

Noter til EM1

cauchy-schwartz

30. oktober 2023

1 Elektrostatik

Definition 1 (Elektrisk felt). Det elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i et punkt \mathbf{r} er den kraft pr. ladning, som en punktladning q anbragt i \mathbf{r} vil opleve.

Eksperimentalt faktum 1 (Coulombs lov). Betragt to punktladninger q_1 og q_2 , og antag, at q_1 er stationær. Da vil q_1 påvirke q_2 med en elektrisk kraft

$$\mathbf{F}_E = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

hvor $\hat{\mathbf{r}}$ er vektoren fra q_1 til q_2 , og $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ er Coulombs konstant.

Man kan ækvivalent sige, at q_1 producerer et elektrisk felt

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

i ethvert punkt \mathbf{r} i rummet.

Eksperimentalt faktum 2 (Superpositionsprincippet). Den elektriske kraft mellem to ladninger er upåvirket af alle andre ladninger i universet.

Sætning 1 (Gauss' lov på integralform). Lad S være en flade, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger på selve fladen. Så er

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

hvor \mathbf{a} er den udadpegende normalvektor i hvert punkt på S , og Q_{enc} er den totale ladning omsluttet af S .

Sætning 2 (Gauss' lov på differentialform). I et punkt, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger, er

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

hvor ρ er ladningstætheden i punktet.

Sætning 3. *Det elektriske felt frembragt af en statisk ladningsfordeling er rotationsfrit:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{for statiske ladningsfordelinger.}$$

Definition 2 (Elektrostatisk potentiale). Potentialet for et punkt i en statisk ladningsfordeling, relativt til et referencepunkt \mathcal{O} , er

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Det elektriske felt er altså *minus* gradienten af potentialet:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Sætning 4. *Det arbejde W , der kræves for at flytte en partikel over en potentialeforskel V , er givet ved*

$$W = qV.$$

Denne energi kan også anses som den elektrostatiske potentielle energi, som ladningen har 'vundet' ved at bevæge sig over potentialeforskellen.

Definition 3 (Perfekt leder). En (perfekt) leder er et materiale med en ubegrænset mængde ladninger, der kan bevæge sig frit rundt i materialet.

Sætning 5 (Egenskaber ved ledere). *En leder har følgende egenskaber:*

1. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ i det ledende materiale.
2. Ladningstætheden $\rho = 0$ inde i det ledende materiale.
3. Enhver fri ladning i lederen befinder sig på overfladen.
4. Ethvert punkt i et ledende materiale har samme elektriske potentiale.
5. \mathbf{E} -feltet udenfor en leder er vinkelret på lederens overflade.

Sætning 6. *Et punkt, der befinder sig i et hulrum inde for en leder, er elektrisk isoleret fra omgivelserne udenfor lederen.*

2 Magnetostatik

Eksperimentalt faktum 3 (Magnetisk kraft). En ladning q , der bevæger sig med hastighed v gennem et konstant magnetfelt \mathbf{B} , vil opleve en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Sætning 7. *Magnetiske felter kan ikke udføre arbejde (da $\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$)*

Eksperimentalt faktum 4 (Biot-Savarts lov). Magnetfeltet i et punkt \mathbf{r} i rummet produceret af en jævn linjestrøm $\mathbf{I}(\mathbf{r}')$ er givet ved

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl.$$

hvor dl løber over hele den kurve, strømmen løber langs.

Eksperimentalt faktum 5. Der er hidtil ikke fundet magnetiske monopoler. Matematisk set er altså, så vidt vi har set,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Sætning 8 (Amperes lov på integralform). *Lad γ være en lukket kurve uden linje- eller overfladestrøm på selve kurven. Så er*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc},$$

hvor I_{enc} er den totale ladning omsluttet af en flade, der har γ som rand.

Sætning 9 (Amperes lov på differentialform). *I et punkt, som ikke gennemløbes af linje- eller overfladestrømme, er*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

hvor J er volumenstrømmen i punktet.

3 Elektrodynamik

Definition 4 (Elektromotans). *Elektromotansen* (ofte, misvisende, kaldet for den *elektromotoriske kraft*) er integralet af de kræfter, der skubber ladninger rundt i en strømløkke:

$$\mathcal{E} := \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}.$$

Sætning 10. *I næsten alle situationer er*

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

4 Konstanter

Vakuumperrmittivitet:

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,813 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Coulomb-konstant:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987\,551\,79 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Vakuumpermeabilitet:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 1.256\,637\,062 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Lysets fart:

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der gælder:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Elementarladning:

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Elektronens masse:

$$m_e = 9.109\,383\,701 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Protonens masse:

$$m_p = 1.672\,621\,923\,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

5 Enheder

Elektrisk ladning q :

$$[q] = \text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$$

Elektrisk strøm I :

$$[I] = \text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Overfladestrøm K :

$$[K] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Volumenstrøm J :

$$[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Elektrisk potentiale V :

$$[V] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}}$$

Elektrisk felt E :

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$$

Elektrisk forskydning D og polarisering P :

$$[D] = [P] = [\epsilon_0 E] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

Magnetfelt B :

$$[B] = \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

H -felt og magnetisering M :

$$[H] = [M] = \left[\frac{B}{\mu_0} \right] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Magnetisk flux Φ_B :

$$[\Phi_B] = \text{Wb} = \text{V} \cdot \text{s}$$

Modstand (resistans) R :

$$[R] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C}^2}$$

Resistivitet ρ :

$$[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$$