Diskrete dynamiske systemer *Oppgave 3, 2019*

9. mars 2019

– Oppgave –

– 1. Likningsløsning –

(a) Bruk Newtons metode for å løse $f(x) = 0$ fullstendig da

(i) $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 3$

(ii) $f(x) = \ln(x^3 + 1) - \frac{x^2}{2}$

(iii)
$$f(x) = \cos\left(\frac{e^{\sin(x)}}{x^3 + 1} - x^2\right) - \frac{1}{2}, \quad -1 < x \leq \pi.$$

Kan dere forklare hva som skjer i $x = -1$?

Hvordan kan dere være sikre på at dere har fått alle ønskede løsninger?

(b) Finn de stasjonære punktene for funksjonene i (a).

– 2. Kjedebrøk –

Et *kjedebrøk* (eng. *continued fraction*) er et rekursivt brøk, f.eks.,

$$\frac{1}{2 + \frac{3}{4 + \frac{5}{6}}}$$

(a) Beregn kjedebrøket over for hånd på papir.

(b) Skriv et program som beregner det.

For å kunne hantere kjedebrøk bruker man notasjonen

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] \stackrel{\text{def.}}{=} a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

(c) Skriv et program som tar som input en liste $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ og beregner motsvarende kjedebrøk. Svaret skal gis som brøk.

(d) Vis at

$$\sqrt{2} \approx [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$$

Hvor god approksimasjon er dette?

(e) Vis at

$$\sqrt{3} \approx [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2]$$

Hvor god approksimasjon er dette?

(f) Vis at

$$\pi \approx [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2]$$

Hvor god approksimasjon er dette?

Det er klart at man kan fortsette hvor lenge man ønsker. Det viser seg at noen kjedebrøk er *periodiske*, nemelig de som er røtter til kvadratiske likninger $x^2 = a$. For eksempel

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots] = [1; \overline{2, 2}]$$

og

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, \dots] = [1; \overline{1, 2}].$$

Å andre siden, fins det kjedebrøk som ikke er periodiske, for eksempel

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \dots].$$

(g) Illustrér punktene (a)–(f) geometrisk.

– 3. Diskret dynamikk –

Husk at et diskret dynamisk system er en rekursjon av en funksjon F på en mengde X. Mengden X kan være helt vilkårlig. La $x_0 \in X$. *Banen* (eng. *orbit*) til x_0 er mengden

$$\mathsf{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}, \quad \text{der} \quad x_{n+1} = F(x_n).$$

La $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ og se på det 2-dimensjonale (diskrete) dynamiske systemet

$$\begin{cases} x_{n+1} &= ax_n &+ by_n \\ y_{n+1} &= cx_n &+ dy_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

La $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ og $d = 0$.

(a) Skriv et program som beregner banen til et punkt (x_0, y_0) og plot denne bane i et koordinatsystem. Forklar matematisk hvorfor banen er *periodisk*.

(b) Varier d i intervallet $[-0.5, 0.5]$ og beregn banen. Kan dere forklare matematisk hva dere ser?

(c) Lek litt med å variere alle parameterene. Kan dere forklare matematisk hva som skjer?

(d) Vi adderer nå et ekstra ledd i systemet:

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + ex_n^2 + fy_n^2, \end{cases}$$

med $|e|, |f| < 1$. Studér banene for dette *ikke-lineære* dynamiske system.

– 4. Newtonfraktaler (ekstraoppgave) –

Hvis dere ønsker å gjøre noe med dette, ta kontakt med meg!