# Métodos Computacionais em Engenharia (F4021)

A.S. Rodrigues

Departamento de Física e Astronomia
Faculdade de Ciências
U.Porto

03 Outubro 2018

Aula de hoje: Transformadas integrais

- Transformadas integrais
- Transformada de Fourier
- Transformada de Fourier discreta (DFT)
- Transformada de Radon

# Transformadas integrais

- Uma transformada integral é qualquer transformação da forma:

$$Tf(y) = \int_D K(y,x) f(x)\, dx$$

  $K(y,x)$ chama-se o núcleo da transformação.
- alguns núcleos admitem inversa, $K^{-1}(y,x)$, que leva à tranformação inversa:

$$f(x) = \int_D K^{-1}(y,x) Tf(y)\, dx$$

- Há várias transformações integrais úteis, cada uma definida por um núcleo, função de 2 variáveis (para transformações de funções em 1D!)

# Uso

- Em Física:
  - análise espectral, equações integrais, teoria de difração (Fresnel, Fraunhofer,... ) e espalhamento,...
- Em engenharia:
  - análise de sinal,...
- Noutros campos:
  - processamento de imagem, filtragem, tomografia,...

# Exemplos...

- Fourier:

$$K(y,x) = \exp(-i2\pi y \cdot x) \qquad D \in ]-\infty, +\infty[$$

- Laplace:

$$K(y,x) = \exp(-y \cdot x) \qquad D \in [0, +\infty[$$

- Hankel:

$$K(y,x) = xJ_n(y \cdot x) \qquad D \in [0, +\infty[$$

- seno/cos Fourier:

$$K(y,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\sin / \cos)(y \cdot x) \qquad D \in [0, +\infty[$$

# Cálculo

Numericamente, usamos qualquer uma das regras de integração revistas na aula anterior (Riemann, trapézio, Simpson,...)

# Transformadas discretas

- Uma transformada integral é qualquer transformação da forma:

$$Df_m = \sum_{n=1}^{N} K_{mn} f_n$$

onde $f_n \equiv f(x_n)$, $DFm \equiv Df(y_m)$, em que os $x_n, y_m$ pertencem aos conjuntos discretos $x : x_1, x_2, \ldots, x_N$ e $y : y_1, y_2, \ldots, y_N$

# Transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é uma operção que transforma uma função compexa de variável real, noutra função complexa de variável real. É definida[1]

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t)\ dt$$

e a sua inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(+i\omega t)\ dt$$

[1]as constantes e a própria variável conjugada e até o sinal na exponencial, podem ser definidas de modos diferentes! Convém sempre verificar qual a definiçao que está a ser seguida.

# Propriedades da transformada de Fourier

- linearidade

$$\mathcal{F}\left(af(t) + bg(t)\right) =$$
$$a\mathcal{F}\left(f(t)\right) + b\mathcal{F}\left(g(t)\right)$$

- translação

$$\mathcal{F}\left(f(t-a)\right) = \exp(-i\omega a)F(\omega)$$

- escala

$$\mathcal{F}\left(f(at)\right) = F(\omega/a)/|a|$$

- conjugação

$$\mathcal{F}\left(f^*(t)\right) = F^*(-\omega)$$

- derivada

$$\mathcal{F}\left(f'(t)\right) = i\omega F(\omega)$$

- convolução

$$\mathcal{F}\left(f(t) * g(t)\right) = F(\omega)G(\omega)$$

- teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

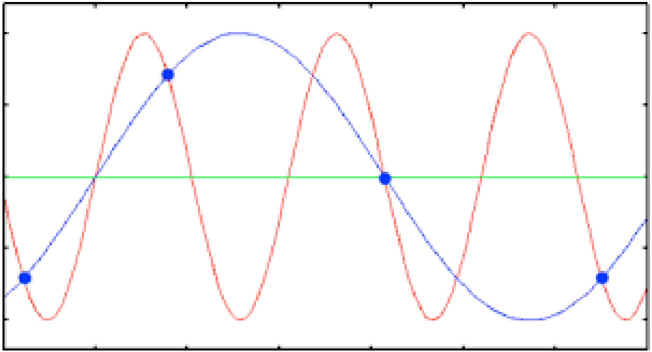
- princípio da incerteza

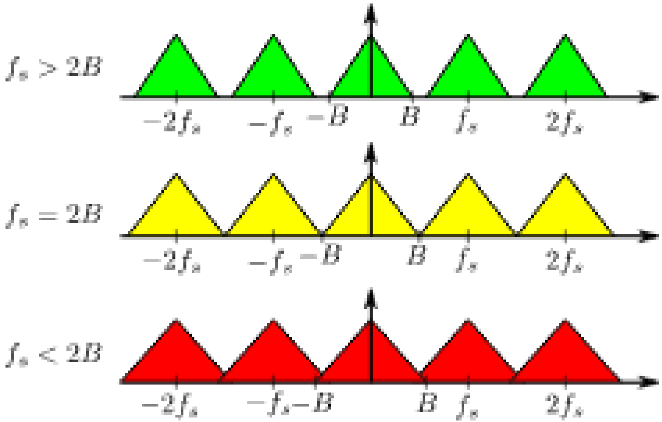
$$\Delta t \equiv \frac{1}{f(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|; \;\; \Delta\omega \equiv \frac{1}{F(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| \, d$$

$$\Delta\omega \Delta t \geq 2\pi \qquad \Delta\nu \Delta t \geq 1$$

# Teorema da amostragem de Nyquist–Shannon

- Um sinal analógico de banda limitada amostrado, pode ser prefeitamente reconstruído a partir de uma sequência finita de amostras (a intervalos $\Delta$), se a taxa de amostragem exceder $2f_c$ amostras por unidade de tempo, em que $f_c = 1/\Delta$ é a frequência mais alta presente no sinal inicial.
- A contrapartida é que se um sinal cuja banda excede $f_c$, for amostrado à taxa $2f_c$, verá toda a potência espectral fora da gama $-f_c < f < f_c$ movida para esse intervalo. A este efeito chama-se *aliasing*.
- A $2f_c$ chama-se a taxa de Nyquist (é uma propriedade do sinal); a $1/2\Delta$ chama-se a frequência de Nyquist (é uma propriedade do processo de amostragem).




$f_s > 2B$
$-2f_s$
$-f_s$
$-B$
$B$
$f_s$
$2f_s$
$f_s = 2B$
$-2f_s$
$-f_s$
$-B$
$B$
$f_s$
$2f_s$
$f_s < 2B$
$-2f_s$
$-f_s$
$-B$
$B$
$f_s$
$2f_s$

# Séries de Fourier

Consideremos uma função $h(t)$ que satisfaz as condições:

- é periódica, com periodo $T$;
- tem número finito de descontinuidades no intervalo $T$;
- média em $T$ é finita;
- número finito de máximos e mínimos;

Então $h(t)$ pode ser expressa como uma combinação linear (infinita) de senos e cossenos:

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

# Como calcular os coeficientes?

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T h(t)\,dt \qquad a_k = \frac{2}{T}\int_0^T h(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T h(t)$$

# Domínio das frequência: porquê?

- permite representação eficiente de uma boa aproximação à função original;
- filtragem é fácil;
- convolução no tempo passa a multiplicação na frequência (muito mais simples).
- se tivermos sinal amostrado, é inerentemente discreto;
- ...

# Família de Fourier

transformada de Fourier: sinais contínuos e aperiódicos;

séries de Fourier: sinais contínuos e periódicos;

transformada para tempos discretos de Fourier: sinais discretos e aperiódicos;

transformada discreta de Fourier: sinais discretos e periódicos;

# Transformada discreta de Fourier (DFT)

- precisa amostrar a intervalos iguais;
- transformada é apliocada a uma janela de valores;
- seja N número de amostras;
- seja $x[\ ]$ o vector de amostras;

# Notação da DFT

- $c_k[i]$ e $s_k[i]$ são as ondas cosseno e seno, com N valores;
  - $c_k[i]$ é a amplitude de $\mathrm{Re}(X[k])$, ou $\cos(2\pi ki/N)$;
  - $s_k[i]$ é a amplitude de $\mathrm{Im}(X[k])$, ou $\sin(2\pi ki/N)$.
- $k$ denota a frequência da onda (em geral entre $0$ e $N/2$);
- também podemos usar exponenciais complexas, usando equação de Euler: $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$.

# Cálculo da DFT

- com sinusóides separadas:

$$\mathrm{Re}(X[k]) = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]\cos(2\pi ki/N)$$

$$\mathrm{Im}(X[k]) = \sum_{i=0}^{N-1} x[i]\sin(2\pi ki/N)$$

- com exponenciais complexas:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N}kn} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

# Cálculo da DFT inversa

É preciso normalizar coeficientes:

$$\mathrm{Re}(\overline{X}[k]) = \frac{\mathrm{Re}(X[k])}{N/2} \qquad \mathrm{Im}(\overline{X}[k]) = \frac{\mathrm{Im}(X[k])}{N/2}$$

com 2 casos especiais:

$$\mathrm{Re}(\overline{X}[0]) = \frac{\mathrm{Re}(X[0])}{N} \qquad \mathrm{Re}(\overline{X}[N/2]) = \frac{\mathrm{Re}(X[N/2])}{N}$$

# Cálculo da DFT inversa

Resultado é igual aos dados originais (dentro de arredondamentos), ié, IDFT(DFT(x[n]))=x[n].

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{Re}(\overline{X}[k]) \cos(2\pi ki/N) + \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{Im}(\overline{X}[k]) \sin(2\pi ki/N)$$

ou

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-\frac{2\pi i}{N} kn} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

# Cálculo da DCT

Muito semalhante à DFT.

- onda seno = onda cosseno + desvio de fase;
- dá N coeficientes de funções da base cosseno;
- resultado é puramente real;
- usada em JPEG e MPEG.

$$X_n = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

# FFT (Fast Fourier Transform)

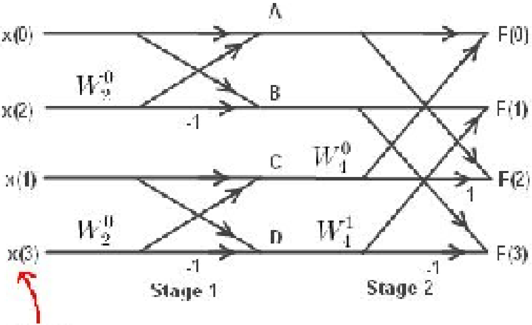
Muito semelhante à DFT.

- método directo requer $\mathcal{O}(N^2)$ operações;
- FFT usa estratégia de subdivisão do problema em muitas DFTs de 2 pontos (fáceis de calcular):
  $X[0] = x[0] + x[1] \qquad X[1] = x[0] - x[1]$
- temos $\log_2 N$ estágios, $\mathcal{O}(N)$ operações por estágio
  $\Rightarrow \mathcal{O}(N \log_2 N)$ operações no total;
- idealmente N deve ser uma potência de 2 (ou perto).

$$X_n = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Podem ver explicação detalhada, p.ex., butterfly

**Step 3: Label the input and output** values. **Label the bottom half of the diagram with W base 4 values, and powers of 0, 1 in order.** Note **Stage** 1 has **W** base 2, and **stage 2 has W** base 4. **This continues** in binary **fashion** 2, 4, 8, **16 as** you add more **stages** to the **butterfly.**




**Note the** reverse bit **ordering** of **Input** values.

This is the completed 4 input butterfly.

# Convolução

É uma espécie de "soma pesada de ecos ou memórias".

- discreta:
$$(f * g)(m) = \sum_n f(n)g(m-n)$$
- contínua:
$$((f * g)(t) = \int f(t-\tau)g(\tau)\ d\tau$$

.

# (auto)Correlação

É uma espécie de medida da semelhança entre duas funções.

- discreta:
$$(f * g)(m) = \sum_n f(n)g(m+n)$$
- contínua:
$$((f * g)(t) = \int f(\tau)g(\tau + t)\ d\tau$$

Se $f$ e $g$ forem a mesma função temos a utocorrelação, que tem um pico em zero, e cuja área representa a energia do sinal.

# Sistemas "Linear shift-invariant" (LSI)

A convolução descreve o efeito de um sistema LSI num sinal.
Seja a resposta a um impulso por um sistema LSI dada pela função $h(n)/h(t)$.
Se o sistema receber um sinal de entrada $x[n]$ (ou $x(t)$), o sinal de saída será:

$$y[n] = x[n] * h[n] \qquad \text{ou} \qquad y(t) = x(t) * h(t)$$