

Noter til EM1 (Griffiths)

cauchy-schwartz

5. november 2023

1 Vektoranalyse

2 Elektrostatik

Definition 1 (Elektrisk felt). Det elektriske felt $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ i et punkt \mathbf{r} er den kraft pr. ladning, som en punktladning q anbragt i \mathbf{r} vil opleve.

Eksperimentalt faktum 1 (Coulombs lov). Betragt to punktladninger q_1 og q_2 , og antag, at q_1 er stationær. Da vil q_1 påvirke q_2 med en elektrisk kraft

$$\mathbf{F}_E = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

hvor $\hat{\mathbf{r}}$ er vektoren fra q_1 til q_2 , og $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ er Coulombs konstant.

Man kan ækvivalent sige, at q_1 producerer et elektrisk felt

$$\mathbf{E} = k_e \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

i ethvert punkt \mathbf{r} i rummet.

Eksperimentalt faktum 2 (Superpositionsprincippet). Den elektriske kraft mellem to ladninger er upåvirket af alle andre ladninger i universet.

Sætning 1 (Gauss' lov på integralform). Lad S være en flade, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger på selve fladen. Så er

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

hvor \mathbf{a} er den udadpegende normalvektor i hvert punkt på S , og Q_{enc} er den totale ladning omsluttet af S .

Sætning 2 (Gauss' lov på differentialform). I et punkt, som ikke indeholder punkt- eller overflade-ladninger, er

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

hvor ρ er ladningstætheden i punktet.

Sætning 3. *Det elektriske felt frembragt af en statisk ladningsfordeling er rotationsfrit:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{for statiske ladningsfordelinger.}$$

Definition 2 (Elektrostatisk potentiale). Potentialet for et punkt i en statisk ladningsfordeling, relativt til et referencepunkt \mathcal{O} , er

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Det elektriske felt er altså *minus* gradienten af potentialet:

$$\mathbf{E} = -\nabla V$$

Sætning 4 (Poissons ligning). *Det elektrostatiske potentiale opfylder*

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

For $\rho = 0$ fås $\nabla^2 V = 0$ (Laplaces ligning).

Sætning 5. *Det arbejde W , der kræves for at flytte en partikel over en potentialeforskel V , er givet ved*

$$W = qV.$$

Denne energi kan også anses som den elektrostatiske potentielle energi, som ladningen har 'vundet' ved at bevæge sig over potentialeforskellen.

Definition 3 (Perfekt leder). En (perfekt) leder er et materiale med en ubegrænset mængde ladninger, der kan bevæge sig frit rundt i materialet.

Sætning 6 (Egenskaber ved ledere). *En leder har følgende egenskaber:*

1. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ i det ledende materiale.
2. Ladningstætheden $\rho = 0$ inde i det ledende materiale.
3. Enhver fri ladning i lederen befinder sig på overfladen.
4. Ethvert punkt i et ledende materiale har samme elektriske potentiale.
5. \mathbf{E} -feltet udenfor en leder er vinkelret på lederens overflade.

Sætning 7. *Et punkt, der befinder sig i et hulrum inde for en leder, er elektrisk isoleret fra omgivelserne udenfor lederen.*

3 Potentialer

Sætning 8 (Første entydighedssætning). *En løsning til Laplaces ligning, $\nabla^2 V = 0$, i et volumen er entydigt bestemt af værdierne af V på randen af dette volumen.*

Dette retfærdiggør billedmetoden, hvor et elektrostatisk problem (finde et potentiale) kan løses ved at løse et helt andet fysisk problem!

Sætning 9 (Ideel elektrisk dipol). *En ideel elektrisk dipol i origo med dipolmoment \mathbf{p} , pegende i z -retningen, skaber et potentiale*

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

og et elektrisk felt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{dip}(r, \theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{p}).\end{aligned}$$

4 Elektriske felter i materie

Sætning 10 (Bundne ladninger). *En polarisation \mathbf{P} skaber en bunden overfladeladning*

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

og en bunden volumenladning

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}.$$

Definition 4 (Elektrisk forskydning). Den elektriske forskydning \mathbf{D} defineres ved

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

Sætning 11 (Gauss' lov for \mathbf{D}). *Der gælder:*

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

eller på integralform:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f,enc}$$

5 Magnetostatik

Eksperimentalt faktum 3 (Magnetisk kraft). En ladning q , der bevæger sig med hastighed \mathbf{v} gennem et konstant magnetfelt \mathbf{B} , vil opleve en magnetisk kraft

$$\mathbf{F}_{mag} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Sætning 12. *Magnetiske felter kan ikke udføre arbejde (da $\mathbf{F} \perp \mathbf{B}$).*

Sætning 13 (Magnetisk kraft på ledning). *Den magnetiske kraft på et stykke strømførende ledning er*

$$\mathbf{F}_{mag} = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$$

Definition 5 (Overfladestrøm). Når en strøm bevæger sig over en overflade, beskrives det ved en overfladestrøm

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}}$$

hvor dl_{\perp} er den infinitesimale bredde af et bånd tangentielt på strømmen.

Definition 6 (Volumenstrøm). Når en strøm bevæger sig gennem et volumen, beskrives det ved en volumenstrøm

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}$$

hvor da_{\perp} er det infinitesimale tværsnitsareal af et rør tangentielt på strømmen.

Sætning 14 (Kontinuitetssætningen). *Ladning er lokalt bevaret. Matematisk set hænger volumenstrøm og ladningstæthed derfor sammen ved*

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Eksperimentalt faktum 4 (Biot-Savarts lov). Magnetfeltet i et punkt \mathbf{r} i rummet produceret af en jævn linjestrøm $\mathbf{I}(\mathbf{r}')$ er givet ved

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl.$$

hvor dl løber over hele den kurve, strømmen løber langs.

Eksperimentalt faktum 5. Der er hidtil ikke fundet magnetiske monopoler. Matematisk set er altså, så vidt vi har set,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Sætning 15 (Ampères lov på integralform). *Lad γ være en lukket kurve uden linje- eller overfladestrøm på selve kurven og kun jævn volumenstrøm. Så er*

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{enc},$$

hvor I_{enc} er den totale ladning omsluttet af en flade, der har γ som rand.

Sætning 16 (Ampères lov på differentialform). *I et punkt, som ikke gennemløbes af linje- eller overfladestrømme, og hvor volumenstrømmen er jævn, er*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

hvor \mathbf{J} er volumenstrømmen i punktet.

Definition 7 (Magnetisk vektorpotential). Da \mathbf{B} -feltet er divergensfrit, kan det udtrykkes som rotationen af en vektor \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Man vælger altid at lægge en konstant til \mathbf{A} , således at

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Sætning 17 (Ampères lov for vektorpotential). *Ampères lov kan udtrykkes som en Poisson-sammenhæng mellem vektorpotential og volumenstrømmen:*

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Der er tre ligninger her, en for hver **kartesiske** komponent af \mathbf{A} og \mathbf{J} !
Hvis $\mathbf{J} \rightarrow 0$ i det uendelige, er løsningen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r} d\tau'.$$

Definition 8 (Magnetisk dipolmoment). Det magnetiske dipolmoment af en løkke, der bærer en strøm I , er defineret som

$$\mathbf{m} = I \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a}$$

for enhver flade \mathcal{S} , der har strømløkken som rand. Hvis \mathcal{S} er flad (dvs. ligger i en plan), er $|\int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a}| = A(\mathcal{S})$, mens retningen kommer fra højrehåndsreglen.

Sætning 18 (Ideel magnetisk dipol). *En ideel magnetisk dipol i origo med dipolmoment \mathbf{m} , pegende i z -retningen, skaber et vektorpotential*

$$\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

og et magnetisk felt

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{dip}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}) - \mathbf{m}). \end{aligned}$$

Dette er præcis de samme ligninger som en elektrisk dipol – eneste ændringer er $\frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow \mu_0$, $p \rightarrow \mathbf{m}$ og $p \cdot \hat{\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}$!

6 Magnetiske felter i materie

Definition 9 (\mathbf{H} -feltet). \mathbf{H} -feltet defineres som

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}$$

Sætning 19 (Amperes lov for H). *Der gælder:*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_{f,enc}$$

eller på integralform:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f,enc}$$

Sætning 20 (Bundne strømme). *En magnetisering \mathbf{M} skaber en bunden overfladestrøm*

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

og en bunden volumenladning

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}.$$

7 Elektrodynamik

Sætning 21 (Modstand i en ledning). *Den totale modstand R i en ledning med længde ℓ , tværsnitsareal A og resistivitet ρ , er givet ved*

$$R = \frac{L}{A} \rho.$$

Definition 10 (Elektromotans). *Elektromotansen \mathcal{E} (ofte, misvisende, kaldet for den elektromotoriske kraft) er integralet af de kræfter, der skubber ladninger rundt i en strømløkke:*

$$\mathcal{E} := \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l}.$$

da $\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E}$. For en jævn strøm giver \mathbf{E} en elektrostatisk (dvs. rotationsfri) kraft, så $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

Bemærkning 1. \mathcal{E} kan oftest også betragtes som arbejde pr. ladning i kredsløbet, og i en ideel elektromotorisk kilde er $\mathcal{E} = V$.

Sætning 22 (Fluxregel for elektromotans). *I næsten alle situationer, hvor der induceres en strøm, er*

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Sætning 23 (Lenz' lov). *Den inducerede strøm løber i den retning, der mindsker ændringen i magnetisk flux.*

Definition 11 (Gensidig induktans). Den gensidige induktans M mellem to løkker er en proportionalitetskonstant for den magnetiske flux, der induceres i den ene, hvis der løber en strøm gennem den anden:

$$\Phi_{B,1} = M \cdot I_2.$$

(Neumann-formlen, udledt vha. Stokes og vektorpotential, viser, at den gensidige induktans er symmetrisk: $\frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{\Phi_2}{I_1}$)

Sætning 24. *I samme situation er*

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B,2}}{dt} = -M\frac{dI}{dt}.$$

Sætning 25 (R/L-kredsløb). *I et kredsløb med induktans L og modstand R , forbundet til et batteri, der leverer emf \mathcal{E}_0 , gælder differentialligningen*

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} = IR,$$

med løsningen

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + k \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right).$$

Definition 12 (Selvinduktans). *(Selv)induktansen L af en løkke fortæller om den magnetiske flux, den inducerer i sig selv ved en strømændring:*

$$\Phi_B = LI$$

Sætning 26 (Magnetisk energi). *Et kredsløb med en induktans L , hvor der løber en strøm I , bærer en magnetisk energi*

$$W = \frac{1}{2}LI^2.$$

Sætning 27 (Ampères lov med forskydningsled). *Hvis strømmen ændrer sig, skal Ampers lov have et ekstra led;*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Størrelsen $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ kaldes traditionelt (og misvisende) forskydningsstrømmen.

8 Enheder

Elektrisk ladning q :

$$[q] = \text{C} = \text{A} \cdot \text{s}$$

Elektrisk strøm I :

$$[I] = \text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Overfladestrøm K :

$$[K] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Volumenstrøm J :

$$[J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

Elektrisk potentiale V :

$$[V] = \text{V} = \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{s}}$$

Elektrisk felt E :

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{m} \cdot \text{kg}}{\text{s}^3 \cdot \text{A}}$$

Elektrisk forskydning D og polarisering P :

$$[D] = [P] = [\epsilon_0 E] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

Magnetfelt B :

$$[B] = \text{T} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

H -felt og magnetisering M :

$$[H] = [M] = \left[\frac{B}{\mu_0} \right] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Magnetisk flux Φ_B :

$$[\Phi_B] = \text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2 = \text{V} \cdot \text{s}$$

Magnetisk dipolmoment m :

$$[m] = [Ia] = \text{A} \cdot \text{m}^2$$

Modstand (resistans) R :

$$[R] = \Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C}^2}$$

Resistivitet ρ :

$$[\rho] = \Omega \cdot \text{m} = \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{A}}$$

Induktans L :

$$[L] = \text{H} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{J}}{\text{A}^2}$$

9 Konstanter

Vakuumperrmittivitet:

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,813 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Coulomb-konstant:

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987\,551\,79 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Vakuumperrmeabilitet:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 1.256\,637\,062 \times 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

Lysets fart:

$$c = 2.997\,924\,58 \times 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der gælder:

$$\epsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Elementarladning:

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Elektronens masse:

$$m_e = 9.109\,383\,701 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

Protonens masse:

$$m_p = 1.672\,621\,923\,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$