Clock Hands' Beat

1 問題

0 時 0 分 0 秒にすべての針が真上を向く時計がある．

(1) 0 時 1 分 0 秒から 12 時 1 分 0 秒のあいだで長針と短針が重なるのは何回か？

(2) 長針と短針の区別がつかないとし，秒針は見えないとする．0 時 1 分 0 秒から 12 時 1 分 0 秒のあいだで今何時かわからなくなる瞬間は何回あるか？

(3) 長針と短針と秒針の区別がつかないとする．0 時 1 分 0 秒から 12 時 1 分 0 秒のあいだで今何時かわからなくなる瞬間は何回あるか？

1　重なる回数

今，0 時 0 分 0 秒から m 分たったとする．$(m \in [0,720))$

長針は m を 60 で割ったあまりのところを指しており，短針は $\frac{m}{12}$ 分のところを指している．

これらが重なる問ことは，$m-\frac{m}{12}$ が 60 の倍数であるといこうとである．

つまり，$m=k\cdot\frac{720}{11}$ と書ける．k は 0 から 10 まで動くので答えは 11 回．

2　針の区別がつかない

2 つの針が a 分の場所と b 分の場所を指しているとする $(a, b \in [0, 60))$
同値関係 $\equiv$ を $x \equiv y \Leftrightarrow (x - y)$ が 60 の倍数 と定義する．

a, b の針がそれぞれ長針，短針である場合

$$a \equiv 12b.$$

逆の場合は

$$12a \equiv b.$$

今何時かわからないということは上の 2 つの式が同時に成立するということである．よって

$$\begin{aligned} 144a &\equiv a \\ 143a &\equiv a. \end{aligned}$$

よって $a = 0, \frac{60}{143}, 2 \cdot \frac{60}{143}, 3 \cdot \frac{60}{143}, \ldots, 142 \cdot \frac{60}{143}$ の 143 個が解になるが，このうち (1) でもとめた 11 回は今何時かわかるので，答えは $143 - 11 = 132$

3　針の区別が全くつかない

そういうタイミングはあるとは思うんだけど計算が面倒くさい.[1]

[1] 6 通りの針の解釈を全部試さないといけない