组合数学第一讲

授课时间: 2024 年 8 月 26 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 袁晨圃

1 课程信息

期末分数占比：平时作业 40% + 期中考试 30% + 期末考试 30%

2 下降幂

$$A_n^m := n^{\underline{m}}$$
$$C_n^m := \binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

定义 1. n 的下降阶乘：$n^{\underline{m}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

一些特殊情况：

$$n^{\underline{n}} = n!, n^{\underline{n+1}} = 0, n^{\underline{m}} = 0(m > n), \quad \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{n+1} = 0, \binom{n}{m} = 0(m > n)$$

3 广义二项式定理及其应用

因此，

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k\geq 0, k\in Z} \binom{n}{k} x^k$$

继续扩展，

$$\binom{-1}{m} = \frac{(-1)^{\underline{m}}}{m!} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-m)}{m!} = (-1)^m$$

$$\binom{-2}{m} = \frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(m+1)^{\underline{m}}}{m!} = (-1)^m \binom{m+1}{m}$$

定理 2. $\binom{n}{m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_+$ 一定是整数

证明

1. $0 \leq n \leq m$: 正常组合数，一定是整数
2. $0 \leq m < n$: 等于 0
3. $n < 0$: $\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{n'+m-1}{m}$，其中 $n' = -n$

□

定理 3. 广义二项式定理：$(x+y)^\alpha = \sum_{k\geq 0, k\in Z} \binom{\alpha}{k} x^k y^{n-k}$

例 1

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{k\geq 0, k\in Z} x^k(-1)^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$
$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = \sum_{k\geq 0, k\in Z} \binom{-2}{k}(-x)^k = \sum_{k\geq 0, k\in Z} \binom{k+1}{k} x^k = \sum_{k\geq 0, k\in Z} (k+1)x^k$$

定义 4. 双阶乘 $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1, (2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 2$

例 2 $(1-x)^{\frac{1}{2}}$

解

$$\begin{aligned}
(1-x)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k}(-x)^k \\
&= 1 + \sum_{k\geq 1} (-1)^k x^k \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2k-3}{2}}{k!} x^k \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{(2k-3)!!}{2^k k!} x^k \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{(2k-2)!}{2^k k!(2k-2)!!} x^k \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{(2k-2)!}{2^k\cdot k!\cdot 2^{k-1}\cdot (k-1)!} x^k \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}\cdot k!\cdot (k-1)!} x^k \\
&= 1 - \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^{2k-1}}\cdot\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1} x^k
\end{aligned}$$

定义 5. 卡特兰数：$C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$

例 3 求多项式空间的两组基 $(x^0, x, x^2, x^3, \ldots)$ 和 $(1, (x+1), (x+1)^2, (x+1)^3, \ldots)$ 的转换矩阵。

解

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(1+x)^0\\(1+x)^1\\(1+x)^2\\\vdots\\(1+x)^n\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\binom{0}{1}&\binom{0}{2}&\binom{0}{3}&\cdots\\\binom{1}{1}&\binom{1}{2}&\binom{1}{3}&\cdots\\\binom{2}{1}&\binom{2}{2}&\binom{2}{3}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\\\binom{n}{1}&\binom{n}{2}&\binom{n}{3}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\\vdots\end{bmatrix}$$

令上述矩阵为 A（杨辉三角）

求 A 的逆矩阵:

换元，令 $y=x+1\Rightarrow x=y-1$

则 $x^n=(y-1)^n=\sum\limits_{k\geq 0}\dbinom{n}{k}(-1)^k(-y)^k=\sum\limits_{k\geq 0}\dbinom{n}{k}(-1)^{n-k}y^k$

因此，

$$\begin{bmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\\vdots\\x^i\\\vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-1)^{0-0}\binom{0}{0}&(-1)^{0-1}\binom{0}{1}&\cdots&(-1)^{0-j}\binom{0}{j}\\(-1)^{1-0}\binom{1}{0}&(-1)^{1-1}\binom{1}{1}&\cdots&(-1)^{1-j}\binom{1}{j}\\(-1)^{2-0}\binom{2}{0}&(-1)^{2-1}\binom{2}{1}&\cdots&(-1)^{2-j}\binom{2}{j}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\(-1)^{i-0}\binom{i}{0}&(-1)^{i-1}\binom{i}{1}&\cdots&(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\\\vdots&\vdots&\cdots&\ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y^0\\y^1\\y^2\\\vdots\end{bmatrix}$$

令上述矩阵为 B

因此，$AB=BA=I$

可以得到恒等式:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{k}{m}(-1)^{n-k}=0,m<n \tag{1}$$

即：给 A 交错添加负号