Métodos Computacionais em Engenharia (FIS3022)
Problemas 2
DFA–FCUP 2021-22
4 de Março de 2022

1. **Normalizações da `fft`**

   É importante perceber as *nuances* de cada implementação da FFT. Em particular, como referido na aula, a disposição das frequências no array final, mas também a periodicidade. Esta assume funções de período 2π, e é conveniente saber como relacionar as frequências quando o período é diferente. Uma maneira de o fazer é estudar uma função (de preferência periódica e ímpar!) como $f(t) = \text{sen}(t)e^{-3t}$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$, que tem uma transformada de Fourier discreta $F(\omega)$. A sua derivada pode ser calculada tomando a transformada inversa de $i\Omega F(\omega)$, onde Ω é proporcional a ω e a um factor de escala. Para determinar Ω, use as funções **`fft`** e **`ifft`** do `numpy` para calcular a derivada de $f(t)$ no intervalo $-1 \leq t \leq 1$ e compare com a derivada calculada analiticamente.

2. Escreva um *script* python que produza um array 1D de valores amostrados em instantes discretos da função $A\,\text{sen}(2\pi\nu t) + B$, onde A, B, ν, bem como a frequência de amostragem, ν_s, e N (número total de amostras), são parâmetros de entrada. O objectivo é criar dados para explorar nos problemas seguintes. Tenha o cuidado de garantir que os valores dos instantes de tempo discreto têm um espaçamento de exactamente $\Delta t = 1/\nu_s$. Certifique-se que a função funciona para $A = 1, B = 1, \nu = 1, \nu_s = 20$ e $N = 100$. Faça um gráfico dessa função.

3. Use o *script* do problema anterior para explorar o fenómeno de *aliasing*. Gere a curva para $N = 100$ com $\nu = 9.9$ e $\nu_s = 10$. Qual a frequência aparente do gráfico, e como se compara com a frequência real ν? O que se passou? Qual a frequência de amostragem mínima ν_s necessária para evitar *aliasing*?

4. Escreva um *script* que faça o gráfico da amplitude versus frequência para uma série temporal de dados (como é o caso do produzido no problema 1). Para além dos dados esta função vai precisar o intervalo $\Delta\nu = \nu_s/N$ de modo a fazer o gráfico adequadamente. Verifique que funciona aplicando-a ao output do problema 1. Use a função fft do `numpy` (ou do `scipy`).

5. Obtenha a transformada de Fourier da mesma função, agora com $\nu = 2$. Faça o plot da amplitude versus frequência e explique o que vê.

6. E de novo para $\nu = 2.05$. Qual a diferença agora? Como interpreta este resultado?

7. Refaça o último problema mas agora com $N = 1000$. Explique o que aconteceu. Qual a diferença na gama de frequências amostrada para este valor maior de N? Qual a diferença na resolução no espaço das frequências?