

Random Points on $[0, 1]$

1 問題

$[0, 1]$ 区間上から一様ランダムに点を N 個取することを考える．以下の期待値を答えよ．なお，区間とは点をちょうど 2 つ含む閉区間のうち極小のものを指す (区間は $N - 1$ 個ある) ．

- (1) 重心 ．
- (2) 最大値 ．
- (3) 最近点对の距離
- (4) 全点对の距離の平均
- (5) 区間の距離のうち k 番目に大きい物の長さ
- (6) 区間の距離のうち平均より大きい物の個数

1 重心

i 番目にとってきた点の位置を X_i とする . X_1, \dots, X_N は $[0, 1]$ 一様分布に従う独立同分布である .

$$\begin{aligned} & E \left[\frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \right] \\ &= \frac{E[X_1] + \dots + E[X_N]}{N} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2 最大値

最大値が k 以下になる確率を $P(k)$ とおく． X_i が k 以下になる確率は k なので， $P(k) = k^N$ である．確率変数 M を $M = \max(X_1, \dots, X_N)$ で定義すると， $P(k)$ は M の累積密度関数に相当する．微分すると確率密度関数 $p(k)$ がわかる．

$$p(k) = \frac{dP}{dk}(k) = Nk^{N-1}$$

求めたい値は $\int_0^1 kp(k)dk$ なので，あとは計算するだけ．

$$\begin{aligned} & \int_0^1 kp(k)dk \\ &= \int_0^1 Nk^N dk \\ &= \left[\frac{N}{N+1} k^{N+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{N}{N+1} \end{aligned}$$

3 最近点対の距離

最近点対の距離が k 以上になる確率を $P(k)$ とおく． $[0,1]$ から最近点対の距離が k 以上になるように点を N 個選ぶ操作は， $[0, 1 - (N-1)k]$ から点を N 個選ぶ操作と対応する（各区間から k だけ抜くことを考えれば良い）．よって

$$P(k) = (1 - (N - 1)k)^N$$

最近点対の距離を M とすると P は M の累積密度関数に相当する．よって P を微分すれば M の確率密度関数 p がもとまる．ここで $P(k)$ が M が k 以上となる確率であることに注意しなければならない．つまり，符号をひっくり返す必要がある．

$$p(k) = -\frac{dP}{dk}(k)$$

求めたい値は $\int_0^{\frac{1}{N-1}} kp(k)dk$ なので，あとは計算するだけ．部分積分をすると便利．

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{N-1}} kp(k)dk \\ &= [-kP(k)]_0^{\frac{1}{N-1}} + \int_0^{\frac{1}{N-1}} P(k)dk \\ &= \int_0^{\frac{1}{N-1}} P(k)dk \\ &= \left[\frac{(1 - (N - 1)x)^{N+1}}{1 - N^2} \right]_0^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} \end{aligned}$$

4 全点对の距離の平均

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N |X_i - X_j| \right] \frac{2}{N(N-1)} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N E [|X_i - X_j|] \frac{2}{N(N-1)} \end{aligned}$$

ここで, $E [|X_i - X_j|]$ は i, j によらないので

$$\begin{aligned} &= E [|X_1 - X_2|] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5 最近点対の距離

$[0, 1]$ から N 点取った時の k 番目に短い点対の大きさの期待値を $f_k(N)$ とする．問 3 で求めた通り $f_N(1) = \frac{1}{N^2 - 1}$ である．
 k 番目に短い点対の大きさの期待値は， $N - 1$ 個の区間から一番短い点対の大きさを引くことを考えると，

$$\begin{aligned} f_k(N) &= f_1(N) + (1 - (N - 1)f_1(N))f_{k-1}(N - 1) \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{N}{N + 1}f_{k-1}(N - 1) \end{aligned}$$

具体的に計算してみると．

$$\begin{aligned} f_1(N) &= \frac{1}{N^2 - 1} \\ &= \frac{1}{N + 1} \frac{1}{N - 1} \\ f_2(N) &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{N}{N + 1}f_1(N - 1) \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{N}{N + 1} \frac{1}{N} \frac{1}{N - 2} \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{1}{(N + 1)(N - 2)} \\ &= \frac{1}{N + 1} \left(\frac{1}{N - 1} + \frac{1}{N - 2} \right) \\ f_3(N) &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{N}{N + 1}f_2(N - 1) \\ &= \frac{1}{N^2 - 1} + \frac{N}{N + 1} \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N - 2} + \frac{1}{N - 3} \right) \\ &= \frac{1}{N + 1} \left(\frac{1}{N - 1} + \frac{1}{N - 2} + \frac{1}{N - 3} \right) \\ &\vdots \\ f_k(N) &= \frac{1}{N + 1} \left(\frac{1}{N - 1} + \frac{1}{N - 2} + \cdots + \frac{1}{N - k} \right) \end{aligned}$$

6 平均より長い点対の個数

これ本当に求まるのか自信がない。¹

¹ごめんなさい