Noter til EM1 (Griffiths)

cauchy-schwartz

13. november 2023

1 Vektoranalyse

2 Elektrostatik

Definition 1 (Elektrisk felt)**.** Det elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i et punkt $\mathbf{r}$ er den kraft pr. ladning, som en punktladning q anbragt i $\mathbf{r}$ vil opleve.

Eksperimentalt faktum 1 (Coulombs lov)**.** Betragt to punktladninger q_1 og q_2, og antag, at q_1 er stationær. Da vil q_1 påvirke q_2 med en elektrisk kraft

$$\mathbf{F}_E = k_e \frac{q_1 q_2}{\mathfrak{r}^2}\hat{\mathfrak{r}}$$

hvor $\vec{\mathfrak{r}}$ er vektoren fra q_1 til q_2, og $k_e = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ er Coulombs konstant.

Man kan ækvivalent sige, at q_1 producerer et elektrisk felt

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q_1}{\mathfrak{r}^2}\hat{\mathfrak{r}}$$

i ethvert punkt $\mathbf{r}$ i rummet.

Eksperimentalt faktum 2 (Superpositionsprincippet)**.** Den elektriske kraft mellem to ladninger er upåvirket af alle andre ladninger i universet.

Sætning 1 (Gauss' lov på integralform)**.** *Lad $\mathcal{S}$ være en flade, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger på selve fladen. Så er*

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

hvor $\mathbf{a}$ er den udadpegende normalvektor i hvert punkt på S, og Q_{enc} er den totale ladning omsluttet af $\mathcal{S}$.

Sætning 2 (Gauss' lov på differentialform)**.** *I et punkt, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger, er*

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0.}$$

hvor ρ er ladningstætheden i punktet.

Sætning 3. *Det elektriske felt frembragt af en statisk ladningsfordeling er rotationsfrit:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \textit{for statiske ladningsfordelinger.}$$

Definition 2 (Elektrostatisk potentiale)**.** Potentialet for et punkt i en statisk ladningsfordeling, relativt til et referencepunkt $\mathcal{O}$, er

$$V(\mathbf{r}) = -\int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Det elektriske felt er altså *minus* gradienten af potentialet:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Sætning 4 (Poissons ligning)**.** *Det elektrostatiske potentiale opfylder*

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

For $\rho = 0$ fås $\nabla^2 V = 0$ (Laplaces ligning).

Sætning 5. *Det arbejde W, der kræves for at flytte en partikel over en potentialeforskel V, er givet ved*

$$W = qV.$$

Denne energi kan også anses som den elektrostatiske potentielle energi, som ladningen har 'vundet' ved at bevæge sig over potentialeforskellen.

Definition 3 (Perfekt leder)**.** En (perfekt) leder er et materiale med en ubegrænset mængde ladninger, der kan bevæge sig frit rundt i materialet.

Sætning 6 (Egenskaber ved ledere)**.** *En leder har følgende egenskaber:*

1. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ *i det ledende materiale.*
2. *Ladningstætheden $\rho = 0$ inde i det ledende materiale.*
3. *Enhver fri ladning i lederen befinder sig på overfladen.*
4. *Ethvert punkt i et ledende materiale har samme eletriske potentiale.*
5. $\mathbf{E}$*-feltet udenfor en leder er vinkelret på lederens overflade.*

Sætning 7. *Et punkt, der befinder sig i et hulrum inde for en leder, er elektrisk isoleret fra omgivelserne udenfor lederen.*

Sætning 8. *En kapacitor bestående af to paralelle plader med areal A, adskilt med en afstand d, har kapacitansen*

$$C = \frac{\epsilon A}{d},$$

hvor $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ er permitivittiviten mellem pladerne.

3 Potentialer

Sætning 9 (Første entydighedssætning)**.** *En løsning til Laplaces ligning,* $\nabla^2 V = 0$*, i et volumen er entydigt bestemt af værdierne af* V *på randen af dette volumen.*

Dette retfærdiggør billedmetoden, hvor et elektrostatisk problem (finde et potentiale) kan løses ved at løse et helt andet fysisk problem!

Sætning 10 (Ideel elektrisk dipol)**.** *En ideel elektrisk dipol i origo med dipolmoment* $\mathbf{p}$*, pegende i* z*-retningen, skaber et potentiale*

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

og et elektrisk felt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{dip}(r,\theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3(\mathbf{p}\times\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}).\end{aligned}$$

4 Elektriske felter i materie

Sætning 11 (Bundne ladninger)**.** *En polarisation* $\mathbf{P}$ *skaber en bunden overfladeladning*

$$\sigma_b = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

og en bunden volumenladning

$$\rho_b = -\nabla\cdot\mathbf{P}.$$

Definition 4 (Elektrisk forskydning)**.** Den elektriske forskydning $\mathbf{D}$ defineres ved

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Sætning 12 (Gauss' lov for $\mathbf{D}$)**.** *Der gælder:*

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_f$$

eller på integralform:

$$\oint \mathbf{D}\cdot d\mathbf{a} = Q_{f,enc}$$

5 Magnetostatik

Eksperimentalt faktum 3 (Magnetisk kraft)**.** En ladning q, der bevæger sig med hastighed v gennem et konstant magnetfelt $\mathbf{B}$, vil opleve en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = q(\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

Sætning 13. *Magnetiske felter kan ikke udføre arbejde (da* $\mathbf{F}\perp\mathbf{B}$*).*

Sætning 14 (Magnetisk kraft på ledning)**.** *Den magnetiske kraft på et stykke strømførende ledning er*

$$\mathbf{F}_{mag} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\ dl = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Definition 5 (Overfladestrøm)**.** Når en strøm bevæger sig over en overflade, beskrives det ved en overfladestrøm

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{d_{l_\perp}}$$

hvor $d_{l_\perp}$ er den infinitesimale bredde af et bånd tangentielt på strømmen.

Definition 6 (Volumenstrøm)**.** Når en strøm bevæger sig gennem et volumen, beskrives det ved en volumenstrøm

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{d_{a_\perp}}$$

hvor $d_{a_\perp}$ er det infinitesimale tværsnitsareal af et rør tangentielt på strømmen.

Sætning 15 (Kontinuitetssætningen)**.** *Ladning er lokalt bevaret. Matematisk set hænger volumenstrøm og ladningstæthed derfor sammen ved*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Sætning 16 (Magnetisk kraft på linje)**.** *Den magnetiske kraft på et stykke strømførende ledning er*

$$\mathbf{F}_{mag} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B})\ dl = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Definition 7 (Overfladestrøm)**.** Når en strøm bevæger sig over en overflade, beskrives det ved en overfladestrøm

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{d_{l_\perp}}$$

hvor $d_{l_\perp}$ er den infitisemale bredde af et bånd tangentielt til strømmens retning.

Definition 8 (Volumenstrøm)**.** Når en strøm bevæger sig gennem en volumen, beskrives det ved en volumenstrøm

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{d_{a_\perp}}$$

hvor $d_{a_\perp}$ er det infitisemale tværsnitsareal af et rør tangentielt på strømmen.

Sætning 17 (Kontinuitetssætningen)**.** *Ladning er lokalt bevaret. Matematisk set hænger volumenstrøm og ladningstæthed derfor sammen ved*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Eksperimentalt faktum 4 (Biot-Savarts lov)**.** Magnetfeltet i et punkt $\mathbf{r}$ i rummet produceret af en jævn linjestrøm $\mathbf{I}(\mathbf{r'})$ er givet ved

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}^2}\, dl.$$

hvor dl løber over hele den kurve, strømmen løber langs.

Eksperimentalt faktum 5. Der er hidtil ikke fundet magnetiske monopoler. Matematisk set er altså, så vidt vi har set,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Sætning 18 (Ampères lov på integralform)**.** *Lad γ være en lukket kurve uden linje- eller overfladestrøm på selve kurven og kun jævn volumenstrøm. Så er*

$$\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc},$$

hvor I_{enc} er den totale ladning omsluttet af en flade, der har γ som rand.

Sætning 19 (Ampères lov på differentialform)**.** *I et punkt, som ikke gennemløbes af linje- eller overfladestrømme, og hvor volumenstrømmen er jævn, er*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

hvor $\mathbf{J}$ er volumenstrømmen i punktet.

Definition 9 (Magnetisk vektorpotentiale)**.** Da $\mathbf{B}$-feltet er divergensfrit, kan det udtrykkes som rotationen af en vektor $\mathbf{A}$:

$$B = \nabla \times \mathbf{A}$$

Man vælger altid at lægge en konstant til $\mathbf{A}$, således at

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Sætning 20 (Ampéres lov for vektorpotentialet)**.** *Ampères lov kan udtrykkes som en Poisson-sammenhæng mellem vektorpotentialet og volumenstrømmen:*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Der er tre ligninger her, en for hver ***kartesiske*** *komponent af $\mathbf{A}$ og $\mathbf{J}$!*

Hvis $\mathbf{J} \to 0$ i det uendelige, er løsningen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathfrak{r}} d\tau'.$$

Definition 10 (Magnetisk dipolmoment)**.** Det magnetiske dipolmoment af en løkke, der bærer en strøm I, er defineret som

$$\mathbf{m} = I \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a}$$

for enhver flade $\mathcal{S}$, der har strømløkken som rand. Hvis $\mathcal{S}$ er flad (dvs. ligger i en plan), er $\left|\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a}\right| = A(\mathcal{S})$, mens retningen kommer fra højrehåndsreglen.

Sætning 21 (Ideel magnetisk dipol)**.** *En ideel magnetisk dipol i origo med dipolmoment* $\mathbf{m}$*, pegende i* z*-retningen, skaber et vektorpotentiale*

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

og et magnetisk felt

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(3(\mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}).\end{aligned}$$

Dette er præcis de samme ligninger som som en elektrisk dipol – eneste ændringer er $\frac{1}{\epsilon_0} \to \mu_0$*,* $p \to \mathbf{m}$ *og* $p\cdot\hat{\mathbf{r}} \to \mathbf{m}\times\hat{\mathbf{r}}$*!*

6 Magnetiske felter i materie

Definition 11 ($\mathbf{H}$-feltet)**.** $\mathbf{H}$-feltet defineres som

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} + \mathbf{M}$$

Sætning 22 (Amperes lov for H)**.** *Der gælder:*

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J}_{f,enc}$$

eller på integralform:

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_{f,enc}$$

Sætning 23 (Bundne strømme)**.** *En magnetisering* $\mathbf{M}$ *skaber en bunden overfladestrøm*

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M}\times\hat{\mathbf{n}}$$

og en bunden volumenladning

$$\mathbf{J}_b = \nabla\times\mathbf{M}.$$

7 Elektrodynamik

Sætning 24 (Modstand i en ledning)**.** *Den totale modstand* R *i en ledning med længde* ℓ*, tværsnitsareal* A *og resistivitet* ρ*, er givet ved*

$$R = \frac{L}{A}\rho.$$

Definition 12 (Elektromotans)**.** *Elektromotansen* $\mathcal{E}$ (ofte, misvisende, kaldet for den *elektromotoriske kraft*) er integralet af de kræfter, der skubber ladninger rundt i en strømløkke:

$$\mathcal{E} := \oint \mathbf{f}\cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f_s}\cdot d\mathbf{l}.$$

da $\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$. For en jævn strøm giver $\mathbf{E}$ en elektrostatisk (dvs. rotationsfri) kraft, så $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Bemærkning 1. $\mathcal{E}$ kan oftest også betragtes som arbejde pr. ladning i kredsløbet, og i en ideel elektromotorisk kilde er $\mathcal{E} = V$.

Sætning 25 (Fluxregel for elektromotans)**.** *I næsten alle situationer, hvor der induceres en strøm, er*

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Sætning 26 (Lenz' lov)**.** *Den inducerede strøm løber i den retning, der mindsker ændringen i magnetisk flux.*

Definition 13 (Gensidig induktans)**.** Den gensidige induktans M mellem to løkker er en proportionalitetskonstant for den magnetiske flux, der induceres i den ene, hvis der løber en strøm gennem den anden:

$$\Phi_{B,1} = M \cdot I_2.$$

(Neumann-formlen, udledt vha. Stokes og vektorpotentialet, viser, at den gensidige induktans er symmetrisk: $\frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{\Phi_2}{I_1}$)

Sætning 27. *I samme situation er*

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B,2}}{dt} = -M\frac{dI}{dt}.$$

Sætning 28 (R/L-kredsløb)**.** *I et kredsløb med induktans L og modstand R, forbundet til et batteri, der leverer emf $\mathcal{E}_0$, gælder differentialligningen*

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = IR,$$

med løsningen

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + k\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Definition 14 (Selvinduktans)**.** *(Selv)induktansen L* af en løkke fortæller om den magnetiske flux, den inducerer i sig selv ved en strømændring:

$$\Phi_B = LI$$

Sætning 29 (Magnetisk energi)**.** *Et kredsløb med en induktans L, hvor der løber en strøm I, bærer en magnetisk energi*

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Sætning 30 (Ampères lov med forskydningsled)**.** *Hvis strømmen ændrer sig, skal Ampers lov have et ekstra led:,*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Størrelsen $\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ kaldes traditionelt (og misvisende) forskydningsstrømmen.

8 Enheder

Elektrisk ladning q:

$$[q] = \mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$$

Elektrisk strøm I:

$$[I] = \mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$$

Overfladestrøm K:

$$[K] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Volumenstrøm J:

$$[J] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

Elektrisk potentiale V:

$$[V] = \mathrm{V} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}$$

Elektrisk felt E:

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3 \cdot \mathrm{A}}$$

Elektrisk forskydning D og polarisering P:

$$[D] = [P] = [\epsilon_0 E] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

Magnetfelt B:

$$[B] = \mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2}$$

H-felt og magnetisering M:

$$[H] = [M] = \left[\frac{B}{\mu_0}\right] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

Magnetisk flux Φ_B:

$$[\Phi_B] = \mathrm{Wb} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$$

Magnetisk dipolmoment m:

$$[m] = [Ia] = \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$$

Modstand (resistans) R:

$$[R] = \Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{C}^2}$$

Resistivitet ρ:

$$[\rho] = \Omega \cdot \mathrm{m} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{A}}$$

Induktans L:

$$[L] = \mathrm{H} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A}^2}$$

9 Konstanter

Vakuumpermittivitet:

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,813 \times 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}$$

Coulomb-konstant:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987\,551\,79 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

Vakuumpermeabilitet:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} = 1.256\,637\,062 \times 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$$

Lysets fart:

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^{9}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der gælder:

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Elementarladning:

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Elektronens masse:

$$m_e = 9.109\,383\,701 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

Protonens masse:

$$m_p = 1.672\,621\,923\,7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$