Lista 1
Probabilidade

Exercício 1.
Considere o lançamento de dois dados e os seguintes eventos:

$$
\begin{aligned}
A &= \text{soma dos números obtidos igual a 9,} \\
B &= \text{número no primeiro dado maior ou igual a 4.}
\end{aligned}
$$

(a) Enumere os elementos de A.

(b) Enumere os elementos de B.

(c) Obtenha $A \cap B$.

(d) Obtenha $A \cup B$.

(e) Obtenha A^c.

Solução:

(a)

$$A = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
B = \{&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

(c)

$$A \cap B = \{(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
A \cup B = \{&(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),\\
&(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

(e)

$$A^c = \Omega - \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$$

Exercício 2.

Obtenha as probabilidades dos eventos que aparecem no Exercício 1.

Solução: Como o número de resultados possíveis é 36, temos:

(a) $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

(b) $\mathbb{P}(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

(d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{19}{36}$.

(e) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Exercício 3.

Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que $\mathbb{P}(A) = 0,4$ e $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$. Se $\mathbb{P}(B) = p$, então

(a) qual o valor de p para que A e B sejam mutuamente exclusivos?

(b) qual o valor de p para que A e B sejam independentes?

Solução:

Dois eventos A e B são mutuamente exclusivos se $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Dois eventos A e B são independentes se $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \\
0,7 &= 0,4 + p \\
p &= 0,3.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\
\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\
0,4p &= 0,4 + p - 0,7 \\
-0,6p &= -0,3 \\
p &= 0,5.
\end{aligned}$$

Exercício 4.
A probabilidade de que uma indústria norte-americana será localizada em Xangai é de 0,7; a probabilidade de que será localizada em Pequim é de 0,4: e a probabilidade de que será localizada em Xangai ou em Pequim, ou em ambos os lugares, é de 0,8. Qual é a probabilidade de que a empresa seja localizada

(a) em ambas cidades?

(b) em nenhuma das cidades?

Solução:
Seja

$$\begin{aligned} X &= \text{a indústria norte-americana é localizada em Xangai} \quad \text{e} \\ P &= \text{a indústria norte-americana é localizada em Pequim} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \cup P) &= \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(P) - \mathbb{P}(X \cap P) \\ 0,8 &= 0,7 + 0,4 - \mathbb{P}(X \cap P) \\ \mathbb{P}(X \cap P) &= 0,3. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X \cup P)^c) &= 1 - \mathbb{P}(X \cup P) \\ &= 1 - 0,8 \\ &= 0,2. \end{aligned}$$

Exercício 5.
Uma montagem eletrônica é formada por dois subsistemas A e B. De experimentos anteriores, as seguintes probabilidades se admiten conhecidas $\mathbb{P}(A \text{ falhe}) = 0,2$, $\mathbb{P}(A \text{ e } B \text{ falhem}) = 0,15$, e $\mathbb{P}(B \text{ falhe sozinho}) = 0,15$.

(a) $\mathbb{P}(A \text{ falhe} | B \text{ tenha falhado})$,

(b) $\mathbb{P}(A \text{ falhe sozinho})$.

Solução:

(a) Primeiro

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \text{ falhe}) &= \mathbb{P}(B \text{ falhe sozinho}) + \mathbb{P}(A \text{ e } B \text{ falhem})\\ &= 0,15 + 0.15\\ &= 0,30.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \text{ falhe}|B \text{ tenha falhado}) &= \frac{\mathbb{P}(A \text{ falhe e } B \text{ tenha falhado})}{\mathbb{P}(B \text{ tenha falhado})}\\ &= \frac{0,15}{0,3}\\ &= 0,5.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \text{ falhe sozinho}) &= \mathbb{P}(A \text{ falhe}) - \mathbb{P}(A \text{ e } B \text{ falhem})\\ &= 0,2 - 0.15\\ &= 0,05.\end{aligned}$$

Exercício 6.
Uma indústria automobilística está preocupada com uma possível recall de seu sedã quatro portas mais vendido. Se houver um recall, há 0,25 de probabilidade de que o defeito seja no sistema de freios; 0,18 de que seja na transmissão; 0,17 de que seja no sistemas de combustível e 0,4 de que seja em alguma outra parte.

(a) Qual é a probabilidade de que o defeito esteja nos freios ou no sistema de combustível se a probabilidade de defeitos em ambos os sistemas, simultaneamente, é de 0,15?

(b) Qual é a probabilidade de que não haja defeitos nem no sistema de freios nem no sistema de combustível?

Solução:
Seja $F =$ o defeito está no sistema de freio e $C =$ o defeito está no sistema de combustível.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cup C) &= \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(F \cap C)\\ &= 0,25 + 0.17 - 0,15\\ &= 0,27.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((F \cup C)^{c}) &= 1 - \mathbb{P}(F \cup C)\\ &= 1 - 0,27\\ &= 0,73.\end{aligned}$$

Exercício 7.
É comum, em muitas áreas industrializadas, o uso de máquinas envasadoras para colocar os productos em caixas. Isso ocorre na indústria alimentícia, bem como em outras áreas nas quais os produtos tem uso deoméstico, como o detergente. Tais máquinas não são perfeitas e podem: A, atender às especificações; B, encher as caixas menos do que o neccessário; ou C, encher mais do que o neccesário. Geralmente, o não enchimento das caixas é o que se deseja evitar. Seja $\mathbb{P}(B) = 0,001$ enquanto $\mathbb{P}(A) = 0,990$.

(a) Forneça $\mathbb{P}(C)$.

(b) Qual é a probabilidade de a máquina não encher as caixas menos do que o necessário?

(c) Qual é a probabilidade de a máquina encher as caixas mais do que o necessário ou encher menos do que o necessário?

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)\\ &= 1 - 0,990 - 0,001\\ &= 0,009.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^c) &= 1 - \mathbb{P}(B)\\ &= 1 - 0,001\\ &= 0,999.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\\ &= 0,001 + 0,009\\ &= 0,01.\end{aligned}$$

Exercício 8.
A probabilidade de que um automóvel sendo abastecido com gasolina também necessite de uma troca de óleo é de 0,25; a probabilidade de que ele precise de um novo filtro de óleo é de 0,4; e a probabilidade de que sejam neccesárias tanto a troca de óleo quanto a de filtro é de 0,14.

(a) Se o óleo tiver de ser trocado, qual é a probabilidade de que o filtro também tenha de ser trocado?

(b) Se for preciso um novo filtro, qual é a probabilidade de que o óleo também precise ser trocado?

Solução:
Seja $O =$ um automóvel sendo abastecido com gasolina também necessite de uma troca de óleo e $F =$ um automóvel sendo abastecido com gasolina também necessite de um novo filtro de óleo.

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F/O) &= \frac{\mathbb{P}(F \cap O)}{\mathbb{P}(O)}\\ &= \frac{0,14}{0,25}\\ &= 0,56.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(O/F) &= \frac{\mathbb{P}(O \cap F)}{\mathbb{P}(F)}\\ &= \frac{0,14}{0,40}\\ &= 0,35.\end{aligned}$$

Exercício 9.
A probabilidade de que A resolva um problema é $\frac{2}{3}$ e a probabilidade de que B o resolva é de $\frac{3}{4}$. Se ambos tantarem independentemente, qual a probabilidade de o problema ser resolvido?

Solução:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\\ &= \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\\ &= \frac{11}{12}\end{aligned}$$

Exercício 10.
Em certa região do país, sabe-se, baseado em experiências anteriores, que a probabilidade de selecionar um adulto com mais de 40 anos, com câncer, é de 0,05. Se a probabilidade de o médico diagnosticar corretamente uma pessoa com câncer como portadora da doença é de 0,78 e a probabilidade de diagnosticar incorretamente uma pessoa sem câncer como sendo portadora da doença é de 0,06, qual é a probabilidade de que a pessoa seja disgnosticada com câncer?

Solução:
Seja $DC =$ o médico diagnostica câncer e $C =$ a pessoa tem câncer.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(DC) &= \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(DC/C) + \mathbb{P}(C^c)\mathbb{P}(DC/C^c)\\ &= 0,05 \cdot 0,78 + 0,95 \cdot 0,06\\ &= 0,096.\end{aligned}$$