第七章作业

袁晨圃

5.1

习题 1 (7.1): 判断真假

a. $2n = O(n)$
b. $n^2 = O(n)$
c. $n^2 = O(n \log^2 n)$
d. $n \log n = O(n^2)$
e. $3^n = 2^{O(n)}$
f. $2^{2^n} = O(2^{2^n})$

解:
a. ✓
b. ×
c. ×
d. ✓
e. ✓
f. ✓

习题 2 (7.2): 判断真假

a. $n = o(2n)$
b. $2n = o(n^2)$
c. $2n = o(3^n)$
d. $1 = o(n)$
e. $n = o(\log n)$
f. $1 = o(\frac{1}{n})$

解:
a. ×
b. ✓
c. ✓
d. ✓
e. ×
f. ×

习题 3 (°7.6): 证明 P 在并、连接、补运算下封闭

解:

a. 并: 考虑 $L_1, L_2 \in P, L(M_1) = L_1, L(M_2) = L_2$

构造图灵机 $M =$ 对输入 w:
1. 在 w 上模拟 M_1，若接受则接受
2. 在 w 上模拟 M_2，若接受则接受
3. 拒绝

设 M_1, M_2 复杂度分别为 $O(n^{k_1}), O(n^{k_2})$，那么 M 复杂度为 $O(n^{\max(k_1,k_2)})$

b. 连接: 考虑 $L_1, L_2 \in P, L(M_1) = L_1, L(M_2) = L_2$

构造图灵机 $M =$ 对输入 w:
1. 枚举 w 的前缀 w_1, w_2，使得 $w = w_1 w_2$
   i. 在 w_1 上模拟 M_1
   ii. 在 w_2 上模拟 M_2
   iii. 同时接受则接受
2. 拒绝

设 M_1, M_2 复杂度分别为 $O(n^{k_1}), O(n^{k_2})$，那么 M 复杂度为 $O(n^{\max(k_1,k_2)+1})$

c. 补: 考虑 $L_0 \in \mathrm{P}, L(M_0) = L_0$

构造图灵机 M = 对输入 w:

1. 在 w 上模拟 M_0，若接受则拒绝，反之接受

时间复杂度与 M_0 相同

习题 4 (7.9)：无向图中的三角形是一个 3-团，证明 TRIANGLE $\in$ P，其中 TRIANGLE = $\{\langle G\rangle \mid G$ 包含一个三角形$\}$

解：M = 对于输入 $\langle G\rangle$:
1. 枚举所有的节点三元组 v_1, v_2, v_3
2. 判断 v_1, v_2, v_3 是否互相连接，如果是，则接受
3. 不存在这样的三元组，则拒绝

第二步不能在常数时间内完成，如果分析复杂度，需要加一个关于 $|V|, |E|$ 的多项式成分。

习题 5 (°7.12)：若图 G 节点重新排序后可以变得和 H 相同，则称 G 和 H 是 **同构**(isomorphic) 的，令 ISO = $\{\langle G, H\rangle \mid G$ 和 H 是同构的图$\}$，证明 ISO $\in$ NP

解：证据：一个 permutation P

多项式时间验证器 V = 对于输入 $\langle G, H, P\rangle$:
1. 枚举所有的节点二元组 v_1, v_2，比较 G 中 v_1, v_2 的邻接关系和 H 中 $P(v_1), P(v_2)$ 的邻接关系，如果不同，则拒绝
2. 如果对于所有的 (v_1, v_2)，邻接关系都相同，则接受

第一步验证邻接关系可以在多项式时间内完成，重复 $O(|V|^2)$ 次，所以属于 P

习题 6 (7.29)：令 SET-SPLITTING = $\{\langle S, C\rangle \mid S$ 是有穷集$, C = \{C_1, ..., C_k\}$ 是由 S 的某些子集组成的非空集合，使得 S 可以红蓝染色，$\forall C_i, C_i$中的元素不同色$\}$

证明 SET-SPLITTING 是 NP 完全的

解：

a. 先证明 SET-SPLITTING 是 NP 的

证据：一个染色方案 c

多项式时间验证器 V = 对于输入 $\langle S, c\rangle$:
1. 枚举所有的 C_i，判断 C_i 中的元素是否不同色，如果不是，则拒绝
2. 如果对于所有的 C_i，元素都不同色，则接受

b. 证明 SET-SPLITTING 是 NP 完全的

将 3-SAT 多项式时间规约到 SET-SPLITTING:

每一个变元 x 对应 S 中两个节点 $x, \neg x$，$\{x, \neg x\} \in C$

构造两个特殊节点 $T, F, \{T, F\} \in C$

其实 T 节点是不必要的

对于每一个字句 $l_1 \vee l_2 \vee l_3$，$\{F, l_1, l_2, l_3\} \in C$

若 3-SAT 可满足，将为真的变量与 T 染成同色，为假的变量与 F 染成同色

若 SET-SPLITTING 有解，对应的将等价关系映射回逻辑变量的真值

✓

规约需要证明双向性

$w \in \text{SET-SPLITTING} \implies w \in \text{3-SAT}; w \in \text{3-SAT} \implies w \in \text{SET-SPLITTING}$

5.2

习题 7 (°7.16)：证明以下问题是 NP 完全的：给定一个无向图 G 和 G 节点的一个子集 C，是否可以通过给 G 的每条边赋予方向，将 G 转换为一个有向图并且满足属于 C 的节点入度或出度为 0，不属于 C 的节点入度至少为 1?

解：

a. 首先这个问题肯定是 NP 的，依次检验每个节点入度出度以及是否属于 C 即可

b. 将 3-SAT p 规约到此问题

对于每一个变量 x 创建两个节点 $x, \neg x$，添加边 $x \longrightarrow \neg x$，且有 $x, \neg x \in C$

考虑 3-SAT 中的每一个字句 $c = l_1 \vee l_2 \vee l_3$：

创建一个节点 c，添加边 $l_1 \longrightarrow c, l_2 \longrightarrow c, l_3 \longrightarrow c$，且$c \notin C$

若 3-SAT 可满足，将为真的变量的方向定为 $x \longrightarrow \neg x$ 且有 $\forall c, x \in c \to x \longrightarrow c \wedge c \longrightarrow \neg x$，为假的定为 $\neg x \longrightarrow x$，类似

因为可满足，所以赋值之后每个字句至少一个文字为真，对应至少一个入边

若此问题有解，映射回变量真假。

习题 8 (7.32)：如果图 G 中有某个节点子集，其他节点至少与该子集中某一节点相邻，则该子集称为支配集，令

$$\text{DOMINATING-SET} = \{\langle G, k\rangle \mid \text{G 有一个包含 k 个节点的支配集}\}$$

通过将 VERTEX-COVER 问题规约到此问题证明它是 NP 完全的

解：

a. $\in$ NP: 验证每个节点是否与给定的集合某一节点相邻

b. 将 VERTEX-COVER 规约到 DOMINATING-SET

对于 VERTEX-COVER 输入 (G, k)，构造 DOMINATING-SET (G', k)

将 G 改造成 G'

对于 $G = (V, E)$ 的每一条边 $e = (u, v)$ 添加一个中间节点 w_e

添加两条边 (u, w_e) 和 (v, w_e)

若存在顶点覆盖 S，则每个边 $e=(u,v)$ 至少有一个端点在覆盖中，对应 G' 中所有中间节点 w_e 被 S 支配

对于原图每一个点，因为保留了原图的边，所以肯定与 S 中一节点相邻。所以 S 是一个支配集

若存在支配集 S'，对于每个新顶点，若要支配，则必须有 $u \in S' \vee v \in S'$， 所以每条边 $e=(u,v)$ 至少有端点在 S' 中，所以 $S' \cap V$ 是顶点覆盖， 添加点使得集合大小重新为 k 即可

用到了 VERTEX-COVER 没有孤立点的性质，（否则孤立点无法被支配），需要先将 VERTEX-COVER 规约到 NO-ISOLATED-VC

定理 7.5.1 p197 证明的方法中构造的图确实是没有孤立点的，所以 NO-ISOLATED-VC 是 NP 完全的。

习题 9 (°7.39)：有一个盒子和一些卡片，盒子里有栓塞，卡片上有凹口，每张卡片可以以两种方式放入盒子中。

每张卡片有两排孔，有些孔没有打穿，将所有卡片放进盒子，使得盒子的底被完全覆盖，那么谜题就破解了。

PUZZLE $= \{\langle c_1, \cdots, c_k \rangle \mid c_i$ 代表一张卡片，并且这个卡片集有解$\}$

证明 PUZZLE 是 NP 完全的

解：

a. 属于 NP：验证证据，每个卡片只使用一次，并且每个位置都被盖住

b. *从 SAT 规约至 PUZZLE:*

卡片上有 n 行，其中 n 是字句数量

总共有 $m+1$ 张卡片，其中 m 是变量数量，每一个变量对应一张卡片

默认情况下 n 行左右两列全打穿

对于第 i 个字句不妨设 $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4 \vee \neg x_4)$

此时对应地 x_1对应的卡片填上第 i 行左边，x_2对应的卡片填上第 i 行右边，x_4 对应的卡片填上左右两边

加入一张特殊卡片，填上右列的所有孔（左边只能靠满足所有字句来覆盖）

习题 10 (*7.45)：证明若 P = NP，除了 $A=\emptyset$ 和 $A=\Sigma^*$ 以外，所有语言 $A \in$ P 都是 NP 完全的。

解：因为 $A \neq \emptyset, A \neq \Sigma^*$，所以 $\exists w_1 \in A, \exists w_0 \notin A$

将任意属于 NP 的语言 L 规约到 A，因为 P=NP,所以 $L \in$ P，存在多项式时间判定器 M_L 判定 L， 构造一个多项式时间可计算函数 $f(x) = \begin{cases} w_1 & \text{if } x \in L \\ w_0 & \text{otherwise} \end{cases}$，所以 $x \in L \iff f(x) \in A$

所以 A 是 NP 完全的