

Métodos Computacionais em Engenharia (FIS3022)
 Problemas 4
 DFA-FCUP 2021-22
 18 de Março de 2022

1. Considere a equação de Poisson para descrever um problema que tem como termo fonte (adimensionalizado):

$$v(x, y) = 6xy(1 - y) - 2x^3$$

para $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. As condições fronteira em $x = 0$ são $\alpha_e = 1$, $\beta_e = 0$, e $\gamma_e = 0$ [ver Nota], enquanto que em $x = 1$ são $\alpha_d = 1$, $\beta_d = 0$, e $\gamma_d = y(1 - y)$. Consideram-se condições fronteira de Dirichlet $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$ em $y = 0$ e $y = 1$. O problema pode ser resolvido analiticamente, dando:

$$u(x, y) = y(1 - y)x^3.$$

- (a) desenvolva um código para resolver o problema de Poisson em geral (deve obter CF, termo fonte, método iterativo,..., chamando funções, ou via parâmetros). Dê a possibilidade de usar todos 3 métodos iterativos considerados nas aulas (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR); permita também que seja usado o ordenamento sequencial *vs* o ordenamento *red-black*;
- (b) resolva numericamente o problema indicado;
- (c) compare, para cada um dos métodos, e para vários valores do tamanho da célula de discretização, quantas iterações precisa para obter um resultado com uma tolerância $tol=10^{-4}$ (Se o seu computador demorar mais que alguns minutos a correr qualquer das simulações, considere apenas passos maiores) Apresente os resultados em tabelas comparativas;
- (d) faça um plot do resultado;

Nota 1: as condições fronteira mistas podem ser indicadas através de uma equação que deve ser obedecida na fronteira indicada.

$$\alpha_i u(x, y) + \beta_i \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \gamma_i(y),$$

onde $i = d, e$ indica a fronteira direita ou esquerda, respectivamente (ou cima, baixo!)

Nota 2: Sugestão para os passos a utilizar: pode variar o passo h seguindo uma sequência em que reduz para metade o passo anterior: $1/8$, $1/16$, $1/32$, $1/64$, ...