Lineær algebra — *Oppgave 2, 2019*

23. januar 2019

– Oppgave –

– 1. Polynom –

(a) La $P(x)$ være polynomet $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$. Skriv en Python-funksjon som beregner $y = P(x)$.

(b) La $\boldsymbol{p} = [p_0, p_1, \ldots, p_n]$, med $p_i \in \mathbb{R}$, være en vektor. Skriv en Python-funksjon som beregner funksjonsverdiene av funksjonen

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i.$$

(c) La $\boldsymbol{u} = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ være en annen vektor. Skriv en Python-funksjon som beregner

$$P(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def.}}{=} [P(u_0), P(u_1), \ldots, P(u_n)]\,.$$

Bruk dette til å plotte grafen til $P(x)$, for noen ulike polynomer $P(x)$.

(d) Skriv en Python-funksjon som beregner vektoren (med input $a \in \mathbb{R}$)

$$\left[a, P(a), P^2(a), P^3(a), \ldots, P^n(a)\right],$$

der $P^i(a)$ er definiert *rekursivt* som

$$P^i(a) \stackrel{\text{def.}}{=} P\big(P^{i-1}(a)\big), \quad \text{der} \quad P^0(a) \stackrel{\text{def.}}{=} a \;\; \text{og} \;\; P^1(a) \stackrel{\text{def.}}{=} P(a).$$

(e) Samme oppgave som (d), men nå skal input være en vektor $\boldsymbol{u}$.

– 2. Lineære transformasjoner –

Velg en 2×2-matrise[1]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Tag et punkt $P = (p_1, p_2)$ og se på dette som en vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)^T = (p_1, p_2)$.

[1] Husk at indekseringen i `array` er annerledes; den starter på `A[0,0]`.

(a) Plot punktet Q gitt ved «punktifiseringen» av vektoren

$$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}$$

for forskjellige punkter P og matriser A. Se til å gjøre noen eksempler der $|a_{ij}| \leq 1$.

(b) La θ være en vinkel i intervallet $[0, 2\pi]$. Gjør som i (a) med matrisen

$$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Bruk forskjellige verdier på θ.

(c) Plot et rektangel[2]. Gjør som i (a) med hvert punkt på rektangelet. (Du skal altså få et nytt «rektangel».)

Eller, hvis det blir for enkelt med bare et rektangel, en grid.

(d) Samme som i (c), men iterér prosedyren flere ganger.

(e) Plot en funksjon og transformér alle punkter på grafen ved hjelp av matriser. Iterér prosedyren som i (d).

– 3. *Iterasjoner av polynom, et eksplisitt studium* –

NB! Oppgave 3 er ment for de av dere som er litt interessert i utforskning og eksperimentering. Den kommer ikke til å inngå i vurderingen.

I denne del ser vi på polynomet

$$L(x) = \lambda x(1 - x),$$

der λ er en reell parameter i intervallet $[0, 4]$ og der $x \in [0, 1]$.

(a) Gjør som i oppgave 1(d) og beregn listen

$$\left[x, L(x), L^2(x), L^3(x), \ldots, L^n(x)\right].$$

Fiksér først λ i delintervallet $(0, 1.5)$ og beregn listen for forskjellige $x \in [0, 1]$ når $n \to \infty$. Hva noterer dere?

(b) Gjør nå som i (a) men la λ øke suksessivt, si med steglengde på 0.1, fra 1.5 og oppover. Hva skjer nå?

(c) Forsøk gjøre en teoretisk analyse av resultatene i (b).

– *Konsept* –

Dere kommer ha bruk for følgende konsepter.

- Alt fra tidligere (`for`, `list`, e.t.c.);
- `array` og andre matrisemetoder fra **numpy**;
- `plot` og metoder (funksjoner) relaterte til denne i **matplotlib**.