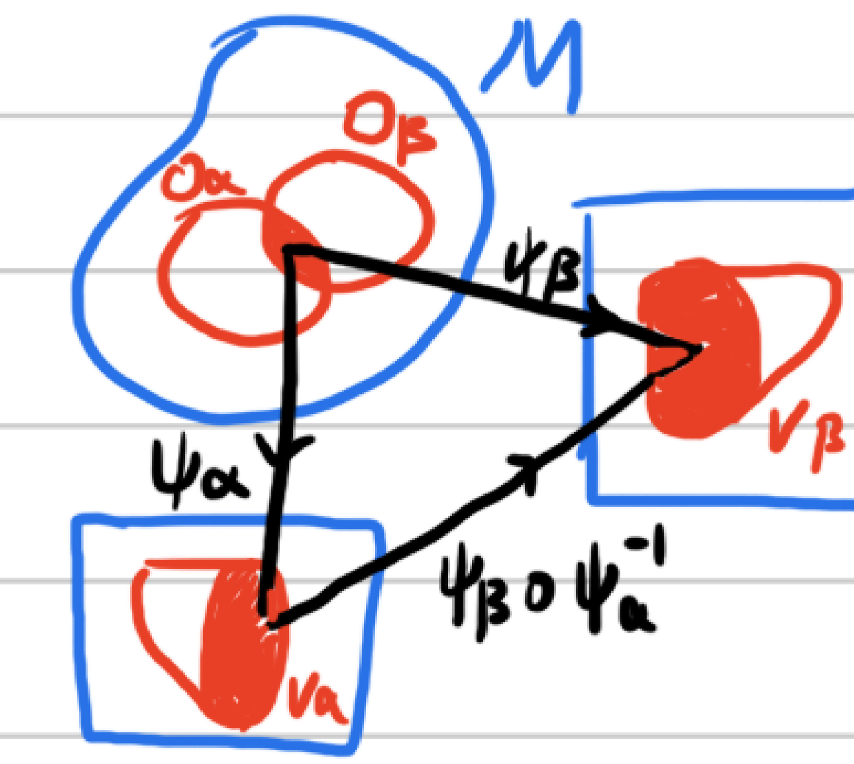
# 二、流形与张量场

## differentiable manifold 1.微分流形

n维微分流形：M，M为拓扑空间，$M=\bigcup_\alpha O_\alpha$

满足：1) 对每个$O_\alpha$，$\exists\,\psi_\alpha$为同胚映射：$\psi_\alpha: O_\alpha\to V_\alpha$

2) 若$O_\alpha\cap O_\beta\neq\varnothing$，$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$是$C^\infty$的（光滑）☆




coordinate system

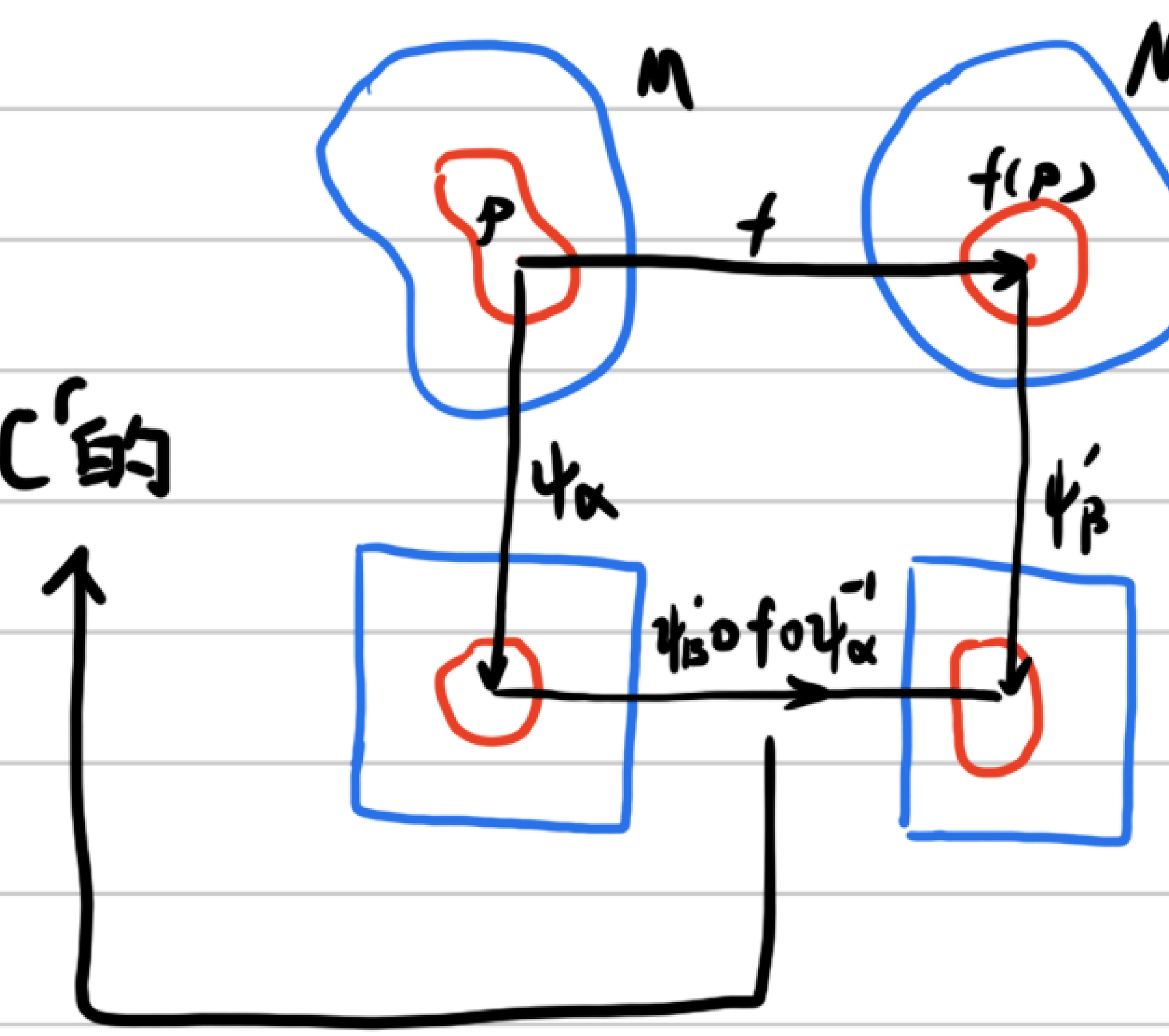
chart 图：坐标系$(O_\alpha,\psi_\alpha)$

coordinate patch 坐标域：$O_\alpha$

atlas 图册：$\{(O_\alpha,\psi_\alpha)\}$　　图册的相容性 compatibility

图册间是否相容（$O_\alpha$与$O_\beta$在两图册，$O_\alpha O_\beta$不相容）

↳ 两种/一种微分结构




$C^r$类映射：$f: M\to M'$，$\psi'_\beta\circ f\circ\psi_\alpha^{-1}$对应的n'个n元函数是$C^r$的

diffeomorphic to each other

互相微分同胚：$M \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M'$，f与$f^{-1}$是$C^\infty$的

↳ 叫微分同胚（映射）

光滑函数：$f: M\to \mathbb{R}$ + f是$C^\infty$

标量函数

## 2、切矢与切矢场

$V\times V\to V$　加法 ⎤ 线性空间中两者线性

$\mathbb{R}\times V\to V$　数乘 ⎦

矢量： $v: \mathscr{F}_M \to \mathbb{R}$ 为 $p\in M$ 点的一个矢量（广义） （由方向导数引入）

M上光滑函数的集合

（线性，莱布尼茨律）

↳ 分部积分法

在坐标系 $(O,\psi)$ 下P坐标为 $x^\mu$，取F为n元函数

为什么用标量场定义矢量场？

标量在点上，点有流形上的双射

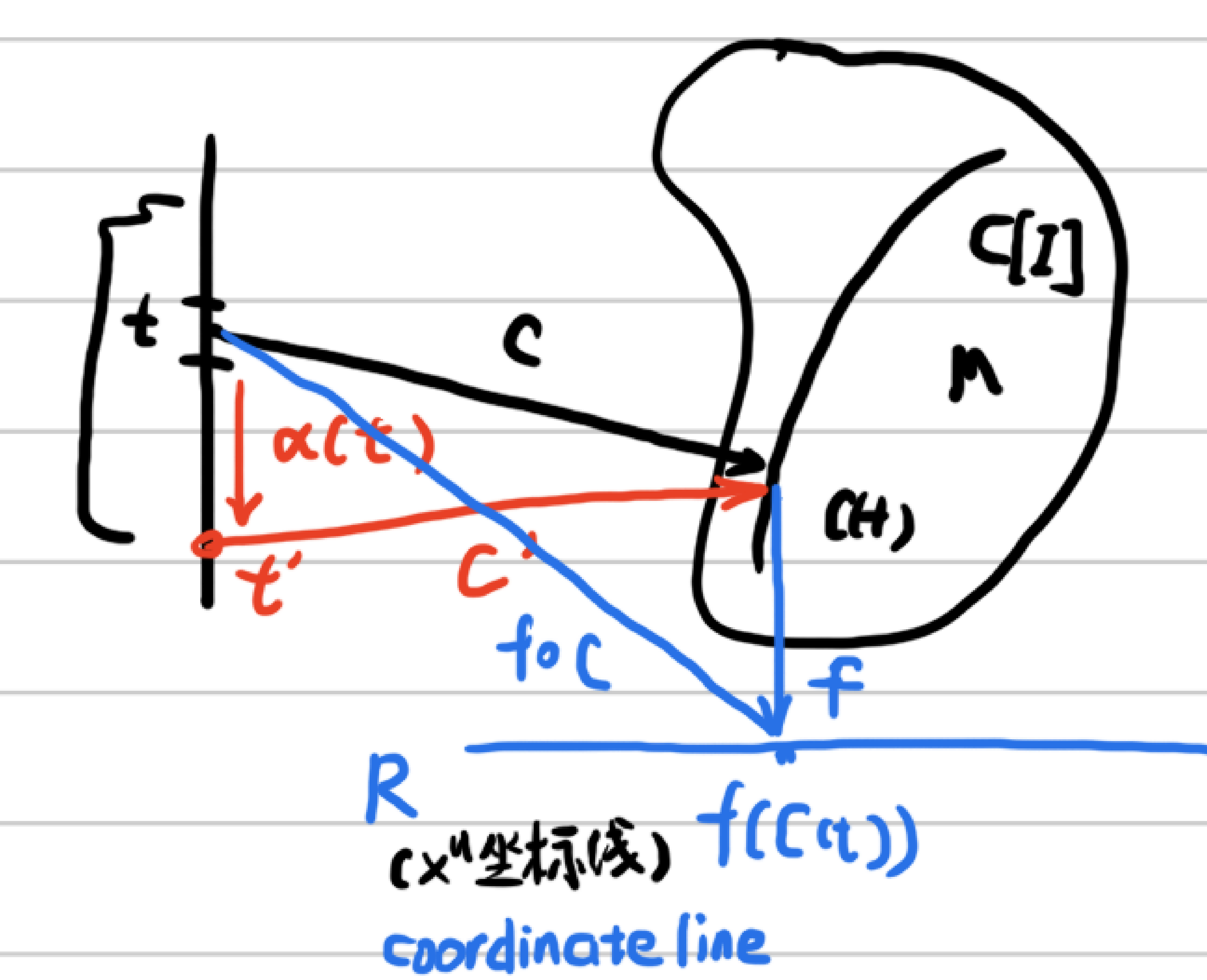
一组基底 → $X_\mu(f) = \frac{\partial F(x^1,x^2\cdots x^n)}{\partial x^\mu}\Big|_p$

可简化为 $\partial f/\partial x^\mu$

f是标量场f

矢量变换： $v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\Big|_p X'_\nu = v'^\nu X'_\nu$

## 曲线与切矢：




parameter 参数t： C映射可把I上点唯一映射到M上

reparametrization 重参数化：另一个 $C'$， $C = C'\circ\alpha$ ， $t' = \alpha(t)$

参数方程： $C(t) = v^\mu X_\mu(t)$ ， $X_\mu(t) \to$ 参数式

tangent vector 切矢： $T(f) := \frac{d(f\circ C)}{dt}\Big|_{t_0}$ 　 $x^\mu$ 对t的导数

简写： $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t_0} = \frac{df(C(t))}{dt}\Big|_{t_0}$ 　 展开： $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\mu}$

切矢+重参数化：(对协变规律)

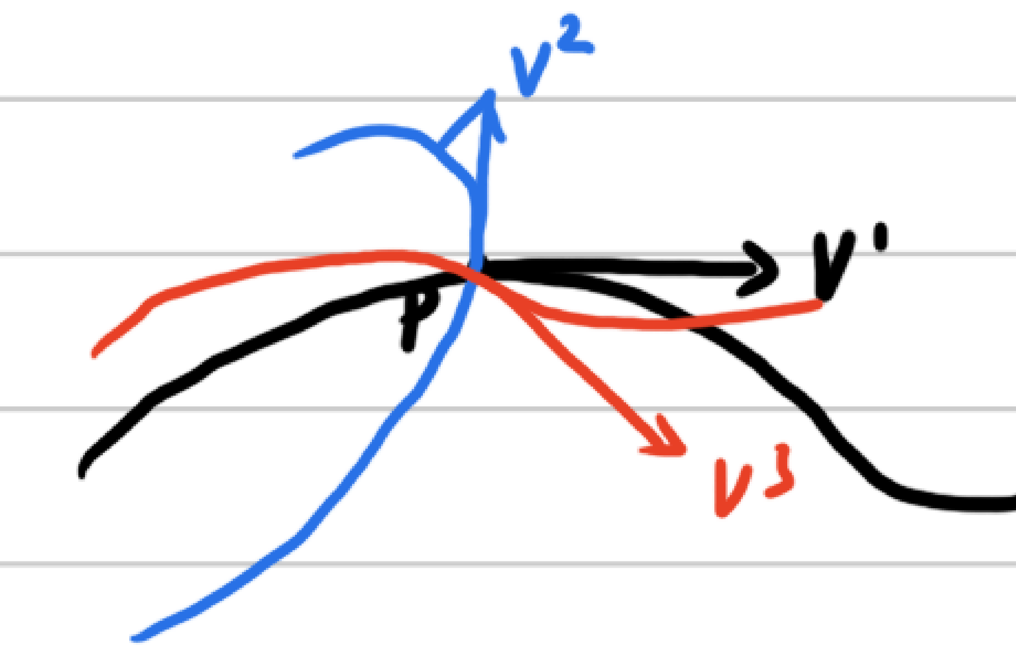
$f(t)=f'(t')$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{dt'(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot f=\frac{df}{dt}=\frac{df'(t'(t))}{dt}=\frac{df'}{dt'}\cdot\frac{dt'}{dt}=\frac{dt'}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot f$$

切空间，切矢量　　对空间点$p$，任矢量($v\in V_p$)是可看作某切矢，则：

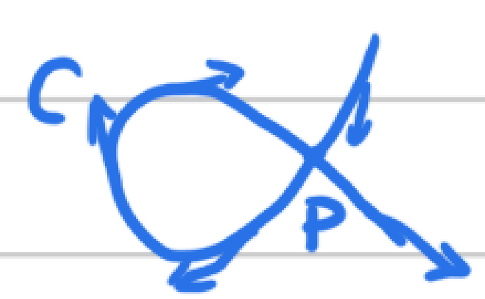
tangent space　~ vector　　$p$点的矢量为切矢量，$V_p$为切空间




vector field　　流形矢量场：$A\subseteq M$，$A$每点都有矢量 ⇒ 矢量场$v$定义在$A$上

└ 光滑性：$v$作用$C^\infty$函数得$C^\infty$函数

自交线的矢量场：$\exists\, t_1\neq t_2$，$C(t_1)=C(t_2)=p\in M$




$C[I]$上的切矢场 ✗

沿$C$的切矢场(定义域为$I$，$v(t)$) ✓

commutator 对易子：$u(f), v(f)\in \mathscr{F}_M$，$[u,v]=u(v(f))-v(u(f))$

(也是个矢量场)

(张量形式改变)

## 3. 对偶矢量场

对偶 dual (同线性代数，略)

基底：$dx^\mu \in V^*$

## 4. 张量场 tensor

$$T: \underbrace{V^* \times V^* \cdots}_{k} \underbrace{V \times V \cdots}_{l} \to R$$

张量积： tensor product $T \otimes T'$

$$T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \otimes dx^\sigma$$ 变换规律同逆/协

## 5. 度规张量场

$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$

metric 度规 $g$： 对称，非退化，(0,2)张量

$g_{\mu\nu} = 0, \forall u \to v = 0$

length 长度： $|v| = \sqrt{|g(v,v)|}$

(大小 magnitude)

orthogonal 互相正交： $g(u,v) = 0$

orthonormal 正交归一： $+: g(e_u, e_u) = \pm 1$

正定的(黎曼的) → 对角全为+1

负定的 -1

不定的 ~

洛伦兹的 仅一个 -1

线长： $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$l = \int_{t_0}^{t} |T|(t')\, dt' \rightarrow dl = \sqrt{g(T,T)}\, dt$$

切矢长度

n维欧氏空间： $\delta := \delta_{\mu\nu}\, dx^\mu \otimes dx^\nu$ （欧氏度规）

## 张量对称

(0,2)型张量 $T_{ab}$

对称部分 $T_{(a,b)} = \frac{1}{2}(T_{ab}+T_{ba})$

反对称部分 $T_{[a,b]} = \frac{1}{2}(T_{ab}-T_{ba})$

(0,l)型张量

$\pi$为1~l的排列，$\delta_\pi = \begin{cases} 1 & 偶 \\ -1 & 奇 \end{cases}$

$T_{(a_1\cdots a_l)} = \frac{1}{l!}\sum_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$

$T_{[a_1\cdots a_l]} = \frac{1}{l!}\sum_\pi \delta_\pi T_{a_{\pi(1)}\cdots a_{\pi(l)}}$

性质：1) 传染性：$T_{[a_1\cdots a_l]} S^{a_1\cdots a_l} = T_{a_1\cdots a_l} S^{[a_1\cdots a_l]} = T_{[a_1\cdots a_l]} S^{[a_1\cdots a_l]}$ （对称()同）

2) 括号内同种子括号可增删 $T_{[[a,b],c]} = T_{[abc]}$ （同()）

3) 异号得0 ： $T_{[a(bc)]} = 0$

1)+3) → 4) 异号缩并为0 $T^{(abc\cdots)} S_{[abc\cdots]} = 0$

3) → 5) 不相容： $T_{a_1\cdots a_l} = T_{[\cdots]} \rightarrow T_{(\cdots)} = 0$

$T_{a_1\cdots a_l} = T_{(\cdots)} \rightarrow T_{[\cdots]} = 0$

## 广义黎曼空间：流形M上给度规 g

g正定：黎曼空间

g闵氏：伪黎曼空间