

第五章作业

袁晨圃

4.1

Exercise 1 (5.1): 证明 EQ_{CFG} 不可判定

Solution: 设 $A = (V_A, \Sigma_A, R_A, S_A)$, $B = (V_B, \Sigma_B, R_B, S_B)$ 分别是两个 CFG, 然后构造一个新的 CFG C 使得当 $L(A) = L(B)$ 时 $L(C) = \Sigma^*$

$$L(C) = \overline{(L(A) \cap \overline{L(B)}) \cup (\overline{L(A)} \cap L(B))} = (L(A) \cup \overline{L(B)}) \cap (\overline{L(A)} \cup L(B))$$

构造一个 PDA, 运行判定 A 的 PDA 和判定 B 的 PDA, 然后根据上式决定是否接受输入串

这样将 EQ_{CFG} 问题转换为 ALL_{CFG} 问题, 而后者是不可判定的。

✓

直接构造规约:

若 EQ_{CFG} 可判定, 那么可以构造判定 ALL_{CFG} 的判定器 S

S =“对于输入 $\langle G \rangle$,

1 构造 CFG H 使得 $L(H) = \Sigma^*$

2 在 $\langle G, H \rangle$ 上模拟 EQ_{CFG} 的判定器, 若 M 接受则接受, 反之拒绝”

Exercise 2 (补充): 考虑判定问题: “对于给定图灵机 M , 判定 M 是否接受字符串 010”

- a. 将判定问题写成一个语言 L_{010} , 使得图灵机 M 接受字符串 010 当且仅当 $\langle M \rangle \in L_{010}$
- b. 通过构造 A_{TM} 到 L_{010} 的规约, 证明 L_{010} 不可判定
- c. 使用 Rice 定理证明 L_{010} 不可判定

Solution:

a. $L_{010} = \{\langle M \rangle | M \text{ 接受 } 010\}$

i.e. $L_{010}(\langle M \rangle) = U(\langle M \rangle, 010) \downarrow \wedge U(\langle M \rangle, 010) = 1$

b. 对于任意的图灵机 M 和输入 w , 构造一个图灵机 $M'_{M,w}$ 使得它不接受任何除 010 以外的字串, 接受 010 当模拟运行 M 时接受 w 。

对于输入 $\langle M, w \rangle$, 将其转换为 $\langle M'_{M,w} \rangle$, 然后判断其属不属于 L_{010}

这样, 将 A_{TM} 规约到了 L_{010} , 因为 A_{TM} 不可判定, 所以 L_{010} 不可判定。

c. $\mathcal{P} : \{010\}$, 是非平凡的, 所以 L_{010} 不可判定

4.2

Exercise 3 (5.2): 证明 EQ_{CFG} 是补图灵可识别的

Solution: 根据 5.1 题的构造方法，将其转换为 ALL_{CFG} ，而 $\overline{\text{ALL}_{\text{CFG}}}$ 是 E_{CFG} ，它是图灵可识别的（从终结符开始沿规则标记染色，如果起始变元未被染到，则识别语言为空）

所以 EQ_{CFG} 是补图灵可识别的

Exercise 4 (5.4): 如果 $A \leq_m B$ 且 B 是一个正则语言，是否蕴含 A 也是一个正则语言？为什么？

Solution: 不蕴含。规约的过程无法用 DFA 描述

Exercise 5 (5.11): 证明当且仅当 $A \leq_m 0^* 1^*$ 时， A 是可判定的

Solution:

- 证明可判定语言 A 可以多一规约到 $0^* 1^*$

设图灵机 M 判定语言 A 。

$$\text{设可计算函数 } f(\cdot) = \begin{cases} 01 & U(\langle M, \cdot \rangle) = 1 \\ 10 & U(\langle M, \cdot \rangle) = 0 \end{cases}$$

f 就是要构造的规约。

- 证明一个可以多一规约到 $0^* 1^*$ 的语言是可判定的

设多一规约的函数是 f

构造图灵机 M 对于输入 w 先计算 $f(w)$ 然后模拟判定 $0^* 1^*$ 的 PDA，根据结果决定是否接受 w 。

Exercise 6 (6.4): 设 $A'_{\text{TM}} = \{\langle M, w \rangle | M \text{ 是神谕图灵机, } M^{A_{\text{TM}}} \text{ 接受串 } w\}$ 证明 A'_{TM} 相对 A_{TM} 是不可判定的。

Solution: 假设存在 $H^{A_{\text{TM}}}$ 判定 A'_{TM} 那么构造图灵机 $D^{A_{\text{TM}}}$ 使得它跟任何图灵机 $M^{A_{\text{TM}}}$ 都不相同，具体地：

若 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle M^{A_{\text{TM}}}, \langle M^{A_{\text{TM}}} \rangle \rangle)$ 接受，则 $D(\langle M^{A_{\text{TM}}} \rangle)$ 拒绝

若 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle M^{A_{\text{TM}}}, \langle M^{A_{\text{TM}}} \rangle \rangle)$ 拒绝，则 $D(\langle M^{A_{\text{TM}}} \rangle)$ 接受

考虑 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle D^{A_{\text{TM}}}, \langle D^{A_{\text{TM}}} \rangle \rangle)$ 是否接受，与 $D^{A_{\text{TM}}}$ 的定义矛盾。所以不存在这样的判定器 $H^{A_{\text{TM}}}$

4.3

Exercise 7 (5.3): 找出以下波斯特对应问题实例中的一个匹配

$$\left\{ \left[\frac{ab}{abab} \right], \left[\frac{b}{a} \right], \left[\frac{aba}{b} \right], \left[\frac{aa}{a} \right] \right\}$$

Solution:

$$\left[\begin{array}{c} ab \\ abab \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} ab \\ abab \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} aba \\ b \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} b \\ a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} b \\ a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} aa \\ a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} aa \\ a \end{array} \right]$$

Exercise 8 (5.9): 设 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}} = \{\langle G \rangle \mid G \text{ 是歧义的 CFG}\}$, 证明 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 是不可判定的

提示: 使用来自 PCP 的规约。给定一个 PCP 实例

$$P = \left\{ \left[\frac{t_1}{b_1} \right], \left[\frac{t_2}{b_2} \right], \dots, \left[\frac{t_k}{b_k} \right] \right\}$$

用下列规则构造一个 CFG:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow T|B \\ T &\rightarrow t_1Ta_1 \mid \dots \mid t_kTa_k \mid t_1a_1 \mid \dots \mid t_ka_k \\ B &\rightarrow b_1Ba_1 \mid \dots \mid b_kBa_k \mid b_1a_1 \mid \dots \mid b_ka_k \end{aligned}$$

其中 a_1, \dots, a_k 是新终结符, 证明这个规约可行

Solution: 反证法, 假设 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 可判定, 那么对于任意的 PCP 实例 P , 按提示构造一个 CFG G , 下面证明 CFG G 有歧义 \Leftrightarrow PCP P 存在匹配

- 若 CFG G 存在歧义

因为 T 和 B 按规则产生的序列中最多含一个变元, 所以最左推导一定唯一, 歧义来自于起始变元的推导规则 $S \rightarrow T|B$,

对于两个分别来自于 T 和 B 的推导结果, 可以根据规则得到其一定是 $t_{i_1}t_{i_2}t_{i_3} \dots t_{i_k}a_{i_k}a_{i_{k-1}} \dots a_{i_1}$ 或 $b_{i_1}b_{i_2}b_{i_3} \dots b_{i_k}a_{i_k}a_{i_{k-1}} \dots a_{i_1}$ 形式

由于终结符 a_i 约束了每一步选取的推导规则, 可以保证 PCP P 存在匹配 $\left[\frac{t_{i_1}}{b_{i_1}} \right] \left[\frac{t_{i_2}}{b_{i_2}} \right] \dots \left[\frac{t_{i_k}}{b_{i_k}} \right]$

所以 PCP P 有匹配

- 类似地, 如果 PCP P 有匹配 $\left[\frac{t_{i_1}}{b_{i_1}} \right] \left[\frac{t_{i_2}}{b_{i_2}} \right] \dots \left[\frac{t_{i_k}}{b_{i_k}} \right]$, 则串 $t_{i_1} \dots t_{i_k}a_{i_k} \dots a_{i_1}$ 存在歧义。

所以, 如果 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 可判定, 则 PCP 问题可判定, 但 PCP 问题是不可判定的, 所以 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 不可判定。

Exercise 9 (*5.22):

设 $X = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ 是一个单带图灵机, 且 } M \text{ 从不修改袋子上包含输入 } w \text{ 的那一部分}\}$

请问 X 是可判定的吗?

Solution:

规约到 HALT_{TM}

对于输入 $\langle M, w \rangle$, 构造一个单带图灵机 $M'_{M,w}$, 它对于任何输入 ω , 先跳过它, 然后开始模拟 $M(w)$, 如果停机, 则返回输入 ω 上修改一个字符

只要判定 $M'_{M,w}$ 是否修改输入, 就能判定 $\langle M, w \rangle$ 是否停机。

停机问题不可判定，所以 X 不可判定。