第十讲

袁晨圃

1 分拆数

分拆数的生成函数

$$P(x) = (1+x+x^2+\cdots) \to \frac{1}{1-x}$$

$$(1+x^2+x^4+\cdots) \to \frac{1}{1-x^2}$$

$$(1+x^3+x^6+\cdots) \to \frac{1}{1-x^3}$$

$$P(x) = \sum_{n\geq 0} P(n)x^n = \prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-x^k}$$

定义 $D(n)$ (D: for different)表示将 n 拆成不同的几个数的方案数

例： $D(1)=1, D(2)=1, D(3)=2, D(4)=2$

定义 $O(n)$ (O: for odd)表示将 n 拆成几个奇数的和的方案数

例： $O(1)=1, O(2)=1\ (2=1+1), O(3)=2\ (3=3=1+1+1), O(4)=2\ (4=1+3=1+1+1+1)$

下面证明 $\boldsymbol{D(n)=O(n)}$

代数证明

由于不含偶数项，所以 $O(n)$ 的生成函数 $\sum_{n\geq 1} O(n)x^n = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1-x^{2k+1}}$

由于每一个数只能用一次，所以 $D(n)$ 的生成函数为

$$\sum_{n\geq 1} D(n)x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = \prod_{k\geq 1}\left(1+x^k\right)$$

转化为证明 $\prod_{k\geq 1}\left(1+x^k\right) = \prod_{k\geq 0} \frac{1}{1-x^{2k+1}}$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = \frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}\cdot\frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}}\cdot\frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3}\cdot\frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}}\cdot\cdots = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdots$$

组合证明

考虑 $n=6$

$6=1+5=2+4=1+2+3$

$1+5=3+3=1+1+1+3=1+1+1+1+1+1$

$D(n)$ 映射到 $O(n)$

将 6 写成奇数乘二的幂次： $6=3\times 2 \Rightarrow 3+3$

将 $1,5$ 写成奇数乘二的幂次： $1=1\times 1, 5=5\times 1 \Rightarrow 1+5$

将 $2,4$ 写成奇数乘二的幂次： $2=1\times 2, 4=2\times 2 \Rightarrow (1+1)+(1+1+1+1)$

将 $1,2,3$ 写成奇数乘二的幂次： $1=1\times 1, 2=1\times 2, 3=3\times 1 \Rightarrow (1+1)+3$

$O(n)$ 映射到 $D(n)$

考虑 $1+1+1+1+1+1$:

$1 \times 6 = 1 \times 4 + 1 \times 2 \quad \Rightarrow 4 + 2$ （将 6 拆成二进制表示）

$1 + 1 + 1 + 3 : 1 \times 3 + 3 \times 1$

$1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 3 \times 2^0 \quad \Rightarrow 1 + 2 + 3$

为什么拆成二的幂次：要么对于同一个奇数，低位的 0 数目不同，要么是不同的奇数，所以一定是不同的两个数

2 勃兰特-切比雪夫定理

$\forall x > 1, (x, 2x)$ 中必定存在一个素数

由斯特林公式

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

使用反证法得出若定理不成立则 $\binom{2n}{n}$ 远小于 $\dfrac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \prod_{\substack{p \in \text{ prime} \\ 1 \le p \le 2n}} p^{?}$$

定义 $h_p(m) = m!$ 里有多少个 p 因子，即： $\max\limits_{k}(p^k | m!)$

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!n!} = \prod_{\substack{p \in \text{ prime} \\ 1 \le p \le 2n}} p^{h_p(2n) - 2h_p(n)}$$

若 $n..2n$ 没有素数则 $\binom{2n}{n} = \prod\limits_{\substack{p \in \text{ prime} \\ 1 \le p \le n}} p^{h_p(2n) - 2h_p(n)}$

$$h_p(n) = \sum_{k > 0} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

高斯取整函数的性质

1) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$

3) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor$

$$h_p(n) = \prod_{1 \le p \le n} p^{h_p(2n) - 2h_p(n)} = \sum_{k \ge 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{p \le \sqrt{2n}} \cdots \right)}_{A} \underbrace{\left(\prod_{\sqrt{2n} < p \le \frac{2}{3}n} \cdots \right)}_{B} \underbrace{\left(\prod_{\frac{2}{3}n < p \le n} \cdots \right)}_{C}$$

先考虑 $C : \dfrac{2}{3}n < p \le n$

$$\sum_{k \ge 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) = 0$$

$2n < 3p \quad 2 \le \dfrac{2n}{p} < 3$

$\Rightarrow C = 1$

再考虑 $A : p \le \sqrt{2n}$

$$\sum_{k\geq 1}\left(\left\lfloor 2\frac{n}{p^k}\right\rfloor - 2\left\lfloor 2\frac{n}{p^k}\right\rfloor\right) \leq \sum_{k=1}^{\lceil \log_p 2n\rceil} 1 = \lceil \log_p 2n\rceil \leq \log_p(2n)+1$$

$A : p^{h_p(2n)-2h_p(n)} \leq p^{\lceil}$