

1. No estudo da equação de advecção, usamos vários métodos, na tentativa de resolver os problemas do simples método FTCS (explícito). Vimos métodos com esquema (stencil) simétrico (Lax-Wendroff, Lax-Friedrichs), e assimétrico (up-wind). Um outro método assimétrico, mas de ordem superior, é o método de *Beam-Warming*. Para $v > 0$, toma a forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n) + \frac{v^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)$$

- (a) Determine a condição CFL para este método.
- (b) Escreva um código que evolua uma forma inicial de cartola (como usado na aula) por um período com o método de *Beam-Warming*.
- (c) Como vimos na aula (notebook advection2.ipynb), os esquemas numéricos que usamos frequentemente simulam mais de perto uma equação diferente daquela que pretendemos. Vimos isso para o método explícito (FTCS) e para *up-wind* (eqs 12 e 17, respectivamente).

Determine a equação modificada que é mais de perto simulada pelo método de *Beam-Warming*, mantendo termos até à ordem $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$ e depois substituindo as derivadas no tempo por derivadas no espaço (usando a equação de advecção).

- (d) interprete os seus resultados numéricos à luz deste equação e das soluções que espera que ela tenha, face aos termos presentes, para a forma inicial que usou na alínea anterior.
- (e) Queremos simular um problema de poluição. Uma barragem vai ter a sua face a montante sulfatada com uma solução de cobre, usando 10 kg para uma extensão de 3000 m² de parede da barragem. Mas 700 m mais acima existe uma exploração de piscicultura que bombeia água da corrente, e sabe que não pode admitir uma concentração de cobre superior a $1.5 \times 10^{-3} \text{ mg l}^{-1}$. A velocidade de escoamento do rio é de 0.01 m s⁻¹ e o coeficiente de difusão é 2 m² s⁻¹.
 - i. Escreva um código que lhe permita resolver este problema de advecção-difusão. Use condições fronteira apropriadas ao problema. (sugestão: trate cada termo com a discretização que conduz a melhores resultados, isoladamente!)
 - ii. Determine se a exploração corre perigo, e se sim, por quanto tempo.

Nota: trate a película inicial de cobre como de espessura infinitesimal. Use a função delta de Dirac (que tem dimensões!) para calcular a concentração inicial.