

1. april 2019

I denne mappedel er det en del (teoretisk) tekst og diverse kommentarer og godbiter. Selve oppgavene er markert med brun bakgrunn.

## – Oppgave 1 –

En mye viktig funksjon i matematikk (og fysikk!) er *Riemanns zeta-funksjon*,  $\zeta(s)$ . Dere har sikkert hørt tales om *Riemann-hypotesen* som forutsier hvor nullpunktene til  $\zeta(s)$  er. Denne hypotese, hvis riktig, har utrolig mange konsekvenser, spesielt hva gjelder distribusjonen av primtall på  $\mathbb{Z}$ .

Definisjonsmengden til  $\zeta(s)$  er egentlig  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  men vi skal bare se på tilfellet  $\zeta(a)$ , med  $a \in \mathbb{R}_{>1}$ . Definisjonen på  $\zeta$  for  $s \in \mathbb{R}_{>1}$  er<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dette er *ikke* definisjonen på  $\zeta$  for  $s \leq 1$ , eller da  $s \in \mathbb{C}$ .

$$\zeta(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Dere har sannsynligvis ikke sett uendelige summer før, men ikke heng dere opp i det nå. Som dere kommer å se i Matematikk 2 er funksjonen  $\zeta(s)$  definert (summen *konvergerer*) for  $s > 1$ .

Vi introduserer nå notasjonen

$$\zeta(s)_m \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^s}, \quad m > 1,$$

og kaller dette for den *m-trunkerte zeta-funksjonen*. Faktum er at  $\zeta(s)$  er definert som

$$\zeta(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \zeta(s)_m,$$

hvis dette grenseverdi eksisterer.

(i) Skriv et program som beregner  $\zeta(s)_m$ , for alle  $m > 2$  og  $s \in \mathbb{R}$ .

For å kunne beregne  $a^b$  der  $b$  er et vilkårlig element, bruker dere numpy-funksjonen `power`. For eksempel,  $2.432^{8.976234}$  skrives

```
numpy.power(2.432, 8.976234).
```

Observer at  $\zeta(s)_m$  er definert for alle  $s \in \mathbb{R}$ , selv om ikke  $\zeta$  er det.

(ii) Vis *numerisk* at

$$\zeta(2) = \lim_{m \rightarrow \infty} \zeta(2)_m = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dette gir *ikke* et matematisk bevis for at  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Påstanden er sant, men kan ikke bevises ved hjelp av numerikk.

Vi introduserer nå notasjonen  $r \gg 0$ , hvilket betyr at  $r$  skal være «mye større enn null».

(iii) Fiksér  $r \gg 0$ . Bestem  $N_r > 0$  slik at

$$|\zeta(2)_m - \pi^2/6| < 10^{-r}, \quad \text{for alle } m \geq N_r.$$

Hvis dere har lyst kan dere også sjekke (som i (iii) og (iv)) at  $\zeta(4) = \pi^4/90$ . Faktum er at det er kjent hva  $\zeta(2k)$  er for alle  $k > 0$ :

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} B_{2k} \cdot (2\pi)^{2k}}{2(2k)!},$$

der  $B_{2k}$  er rasjonale tall for alle  $k$ , de såkalte *Bernoulli-tallene av grad  $2k$* .

Å andre siden er svært lite kjent hva gjelder  $\zeta(2k+1)$ . Man vet at  $\zeta(3)$  er irrasjonalt<sup>2</sup> men man vet ikke om det samme gjelder for alle  $\zeta(2k+1)$ .

Det fins *mye* mer spennende å si om dette, men jeg stopper her<sup>3</sup>.

## – Oppgave 2 –

Husk at  $xy$ -planet betegnes  $\mathbb{R}^2$ . En *parametrisert kurve* er en funksjon  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , der  $I \subseteq \mathbb{R}$  er unionen av endelig mange intervall.

**Eksempel 1.** For eksempel,  $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , er grafen til  $f(t) = t^2$ . Andre eksempel er  $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  (enhetssirkelen) og familien

$$\mathbf{c}(t) = (t^2, A \sin(2\pi t) \cos(\pi t)), \quad -1 < t < 1, \quad A = 1, 2, \dots, 6$$

av parametriserte (med parameter amplituden  $A$ ) kurver gir «fiskene» til høyre. □

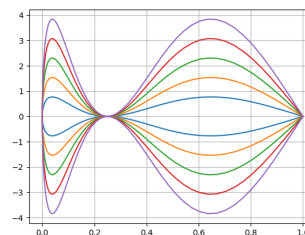
Med andre ord, en kurve er en funksjon

$$\mathbf{c}(t) = (f(t), g(t)),$$

der  $f$  og  $g$  er funksjoner på et område  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup> Bevistes av Roger Apéry i 1979.

<sup>3</sup> Men jeg anbefaller at dere ser på Wikipedia-siden om Riemanns zeta-funksjon (selv om dere ikke kommer til å skjønne spesielt mye).



Figur 1: Fisk

(i) Skriv et program som plotter parametriserte kurver.

(ii) Vis (ved hjelp av (i)) at

$$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos(\theta), b \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

definerer ellipser for alle  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ .

La  $\mathbf{c}$  være en parametrisert kurve på intervallet  $I = [a, b]$ . Da er buelengden til  $\mathbf{c}(t) = (f(t), g(t))$  definert ved formelen

$$\ell(\mathbf{c}) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt. \quad (1)$$

Siden dette integral involverer en kvadratroten så er den umulig å beregne eksakt for de fleste kurver. Å andre siden går det fint numerisk i de fleste tilfeller som dukker opp i praksis.

(iii) Beregn buelengden av kurvene i Eksempel 1. Bruk integrasjonsprogrammet dere skrev i undervisningen.

(iv) Beregn buelengden av en ellipse for forskjellige  $a, b$ .

Det viser seg at buelengden til en ellipse  $\mathcal{E}$  kan beregnes som integralet

$$\ell(\mathcal{E}) = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} \, d\theta, \quad \text{der vi satt } e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (2)$$

For å se hvordan man kommer frem til dette integral, se Appendix.

(v) Bruk formel (2) til å beregne elliptiske integraler.

Integralet i (2) kalles for en *fullstendig elliptisk integral av andre type*<sup>4</sup>. Denne type av integral er historisk veldig viktig og har lett (og fortsatt leder) til en ufattelig mengde matematikk. Niels Hendrik Abel spilte en stor rolle i den initiale utviklingen på dette område<sup>5</sup>.

Observer at integralet i (2) definerer en funksjon av  $e$ , nemlig

$$E(e) \stackrel{\text{def.}}{=} 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} \, d\theta.$$

<sup>4</sup> Eng. *a complete elliptic integral of the second kind*.

<sup>5</sup> Faktum er at elliptiske integraler er et spesialtilfelle av de mer generelle *abelske integralene*.

(vi) Hva er definisjonsmengden til  $E$ ?

(vii) Plot grafen til  $E$  på definisjonsmengden.

En *ufullstendig elliptisk integral av andre type*<sup>6</sup> er funksjonen  $E(e, x)$  av to variabler

$$E(e, x) \stackrel{\text{def.}}{=} 4a \int_0^x \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} \, d\theta, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

<sup>6</sup> Eng. *an incomplete elliptic integral of the second kind*.

(viii) Fiksér  $e$  og plot  $E(e, x)$  som en funksjon av  $x$ .

For neste oppgave ønsker jeg at dere angir, i koordinatsystemet, indikasjon på hvilken graf som tilhører hvilket  $e$ -verdi. Dette kalles for «legends» og dere finner enkelt informasjon på hvordan man bruker dette.

(ix) Gjør dette for forskjellige  $e$  i samme koordinatsystem.

### – Oppgave 3 –

I denne oppgave skal dere løse differensiallikninger numerisk. Dere skal bruke programmet som ligger på Canvas med navnet `Eulers metode.py`. Dere trenger *ikke* å skjønne dette program og Eulers metode. Bare bruk programmet som en «black-box».

Mange (de fleste?) dynamiske situasjoner kan beskrives ved hjelp av andre ordens differensiallikninger. Årsaken til det staves *Newtons andre lov*:

$$F = ma(t) = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}.$$

For eksempel, *Hookes lov* for en fjær gis ved  $F(t) = -ks(t)$ , der  $k > 0$  er fjærkonstanten og  $s(t)$  er avstanden av fjærets ende til vilotilstandet. Det gir en (lineær) differensiallikning av orden to:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -ks(t) \iff \frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s(t), \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Det er viktig å observere at likningen ikke tar noen hensyn relatert til friksjonsfenomen. Observér også at likningen kan skrives

$$\frac{d^2s}{dt^2} = F(t, s)$$

med  $F(s, t) = -\omega^2 s(t)$ .

Fra nå skal dere bruke «legends» når det er passelig. *Ikke* endre mer enn en parameter i en plot.

- (i) La  $k = 15 \text{ N/m}$  og massen  $m = 0.75 \text{ kg}$ . Bruk programmet `Eulers metode.py` til å modellere fjærsvingningen.
- (ii) Gjør dette for forskjellige  $k$  og forskjellige startverdier i samme koordinatsystem.. Er resultatene fysikalsk rimelig?  
Hvis ikke, hva kan være årsaken?

Som allerede påpekt, er situasjonen over ikke riktig fysikalsk, siden likningen ikke involverer friksjon. For å få med friksjon skriver man likningen på formen

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha \frac{ds}{dt} + \omega^2 s(t) = 0.$$

- (iii) Gjør det samme som i (i) og (ii) men med forskjellige verdier på  $\alpha$ . Kommentér resultatene.

Noen ganger virker en ekstern kraft på fjæren (for eksempel en motor). Da blir likningen

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha \frac{ds}{dt} + \omega^2 s(t) = \beta(t),$$

for noen funksjon  $\beta$ . Det fins ikke noe som sier at «friksjonen»  $\alpha$  og  $\omega^2$  ikke kan variere med tid også. Den mest generelle likningen som modellerer en fjær blir derfor

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha(t) \frac{ds}{dt} + \omega^2(t) s(t) = \beta(t).$$

- (iv) Anta at fjæren påvirkes av en periodisk kraft gitt ved

$$\beta(t) = A \cos(t), \quad A \geq 0.$$

Gjør som i (iii) for forskjellige  $A$ .

- (v) Eksperimentér med forskjellige funksjoner  $\alpha(t)$  og  $\omega^2(t)$ . Kommentér hva dine valg har for fysikalsk betydning.

La oss si at en *oscillator* er et fysikalsk system som kan beskrives ved hjelp av en andre ordens differensiallikning med periodisk «motorisk kraft» som i (iv) over (vi tillater altså at denne kraft er null). Dette er en relativt generøs definisjon av en oscillator men la oss ikke fastne i semantikk.

Vi er vant til å plote funksjoner  $f(x)$  som grafer med punkter  $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^2$ . Det fins en annen veldig viktig måte å plote løsninger til differensiallikninger, nemlig det såkalte *faseportrettet* eller *fasediagrammet*.

La oss si at vi har en differensiallikning  $y'' = F(t, y, y')$ . Anta at  $y(t)$  er en løsning til likningen. Da er faseportrettet til  $y(t)$  punktene  $(y(t), y'(t))$  for alle  $t$  i definisjonsmengden til  $y(t)$ . Med andre ord,  $x$ -koordinaten er  $y$ -verdiene til funksjonen ved tidspunktet  $t$ , og  $y$ -koordinaten er funksjonsverdien til *den deriverte*,  $y'(t)$ , ved  $t$ .

Last nå ned programmet `Eulers metode+phase.py` fra Canvas. Dere skal nå bruke dette til å plote faseportrett.

(vi) Gjør oppgavene (i) – (v) over med `Eulers metode+phase.py`. Forsøk tenk gjennom i hvert tilfelle hva faseportrettet sier sammen med funksjonsgrafen. Dette er ikke alltid så enkelt.

Husk at leddet  $\omega^2 s(t)$  i differensiallikningen kommer fra Hookes lov. Noen ganger er dette en altfor enkel modell for den fysikalske situasjonen. For eksempel, hvis «fjæret» inneholder internere krefter (intern friksjon som elastisitet, for eksempel) da er Hookes lov ikke brukbar i denne enkle form. I steden må man introdusere *ikke-lineære* ledd i likningen. En slik variant er den såkalte *Duffing oscillatoren* med «Hookes lov»  $F = -ks(t) + \delta s(t)^3$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$ .

Differensiallikningen blir da

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \alpha(t) \frac{ds}{dt} + \omega^2(t)s(t) + \gamma s(t)^3 = \beta(t).$$

Ofte er  $\beta(t) = b \cos(ut)$ ,  $b, u \in \mathbb{R}$ , og likningen

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \alpha(t) \frac{ds}{dt} + \omega^2(t)s(t) + \gamma s(t)^3 = b \cos(ut), \quad b, u \in \mathbb{R}$$

kalles ofte for *Duffing-likningen*<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Se Wikipedia: *Duffing equation*. Jeg har brukt annen notasjon.

(vii) Studér likningen med  $b \in [0.20, 0.65]$ ,  $\omega^2 = -1$  (notér at dette ikke gir et reellt verdi på  $\omega$ ),  $\gamma = 1$ ,  $\alpha = 0.3$  og  $u = 1.2$ . Bruk startverdier  $s(0) = 1$  og  $s'(0) = 0$

(viii) Bruk andre verdier på  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $u$  og andre startverdier.

For morsom lesing anbefaler jeg Wikipedia-artikkelen jeg refererer til i marginen over.

## – Appendix –

Vi skal her vise at buelengden til en ellipse kan skrives som (2).

La  $\mathcal{E}$  være en ellipse parametrisert ved

$$\mathbf{c}(t) = (a \cos(\theta), b \sin(\theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi sammenligner med (1) ser vi at  $f(\theta) = a \cos(\theta)$  og  $g(\theta) = b \sin(\theta)$ , og innsetning i (1) gir

$$\ell(\mathcal{E}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} \, d\theta.$$

Først og fremst er det klart at vi bare trenger beregne integralet mellom 0 og  $\pi/2$ , og deretter multiplisere integralet med 4.

Siden  $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$  kan vi sette inn dette i integralet å forenkle

$$\ell(\mathcal{E}) = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cos^2(\theta)} \, d\theta = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2(\theta)} \, d\theta,$$

der vi satt  $e^2 = 1 - b^2/a^2$ .

Nå vet vi at

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \quad (\text{enhetssirkelen!})$$

så, hvis  $f(x)$  er en vilkårlig funksjon,

$$f(\cos(\theta)) = f\left(\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

og

$$\int f(\cos(\theta)) d\theta = \int f\left(\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) d\theta,$$

for alle integraler. Hvis vi substituerer  $u = \theta - \pi/2$  i integralet til høyre, med de aktuelle integrasjonsgrensene, får vi<sup>8</sup>

<sup>8</sup> Sjekk dette!

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi/2} f\left(\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) d\theta.$$

Siden dette gjelder for alle (integrerbare) funksjoner  $f(x)$ , gjelder det spesielt for valget  $f(x) = \sqrt{1 - e^2 x^2}$ . Setter vi alt sammen får vi da

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{E}) &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2(\theta)} \, d\theta \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)} \, d\theta \\ &= 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2(\theta)} \, d\theta, \end{aligned}$$

og dermed er påstandet bevist.