Context

笔记☑ 习题☐ 疑难☐ 讲课☐ 讨论☐

一、拓扑空间

二、流形与张量场

三、黎曼曲率张量

└ —图流

四、李导数，Killing场，超曲面

五、微分形式

六、习题与补充

一、拓扑空间

1.集论初步：

集合 set X，$x \in X$，ϕ empty set

子集 subset　真子集 proper subset

交 union　并 intersection　补 complement　差 difference

交换律，结合律，分配律，De Morgan律

卡氏积 Cartesian product $X \times Y = \{(x,y)\}$，集合元素的有序对

$R^n = R \times R \times \cdots R$

映射 map $f: X \to Y$

双射(一一的) one-to-one

逆 $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

开集 open set：$\forall x \in U$，$\exists \varepsilon > 0$，使 $d(x,y) < \varepsilon$ 的 $y \in U$（$x \in U$，x邻域$\in U$）

闭集 closed set：U对极限运算封闭 / 开集的补集是闭集（反之同）

紧集 compact set：U的每个开覆盖都有有限子覆盖

2.拓扑空间 topology

X上的拓扑 $\mathcal{T}$ 是X子集的集合：

1) $X, \phi \in \mathcal{T}$

2) 若 $O_i \in \mathcal{T}$，有限 $\bigcap_{i}^{n} O_i \in \mathcal{T}$　一有限个交才是开集

3) $O_\alpha \in \mathcal{T}$，$\forall \bigcup O_i \in \mathcal{T}$　可无限

discret 离散拓扑：all $O_i \subseteq X$ max个数

indiscret 凝聚拓扑：$\{X, \phi\}$ min个数

开球：$B(x_0, r) = \{x \in R^n, |x - x_0| < r\}$
open ball

usual R^n的通常拓扑：$\mathcal{T}_u := \{\phi$或表为开球之并的子集$\}$

（R^2：开圆盘，R：开区间）

product 乘积拓扑：$(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$为拓扑空间：

$X = X_1 \times X_2$

$\mathcal{T} := \{O \subset X \mid O$可为$O_1 \times O_2$的并$\}$

induced 诱导拓扑：$(X, \mathcal{T})$为拓空，$A \subset X \ (\neq \phi)$

$\downarrow$

指定$\mathcal{S}$，$(A, \mathcal{S})$为拓空

$\mathcal{S} := \{V \subset A \mid \exists O \in \mathcal{T}, V = A \cap O\}$

$(A, \mathcal{S})$为$(X, \mathcal{T})$的拓扑子空间

连续的：$f: X \to Y$，若$f^{-1}[O] \in \mathcal{T}, \forall O \in \mathcal{S}$ O可以很小，因此可以这样

homeomorphism 同胚：$X - Y$有双射

可微性：C^r：r阶导数存在且连续 C^∞：光滑

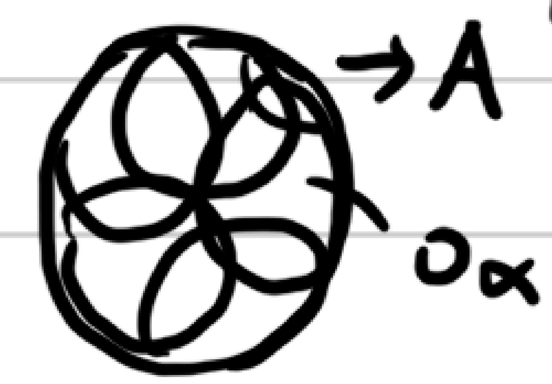
开邻域：若$\exists O\in\mathcal{T}$，$x\in O\subset N$，N(邻域)

子集的邻域：$\exists O\in\mathcal{T}$，$A\subset O\subset N$

联通：$(X,\mathcal{T})$ 除X与φ无既开又闭的子集

是闭集 ← 闭包 $\bar{A}:=\bigcap_\alpha C_\alpha$，$A\subset C_\alpha$，$C$为闭

内部 $i(A):=\bigcup_\alpha O_\alpha$，$O_\alpha\subset A$，$O_\alpha\in\mathcal{T}$



开覆盖：$\{O_\alpha\}$ $A=\bigcup_\alpha O_\alpha$

A的紧致性：$\forall\{O_\alpha\}$有有限子覆盖

↓

$\{O_\alpha\}$中的有限个O_α构成

1) 若X紧，$A\subset X$闭，则A紧

2) $A\subset R^n$为紧，当且仅A为有界闭集

边界：$\dot{A}:=\bar{A}-i(A)$

$i(A)\subset A\subset\bar{A}$

1) $\bar{A}$闭，当且仅A闭时 $A=\bar{A}$

2) $i(A)$开，当且仅$A\in\mathcal{T}$时$A=i(A)$

3) $\dot{A}$闭

豪斯多夫空间$(X,\mathcal{T})$，$\forall x,y\in X$，$\exists O_1,O_2\in\mathcal{T}$，使$x\in O_1$，$y\in O_2$且$O_1\cap O_2\neq\varnothing$

T^2空间

拓扑性质：在同胚映射下保持不变的性质

(紧致性，连通性，T^2性……)