SME 0520 - Introdução à Estatística Exercícios de Revisão

1. O setor de marketing estima que um novo instrumento para análise de amostras de solo terá grande sucesso, sucesso moderado ou não terá sucesso, com probabilidades de 0.3, 0.6 e 0.1, respectivamente. A receita anual associada com um produto de grande sucesso, sucesso moderado ou nenhum sucesso é de 10 milhões, 5 milhões e 1 milhão de reais, respectivamente. Seja a v. a. X a renda anual do produto. Determine a função de probabilidade de X.

2. Erros de um canal experimental de transmissão são encontrados quanto a trasmissão é verificada por um certificador que detecta pulsos que faltam. O número encontrado de erros em um byte de 8 bits é uma v. a. com a seguinte distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 4 \\ 0.9, & 4 \leq x < 7 \\ 1, & 7 \leq x. \end{cases}$$

   Determine cada uma das seguintes probabilidades:

   (a) $P(X \leq 4)$

   (b) $P(X > 7)$

   (c) $P(X \leq 5)$

   (d) $P(X > 4)$

3. Se a imagem de X for o conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $P(X = x) = 0,2$, determine a média e a variância da v. a. X. Existe um modelo (distribuição) que descreve X? se sim, qual?

4. Um sistema de controle de vôo de naves espaciais usa quatro computadores independentes trabalhando em paralelo. Em cada etapa crítica, os computaodres "votam" para determianr a etapa apropriada. A probabilidade de um computador mandar girar para a esquerda quando o giro para direita seria o apropriado é de 0.0001. Seja X o número de computadores que escolhem o giro para a esquerda quando o giro para a direita seria o apropriado. Qual a média e a variância de X?

5. Falha no coração é devida a ocorrências naturais (85%) ou a fatores extrernos (15%). Fatores externos são relativos a substâncias induzidas ou a objetos alheios. Ocorrências naturais são causadas por bloqueio arterial, doença e infecção. Suponha que 15 pacientes irão a uma emergência por causa de falha no coração. Suponha que as causas de falha no coração entre os indivíduos sejam indendentes.

   (a) Qual é a probabilidade de três indivíduos terem condições causadas por fatores externos?

   (b) Qual é a probabilidade de três ou mais indivíduos terem condições causadas por fatores externos?

   (c) Sabendo que o desvio padrão de uma v.a. X é dado por

$$\sigma = \sqrt{Var(X)},$$

calcule a média e o desvio padrão do número de indivíduos com condições causadas por fatores exeternos.

6. Uma vez que nem todos os passageiros de aviões comparecem na hora do embarque, uma companhia aérea vende 125 bilhetes para um vôo que suporta somente 120 pessageiros. A probabilidade de que um passageiro não compareça é 0.10 e os passageiros de comportam independentemente.
   (a) Qual é a probabilidade de cada passageiro que comparecer possa embarcar?
   (b) Qual é a probabilidade de que o vôo decole com assentos vazios?

7. Considere uma sequências de tentativas independentes de Bernoulli, com $p = 0.2$.
   (a) Qual é o número esperado de tentativas de modo a se obter o primeiro sucesso?
   (b) Depois de oito sucessos ocorrerem, qual é o número esperado de tentativas de modo a se obter o nono sucesso?

8. A probabilidade de um alinhamento óptico com sucesso em um arranjo de um produto de armazenamento de dados ópticos é de 0.8. Considere que as tentativas sejam independentes.
   (a) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento com sucesso requeira exatamente quatro tentativas?
   (b) Qual é a probabilidade que o primeiro alinhamento com sucesso requeira no máximo quatro tentativas?
   (c) Qual é a probabilidade de que o primeiro alinhamento com sucesso requeiro no mínimo quatro tentativas?

9. Um processo de fabricação tem 100 pedidos de consumidores para preencher. Cada pedido requer uma peça componente que é comprada de um fornecedor. No entanto, tipicamente, 2% dos componentes são identificados como defeituosos, podendo os componentes ser considerados independentes.
   (a) Se o fabricante estocar 100 componentes, qual será a probabilidade de que as 100 ordens possam ser preenchidas sem refazer o pedido dos componentes?
   (b) Se o fabricante estocar 102 componentes, qual será a probabilidade de que as 100 ordens possam ser preenchidas sem refazer o pedido dos componentes?
   (c) Se o fabricante estocar 105 componentes, qual será a probabilidade que as 100 ordens possam ser preenchidas sem refazer o pedido dos componentes?

10. Uma betelada contém 36 células de bactérias, das quais 12 não são capazes de replicação celular. Suponha qe você examine três células de bactérias selecionadas aleatoriamente, sem reposição.
    (a) Qual é a função de probabilidade do número de células na amostra que podem se replicar?

(b) Qual é a média e a variância do número de células selecionadas não poder se replicar?

(c) Qual é a probabilida de no mínimo uma das células selecionadas não poder se replicar?

11. A probabilidade de um indivíduo se recuperar de uma doença em um período de uma semana, sem tratamento, é de 0,1. Suponha que 20 indivíduos independentes, sofrendo dessa doença, sejam tratados com uma droga e 4 se recuperem em um período de uma semana. Se a droga não tiver efeito, qual será a probabilidade de 4 ou mais pessoas se recuperarem no período de uma semana?

12. A resposta de um paciente a um medicamento genérico para controlar dor é pontuada em uma escala de 5 pontos, em que o 5 indica alívio completo. Historicamente, a distribuição de pontos é

1	2	3	4	5
0.05	0.1	0.2	0.25	0.4

Dois pacientes, considerados independentes, são pontuados.

(a) Qual é a função de probabilidade da pontuação total?

(b) Qual é a função de probabilidade da pontuação média?

Ex 1. $\Omega = \{$ grande sucesso (g.s), sucesso moderado (s.m), sem sucesso (s.s)

Então, a v.a discreta

$X: \Omega \to \mathbb{R}_X$

é dada por

$X(g.s) = 10 \cdot 10^6$

$X(s.m) = 5 \, 10^6$

$X(s.s) = 10^6$

Assim, $f: \mathbb{R}_X \to \mathbb{R}$ é dada por

$f(10 \cdot 10^6) = P(X = 10 \, 10^6) = 0,3$

$f(5 \, 10^6) = P(X = 5 \, 10^6) = 0,6$

$f(10^6) = P(X = 10^6) = 0,1.$

Ex 2. $\mathbb{R}_X = \{1, 4, 7\}$

$F(4) = \sum_{x \leq 4} f(x) = f(1) + f(4) \Rightarrow 0,9 = f(1) + f(4)$

Mas; $\underline{f(1) = F(1) = 0,7}$ Então

$0,9 = 0,7 + f(4) \Rightarrow \underline{f(4) = 0,2}$

Por fim,

$F(7) = f(1) + f(4) + f(7) \Rightarrow 1 = 0,7 + 0,2 + f(7) \Rightarrow f(7) = 1$

a) $P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 4) = f(1) + f(4) = 0,7 + 0,2 = 0,9 = F(4)$

b) $P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - (0,7 + 0,2 + 0,1) = 0$

c) $P(X \leq 5) = F(5) = 0,9$

d) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,9 = 0,1.$

3. $E(x) = \sum_{i=0}^{4} i P(X=i) = \sum_{i=0}^{4} i\, 0{,}2 = 0{,}2 \cdot \sum_{i=0}^{4} i = 0{,}2(0+1+2+3+4) = 0{,}2 \cdot 10 = 2$

$\sum_{i=0}^{4} i^2 = 0+1+4+9+16 = 30 \Rightarrow var(x) = 0{,}2\left(30 - \frac{100}{5}\right) = 0{,}2 \cdot (30-20) = 2$

Sim, a distribução uniforme.

Ex. 4 $X =$ o nº de computadores que falharam

$X = \{0,1,2,3,4\}$

As falhas são independentes e a probabilidade da falha ocorrer em um determinado computador é 0.0001

Então $X = Bin(4, 0.0001)$

$E(x) = 4 \cdot 0.0001 = 0.0004$

$Var(x) = 4(0.0001)(1-0.0001) = 0{,}0003996$

Ex. 5 $X =$ nº de pacientes com condições causadas por fatores externos

$X \sim Bin(15, 0.15)$

tabela

a) $P(X=3) = 0{,}2184$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)] = 1 - [0{,}0874 + 0{,}2312 + 0{,}2856]$

$= 0{,}3958$

c) $Var(x) = 15 \cdot 0{,}15\,(1-0{,}15) = 2{,}25 \cdot 0{,}85 = 1{,}9125$

$E(x) = 15 \cdot 0{,}15 = 2{,}25$

$\sigma = \sqrt{1{,}9125}$

Ex 6 Probabilidade de não comparecer $p = 0,1$

X = nº de pessoas que não comparecem

$$P(X = x) = \binom{125}{x} p^{x} (1-p)^{125-x}$$

$n = 125$

$X \sim Bin(125; 0,1)$

a) Se todo mundo que comparecer puder pegar o vôo, então X deve ser $X \geq 5$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)]$

$\cong 0,9961$

b) vôo com acentos vazios $X > 1$

$P(X > 5) = P(X \geq 5) - P(X = 5) \cong 0,9886$

Ex.7. $X \sim Geo(0,2)$

a) $E(X) = \frac{1}{0,2} = 5$

b) $E(X) = \frac{1}{0,2} = 5$

Ex8. probabilidade de sucesso $p = 0,8$

a) $X \sim Geo(0,8)$ 1: sucesso na 4: tentativa

$P(X=3) = 0,8\,(0,2)^3 = 0,0064$

b) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$

$= 0,8 + 0,8\;0,2 + 0,8(0,2)^2 + 0,8\,(0,2)^3$

$= 0,8 + 0,16 + 0,032 + 0,0064 = 0,9984$

c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X<3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$

$= 1 - (0,8 + 0,16 + 0,032)$

$= 1 - 0,992 = 0,008$

Ex.9 2% dos componentes são defeituosos

Sem refazer o pedido = sem componentes defeituosos

X = v a do n: componentes defeituosos do total de n componentes selecionados.

a) $X \sim Bin(100; 0,02)$

$P(X=0) = (1-0,02)^{100} = 0,13$

b) $100 \rightarrow 0,02$
$102 \rightarrow x$
$x = \frac{0,02 \cdot 102}{100} = 0,0204$

$X \sim Bin(102, 0,0204)$

$P(X=0) = (1-0,0204)^{102} = 0,12$

c) $100 \rightarrow 0,02$
$105 \rightarrow x$
$x = \frac{0,02 \cdot 105}{100} = 0,021$

$X \sim Bin(105; 0,021)$

$P(X=0) = (1-0,021)^{105} = 0,10$

Ex 10

n = nº de células = 36

m = nº de células capazes de replicação = 24

n = nº de células não capazes de replicação 12

r = nº de sorteio sem reposição

a) $X \sim Hgeo(24, 36, 3)$ X = nº de células capazes de replicação

$$P(X=x) = \frac{\binom{24}{x}\binom{12}{3-x}}{\binom{36}{3}}$$

b) $X \sim Hgeo(12, 36, 3)$ X = nº de células não capazes de replicação

$$E(X) = \frac{3 \cdot 12}{36} = 1$$

$$var(X) = \frac{3 \cdot 12 (24)\, 33}{36^2 (35)} = \frac{28512}{45360} = 0{,}62$$

c) $X \sim Hgeo(12, 36, 3)$ X = nº de células não capazes de replicação

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(0) = 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{24}{3}}{\binom{36}{3}} = 1 - \frac{\frac{12! \; 24!}{3!}}{\frac{36!}{3!}} = 1 - \frac{12! \; 24!}{36!} = 0{,}999\ldots$$