Lista 2
Probabilidade e V.A discretas

SME 0520
Introdução à estatística

Exercício 1.
Considere a v.a. X cuja f.m.p é dada por

x	-3	1	3	5
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	c

Determine:

(a) O valor de c;

(b) $E(X)$ e $Var(X)$;

(c) A f.m.p da variável $Y = X^2$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c &= 1 \\
19 + 24c &= 24 \\
24c &= 5 \\
c &= \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum x \times f(x) \\
&= -3 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{5}{24} \\
&= -\frac{3}{8} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + \frac{25}{24} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= (-3)^2 \times \frac{1}{8} + (1)^2 \times \frac{1}{6} + (3)^2 \times \frac{1}{2} + (5)^2 \times \frac{5}{24} \\
&= \frac{9}{8} + \frac{1}{6} + \frac{9}{2} + \frac{125}{24} \\
&= \frac{264}{24} \\
&= 11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}ar[X] &= 11 - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \frac{50}{9} \end{aligned}$$

(c)

y	9	1	25
$f(y)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$

Exercício 2.

Determine o valor de c de modo que cada uma das seguintes funções possa servir como distribuição de probabilidade da v.a. discreta X:

(a) $f(x) = c(x^2 + 4)$, para $x = 0, 1, 2, 3$;

(b) $f(x) = \binom{2}{x}\binom{3}{3-x}$, para $x = 0, 1, 2$.

Solução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned} f(X=0) &= c(0^2+4) = 4c \\ f(X=1) &= c(1^2+4) = 5c \\ f(X=2) &= c(2^2+4) = 8c \\ f(X=3) &= c(3^2+4) = 13c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 4c + 5c + 8c + 13c &= 1 \\ c &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

(b) Temos que

$$
\begin{aligned}
f(X=0) &= \binom{2}{0}\binom{3}{3-0} = 1c \\
f(X=1) &= \binom{2}{1}\binom{3}{3-1} = 6c \\
f(X=2) &= \binom{2}{2}\binom{3}{3-2} = 3c
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
1c + 6c + 3c &= 1 \\
c &= \frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Exercício 3.
O espectro de lucro (ou perda) de uma empresa é dado a seguir, com as respectivas probabilidades

Lucro	Probabilidade
-15	0,05
0	0,15
15	0,15
25	0,30
40	0,15
50	0,10
100	0,05
150	0,03
200	0,02

(a) Qual é o lucro esperado?

(b) Calcule o desvio padrão do lucro, sabendo que o desvio padrão de uma v.a. X é dado por

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

Solução:

(a) Temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= -15 \times 0,05 + 0 \times 0,15 + 15 \times 0,15 + 25 \times 0,3 + 40 \times 0,15 \\ &\quad + 50 \times 0,1 + 100 \times 0,05 + 150 \times 0,03 + 200 \times 0,02 \\ &= -0,75 + 2,25 + 7,5 + 6 + 5 + 5 + 4,5 + 4 \\ &= 33,5\end{aligned}$$

(b) Temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 225 \times 0,05 + 0 \times 0,15 + 22 \times 0,15 + 625 \times 0,3 + 1600 \times 0,15 \\ &\quad + 2500 \times 0,1 + 10000 \times 0,05 + 22500 \times 0,03 + 40000 \times 0,02 \\ &= 2697,5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[X] &= 2697,5 - 1122,25 \\ &= 1575,25,\end{aligned}$$

e

$$\sqrt{\mathbb{V}ar[X]} = 39,6894.$$

Exercício 4.
Uma urna contém 15 bolas brancas e 25 bolas vermelhas. Sorteando ao caso uma bola, seja X o número de bolas brancas sorteadas. Determine $f(x)$, $E(X)$ e $Var(X)$. Considere os casos com e sem reposição e os compare no final.

Solução: Temos que a $f(x)$ é dada por

x	0	1
$f(x)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 0 \times \frac{5}{8} + 1 \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{8},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[X] &= \frac{3}{8} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\ &= \frac{15}{64}.\end{aligned}$$

Exercício 5.

Suponha que a probabilidade de óbito de um paciente, ao dar entrada no centro de terapia intensiva, seja de 25% (risco de morte). Seja X uma variável indicadora de óbito, se um paciente der entrada no CTI. Determine $f(x)$, $E(x)$ e $Var(X)$.

Solução: Temos que a $f(x)$ é dada por

x	0	1
$f(x)$	0,75	0,25

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 0 \times f(X=0) + 1 \times f(X=1) \\ &= 0,25,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= 0^2 \times f(X=0) + 1^2 \times f(X=1) \\ &= 0,25,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{V}ar[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{3}{16}\end{aligned}$$

Exercício 6.

Sendo X uma v.a. seguindo uma distribuição Uniforme Discreta, com valores no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, pergunta-se:

(a) $P(X \geq 7)$;

(b) $P(3 < X \leq 7)$;

(c) $P(x \leq 7|X \geq 6)$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= 1 - P(X \leq 6) \\ &= 1 - \frac{6}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(3 < X \leq 7) &= P(X \leq 7) - P(X \leq 3) \\ &= \frac{7}{10} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{4}{10} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X \leq 7|X \geq 6) &= \frac{P(X \leq 7 \cap X \geq 6)}{P(X \geq 6)} \\ &= \frac{P(X \leq 7) - P(X \leq 5)}{P(X \geq 6)} \\ &= \frac{\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Exercício 7.
Na manufatura de certo artigo, é sabido que um entre dez dos artigos é defeituoso. Qual a probabilidade de que uma amostra casual de tamanho 4 contenha:

(a) nenhum defeituoso?

(b) exatamente um defeituoso?

(c) não mais que dois defeituosos?

Solução:

(a) Temos que $p = 0,1$ e $n = 4$. Assim

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times 0,1^0 \times 0,9^4 \\ &= 0,6561 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times 0,1^1 \times 0,9^3 \\ &= 0,2916 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\ &= 0,6561 + 0,2916 + 0,0486 \\ &= 0,9963 \end{aligned}$$

Exercício 8.
Um fabricante de peças de automovéis garante que uma caixa de suas peças conterá, no máximo, duas defeituosas. Se a caixa contém 18 peças, e a experiência tem demonstrado que esse processo de fabricação produz 5% de peças defeituosas, qual a probabilidade que uma caixa satisfaça a garantia?

Solução: Temos que $p = 0,05$ e $n = 18$. Assim

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \\
&= \binom{18}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{18} + \binom{18}{1} \times 0,05^1 \times 0,95^{17} \\
&\quad + \binom{18}{2} \times 0,05^2 \times 0,95^{16} \\
&= 0,3972 + 0,3763 + 0,1683 \\
&= 0,9418.
\end{aligned}$$

Exercício 9.

Ao testar um certo tipo de pneu de caminhão em um terreno irregular, descobriu-se que 25% dos caminhões falhavam ao tentar completar o percurso do teste sem ter pneus estourados. Dos próximos 15 caminhões testados, determine a probabilidade de

(a) de três a seis terem pneus estourados;

(b) menos de 4 terem pneus estourados;

(c) mais de 5 terem pneus estourados.

Solução:

(a) Temos que $p = 0,25$ e $n = 15$. Assim

$$\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 6) &= P(X \leq 6) - P(X \leq 2) \\
&= 0,9433 - 0,2360 \\
&= 0,7073.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(X < 4) &= P(X \leq 3) \\
&= 0,4612
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\ &= 1 - 0,8516 \\ &= 0,1484 \end{aligned}$$

Exercício 10.
Assumimos que o número de clientes que chegam a cada hora em um certo posto de serviços automobilísticos segue uma distribuição de Poisson com média $\lambda = 7$.

(a) Calcule a probabilidade de que mais de dez clientes cheguem em um período de duas horas;

(b) Qual o número médio de chegadas durante o período de duas horas?

Solução:

(a) Considerando $\lambda = 2 \cdot 7 = 14$

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= 1 - P(X \leq 10) \\ &= 1 - 0.1756 \\ &= 0.8244 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[2X] &= 2\mathbb{E}[X] \\ &= 2 \cdot 7 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Exercício 11.
Se $X \sim Bin(M, p)$, sabendo-se que $E(X) = 12$ e $Var(X) = 3$, determinar:

(a) M e p;

(b) $P(X < 12)$;

(c) $E(Z)$ e $Var(Z)$, em que
$$Z = \frac{X - 12}{\sqrt{3}}.$$

Solução:

(a) Temos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 12 \quad (1) \\ \mathbb{V}ar[X] &= 3 \quad (2) \end{aligned}$$

Desenvolvendo esse sistema:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 12 \\ Mp &= 12 \\ \mathbb{V}ar[X] &= 3 \\ Mp(1-p) &= 3 \\ p &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

e finalmente em (2) obtemos

$$\begin{aligned} M\,\frac{3}{4} &= 12 \\ 3M &= 48 \\ M &= 16 \end{aligned}$$

(b) Se $M = 16$ e $p = 0.75$,

$$\begin{aligned} P(X < 12) &= 1 - P(X \geq 12) \\ &= 1 - [P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14) \\ &\quad + P(X = 15) + P(X = 16)] \\ &= 1 - [0,2251 - 0,2078 - 0,1336 - 0,0534 - 0,0100] \\ &= 1 - 0,6299 \\ &= 0,3701 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left[\frac{X-12}{\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathbb{E}\left[X-12\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\ 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar[Z] &= \mathbb{V}ar\left[\frac{X-12}{\sqrt{3}}\right] \\
&= \frac{1}{3}\ \mathbb{V}ar\left[X-12\right] \\
&= \frac{1}{3}\ 3 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Exercício 12.
Se $X \sim Bin(5, 1/2)$, faça os gráficos da f.m.p e da f.d.a de X. **Solução:** Usando os seguintes códigos

```
sucesso <- 0:6

plot(sucesso,dbinom(sucesso,size=5,prob=.5),type='h',main="Bin(5,0.5)",
     ylab = "f.m.p",
     xlab = "Sucessos",
     lwd  = 3)

plot(sucesso,pbinom(sucesso,size=5,prob=.5),type='h',main="Bin(5,0.5)",
     ylab = "f.d.a",
     xlab = "Sucessos",
     lwd  = 3)
```

Obtemos os seguintes gráficos

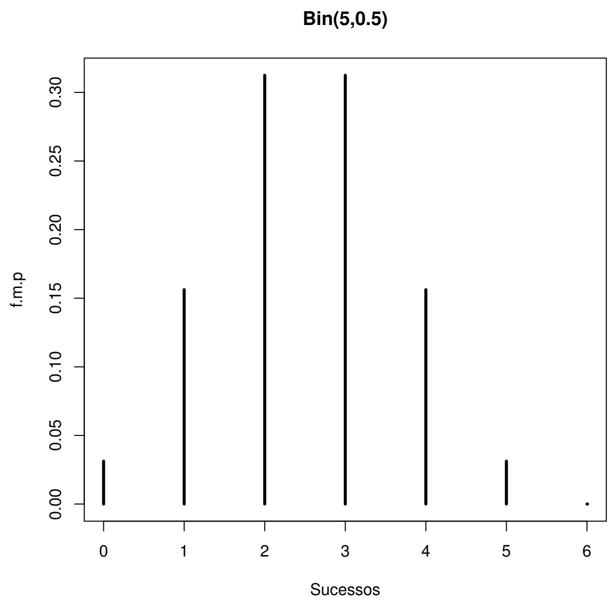

Figura 1: f.m.p de $Bin(5, 0.5)$

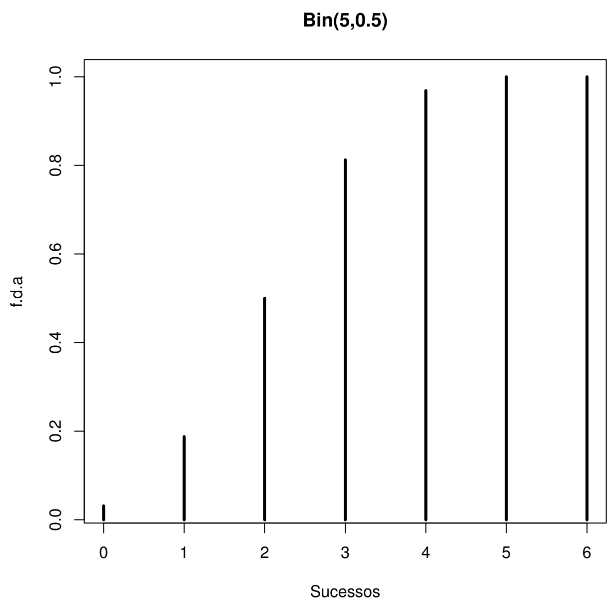

Figura 2: f.d.a de $Bin(5, 0.5)$