组合数学第二讲

授课时间: 2024 年 9 月 2 日　授课教师: 孙晓明　记录人: 袁晨圃

1 广义二项式定理的一些应用

$(1+x)^n = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k$
考虑 $\sum\limits_{k\geq 0} \binom{n}{3k}$:
代入 $x=1$

$$(1+1)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}$$

代入 $x = e^{i\frac{2}{3}\pi}$

$$\begin{aligned}(1+e^{i\frac{2}{3}\pi})^n &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} e^{i\frac{2k}{3}\pi} \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k} + e^{i\frac{2}{3}\pi} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k+1} + e^{i\frac{4}{3}\pi} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k+2}\end{aligned}$$

代入 $x = e^{i\frac{4}{3}\pi}$

$$\begin{aligned}(1+e^{i\frac{4}{3}\pi})^n &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} e^{i\frac{4k}{3}\pi} \\ &= \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k} + e^{i\frac{4}{3}\pi} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k+1} + e^{i\frac{2}{3}\pi} \sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k+2}\end{aligned}$$

注意到 $e^{i\frac{4}{3}\pi} + e^{i\frac{2}{3}\pi} = -1$
所以

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \binom{n}{3k} &= \frac{1}{3}[2^n + (1+e^{i\frac{2}{3}\pi})^n + (1+e^{i\frac{4}{3}\pi})^n] \\ &= \frac{1}{3}[2^n + e^{i\frac{n}{6}\pi} + e^{-i\frac{n}{3}\pi}]\end{aligned}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^k \tag{1}$$

考虑对(1)求导:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k\geq 1} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

可得到

$$\sum_{k\geq 0} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1} \tag{2}$$

例 1 $T\leq S=\{1,2,\cdots,n\}$，求 $E(|T|)$

解

$$E(|T|)=\sum_{k=0}^{n}=k\cdot\frac{\binom{n}{k}}{2^n}=\frac{n}{2}$$

法二：期望具有线性性，$E(\sum)=\sum E_i=\dfrac{n}{2}$

例 2 求 $\sum k^2\dbinom{n}{k}$

解 在(2)左右两边同时乘 x 再求导

$$(1+x)^m=\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}x^k \tag{3}$$

将(1)和(3)乘起来：

$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k\geq 0}x^k\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

又

$$\sum_{k\geq 0}\binom{m+n}{k}x^k=(1+x)^{m+n}$$

所以

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}$$

定理 1 (范德蒙恒等式)**.**

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j},\quad m,n\in\mathbb{R},k\in\mathbb{N}$$

特别地：

令 $n=m$

$$\binom{2n}{k}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2=\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}^2$$

令 $m=1$

$$\binom{n+1}{k}=\sum_{j=k-1}^{k}\binom{n}{j}\binom{1}{k-j}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}$$

定理 2 (朱世杰恒等式)**.**

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

使用下降幂的形式：

$$\sum x^{\underline{k}}=\frac{1}{k+1}x^{\underline{k+1}}$$

证明 因为 $\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$，故

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}\\
&=\binom{k+1}{k+1}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}\\
&=\binom{k+2}{k+1}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n}{k}\\
&\vdots\\
&=\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

特别地，令 $k=2$：

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum(k(k-1)+k)=\sum_{k=1}^{n}(2\cdot\binom{k}{2}+1\cdot\binom{k}{1})=2\cdot\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$$

类似地，求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$：

待定系数，设

$$k^3=c_3k^{\underline{3}}+c_2k^{\underline{2}}+c_1k^{\underline{1}}+c_0k^{\underline{0}}$$

对于一般的 x^d：

$$x^d=\sum_{k=0}^{d}c_kx^{\underline{k}}$$

a.k.a. 第二类斯特林数（普通幂转下降幂）

2 特殊排列

圆排列

n 个人选 k 个人圆排列：

$$\binom{n}{k}(k-1)!=\frac{n^{\underline{k}}}{k}$$

可重排列

k_1 个 a_1，k_2 个 $a_2,\cdots,k_t$ 个 a_t 全排列，方案数：

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_t)!}{k_1!k_2!\cdots k_t!}=\frac{(\sum k_i)!}{\prod k_i!}$$

使用可重排列可重新解释二项式定理公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$

（选 k 个 a，$n-k$ 个 b 可重排列）

故

$$(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} a^i b^j c^{n-i-j}$$

一般情况:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = \sum_{\substack{0\le i_1,\cdots i_k \le n \\ i_1+\cdots+i_k=n}} \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_k!} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$$

引进广义组合数记号:

$$\binom{n}{k, n-k} := \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{i_1, i_2, \cdots, i_n} := \frac{n!}{i_1!i_2!\cdots i_k!}$$

3 斯特林公式

对 $n!$ 的渐进估计: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

例 3 掷硬币问题: 1000 次，500 次朝上概率:

$$\binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \\ \sim & \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{[\sqrt{2\pi \cdot 2n}\left(\frac{n}{e}\right)]^2} \Big/ 2^{2n} \\ \sim & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

4 整值多项式

定义 3. 整值多项式 $P(x)$: $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow P(x) \in \mathbb{Z}$

显然，整系数多项式一定是整值多项式。
反之不然，e.g. $\frac{n(n-1)}{2}$

定理 4. 次数为 d 的多项式 $P(x)$ 是整值多项式 $\Leftrightarrow P(x) = \sum_{0\le k\le d} C_k \binom{x}{k}, C_k \in \mathbb{Z}$

证明 必要性: 二项式系数是整值多项式
充分性:

$$P(0)\in\mathbb{Z}\Rightarrow C_0\in\mathbb{Z}$$

$$P(1)\in\mathbb{Z}\Rightarrow P(1)=C_1\binom{1}{1}+\underbrace{C_0\binom{1}{0}}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}\Rightarrow C_1\in\mathbb{Z}$$

$$\vdots$$

$$P(k)\in\mathbb{Z}\Rightarrow P(k)=C_k\binom{k}{k}+\underbrace{C_0\binom{1}{0}+C_1\binom{k}{1}+\cdots}_{\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}\Rightarrow C_k\in\mathbb{Z}$$

□

推论 5. 在 $P(0),P(1),\cdots P(d)$ 上（连续 $d+1$ 个整数点）都是整值 $P(x)$ 的多项式是整值多项式

推论 6. 在 $P(m),P(m+1),\cdots P(m+d)$ 上（连续 $d+1$ 个整数点）都是整值 $P(x)$ 的多项式是整值多项式

证明 令 $H(x)=P(x+m)$

$H(0)=P(m)\in\mathbb{Z},\quad H(1)=P(m+1),\cdots,H(d)=P(m+d)\in\mathbb{Z}$

平移不影响次数，$\deg(H)=\deg(P)=d$，由 5知 $H(x)$ 是整值多项式，设 $H(x)=\sum\limits_{k=0}^{d}e_k\binom{x}{k}$ 则 e_i 是整数

$H(x)=P(x+m),\quad P(y)=H(y-m)=\sum\limits_{k=0}^{d}e_k\binom{y-m}{k}$

由 1, $\binom{y-m}{k}=\sum\limits_{j=0}^{k}\binom{y}{j}\binom{-m}{k-j}=\sum\limits_{j=0}^{d}\underbrace{\left(\sum\limits_{k=j}^{d}e_k\binom{-m}{k-j}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\binom{y}{j}}_{\in\mathbb{Z}}$ □

例 4 思考题：在 $d+1$ 个整点上都是整值的多项式 $P(x)$ 是不是整值多项式?