第五章作业

袁晨圃

4.1

习题 1 (5.1)：证明 $\mathrm{EQ_{CFG}}$ 不可判定

解：设 $A=(V_A,\Sigma_A,R_A,S_A)$，$B=(V_B,\Sigma_B,R_B,S_B)$ 分别是两个 CFG，然后构造一个新的 CFG C 使得当 $L(A)=L(B)$ 时 $L(C)=\Sigma^*$

$L(C)=\overline{\left(L(A)\cap\overline{L(B)}\right)\cup\left(\overline{L(A)}\cap L(B)\right)}=\left(L(A)\cup\overline{L(B)}\right)\cap\left(\overline{L(A)}\cup L(B)\right)$

构造一个 PDA，运行判定 A 的 PDA 和判定 B 的 PDA，然后根据上式决定是否接受输入串

这样将 $\mathrm{EQ_{CFG}}$ 问题转换为 $\mathrm{ALL_{CFG}}$ 问题，而后者是不可判定的。

✓

直接构造规约：

若 $\mathrm{EQ_{CFG}}$ 可判定，那么可以构造判定 $\mathrm{ALL_{CFG}}$ 的判定器 S

S=“对于输入$\langle G\rangle$，

1 构造 CFG H 使得 $L(H)=\Sigma^*$

2 在$\langle G,H\rangle$*上模拟* $\mathrm{EQ_{CFG}}$ *的判定器，若 M接受则接受，反之拒绝*“

习题 2 (补充)：考虑判定问题：“对于给定图灵机 M，判定 M 是否接受字符串 010”
a. 将判定问题写成一个语言 L_{010}，使得图灵机 M 接受字符串 010 当且仅当 $\langle M\rangle\in L_{010}$
b. 通过构造 A_{TM} 到 L_{010} 的规约，证明 L_{010} 不可判定
c. 使用 Rice 定理证明 L_{010} 不可判定

解：

a. $L_{010}=\{\langle M\rangle|$ M 是一个图灵机,M接受 010$\}$

i.e. $L_{010}(\langle M\rangle)=U(\langle M\rangle,010)\downarrow\wedge U(\langle M\rangle,010)=1$

b. 对于任意的图灵机 M 和输入 w，构造一个图灵机 $M'_{M,w}$ 使得它不接受任何除 010 以外的字串，接受 010 当模拟运行 M 时接受 w。

对于输入 $\langle M,w\rangle$，将其转换为 $\langle M'_{M,w}\rangle$，然后判断其属不属于 L_{010}

这样，将 A_{TM} 规约到了 L_{010}，因为 A_{TM} 不可判定，所以 L_{010} 不可判定。

b. 若 L_{010} 可判定，设判定器为 R。构造 A_{TM} 的判定器 S:
$S=$ "对于输入 $\langle M,w\rangle$，其中 M 为图灵机，w 为字符串:

1. 构造图灵机 T:
   $T=$ '对于输入串 x:
   1. 若 x 不是 010，拒绝；若 x 是 010，在输入 w 上模拟 M。若 M 接受，则接受；若 M 拒绝，则拒绝。'
2. 在 $\langle T\rangle$ 上模拟 R。若 R 接受，则接受；若 R 拒绝，则拒绝。"

如果 M 接受 w，T 接受 010，R 接受；否则 T 拒绝 010 或在 010 上不停机，R 拒绝。因此 A_{TM} 可判定，矛盾。

c. $\mathcal{P}:\{010\}$，是非平凡的，所以 L_{010} 不可判定

$\mathcal{P}:\{L\mid 010\in L\}$ 是非平凡的，所以 L_{010} 不可判定

4.2

习题 3 (5.2)：证明 $\mathrm{EQ}_{\mathrm{CFG}}$ 是补图灵可识别的

解：根据 5.1 题的构造方法，将其转换为 $\mathrm{ALL}_{\mathrm{CFG}}$，而 $\overline{\mathrm{ALL}_{\mathrm{CFG}}}$ 是 $\mathrm{E}_{\mathrm{CFG}}$，它是图灵可识别的（从终结符开始沿规则标记染色，如果起始变元未被染到，则识别语言为空）

所以 $\mathrm{EQ}_{\mathrm{CFG}}$ 是补图灵可识别的

$\overline{\mathrm{ALL}_{\mathrm{CFG}}}$ 不是 E_{CFG}，因为当输入不是 *CFG* 的编码时，前者应该接受，后者不接受

所以应该先考虑不是 $\langle A,B\rangle, A,B\in\mathrm{CFG}$ 形式的输入，在 $\overline{\mathrm{EQ}_{\mathrm{CFG}}}$ 中直接接受

习题 4 (5.4)：如果 $A\underset{m}{\leq}B$ 且 B 是一个正则语言，是否蕴含 A 也是一个正则语言？为什么？

解：不蕴含。规约的过程无法用 DFA 描述

习题 5 (°5.11)：证明当且仅当 $A\underset{m}{\leq}0*1*$ 时，A 是可判定的

解：

- 证明可判定语言 A 可以多一规约到 $0*1*$

  设图灵机 M 判定语言 A。

  设可计算函数 $f(\cdot)=\begin{cases}01 & U(\langle M,\cdot\rangle)=1\\ 10 & U(\langle M,\cdot\rangle)=0\end{cases}$

  f 就是要构造的规约。

- 证明一个可以多一规约到 $0*1*$ 的语言是可判定的

  设多一规约的函数是 f

  构造图灵机 M 对于输入 w 先计算 $f(w)$ 然后模拟判定 $0*1*$ 的 PDA，根据结果决定是否接受 w。

✓

习题 6 (°6.4)：设 $A'_{\text{TM}} = \{\langle M, w\rangle | M \text{ 是神谕图灵机}, M^{A_{\text{TM}}} \text{ 接受串 } w\}$ 证明 A'_{TM} 相对 A_{TM} 是不可判定的。

解：假设存在 $H^{A_{\text{TM}}}$ 判定 A'_{TM} 那么构造图灵机 $D^{A_{\text{TM}}}$ 使得它跟任何图灵机 $M^{A_{\text{TM}}}$ 都不相同，具体地：

模拟 $H^{A_{\text{TM}}}$，

若 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle M^{A_{\text{TM}}}, \langle M^{A_{\text{TM}}}\rangle\rangle)$ 接受，则 $D(\langle M^{A_{\text{TM}}}\rangle)$ 拒绝

若 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle M^{A_{\text{TM}}}, \langle M^{A_{\text{TM}}}\rangle\rangle)$ 拒绝，则 $D(\langle M^{A_{\text{TM}}}\rangle)$ 接受

考虑 $H^{A_{\text{TM}}}(\langle D^{A_{\text{TM}}}, \langle D^{A_{\text{TM}}}\rangle\rangle)$ 是否接受，与 $D^{A_{\text{TM}}}$ 的定义矛盾。所以不存在这样的判定器 $H^{A_{\text{TM}}}$

✓

4.3

习题 7 (5.3)：找出以下波斯特对应问题实例中的一个匹配

$$\left\{\left[\frac{\text{ab}}{\text{abab}}\right], \left[\frac{\text{b}}{\text{a}}\right], \left[\frac{\text{aba}}{\text{b}}\right], \left[\frac{\text{aa}}{\text{a}}\right]\right\}$$

解：

$$\left[\frac{\text{ab}}{\text{abab}}\right]\left[\frac{\text{ab}}{\text{abab}}\right]\left[\frac{\text{aba}}{\text{b}}\right]\left[\frac{\text{b}}{\text{a}}\right]\left[\frac{\text{b}}{\text{a}}\right]\left[\frac{\text{aa}}{\text{a}}\right]\left[\frac{\text{aa}}{\text{a}}\right]$$

✓

思路：只能由$\left[\frac{\text{ab}}{\text{abab}}\right]$或者 $\left[\frac{\text{aa}}{\text{a}}\right]$开头

习题 8 (5.9)：设 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ 是歧义的 CFG}\}$，证明 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 是不可判定的

提示：使用来自 *PCP* 的规约。给定一个 *PCP* 实例

$$P = \left\{\left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \ldots, \left[\frac{t_k}{b_k}\right]\right\}$$

用下列规则构造一个 *CFG*：

$$\begin{aligned}
&S \to T | B \\
&T \to t_1 T a_1 \mid \ldots \mid t_k T a_k \mid t_1 a_1 \mid \ldots \mid t_k a_k \\
&B \to b_1 B a_1 \mid \ldots \mid b_k B a_k \mid b_1 a_1 \mid \ldots \mid b_k a_k
\end{aligned}$$

其中 $a_1, \ldots, a_k$ 是新终结符，证明这个规约可行

解：反证法，假设 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 可判定，那么对于任意的 PCP 实例 P，按提示构造一个 CFG G，下面证明 CFG G 有歧义 $\Leftrightarrow$ PCP P 存在匹配

- 若 CFG G 存在歧义

  因为 T 和 B 按规则产生的序列中最多含一个变元，所以最左推导一定唯一，歧义来自于起始变元的推导规则 $S \to T|B$，

  对于两个分别来自于 T 和 B 的推导结果，可以根据规则得到其一定是 $t_{i_1}t_{i_2}t_{i_3}...t_{i_k}a_{i_k}a_{i_{k-1}}...a_{i_1}$ 或 $b_{i_1}b_{i_2}b_{i_3}...b_{i_k}a_{i_k}a_{i_{k-1}}...a_{i_1}$形式

  由于终结符 a_i 约束了每一步选取的推导规则，可以保证 PCP P 存在匹配 $\left[\frac{t_{i_1}}{b_{i_1}}\right]\left[\frac{t_{i_2}}{b_{i_2}}\right]...\left[\frac{t_{i_k}}{b_{i_k}}\right]$

  所以 PCP P 有匹配

- 类似地，如果 PCP P 有匹配 $\left[\frac{t_{i_1}}{b_{i_1}}\right]\left[\frac{t_{i_2}}{b_{i_2}}\right]...\left[\frac{t_{i_k}}{b_{i_k}}\right]$，则串$t_{i_1}...t_{i_k}a_{i_k}...a_{i_1}$ 存在歧义。

所以，如果 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 可判定，则 PCP 问题可判定，但 PCP 问题是不可判定的，所以 $\text{AMBIG}_{\text{CFG}}$ 不可判定。

习题 9 (*5.22)：

设 $X = \{\langle M, w\rangle \mid M\text{是一个单带图灵机，且}M\text{从不修改袋子上包含输入 } w \text{ 的那一部分}\}$

请问X是可判定的吗?

解：

规约到 HALT_{TM}

对于输入$\langle M, w\rangle$，构造一个单带图灵机 $M'_{M,w}$，它对于任何输入 ω，先跳过它 在右侧放置分隔符 \$ ，在右侧写 w，然后视 \$ 为左端点开始模拟$M(w)$，如果停机，则返回输入 ω上修改一个字符

只要判定 $M'_{M,w}$ 是否修改输入，就能判定 $\langle M, w\rangle$是否停机。

停机问题不可判定，所以 X不可判定。