

1. Escreva um código que resolva a equação de tráfego (equação de Burgers invíscida)

$$u_t + uu_x = 0,$$

usando o método de Lax-Friedrichs. Considere condições fronteira periódicas.

- (a) considere diferentes formas para as condições iniciais. Considere formas suaves (gaussiana, por exemplo) e formas com descontinuidade (degrau ou barreira).
  - (b) estude o comportamento do resultado em função da resolução.
  - (c) estude o problema de um semáforo que passa a verde. Estude o caso oposto, sinal que fica vermelho. Estude a sequência de um sinal passar a verde e algum tempo depois passar a vermelho.
2. Escreva um código que resolva a equação de Burgers com difusão (víscida):

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

com um método pseudo-espectral, considerando condições fronteira periódicas. Use para a integração no tempo o método de Euler para diante.

- (a) corra o programa até  $t = 2\pi$  com  $dt = dx/c$ ,  $N = 32$ , e uma condição inicial  $u(x, 0) = 0.3 + 0.08 \sin(x)$ . Faça um gráfico com os resultados (no mesmo gráfico) para os instantes  $t = 0, \pi/4, \pi/2, \dots, 2\pi$ . Considere diferentes formas para as condições iniciais. Considere formas suaves (gaussiana, por exemplo) e formas em degrau (degrau ou barreira).
  - (b) explique os resultados, em particular tendo em conta os resultados do problema anterior (Burgers invíscida).
  - (c) como pode melhorar este cálculo?
3. Implemente um programa que simule a equação de Korteweg-de Vries (KdV), usando um método pseudo-espectral *split-step*. Considere condições fronteira periódicas. Tome o domínio como o intervalo  $[-\pi, \pi]$ .
- (a) considere a condição inicial  $u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right)$ , onde  $c$  é um parâmetro (qual o seu significado?). Esta solução é conhecida por (1-) solitão.
  - (b) considere condições iniciais da forma  $u(x, t) = \frac{N(N+1)c}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right)$ . Tente os casos  $N$  inteiro (conhecido por N-solitão) e  $N$  não inteiro (semi-inteiro, p.ex.)
  - (c) considere o caso de colisão (espalhamento) entre dois solitões de tamanhos (e velocidades) diferentes. Por exemplo, tome um solitão com  $c = 4$  inicialmente centrado em  $x_0 = -2\pi/3$ , e outro com  $c = 2$  inicialmente centrado em  $x_0 = -\pi/6$ . (Tente outros valores; em particular é importante que não haja sobreposição apreciável entre os solitões iniciais).