第十讲

袁晨圃

1 Ramsay Theory

证明 $R(3,4) \leq 10$:

考虑 v_1 连出的 9 条边，要么红边数量 ≥ 4 要么蓝边数量 ≥ 6

1) 红边 ≥ 4 :

   考虑连到的 4 个点之间的边

   如果有红边，则形成红色 K_3 ，反之这四个点形成蓝色 K_4

2) 蓝边 ≥ 6 :

   考虑连到的 6 个点形成的子图

   由于 $R(3,3) = 6$

   若是红色 K_3 ，则已满足条件

   若是蓝色 K_3 ，则加入 v_1 点，得到蓝色 K_4 ，满足条件

证明 $R(3,4) \leq 9$:

hint: 只多了一个 3 红 5 蓝的 case，而且对于所有点，都引出 3 红 5 蓝，这合法吗?

定理 1.1:

$$R(n,m) \leq R(n-1,m) + R(n,m-1)$$

证明：令 $t = R(n-1,m) + R(n,m-1)$

考虑 K_t 的一个节点 v_1 连出的边

要么红边 $\geq R(n-1,m)$ ，要么蓝边 $\geq R(n,m-1)$ （抽屉原理）

假设引理成立，考虑红边 $\geq R(n-1,m)$ 的情况，子图中要么有蓝色 K_m ，要么有红色 K_{n-1} ，加入 v_1 点后变成红色 K_n

推论：$R(n,m) \leq \binom{n+m-2}{n-1}$

证明：初值 $R(n,2) = n$ 跟杨辉三角一样

递推关系 $R(n,m) \leq R(n-1,m) + R(n,m-1)$ 与杨辉三角一样

例：$R(3,3) \leq \binom{4}{2} = 6$

$R(4,4) \leq \binom{6}{3} = 20$

$R(n,n) \leq \binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$

考虑 $\boldsymbol{R(n,n)}$ 的下界：

构造 $n-1$ 个红色 K_{n-1} ，不同子图之间的边都染蓝色

此时显然不存在红色 K_n

蓝色 K_n 也不存在，因为若选出 n 个点，必有两个点属于同一个字图（抽屉原理），则这两个点之间的边是红色，所以不存在蓝色 K_n

1.1 Probabilitic Method 非构造性方法证明存在性

考虑 $\boldsymbol{R(n,n)}$ 的一个非构造性下界：

$R(n,n) \geq N = \dfrac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n}{2e}$

对每条边独立染色， $p_{\text{红}} = p_{\text{蓝}} = \dfrac{1}{2}$

一个图 G 是好的： $\nexists \text{ Red } K_n, \nexists \text{ Blue } K_n$

转换为证明 $\Pr(G \text{ is good}) > 0$ （因为是古典概型）

$\Pr(G \text{ is good}) = 1 - \Pr(G \text{ is bad})$

$\Pr(G \text{ is bad}) = \Pr(\exists \text{ Red } K_n \cup \exists \text{ Blue } K_n) \leq \Pr(\exists \text{ Red } K_n) + \Pr(\exists \text{ Blue } K_n) = 2\Pr(\exists \text{ Red } K_n)$

$$
\begin{aligned}
\Pr(\exists \text{ Red } K_n) &= \Pr\left(\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n < N} v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n} \text{ is a red } K_n\right) \leq \binom{N}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&\leq \left(\frac{Ne}{n}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{(n(n-1))/2} \\
&\leq \left(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{(n^2-n)/2} = \frac{1}{2^{n/2}}
\end{aligned}
$$

所以 $\Pr(G \text{ is bad}) = 2 \cdot \dfrac{1}{2^{n/2}} < 1$

1.2 扩展至 $R(n,m,p)$

$(\text{Red } K_n)$ or $(\text{Blue } K_n)$ or $(\text{Yellow } K_n)$

类似地

$R(n,m,p) \leq R(n-1,m,p) + R(n,m-1,p) + R(n,m,p-1)$