}]\to[x'^{\mu}]$ （被动观点）

即 $\phi: M\to N$ 的后果为坐标系改变（N 为 M 的换系空间）



$T_{ab} = T_{\mu\nu}(x^{\sigma}) = T'_{\mu\nu}(x'^{\sigma})$ （坐标变换，被动观点）

$T_{\mu\nu} \xrightarrow{\phi_*} \phi_*(T_{\mu\nu})|_{\phi(p)} = T'_{\mu\nu_p}$ （数值变换）

$T_{ab} = T_{\mu\nu}(x^{\sigma}) \xrightarrow{\phi: M\to N} \tilde{T}_{ab} = \tilde{T}_{\mu\nu}(y^{\sigma})$ （流形间映射，主动观点）

$(T'_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu})$

等价：只需： $\phi: M\to N$ 在 M 上诱导的坐标变换为被动中的 $[x^{\sigma}]\to[x'^{\sigma}]$，$p\in M$，$q\equiv\phi(p)\in N$

则 $\tilde{T}_{\mu\nu}(y^{\sigma}(q)) = \tilde{T}_{\mu\nu}|_q = (\phi_* T)_{\mu\nu}|_p = T'_{\mu\nu}(x'^{\sigma}(p)) = T'_{\mu\nu}(y^{\sigma}(q))$

补充：

1. $\phi: M\to N$ 光滑，$\forall T\in\mathscr{T}_N(0,l)$，$T'\in\mathscr{T}_N(0,l')$

1) $\phi^*(T\otimes T') = \phi^*(T)\otimes\phi^*(T')$ pf: $\phi^* T\otimes T'|_p\, v_1\cdots v_l = T\otimes T'(\phi_* v_1)\cdots(\phi_* v_{l'}) = \phi^*(T)\otimes\phi^*(T')$

2) $\phi_*(T\otimes T') = \phi_*(T)\otimes\phi_*(T')$ pf 同上

$(T\in \mathscr{T}_{V_p}(k,0))$

$T\in\mathscr{T}_N(k,l)$ 同样成立

或 $T\in\mathscr{T}_{V_p}(k,l)$

2. ϕ_*（或 ϕ^*）与缩并可换序 $\phi_*(CT) = C(\phi_* T)$

对 $T^a{}_b$， $\phi_* T^a{}_b = \phi_* T^{\mu}{}_{\nu}[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_b] \to C(\phi_* T) = (\phi_* T^{\mu}{}_{\nu})\underbrace{[\phi_*(e_\mu)^a][\phi_*(e^\nu)_a]}_{(\partial/\partial x^\mu)^a (dx'^\nu)_a = \delta^\nu{}_\mu} = \phi_*(T^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}{}_{\mu}) = \phi_*(CT)$

$\downarrow T^{a\cdots}{}_{b\cdots} \to T^a{}_b\otimes T'^{a_i}{}_{b_i} \to CT^a{}_b = T_0\in\mathscr{T}(0,0) \to C\phi_*(T\otimes T') = C\phi_* T\otimes\phi_* T' = \phi_*(CT)\cdot\phi_* T' = \phi_*(CT\otimes T')$ 证毕。

2. 李导数

Lie derivative

单参数变换群 $\varphi: \mathbb{R}\times M \to M$ 为光滑映射，φ_0 为单位变化 I(恒)，$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi(s+t)$

one-parameter-group

↓

单参微分同胚群 + $\phi_t: M\to M$ 是微分同胚群

of diffeomorphisms

↓

轨道：$\phi_p: \mathbb{R}\to M$，$\phi_p(0)=p$，切矢 $v|_p$ 为在 $\phi_p(0)$ 处的切矢

↳ 单参微分同胚群 给出 M 的一光滑切矢场

矢量场完备性：每条积分曲线参数取值都为 $\mathbb{R}$ 紧致流形任意矢量场完备

完备矢量场 给出单参微分同胚群 不存在间断

考虑 $\phi_t: M\to M$, $p\mapsto q$，$\lim\limits_{t\to 0}\phi_t: M\to M$ 有：p 与 q 无限接近（不是有限切的近），$X(f)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\phi_t^{\#}f$，$f\in\mathscr{F}_M$

李导数（标量场）$\mathcal{L}_X f = X(f) = D_X f$， 泰勒：$f|_{\phi_t} = f\circ\phi_t = f + t\cdot \underbrace{\mathcal{L}_X f}_{=X(f)} + o(t)$

（切矢场）$\mathcal{L}_v T = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\phi^{\#} T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l} - T^{a_1\cdots a_k}{}_{b_1\cdots b_l}\right)$ 沿矢量场 v^a

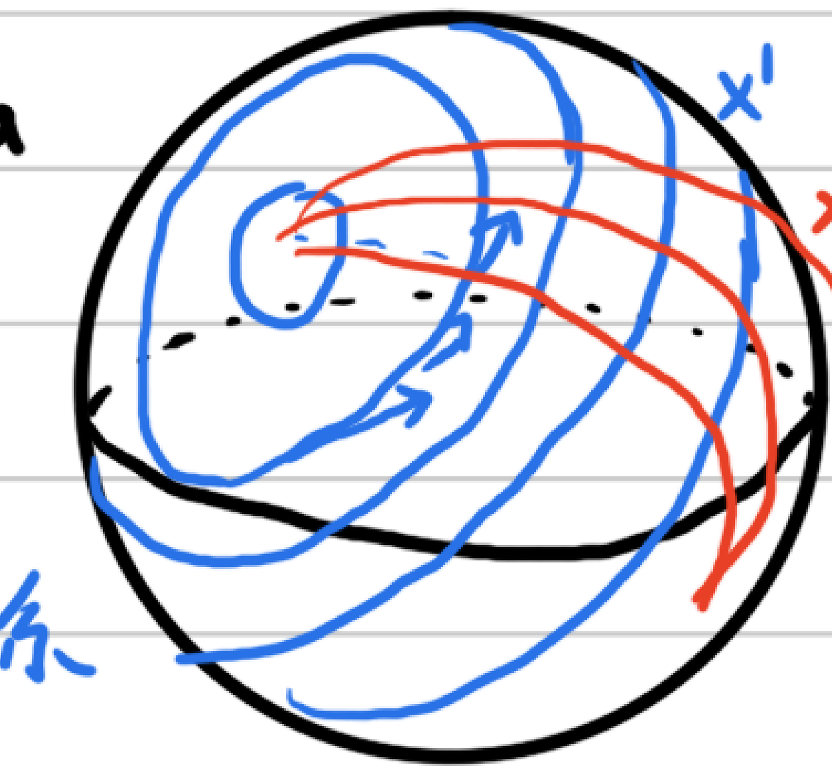
1) 同缩并换序　见上节补充2

2) 对标量f : $\mathcal{L}_v(f)=v(f)$　　pf: $\phi_t(p)=C(t)$, $v^a|_p=(\partial/\partial t)^a|_p$, $v(f)=\frac{d}{dt}(f\circ C)|_{t=0}$

易得: 满足莱布尼茨律

适配坐标系: 以积分曲线为x^1线, 其余适配, 有: $v^a=(\partial/\partial x^1)^a$

adapted coordinate system



对张量: $(\mathcal{L}_vT)^{\mu_1\mu_2\cdots}{}_{\nu_1\nu_2\cdots}=\frac{\partial T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}}{\partial x^1}$ 该式仅适用于该坐标系 故用分量形式

不满足张量变化律

3) 对矢量u^a　$\mathcal{L}_v(u)^a=[v,u]^a=v^b\nabla_b u^a-u^b\nabla_b v^a$

?门是否与[H,A]有关联?

pf: 在适配坐标系中: $\mathcal{L}_v(u)^\mu=\frac{\partial u^\mu}{\partial x^1}$, 适配的∇为普通导数∂, 且$\partial_b v^a=0$ $(v^a=(\partial/\partial x^1)^a)$

$[v,u]^\mu=(dx^\mu)_a[v,u]^a=(dx^\mu)_a(v^b\partial_b u^a-\underbrace{u^b\partial_b v^a}_{=0})=v^b\partial_b u^\mu=v(u^\mu)=\frac{\partial u^\mu}{\partial x^1}$

4) 对 对偶矢w_a　$\mathcal{L}_v(w_a)=v^b\nabla_b w_a+w_b\nabla_a v^b$

pf: 同上. $\mathcal{L}_v(w_au^a)=v(w_au^a)=v^b\nabla_b(w_au^a)=w_av^b\nabla_bu^a+u^av^b\nabla_bw_a-w_au^b\nabla_bv^a+w_au^b\nabla_bv^a$ —— $\mathcal{L}_v(w_a)=v^b\nabla_bw_a+w_b\nabla_av^b$, proven

$=\frac{\partial w_au^a}{\partial x^1}=u^a\mathcal{L}_v(w_a)+w_a\mathcal{L}_v(u^a)$

3. Killing 矢量场 add: 度规

等度规定义：$\phi^* g_{ab} = g_{ab}$ 则 ϕ^* 为等度规映射 保度规的微分同胚映射

isometry

易：ϕ^{-1*} 也为等度规映射

Killing 矢量场 ξ^a 在 (M, g_{ab}) 上，若 $\mathcal{L}_\xi (g_{ab}) = 0$

或 $\nabla_a \xi_b = \nabla_{[a}\xi_{b]}$

满足 Killing 方程：$\nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$ $(\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0)$，$\nabla_a$ 有 $\nabla_a g_{bc} = 0$

Pf：$0 = \mathcal{L}_\xi (g_{ab}) = \xi^c \underbrace{\nabla_c g_{ab}}_{0} + g_{cb}\nabla_a \xi^c + g_{ac}\nabla_b \xi^c = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$

1) 若 $\{x^\mu\}$ 使 g_{ab} 全部分量有 $\underbrace{\partial g_{\mu\nu}/\partial x^1 = 0}_{g_{\mu\nu}\text{不随}x^1\text{变}}$，则：$(\partial/\partial x^1)^a$ 为其 Killing 矢量场 $\left(\mathcal{L}_{\partial/\partial x^1}(g_{\mu\nu}) = \partial g_{\mu\nu}/\partial x^1 = 0\right)$

2) 与测地线切矢 T^a：$T^b \xi_b$ 在测地线上为定值 $T^a \nabla_a (T^b \xi_b) = 0$

Pf：$T^a \nabla_a (T^b \xi_b) = \xi_b \underbrace{T^a \nabla_a T^b}_{0} + \underbrace{T^a T^b \nabla_a \xi_b}_{= T^a T^b \nabla_{(a}\xi_{b)} = 0}$

3) Killing 场们构成矢量空间 ξ^a, η^a 为 killing，$\alpha\xi^a + \beta\eta^a$ 也是，且 $[\xi, \eta]^a$ 也是

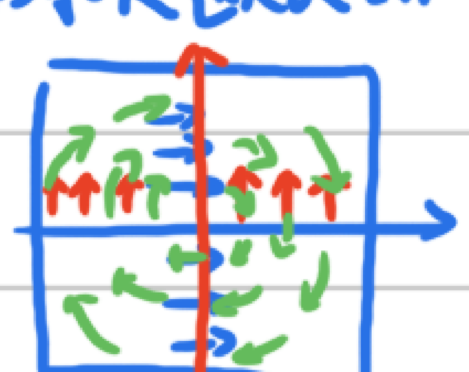
维数最多为 $\frac{n(n+1)}{2}$?]

Pf：$\nabla_{(a}[\xi, \eta]_{b)} = \nabla_{(a}(\xi^c \nabla_c \eta_{b)} + \eta^c \nabla_c \xi_{b)}) = \nabla_{(a}\xi^c \cdot \nabla_c \eta_{b)} + \underline{\xi^c \nabla_{(a}\nabla_c \eta_{b)}} + \nabla_{(a}\eta^c \cdot \nabla_c \xi_{b)} + \underline{\eta^c \nabla_{(a}\nabla_c \xi_{b)}}$

$-\nabla_{(a}\xi^c \cdot \nabla_{b)}\eta_c = \nabla_{(b}\xi_c \cdot \nabla_{a)}\eta^c$; $\xi^c \nabla_c \nabla_{(a}\eta_{b)} = 0$; $-\nabla_{(a}\eta^c \cdot \nabla_{b)}\xi_c$; $\eta^c \nabla_c \nabla_{(a}\xi_{b)} = 0$

$=0$

例：R^2 欧氏：$n=2$，有 3 个 killing



$ds^2 = dx^2 + dy^2$
$= dr^2 + r^2 d\varphi^2$

(表明了度规的某种不变性)

4.超曲面

嵌入：$\phi: S\to M$ 双射且 C^∞，且 ϕ_* 非退化（$\phi_* v^a=0 \to v^a=0$）

imbedding　　$M.S$ 为流形，$\dim S \leq \dim M=n$

↓

嵌入子流形：$\phi[S]$（S在ϕ映射下的像），简称子流形

imbedded submanifold

↓

超曲面 $\phi[S]$，若 $\dim S=n-1$　　$\phi[S]$的拓扑　1. $\phi: S\to\phi[S]$ 微分同胚映射 ┐ 2. M中的拓扑 ┘—要求相同：正则嵌入

hypersurface

(不自交)　　?]

法余矢：　$\phi[S]$为超曲面，$q\in\phi[S]$，非0对偶矢 $n_a\in V_q^*$，

$n_a w^a=0$　，$\forall w^a\in W_q$

1) 每点q必有法余矢，且仅差实数　$n_1=\alpha n_2$

对超曲面 $f=C$，$\nabla_a f|_q$ 为q点法余矢（$\nabla_a f|_q\neq 0$）

考虑度规：$n^b=g^{ab}n_a$

归一化法矢 限定：若 $n_a n^a\neq 0$，令 $n_a n^a=\pm 1$

诱导度规 $h_{ab}=g_{ab}\mp n_a n_b$　（$n_a n^a=\pm1$）

↓

$h^a{}_b = g^a{}_b \mp n^a n_b$