

大作业报告

袁晨圃，李知谦，邱子陶

完整代码: <https://github.com/cauphenuny/ucas-data-structure>

一、实习 6.4 平衡树操作演示

1.1 CLI

1.1.1 功能介绍

```
$ build/balanced_tree
commands:
  [q]uit
  [h]elp

  [c]reate <tree-id: a-z|A-Z> <algo: basic|avl|treap|splay>
  [d]elete <tree-id>
  [p]rint <tree-id>*
  [l]ist

  [i]nsert <tree-id> <key: int> <value: int>
  [r]emove <tree-id> <key: int>
  [f]ind <tree-id> <key: int>

  [s]plit <dest-id> <src-id> <key: int>
  [m]erge <dest-id> <src-id>

  [R]andom_insert <tree-id> <count: int>
  [S]equential_insert <tree-id> <start: int> <end: int>

trace mode:
  [n]: next
  [c]: auto continue
```

我们实现了一个功能强大的解释器环境

支持创建/删除/输出树，在树中插入/删除/查找节点，分割树，合并树。

树名为单个字母 (a-z, A-Z)，可以使用任意算法 (basic: 普通 BST, avl: AVLTree, treap: Treap, splay: Splay) 创建树

命令可以写全，也可以只写第一个字符

支持随机插入和顺序插入若干个节点。

在每一个操作之后都会打印单步结果 (trace)，对树结构的任何操作（例如：连接或者断开连接子树）都会被实时记录下来。

显示 trace 时支持自动继续 (c) 和单步执行 (n)。

实现了一个语法糖，从而能够像使用主流编程语言一样使用这个解释器，能够很大程度上提高可读性

```
>>> A = avl.create()
>>> A.SequentialInsert(1, 10)
>>> B = A.split(5)
>>> B.print()
```

```
>>> print
>>> B.merge(A)
>>> print()
>>> delete(B)
```

等价于

```
>>> create A avl
>>> S A 1 10
>>> s B A 5
>>> p B
>>> p
>>> m B A
>>> p
>>> d B
```

使用示例:

- 插入/删除/查找

```
>>> c A avl # create an AVLTree A
Created tree A with algorithm avl
>>> i A 1 10 # insert key-value 1-10 to tree A
Inserted {1: 10} into tree A
```

Trace of tree A:

#1:

```
{1: 10}
```

```
>>> f A 1
```

Found {1: 10} in tree A

```
>>> i A 2 20
```

Inserted {2: 20} into tree A

Trace of tree A:

#1:

```
{2: 20}
```

```
{1: 10}
```

```
>>> i A 3 30 # insert cause imbalance, see
trace!
```

Inserted {3: 30} into tree A

Trace of tree A:

#1:

```
{3: 30}
```

```
{2: 20}
```

```
{1: 10}
```

(trace) c

#2:

```
{1: 10}
```

```
{3: 30}
```

```
{2: 20}
```

#3:

```
{3: 30}
```

```
{2: 20}
```

```
{1: 10}
```

```
>>> S A 4 12
```

Inserted sequential elements from 4 to 12 into tree A

```
...
```

```
>>> r A 6
```

Removed 6 from tree A

Trace of tree A:

#1:

```
{11: 92}
```

```
{10: 25}
```

```
{9: 100}
```

```
{8: 28}
```

```
{7: 84}
```

```
{6: 71}
```

```
{4: 85}
```

#2:

```
{11: 92}
```

```
{10: 25}
```

```
{9: 100}
```

```
{8: 28}
```

```
{6: 71}
```

```
{4: 85}
```

```
{3: 30}
```

```
{2: 20}
```

```
{1: 10}
```

```

    {3: 30}
    {2: 20}
    {1: 10}
----
{5: 5}
-----
(trace) c

—

#3:
    {11: 92}
    {10: 25}
    {9: 100}
    {8: 28}
    {6: 71}
{4: 85}
    {3: 30}
    {2: 20}
    {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
-----

—

#5:
    {11: 92}
    {10: 25}
    {9: 100}
    {8: 28}
{4: 85}
    {3: 30}
    {2: 20}
    {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
-----

—

#4:
    {11: 92}
    {10: 25}
    {9: 100}
    {8: 28}
{4: 85}
    {3: 30}
    {2: 20}
    {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
----
{6: 71}
-----

—

#6:
    {11: 92}
    {10: 25}
    {9: 100}
    {8: 28}
    {7: 84}
    {5: 5}
{4: 85}
    {3: 30}
    {2: 20}
    {1: 10}
>>>

```

- 分裂: 在 $O(\log n)$ 时间内分裂出 $\geq \text{key}$ 的所有节点到一颗新树

```

>>> S A 10 20 # insert [10, 20) to tree A
...
>>> p
Tree A: AVLTree:
    {19: 116}
    {18: 139}
    {17: 173}
    {16: 187}
    {15: 159}
{14: 143}
    {13: 169}
    {12: 160}
    {11: 195}
{10: 124}

```

```

    {3: 30}
  {2: 20}
  {1: 10}

```

```
>>> s B A 15 # split tree A at key 15, result in tree B
```

```
...
```

```
>>> p
```

```
Tree A: AVLTree:
```

```

    {14: 143}
    {13: 169}
  {12: 160}
  {11: 195}
{10: 124}
  {3: 30}
  {2: 20}
  {1: 10}

```

```
Tree B: AVLTree:
```

```

    {19: 116}
    {18: 139}
    {17: 173}
{16: 187}
  {15: 159}

```

使用相同的命令管理不同算法的树

```
>>> c A avl
```

```
Created tree A with algorithm avl
```

```
>>> c T treap
```

```
Created tree T with algorithm treap
```

```
>>> c S splay
```

```
Created tree S with algorithm splay
```

```
>>> S A 1 10 # insert [1, 10) to tree A
```

```
...
```

```
>>> S T 1 10 # insert [1, 10) to tree T
```

```
...
```

```
>>> S S 1 10 # insert [1, 10) to tree S
```

```
...
```

```
>>> p ATS
```

```
Tree A: AVLTree:
```

```

    {9: 91}
    {8: 15}
    {7: 44}
  {6: 76}
  {5: 30}
{4: 26}
  {3: 28}
  {2: 97}
  {1: 13}

```

```
Tree T: Treap:
```

```

    {9: 33}
    {8: 98}
    {7: 51}
    {6: 94}
  {5: 67}
  {4: 94}

```

```

        {3: 98}
    {2: 21}
    {1: 61}
Tree S: SplayTree:
    {9: 14}
        {8: 27}
            {7: 92}
                {6: 47}
                    {5: 60}
                        {4: 13}
                            {3: 24}
                                {2: 62}
                                    {1: 54}
>>>

```

1.1.2 实现

```

while (true) {
    std::cout << PROMPT;
    std::string line;
    if (!std::getline(std::cin, line)) {
        std::cout << msg[Ret::EXIT];
        break;
    }
    if (line.empty()) continue;
    auto [cmd, args] = parse(parse, line);
    char ch = '\0';
    std::istringstream cmd_iss(cmd), iss(args);
    cmd_iss >> ch;
    if (commands.contains(ch)) {
        auto ret = commands[ch](std::move(iss));
        std::cout << msg[ret];
        if (ret == Ret::EXIT) {
            break;
        }
    } else {
        std::cout << msg[Ret::INVALID];
    }
}

```

通过预定义的 command handle 不断地处理每一个操作，十分简洁

parse 和 commands 的详细内容可以查看源代码

1.2 算法

语言: C++

使用 template 实现对于 Key, Value 的泛型支持

使用 CRTP & Mixin 实现代码复用

最大程度上复用代码的同时实现了多种平衡算法: BasicTree, AVLTree, Treap, SplayTree

三层类结构, 逐级擦除类型信息

TreeAdapter<K, V, Impl> : Tree<K, V> : TreeBase

使用 Tree<K, V> 时不需要关心内部用的什么算法实现平衡树

使用 TreeBase 时不需要关心内部的 key, value 是什么类型

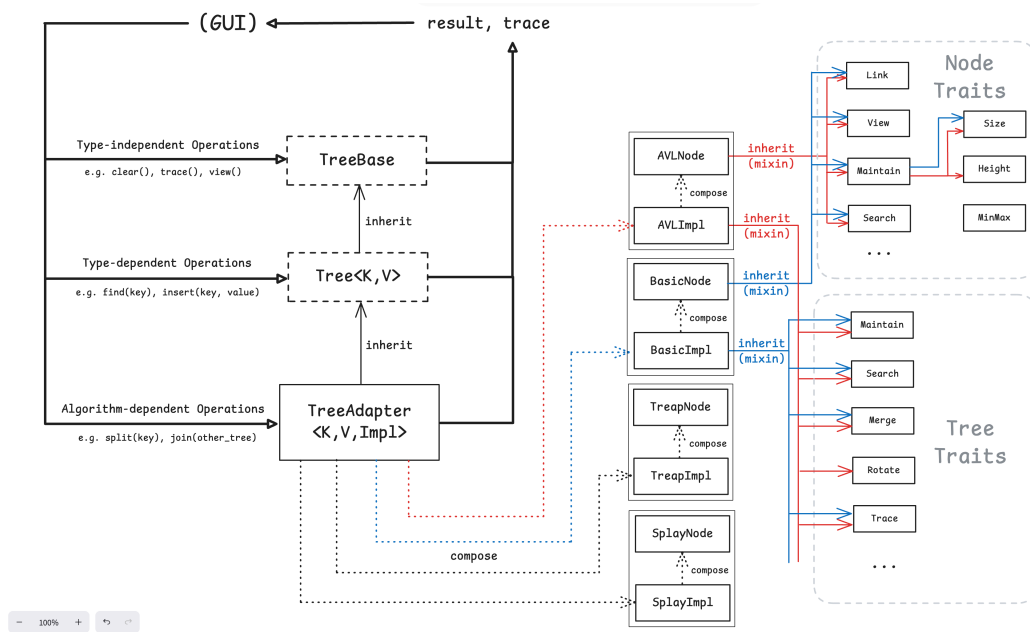


图 1 Tree 类图, 实线继承, 虚线组合

1.2.1 基础操作实现

例: 实现 `find(trait::node::Search, trait::Search)`

```
template <typename Node> struct Search {
    auto find(auto&& key) {
        // ...
    }
};

template <typename Tree> struct Search {
    auto find(auto&& key) {
        auto&& root = static_cast<const Tree*>(this)->root;
        return root ? root->find(key) : nullptr;
    }
};
```

Define once, use everywhere.

```
/// @pseudocode
struct BasicTreeImpl : Search<BasicTreeImpl>;
struct AVLTreeImpl : Search<AVLTreeImpl>;
struct TreapImpl : Search<TreapImpl>;
```

例: 实现可提供不同功能的 `maintain()` (`trait::node::Maintain`)

```
template <typename Node> struct Height {
    int height{1};
    void maintain() {
        auto& self = *(static_cast<Node*>(this));
        auto l = self.child[L] ? self.child[L]->height : 0;
        auto r = self.child[R] ? self.child[R]->height : 0;
        self.height = 1 + std::max(l, r);
    }
};
```

```
};
template <typename Node> struct Size {
    size_t size{1};
    void maintain() {
        auto& self = *(static_cast<Node*>(this));
        auto l = self.child[L] ? self.child[L]->size : 0;
        auto r = self.child[R] ? self.child[R]->size : 0;
        self.size = 1 + l + r;
    }
};
—
```

合并不同的属性, 创建一个自动维护所有属性的 maintain() 方法

```
// helper trait to maintain multiple properties
template <typename... Ts> struct Maintain : Ts... {
    void maintain() { (Ts::maintain(), ...); }
};
```

根据需要维护的属性, 继承不同的 Maintain 特性

```
/// @pseudocode

// imports a maintain() that maintains size
struct BasicNode : Maintain<Size<BasicNode>>;
// imports a maintain() that maintains both size and height
struct AVLNode : Maintain<Size<AVLNode>, Height<AVLNode>>;
—
```

1.2.2 旋转实现 (trait::Rotate)

bind, unbind 控制子树的挂载和拆卸, moveNode 移动节点

这两个辅助函数都会记录下当前森林的状态到 trace 中

具体旋转的方法不再赘述

```
template <typename Tree> struct Rotate {
    void rotate(int dir, auto& root) {
        auto& self = *static_cast<Tree*>(this);
        auto new_root = self.unbind(root, dir ^ 1);
        if (new_root->child[dir]) {
            self.bind(root, dir ^ 1, self.unbind(new_root, dir));
        }
        auto parent = root->parent;
        self.bind(new_root, dir, std::move(root));
        self.moveNode(root, std::move(new_root), parent);
        root->child[dir]->maintain();
        root->maintain();
    }
    void rotatEL(auto& root) { return rotate(L, root); }
    void rotateR(auto& root) { return rotate(R, root); }
    void rotatELR(auto& root) {
        rotatEL(root->child[L]), rotateR(root);
    }
    void rotateRL(auto& root) {
        rotateR(root->child[R]), rotatEL(root);
    }
};
```

1.2.3 AVL 树的 split 和 join (AVLTree::{join, split})

- 先实现 join(left_tree, separator_node, right_tree): 给定 key 值不交的两棵 AVL 树和一个 key 值在两树之间的分界点节点, 合并成一棵树

考虑 $\text{height}_{\text{left}} \geq \text{height}_{\text{right}}$ 的情况, 反之对称

在左树中找到高度为 h_{right} 或 $h_{\text{right}} + 1$ 的点 cut_tree, 由于左树是 AVL 树, 一定能找到

将 cut_tree 和 right_tree 挂到 separator_node 上, 然后放回原先的位置

高度最多改变 1, 从 cut_tree 位置向上维护平衡即可。

时间复杂度: $O(|h_{\text{left}} - h_{\text{right}}|)$

- join(left_tree, right_tree):

删除 left_tree.max() 或 right_tree.min(), 转换为带 separator 的 join

- split(tree, key)

如右图所示, 在 find(key) 的路径上的位置将节点和它的左右子树分开

然后自底向上合并, 每一次合并用路径中的点 (图中的 P_i) 作为 separator 合并两子树

$$\begin{aligned}\alpha P &\leftarrow \text{join}(\alpha, P) \\ \beta P_8 \beta_8 &\leftarrow \text{join}(\beta, P_8, \beta_8) \\ \alpha_7 P_7 \alpha P &\leftarrow \text{join}(\alpha_7, P_7, \alpha P) \\ \dots &\leftarrow \dots\end{aligned}$$

每一次合并的复杂度是高度差, 高度差之和不超过总高度, 所以复杂度为 $O(\log n)$

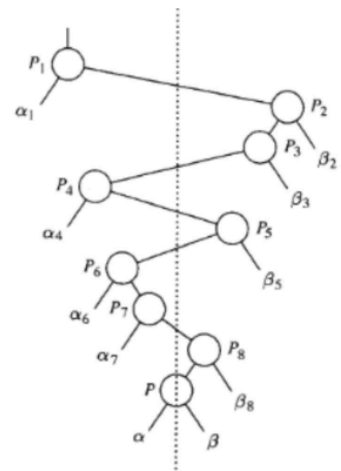


图 2 split 演示. ref.TAOCP

1.3 实现细节

- 基类接口, 提供类型无关的方法:

```
struct TreeBase {
    virtual ~TreeBase() = default;
    virtual auto size() const -> size_t = 0;
    virtual void clear() = 0;
    virtual auto view() const -> ForestView = 0;
    virtual auto trace() -> std::vector<ForestView> = 0;
    virtual auto trace(const std::function<void()>& func) -> std::vector<ForestView> = 0;
    virtual void traceStart() = 0;
    virtual void traceStop() = 0;
    virtual void printCLI() const = 0;
    virtual auto stringify() const -> std::string = 0;
    virtual auto name() const -> std::string = 0;
};
```

- 在 TreeBase 的基础上定义 Tree 接口, 提供需要 key, value 类型信息的方法


```
template <typename K, typename V> struct Tree : TreeBase {
    virtual auto find(const K& key) -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto findKth(size_t rank) -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto min() -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto max() -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto insert(const K& key, const V& value) -> Status = 0;
    virtual auto remove(const K& key) -> Status = 0;
    virtual void traverse(const std::function<void(const K&, V&)>& func) = 0;
    virtual auto operator[](const K& key) -> V& = 0;
    virtual auto operator[](const K& key) const -> const V& = 0;
};
```

- 通过 TreeAdapter 绑定具体实现到 Tree 接口上

TreeAdapter 拥有一个 Impl 对象, 通过转发 Tree 接口的方法到 Impl 对象上来实现具体的树算法

- 对于 Algorithm-dependent 的方法, TreeAdapter 只需要转发调用到 impl 上, 不需要重载

```
template <typename K, typename V, template <typename, typename> typename Impl>
struct TreeAdapter : Tree<K, V> {
    // @override
    auto size() const -> size_t override { return impl->size(); }
    auto view() const -> ForestView override { return impl->view(); }
    ...

    // @no-override
    auto split(const K& k) -> std::unique_ptr<TreeAdapter> {
        return std::make_unique<TreeAdapter>(impl->split(k));
    }
    auto join(std::unique_ptr<TreeAdapter> other) -> Status {
        return impl->join(std::move(other->impl));
    }
    auto merge(std::unique_ptr<TreeAdapter> other) -> Status {
        return impl->merge(std::move(other->impl));
    }
    ...

    std::unique_ptr<Impl<K, V>> impl;
};
```

将算法通过模版参数 Impl 传入 TreeAdapter, 进而能统一使用 Tree 接口控制不同类型的树

```
template <typename K, typename V>
using BasicTree = TreeAdapter<K, V, BasicTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using AVLTree = TreeAdapter<K, V, AVLTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using SplayTree = TreeAdapter<K, V, SplayTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using Treap = TreeAdapter<K, V, TreapImpl>;
```

使用举例:

```
std::vector<std::unique_ptr<Tree<int, int>>> trees;
trees.push_back(std::make_unique<BasicTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<AVLTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<SplayTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<Treap<int, int>>());
```

```
// operations...
for (auto& tree : trees) {
    auto trace = tree->trace(); // 输出每一步后的状态
    printTrace(trace);
}
```

- Impl 的实现: 每一种 Tree 都从 trait:: 中选取使用的特性继承, 比如: AVL/Splay 使用旋转特性
- AVLNode 需要维护 Height, 而普通 Node 不需要,
所以分别继承 Maintain<Size<AVLNode>, Height<AVLNode>> 和 Maintain<Size<Node>>

```
template <typename K, typename V>
struct BasicNode : Pair<const K, V>,
    trait::node::TypeTraits<K, V>,
    trait::node::Link<BasicNode<K, V>>,
    trait::node::View<BasicNode<K, V>>,
    trait::node::Maintain<trait::node::Size<BasicNode<K, V>>>,
    trait::node::Search<BasicNode<K, V>> {

    BasicNode(const K& k, const V& v, BasicNode* parent = nullptr)
        : Pair<const K, V>(k, v), trait::node::Link<BasicNode<K, V>>(parent) {
        this->maintain();
    }
};
```

```
template <typename K, typename V>
struct AVLNode
    : Pair<const K, V>,
    trait::node::TypeTraits<K, V>,
    trait::node::Link<AVLNode<K, V>>,
    trait::node::View<AVLNode<K, V>>,
    trait::node::Maintain<trait::node::Size<AVLNode<K, V>>, trait::node::Height<AVLNode<K, V>>>,
    trait::node::Search<AVLNode<K, V>> {

    AVLNode(const K& k, const V& v, AVLNode* parent = nullptr)
        : Pair<const K, V>(k, v), trait::node::Link<AVLNode<K, V>>(parent) {
        this->maintain();
    }
};
```

几乎不用写任何附加代码就完成了两种节点的创建

- 可以看到每一个基类模版的参数中都要写派生类比较麻烦, 构造树时由于 trait 比较多, 这个问题更加明显, 写一个 Mixin 辅助模版类减少 CRTP 重复的派生类声明

```
/// @struct Mixin
/// @brief simply mixin multiple traits into a single type, Mixin<T, A, B> serves as A<T>, B<T>
template <typename Type, template <typename> class... Traits> struct Mixin : Traits<Type>...
{};
```

```
template <typename K, typename V>
struct AVLTreeImpl
    : trait::Mixin<AVLNode<K, V>, trait::TypeTraits, trait::Maintain>,
```

```

trait::Mixin<
    AVLTreeImpl<K, V>, trait::InsertRemove, trait::Search, trait::Clear,
    trait::Size, trait::Height, trait::Print, trait::Traverse, trait::Merge,
    trait::Subscript, trait::Conflict, trait::Box, trait::Detach, trait::View,
    trait::Trace, trait::TracedBind, trait::TracedConstruct, trait::Rotate,
    trait::Iterate> {
    // ...
};

```

1.3.1 内存管理

使用 `std::unique_ptr` 管理节点所有权, 防止内存泄露或者 double free 问题

```

template <typename Node> struct Link {
    Node* parent{nullptr};
    std::unique_ptr<Node> child[2]{nullptr, nullptr};
    Link(Node* parent = nullptr) : parent(parent) {}
};

```

移交所有权时使用 `std::move()`, 可读性与安全性都很好

1.3.2 Trace 记录 (trait::Trace)

- 在结构体中放一个 `std::vector<ForestView>` record; 记录每一步操作之后的状态

所有对树结构的操作都通过调用 `bind()`, `unbind()` 方法, 内部自动维护以及记录 trace

- 记录 trace 的方法:

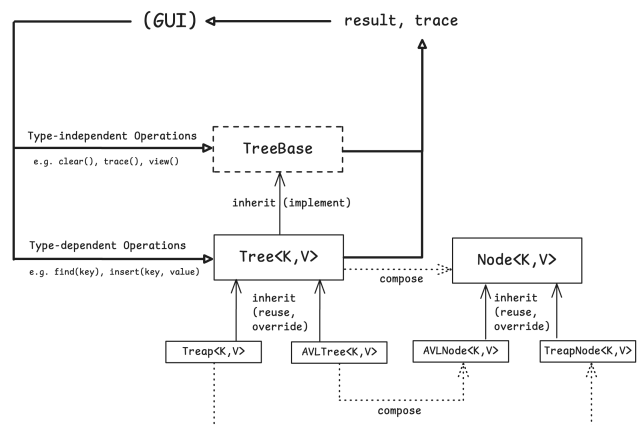
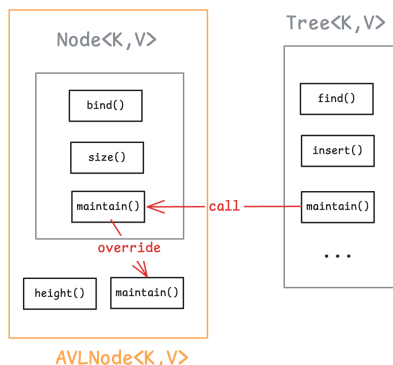
维护当前森林的根节点列表 `std::set<Node*>` entries;

每作一次记录 `snapshot()` 就复制出 entries 对应每一颗树中的信息, 保存至 record

1.3.3 性能优化

最开始的构造:

- 非常容易想到



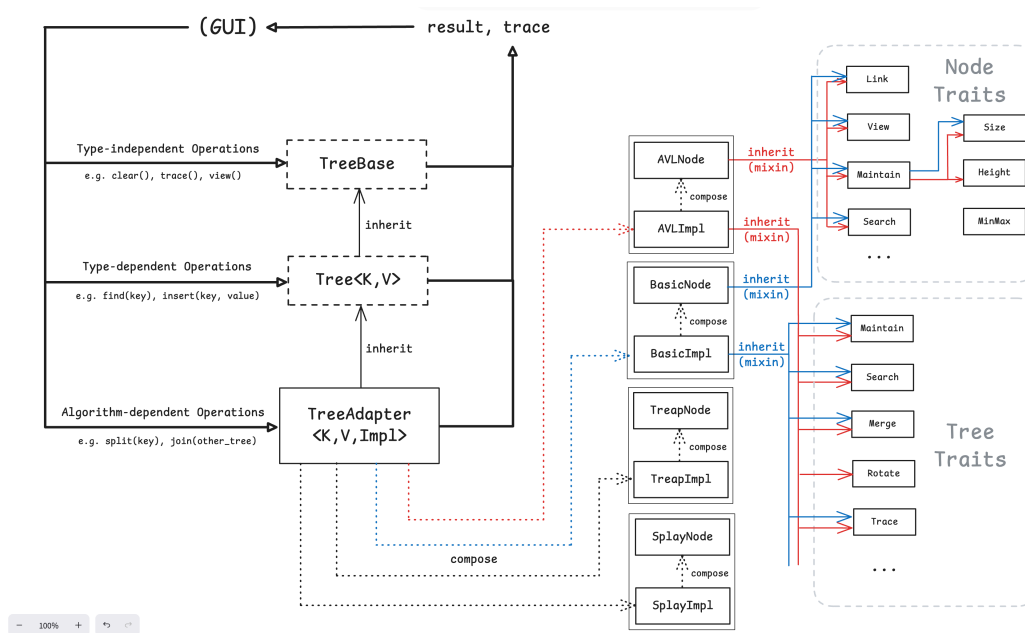
但

- 以 `maintain()` 为例, 每一次自底向上维护信息时, 都需要调用 `node::maintain()`, 然而这是一个虚函数, 没法内联, 每一次调用都有额外开销

- Tree 中只会存一个基类的 Node 指针，每一次使用子类 Node 特有信息时都需要 `static_cast` 或者 `dynamic_cast`
- 拓展功能比较麻烦
 - Splay 和 AVL 都可以旋转，要么实现两遍，要么创建一个 `RotatableTree`，增加继承层级
 - 更好的想法应该是把 `Rotate` 抽出来作为一个只提供旋转功能的 trait
 - 既然如此，为什么不把所有的功能都抽出来？

重构!

- 所有树平级，复用的功能只由 trait 提供
- 由于不同的树之间没有子类型关系，需要一个 `TreeAdapter` 来绑定到相同的接口上



查看是否内联:

- 重构前

```
$ nm | c++filt
000000010001e7c8 legacy::AVLTree<int, int>::AVLNode::maintain()
000000010001c4ec legacy::Tree<int, int>::Node::maintain()
```

只有 `Tree::maintain()` 被内联了，`Node` 本身的 `maintain()` 没有被内联

- 重构后:

```
$ nm | c++filt
0000000100020578 AVLNode<int, int>::stringify() const
000000010001fe4c AVLNode<int, int>::~~AVLNode()
```

Tree	Insert	Find	Remove
legacy::AVLTree(ms)	48.40	11.65	49.86
AVLTree(ms)	32.35	10.21	41.70
std::map(ms)	25.09	11.58	30.74

CRTP Improvement(%) 33.15 12.32 16.35

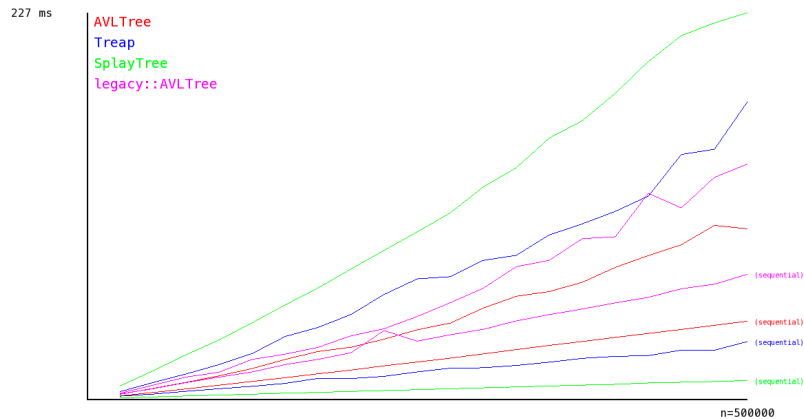


图 6 benchmark: insert

可以看到重构后提升还是很显著的

完整代码: <https://github.com/cauphenuny/ucas-data-structure>

1.4 单元测试

整个项目十分复杂, 因此为每个功能写了测试

使用 doctest 库进行单元测试

```
$ build/balanced_tree test
[doctest] doctest version is "2.4.12"
[doctest] run with "--help" for options
=====
[doctest] test cases: 26 | 26 passed | 0 failed | 0 skipped
[doctest] assertions: 6854 | 6854 passed | 0 failed |
[doctest] Status: SUCCESS!
```

测试举例

```
SUBCASE("Split and merge") {
    // Split at 50
    auto other = tree->split(50);
    CHECK(other != nullptr);
    CHECK(tree->size() + other->size() == 7);

    Test::check(tree);
    Test::check(other);

    // Verify split worked correctly
    CHECK(tree->find(30) != nullptr);
    CHECK(tree->find(20) != nullptr);
    CHECK(tree->find(40) != nullptr);
    CHECK(tree->find(50) == nullptr);
    CHECK(tree->find(70) == nullptr);

    CHECK(other->find(50) != nullptr);
    CHECK(other->find(70) != nullptr);
    CHECK(other->find(60) != nullptr);
    CHECK(other->find(80) != nullptr);
}
```

```

// Merge back
tree->merge(std::move(other));
CHECK(tree->size() == 7);
CHECK(tree->find(50) != nullptr);
CHECK(tree->find(70) != nullptr);
CHECK(tree->find(60) != nullptr);
CHECK(tree->find(80) != nullptr);

Test::check(tree);
}

```

二、实习 2.4 马踏棋盘问题演示

2.1 算法

2.1.1 暴力搜索算法

暴力算法实现 `solve_brute_force(Point start)`:

通过手动维护一个栈记录走过的路径结点坐标与正在尝试的方向，当无路可走时利用栈进行回溯从而尝试新的路径。

```

class SimpleStack {
private:
    T* base;
    int top;
    int capacity; // 当前容量

    void expand() { ...
public:
    SimpleStack(int initial_capacity = 100) : base(nullptr), top(-1),
capacity(initial_capacity) { ... // 构造
    ~SimpleStack() { ... // 销毁
    void push(const T& value) { ... // 入栈
    void pop() { ... // 出栈
    T& peek() { ... // 读栈顶
    bool empty() const { ... // 判断是否栈空
    int size() const { ... // 返回栈元素个数
}

```

为了可视化搜索的过程，我们决定记录过程中每一步试探（包括回溯）。

最开始算法中每步都存储完整的棋盘（二维数组），但每步都存储一个棋盘带来的内存占用过大。

后来我们决定只使用起始点与终止点的坐标对记录每一步的行动，通过 `stepNext` 标签记录该步是前进还是回溯。

```

struct Arrow {
    Point start, end;
    bool stepNext; // 前进为1, 后退为0
};

void Print_board(Board);

using Path = std::vector<Arrow>; // 一条可行路径

// 算法返回值:
return std::vector<Path> // 允许返回多条可行路径

```

但即便如此, 暴力搜索算法的大量路径试探仍会带来无法承受的内存开销。

2.1.2 贪心算法

贪心算法实现 `solve_heuristic(Point start)`:

基于 H. C. von Warnsdorf 于 1823 提出的 Warnsdorf's Rule —— 每步选择可移动方向最少得位置移动。该算法可以以极快的速度给出一个可行解。

通过 `count_onward_moves()` 计算落点的可走步数:

```
static int count_onward_moves(const Board& board, int x, int y) {
    int count = 0;
    for (int i = 0; i < 8; ++i) {
        int nx = x + dx[i];
        int ny = y + dy[i];
        if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) ==
0) {
            ++count;
        }
    }
    return count;
}
```

在 `solve_heuristic(Point start)` 内部对每一步的 `MoveOption` 数组排序, 并向最小的方向进发。

```
// 枚举所有下一步的可选走法
for (int i = 0; i < 8; ++i) {
    int nx = x + dx[i];
    int ny = y + dy[i];
    if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) == 0) {
        int onward = count_onward_moves(board, nx, ny);
        options.push_back({nx, ny, onward});
    }
}
// 按后继步数升序排序
std::sort(options.begin(), options.end(), [](const MoveOption& a, const MoveOption& b) {
    return a.onward < b.onward;
});
```

但贪心算法只能得到一个可行解。我们希望算法可以找到多条可行解 (具有找到全部可行解的潜力)。

2.1.3 基于 Warnsdorf's Rule 的深度搜索算法

算法实现 `solve_heuristic_enhancer(Point start)`:

首次到达某结点时, 基于 Warnsdorf's Rule 对其可行方向排序, 优先选择出路最少的方向从而减少回溯次数。

由于框架仍是深度优先搜索, 如果想找到多条可行路径, 只需在找到一条可行路径后继续回溯即可。

```
while (!stk.empty()) {
    if (step == BOARD_SIZE * BOARD_SIZE) {
        if (!stk.empty()) {...} // 保存最后一步结果
        if (countHistory == NUM_OF_PATH) break;
        else {...} // 后退一步继续搜其他路径
    }
}
```

```

        Point end = stk.peek().pos;
        stk.pop(); --step; board(end.x, end.y) = 0;
        Point start = stk.empty() ? end : stk.peek().pos;
        history.push_back({end, start, 0});
        continue;
    }
}

// 首次处理该节点时, 按启发式规则排序可能方向
if (current.sorted_dirs.empty()) {
    struct MoveOption {
        int dir;
        int onward;
    };
    std::vector<MoveOption> options;
    for (int i = 0; i < 8; ++i) {
        int nx = cur_pos.x + dx[i];
        int ny = cur_pos.y + dy[i];
        if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) == 0)
        {
            int onward = count_onward_moves(board, nx, ny);
            options.push_back({i, onward});
        }
    }

    std::sort(options.begin(), options.end(), [](const MoveOption& a, const MoveOption& b)
    {
        return a.onward < b.onward;
    });

    for (const auto& opt : options)
        current.sorted_dirs.push_back(opt.dir);
}

```

2.2 图形用户界面

图形用户界面的实现基于第三方库 SFML (Simple and Fast Multimedia Library), 这是一个基于 C++ 开发的开源多媒体库, 其一大特点是跨平台支持。

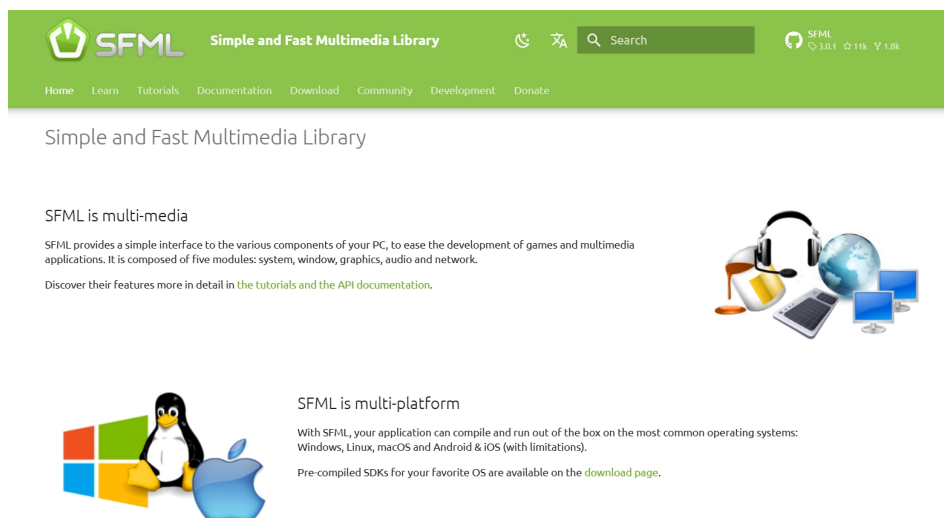


图 7 SFML 官网

我们使用的是 SFML 的最新版本 3.0.1。

SFML 在从版本 2 升级到 3 时做了巨大调整, 虽然代码设计得到优化, 并开始支持更多高级特性, 但也导致 SFML 3 的 API 与 SFML 2 的基本完全不兼容。而现有的绝大部分资料都是关于 SFML 2 的使用 (距离此次重大版本更新仅仅过去半年, 而 SFML 2 已存在 12 余年), 甚至 SFML 3 的官方文档也尚不完善。

在查看 API 接口源代码以外, 我们还使用了一个强大的工具——DeepWiki。它可以根据 GitHub 仓库的文件内容, 生成仓库专属 Wiki, 包括仓库整体架构、主要功能模块和实现方式等。它还支持用户询问仓库相关信息。这一工具极大方便我们快速了解仓库代码功能、仓库结构等重要信息, 节省大量时间。

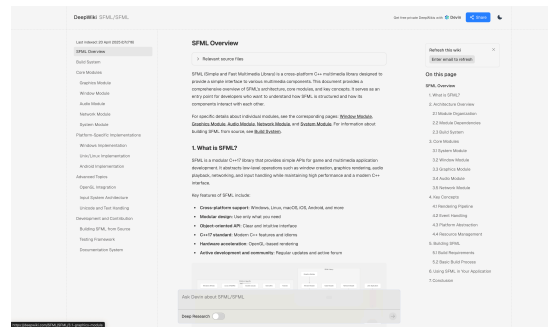


图 8 SFML 项目的 DeepWiki 页面

2.2.1 GUI 设计

界面设计遵循关注点分离的原则, 将棋盘渲染、控制面板、动画管理、事件分发与处理等功能封装到不同的类中。类与类之间维持继承与组合关系, 形成下面的关系网。

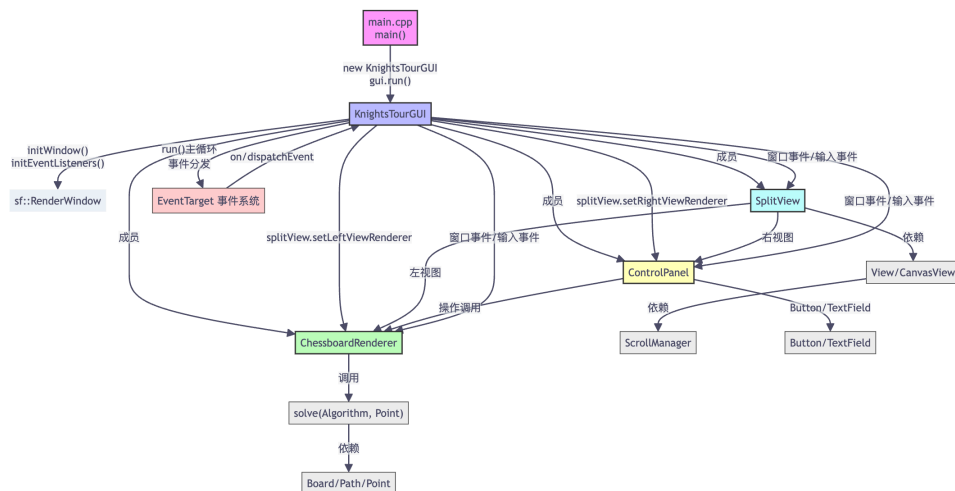


图 9 GUI 结构

界面的主逻辑采用经典的游戏循环架构, 即最外层循环判断窗口是否开启, 循环内部进行事件处理、逻辑更新和渲染绘制三个核心阶段。

```
void KnightsTourGUI::run() {
    while (window.isOpen()) {
        static sf::Clock deltaClock;
        float deltaTime = deltaClock.restart().asSeconds();

        // 检查事件
        while (const std::optional event = window.pollEvent()) {
            dispatchEvent<sf::Event::Closed,
                sf::Event::Resized,
                sf::Event::MouseButtonPressed,
                sf::Event::KeyPressed>
                (event);
        }
    }
}
```

```

        update(deltaTime);
        render();
    }
}

```

事件处理方面, 使用模板特化与折叠表达式, 实现诸多事件的统一分发。

<pre> // 事件类型枚举 enum class EventType : uint8_t{ WINDOW_CLOSE, WINDOW_RESIZE, MOUSE_WHEEL, ... }; class EventTarget { public: template<typename... TEventSubtypes> inline void dispatchEvent(const Event& event) { if (!event) return; (dispatchIfType<TEventSubtypes>(event), ...); } private: ListenerMap listeners_; template<typename TEventSubtype> inline void dispatchIfType(const Event& event) {...} }; </pre>	<pre> // 通过特化实现 SFML 事件类型到 EventType 的映射 template<typename TEventSubtype> struct EventTypeMap; template<> struct EventTypeMap<sf::Event::Closed> { static constexpr EventType value = EventType::WINDOW_CLOSE; }; template<> struct EventTypeMap<sf::Event::Resized> { static constexpr EventType value = EventType::WINDOW_RESIZE; }; ... template<typename TEventSubtype> constexpr EventType event_t = EventTypeMap<TEventSubtype>::value; </pre>
--	--

这样写看上去很复杂。实际上在 SFML 2 中实现同样逻辑只需寥寥数行代码, 见左边代码块。这是因为 SFML 2 中的 `sf::Event event` 包含一个可以直接访问的成员 `enum EventType type`, 可以直接获取事件的类型并进行比较; 而 SFML 3 中则删除了 `type`, 取而代之的是一个私有成员 `m_data`。两个版本的 `Event` 类的结构如右边代码块所示 (注释内是 SFML 2 的版本)。

可见 SFML 3 使用 `std::variant` 实现了更安全的事件类, 但代价是对事件的处理也更加复杂。

<pre> switch (event.type) { case sf::Event::Closed: window.close(); break; case sf::Event::Resized: ... break; ... default: break; } </pre>	<pre> namespace sf { class Event { public: struct Closed {}; struct Resized { Vector2u size; } ... /* enum EventType {Closed, Resized, ...}; EventType type; */ private: std::variant<Closed, Resized, ...> m_data; } } </pre>
---	--

2.2.2 GUI 展示

界面分为左右两栏，左侧为棋盘显示区域，右侧为控制面板。用户可以指定马的初始位置，选择执行的算法，调整播放速度等；棋盘区域将展示马的移动轨迹。

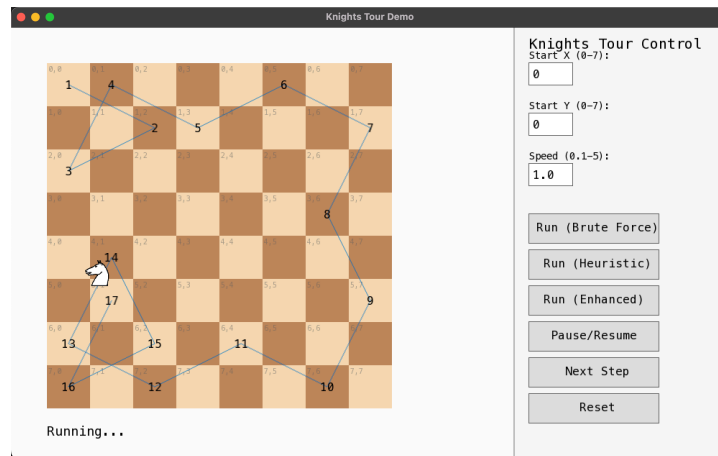


图 10 GUI 演示

经过实测，此图形用户界面在小组成员的不同开发环境中均能正常工作。