数据结构期末汇报

实习 2.4 马踏棋盘，实习 6.4 平衡二叉树操作的演示

袁晨圃，李知谦，邱子陶

University of Chinese Academy of Sciences

2025-06-27

1. 实习 6.4 平衡树操作演示

1.1 CLI

```
$ build/balanced_tree
commands:
    [q]uit
    [h]elp

    [c]reate <tree-id: a-z|A-Z> <algo: basic|avl|treap|splay>
    [d]elete <tree-id: a-z|A-Z>
    [p]rint <tree-id: a-z|A-Z>*

    [i]nsert <tree-id: a-z|A-Z> <key: int> <value: int>
    [r]emove <tree-id: a-z|A-Z> <key: int>
    [f]ind <tree-id: a-z|A-Z> <key: int>

    [s]plit <dest-id: a-z|A-Z> <src-id: a-z|A-Z> <key: int>
    [m]erge <dest-id: a-z|A-Z> <src-id: a-z|A-Z>

    [R]andom-insert <tree-id: a-z|A-Z> <count: int>
    [S]equential-insert <tree-id: a-z|A-Z> <start: int> <end: int>

trace mode:
    [n]: next
    [c]: auto continue
>>>
```

1.1 CLI

我们实现了一个功能强大的解释器环境

支持创建/删除/输出树，在树中插入/删除/查找节点，分割树，合并树。

树名为单个字母 (a-z, A-Z)，可以使用任意算法 (basic: 普通 BST, avl: AVLTree, treap: Treap, splay: Splay) 创建树

支持随机插入和顺序插入若干个节点。

在每一个操作之后都会打印单步结果 (trace)，对树结构的任何操作（例如：连接或者断开连接子树）都会被实时记录下来。

显示 trace 时支持自动继续 (c) 和单步执行 (n)。

1.1 CLI

使用示例:

- 插入/删除/查找

```
>>> c A avl # create an AVLTree A
Created tree A with algorithm avl
>>> i A 1 10 # insert key-value 1-10 to tree A
Inserted {1: 10} into tree A
------------
Trace of tree A:
#1:
{1: 10}
>>> f A 1
Found {1: 10} in tree A
>>> i A 2 20
Inserted {2: 20} into tree A
------------
Trace of tree A:
#1:
    {2: 20}
{1: 10}
```

```
>>> i A 3 30 # insert cause imbalance, see trace!
Inserted {3: 30} into tree A
------------
Trace of tree A:
#1:
        {3: 30}
    {2: 20}
{1: 10}
------------
(trace) c
#2:
{1: 10}
----
    {3: 30}
{2: 20}
------------
#3:
    {3: 30}
{2: 20}
    {1: 10}
```

1.1 CLI

```
>>> S A 4 12
Inserted sequential elements from 4 to 12 into tree A
...
>>> r A 6
Removed 6 from tree A

------------
Trace of tree A:
#1:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
            {7: 84}
        {6: 71}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
----
{5: 5}
------------
(trace) c
```

```
#2:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
        {6: 71}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
----
{5: 5}
----
{7: 84}
------------
```

1.1 CLI

```
#3:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
        {6: 71}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
------------
```

```
#4:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
----
{6: 71}
------------
```

1.1 CLI

```
#5:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
----
    {7: 84}
{5: 5}
------------
```

```
#6:
            {11: 92}
        {10: 25}
            {9: 100}
    {8: 28}
            {7: 84}
        {5: 5}
{4: 85}
        {3: 30}
    {2: 20}
        {1: 10}
>>>
```

1.1 CLI

- 分裂：在$O(\log n)$ 时间内分裂出 $\geq$ key 的所有节点到一颗新树

```
>>> S A 10 20 # insert [10, 20) to tree A
...
>>> p
Tree A: AVLTree:
                {19: 116}
            {18: 139}
                {17: 173}
        {16: 187}
            {15: 159}
    {14: 143}
                {13: 169}
            {12: 160}
                {11: 195}
        {10: 124}
                {3: 30}
            {2: 20}
                {1: 10}
```

1.1 CLI

```
>>> s B A 15 # split tree A at key 15, result in tree B
...
>>> p
Tree A: AVLTree:
            {14: 143}
                {13: 169}
        {12: 160}
            {11: 195}
    {10: 124}
            {3: 30}
        {2: 20}
            {1: 10}
Tree B: AVLTree:
            {19: 116}
        {18: 139}
            {17: 173}
    {16: 187}
        {15: 159}
```

1.1 CLI

使用相同的命令管理不同算法的树

```
>>> c A avl
Created tree A with algorithm avl
>>> c T treap
Created tree T with algorithm treap
>>> c S splay
Created tree S with algorithm splay
>>> S A 1 10 # insert [1, 10) to tree A
...
>>> S T 1 10 # insert [1, 10) to tree T
...
>>> S S 1 10 # insert [1, 10) to tree S
...
>>> p ATS
Tree A: AVLTree:
                    {9: 91}
                {8: 15}
                    {7: 44}
            {6: 76}
                {5: 30}
        {4: 26}
                {3: 28}
            {2: 97}
```

```
                {1: 13}
Tree T: Treap:
                        {9: 33}
                    {8: 98}
                {7: 51}
                    {6: 94}
            {5: 67}
                    {4: 94}
                {3: 98}
        {2: 21}
            {1: 61}
Tree S: SplayTree:
        {9: 14}
            {8: 27}
                {7: 92}
                    {6: 47}
                        {5: 60}
                            {4: 13}
                                {3: 24}
                                    {2: 62}
                                        {1: 54}
>>>
```

1.2 算法

语言：C++

使用 template 实现对于 `Key`，`Value` 的泛型支持

使用 CRTP & Mixin 实现代码复用

最大程度上复用代码的同时实现了多种平衡算法：`BasicTree`, `AVLTree`, `Treap`, `SplayTree`

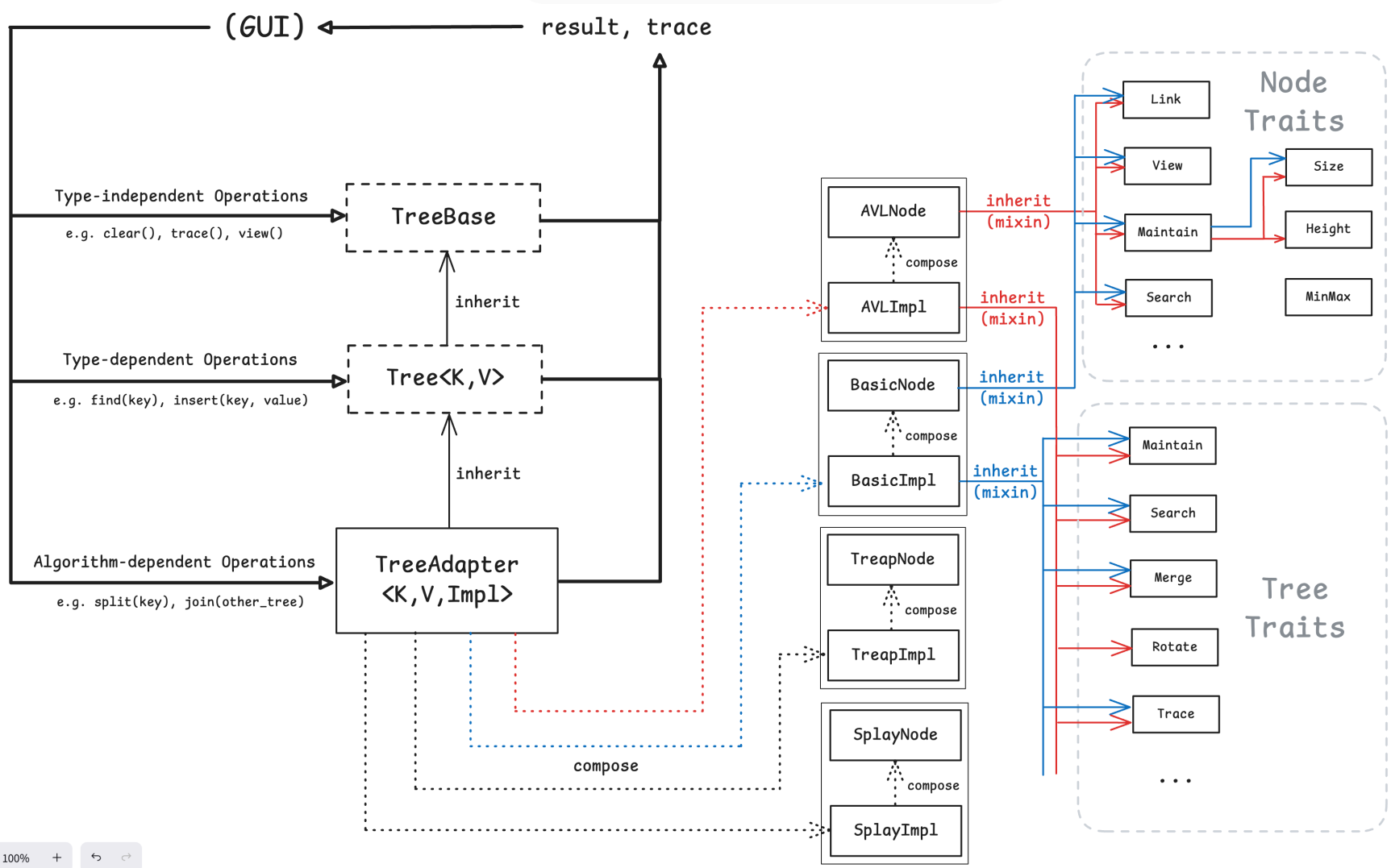
三层类结构，逐级擦除类型信息

`TreeAdapter<K, V, Impl> : Tree<K, V> : TreeBase`

使用 `TreeBase` 时不需要关心内部的 `key`，`value` 是什么类型

使用 `Tree<K, V>` 时不需要关心内部用的什么算法实现平衡树

1.2 算法


(GUI)
result, trace
Type-independent Operations
e.g. clear(), trace(), view()
TreeBase
inherit
Type-dependent Operations
e.g. find(key), insert(key, value)
Tree<K,V>
inherit
Algorithm-dependent Operations
e.g. split(key), join(other_tree)
TreeAdapter
<K,V,Impl>
compose
AVLNode
compose
AVLImpl
BasicNode
compose
BasicImpl
TreapNode
compose
TreapImpl
SplayNode
compose
SplayImpl
inherit
(mixin)
Node
Traits
Link
View
Size
Maintain
Height
Search
MinMax
Tree
Traits
Maintain
Search
Merge
Rotate
Trace

1.2 算法

1.2.1 基础操作实现

例：实现 `find` (`trait::node::Search`, `trait::Search`)

```
template <typename Node> struct Search {
    auto find(auto&& key) {
        // ...
    }
};
template <typename Tree> struct Search {
    auto find(auto&& key) {
        auto&& root = static_cast<const Tree*>(this)->root;
        return root ? root->find(key) : nullptr;
    }
};
```

Define once, use everywhere.

```
/// @pseudocode
struct BasicTreeImpl : Search<BasicTreeImpl>;
struct AVLTreeImpl : Search<AVLTreeImpl>;
struct TreapImpl : Search<TreapImpl>;
```

1.2 算法

例：实现可提供不同功能的 maintain() (trait::node::Maintain)

```
template <typename Node> struct Height {
    int height{1};
    void maintain() {
        auto& self = *(static_cast<Node*>(this));
        auto l = self.child[L] ? self.child[L]->height : 0;
        auto r = self.child[R] ? self.child[R]->height : 0;
        self.height = 1 + std::max(l, r);
    }
};
template <typename Node> struct Size {
    size_t size{1};
    void maintain() {
        auto& self = *(static_cast<Node*>(this));
        auto l = self.child[L] ? self.child[L]->size : 0;
        auto r = self.child[R] ? self.child[R]->size : 0;
        self.size = 1 + l + r;
    }
};
```

1.2 算法

合并不同的属性，创建一个自动维护所有属性的 maintain() 方法

```
// helper trait to maintain multiple properties
template <typename... Ts> struct Maintain : Ts... {
    void maintain() { (Ts::maintain(), ...); }
};
```

根据需要维护的属性，继承不同的 Maintain 特性

```
/// @pseudocode

// imports a maintain() that maintains size
struct BasicNode : Maintain<Size<BasicNode>>;
// imports a maintain() that maintains both size and height
struct AVLNode : Maintain<Size<AVLNode>, Height<AVLNode>>;
```

1.2 算法

1.2.2 旋转实现 (trait::Rotate)

bind, unbind 控制子树的挂载和拆卸，moveNode 移动节点

这两个辅助函数都会记录下当前森林的状态到 trace 中

具体旋转的方法不再赘述

```
template <typename Tree> struct Rotate {
    void rotate(int dir, auto& root) {
        auto& self = *static_cast<Tree*>(this);
        auto new_root = self.unbind(root, dir ^ 1);
        if (new_root->child[dir]) {
            self.bind(root, dir ^ 1, self.unbind(new_root, dir));
        }
        auto parent = root->parent;
        self.bind(new_root, dir, std::move(root));
        self.moveNode(root, std::move(new_root), parent);
        root->child[dir]->maintain();
        root->maintain();
    }
    void rotateL(auto& root) { return rotate(L, root); }
    void rotateR(auto& root) { return rotate(R, root); }
    void rotateLR(auto& root) {
```

1.2 算法

```
            rotateL(root->child[L]), rotateR(root);
        }
        void rotateRL(auto& root) {
            rotateR(root->child[R]), rotateL(root);
        }
    };
```

1.2.3 AVL 树的 split 和 join (AVLTree::{join, split})

- 先实现 `join(left_tree, sperator_node, right_tree)`： 给定 key 值不交的两棵 AVL 树和一个 key 值在两树之间的分界点节点，合并成一棵树

  考虑 $\text{height}_{\text{left}} \geq \text{height}_{\text{right}}$ 的情况，反之对称

  在左树中找到高度为 h_{right} 或 $h_{\text{right}}+1$ 的点 `cut_tree`，由于左树是 AVL 树，一定能找到

  将 `cut_tree` 和 `right_tree` 挂到 `seperator_node` 上，然后放回原先的位置

  高度最多改变 1，从 `cut_tree` 位置向上维护平衡即可。

  时间复杂度：$O\left(\left|h_{\text{left}} - h_{\text{right}}\right|\right)$

1.2 算法

1.2.3 AVL 树的 split 和 join (AVLTree::{join, split})

- 先实现 `join(left_tree, sperator_node, right_tree)`： 给定 key 值不交的两棵 AVL 树和一个 key 值在两树之间的分界点节点，合并成一棵树

  考虑 $\text{height}_{\text{left}} \geq \text{height}_{\text{right}}$ 的情况，反之对称

  在左树中找到高度为 h_{right} 或 $h_{\text{right}} + 1$ 的点 `cut_tree`，由于左树是 AVL 树，一定能找到

  将 `cut_tree` 和 `right_tree` 挂到 `seperator_node` 上，然后放回原先的位置

  高度最多改变 1，从 `cut_tree` 位置向上维护平衡即可。

  时间复杂度：$O\left(\left|h_{\text{left}} - h_{\text{right}}\right|\right)$

- `join(left_tree, right_tree)`:

  删除 `left_tree.max()` 或 `right_tree.min()`，转换为带 seperator 的 `join`

1.2 算法

- `split(tree, key)`

  如右图所示，在 `find(key)` 的路径上的位置将节点和它的左右子树分开

  然后自底向上合并，每一次合并用路径中的点（图中的P_i）作为 seperator 合并两子树

$$
\begin{aligned}
\alpha P &\longleftarrow \mathrm{join}(\alpha, P) \\
\beta P_8 \beta_8 &\longleftarrow \mathrm{join}(\beta, P_8, \beta_8) \\
\alpha_7 P_7 \alpha P &\longleftarrow \mathrm{join}(\alpha_7, P_7, \alpha P) \\
\ldots &\longleftarrow \ldots
\end{aligned}
$$

  每一次合并的复杂度是高度差，高度差之和不超过总高度，所以复杂度为 $O(\log n)$

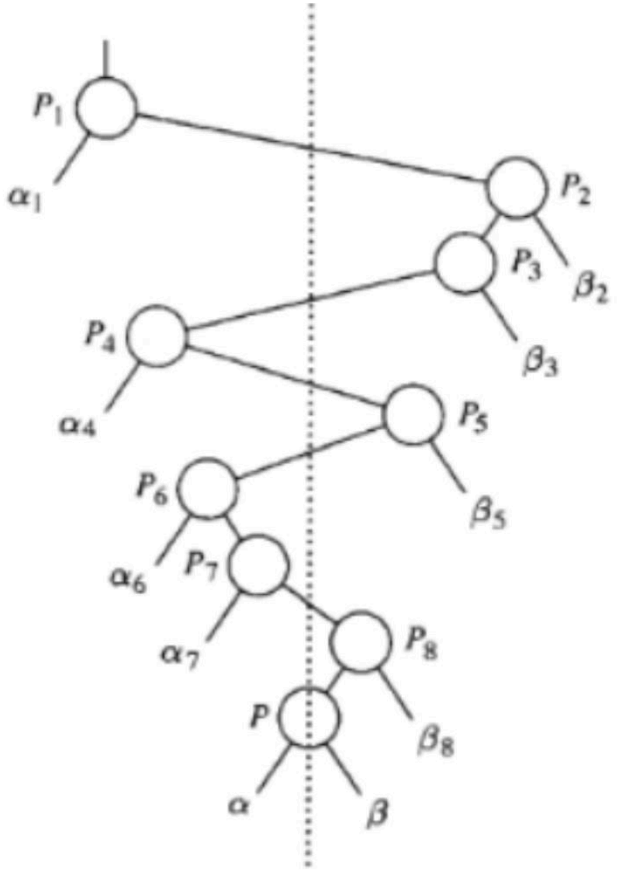


图 2　split 演示. ref.TAOCP

1.3 实现细节

- 基类接口，提供类型无关的方法：

```
struct TreeBase {
    virtual ~TreeBase() = default;
    virtual auto size() const -> size_t = 0;
    virtual void clear() = 0;
    virtual auto view() const -> ForestView = 0;
    virtual auto trace() -> std::vector<ForestView> = 0;
    virtual auto trace(const std::function<void()>& func) -> std::vector<ForestView> = 0;
    virtual void traceStart() = 0;
    virtual void traceStop() = 0;
    virtual void printCLI() const = 0;
    virtual auto stringify() const -> std::string = 0;
    virtual auto name() const -> std::string = 0;
};
```

1.3 实现细节

- 在 TreeBase 的基础上定义 Tree 接口，提供需要 key,value 类型信息的方法

```
template <typename K, typename V> struct Tree : TreeBase {
    virtual auto find(const K& key) -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto findKth(size_t rank) -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto min() -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto max() -> Pair<const K, V>* = 0;
    virtual auto insert(const K& key, const V& value) -> Status = 0;
    virtual auto remove(const K& key) -> Status = 0;
    virtual void traverse(const std::function<void(const K&, V&)>& func) = 0;
    virtual auto operator[](const K& key) -> V& = 0;
    virtual auto operator[](const K& key) const -> const V& = 0;
};
```

1.3 实现细节

- 通过 TreeAdapter 绑定具体实现到 Tree 接口上

TreeAdapter 拥有一个 Impl 对象，通过转发 Tree 接口的方法到 Impl 对象上来实现具体的树算法

- 对于 Algorithm-dependent 的方法，TreeAdapter 只需要转发调用到 impl 上，不需要重载

```
template <typename K, typename V, template <typename, typename> typename Impl>
struct TreeAdapter : Tree<K, V> {
    // @override
    auto size() const -> size_t override { return impl->size(); }
    auto view() const -> ForestView override { return impl->view(); }
    ...

    // @no-override
    auto split(const K& k) -> std::unique_ptr<TreeAdapter> {
        return std::make_unique<TreeAdapter>(impl->split(k));
    }
    auto join(std::unique_ptr<TreeAdapter> other) -> Status {
        return impl->join(std::move(other->impl));
    }
    auto merge(std::unique_ptr<TreeAdapter> other) -> Status {
        return impl->merge(std::move(other->impl));
    }
```

1.3 实现细节

```
    ...

    std::unique_ptr<Impl<K, V>> impl;
};
```

将算法通过模版参数 Impl 传入 TreeAdapter，进而能统一使用 Tree 接口控制不同类型的树

```
template <typename K, typename V>
using BasicTree = TreeAdapter<K, V, BasicTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using AVLTree = TreeAdapter<K, V, AVLTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using SplayTree = TreeAdapter<K, V, SplayTreeImpl>;
template <typename K, typename V>
using Treap = TreeAdapter<K, V, TreapImpl>;
```

使用举例：

```
std::vector<std::unique_ptr<Tree<int, int>>> trees;
trees.push_back(std::make_unique<BasicTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<AVLTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<SplayTree<int, int>>());
trees.push_back(std::make_unique<Treap<int, int>>());
// operations...
```

1.3 实现细节

```
for (auto& tree : trees) {
    auto trace = tree->trace(); // 输出每一步后的状态
    printTrace(trace);
}
```

1.3 实现细节

- Impl 的实现：每一种 `Tree` 都从 `trait::` 中选取使用的特性继承，比如：AVL/Splay 使用旋转特性

AVLNode 需要维护 Height, 而普通 Node 不需要，
所以分别继承 `Maintain<Size<AVLNode>, Height<AVLNode>>` 和 `Maintain<Size<Node>>`

```
template <typename K, typename V>
struct BasicNode : Pair<const K, V>,
                   trait::node::TypeTraits<K, V>,
                   trait::node::Link<BasicNode<K, V>>,
                   trait::node::View<BasicNode<K, V>>,
                   trait::node::Maintain<trait::node::Size<BasicNode<K, V>>>,
                   trait::node::Search<BasicNode<K, V>> {

    BasicNode(const K& k, const V& v, BasicNode* parent = nullptr)
        : Pair<const K, V>(k, v), trait::node::Link<BasicNode<K, V>>(parent) {
        this->maintain();
    }
};
```

1.3 实现细节

```
template <typename K, typename V>
struct AVLNode
    : Pair<const K, V>,
      trait::node::TypeTraits<K, V>,
      trait::node::Link<AVLNode<K, V>>,
      trait::node::View<AVLNode<K, V>>,
      trait::node::Maintain<trait::node::Size<AVLNode<K, V>>, trait::node::Height<AVLNode<K, V>>>,
      trait::node::Search<AVLNode<K, V>> {

    AVLNode(const K& k, const V& v, AVLNode* parent = nullptr)
        : Pair<const K, V>(k, v), trait::node::Link<AVLNode<K, V>>(parent) {
        this->maintain();
    }
};
```

几乎不用写任何附加代码就完成了两种节点的创建

1.3 实现细节

- 可以看到每一个基类模版的参数中都要写派生类比较麻烦，构造树时由于 trait 比较多，这个问题更加明显，写一个 Mixin 辅助模版类减少 CRTP 重复的派生类声明

```
/// @struct Mixin
/// @brief simply mixin multiple traits into a single type, Mixin<T, A, B> serves as A<T>, B<T>
template <typename Type, template <typename> class... Traits> struct Mixin : Traits<Type>... {};


template <typename K, typename V>
struct AVLTreeImpl
    : trait::Mixin<AVLNode<K, V>, trait::TypeTraits, trait::Maintain>,
      trait::Mixin<
          AVLTreeImpl<K, V>, trait::InsertRemove, trait::Search, trait::Clear,
          trait::Size, trait::Height, trait::Print, trait::Traverse, trait::Merge,
          trait::Subscript, trait::Conflict, trait::Box, trait::Detach, trait::View,
          trait::Trace, trait::TracedBind, trait::TracedConstruct, trait::Rotate,
          trait::Iterate> {
    // ...
};
```

1.3 实现细节

1.3.1 内存管理

使用 std::unique_ptr 管理节点所有权，防止内存泄露或者 double free 问题

```
template <typename Node> struct Link {
    Node* parent{nullptr};
    std::unique_ptr<Node> child[2]{nullptr, nullptr};
    Link(Node* parent = nullptr) : parent(parent) {}
};
```

移交所有权时使用 std::move()，可读性与安全性都很好

1.3 实现细节

1.3.1 内存管理

使用 std::unique_ptr 管理节点所有权，防止内存泄露或者 double free 问题

```
template <typename Node> struct Link {
    Node* parent{nullptr};
    std::unique_ptr<Node> child[2]{nullptr, nullptr};
    Link(Node* parent = nullptr) : parent(parent) {}
};
```

移交所有权时使用 std::move()，可读性与安全性都很好

1.3.2 Trace 记录 (trait::Trace)

- 在结构体中放一个 std::vector<ForestView> record; 记录每一步操作之后的状态

  所有对树结构的操作都通过调用 bind(), unbind() 方法，内部自动维护以及记录 trace

1.3 实现细节

1.3.1 内存管理

使用 `std::unique_ptr` 管理节点所有权，防止内存泄露或者 `double free` 问题

```
template <typename Node> struct Link {
    Node* parent{nullptr};
    std::unique_ptr<Node> child[2]{nullptr, nullptr};
    Link(Node* parent = nullptr) : parent(parent) {}
};
```

移交所有权时使用 `std::move()`，可读性与安全性都很好

1.3.2 Trace 记录 (`trait::Trace`)

- 在结构体中放一个 `std::vector<ForestView> record;` 记录每一步操作之后的状态

  所有对树结构的操作都通过调用 `bind()`, `unbind()` 方法，内部自动维护以及记录 trace

- 记录 trace 的方法：

  维护当前森林的根节点列表 `std::set<Node*> entries;`

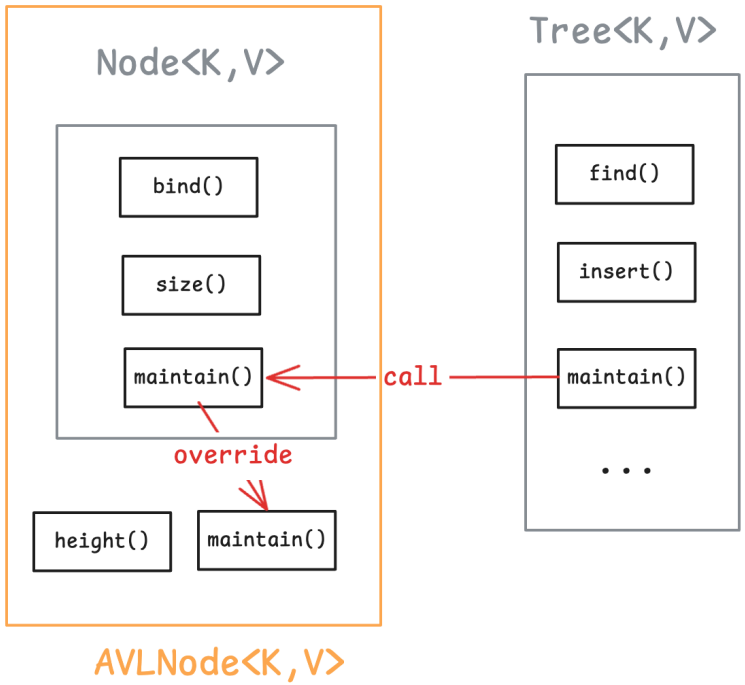
  每作一次记录 `snapshot()` 就复制出 `entries` 对应每一颗树中的信息，保存至 `record`

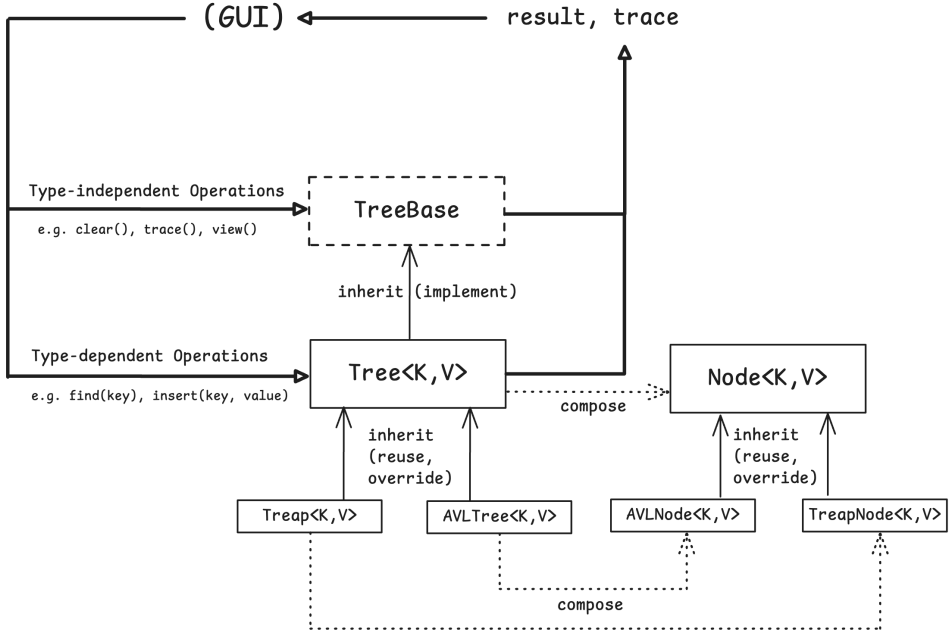
1.3 实现细节

1.3.3 性能优化

最开始的结构：

- 非常容易想到





1.3 实现细节

但

- 以 `maintain()`为例，每一次自底向上维护信息时，都需要调用 `node::maintain()`，然而这是一个虚函数，没法内联，每一次调用都有额外开销

1.3 实现细节

但

- 以 `maintain()`为例，每一次自底向上维护信息时，都需要调用 `node::maintain()`，然而这是一个虚函数，没法内联，每一次调用都有额外开销
- Tree 中只会存一个基类的 `Node` 指针，每一次使用子类 `Node` 特有信息时都需要 `static_cast` 或者 `dynamic_cast`

1.3 实现细节

但

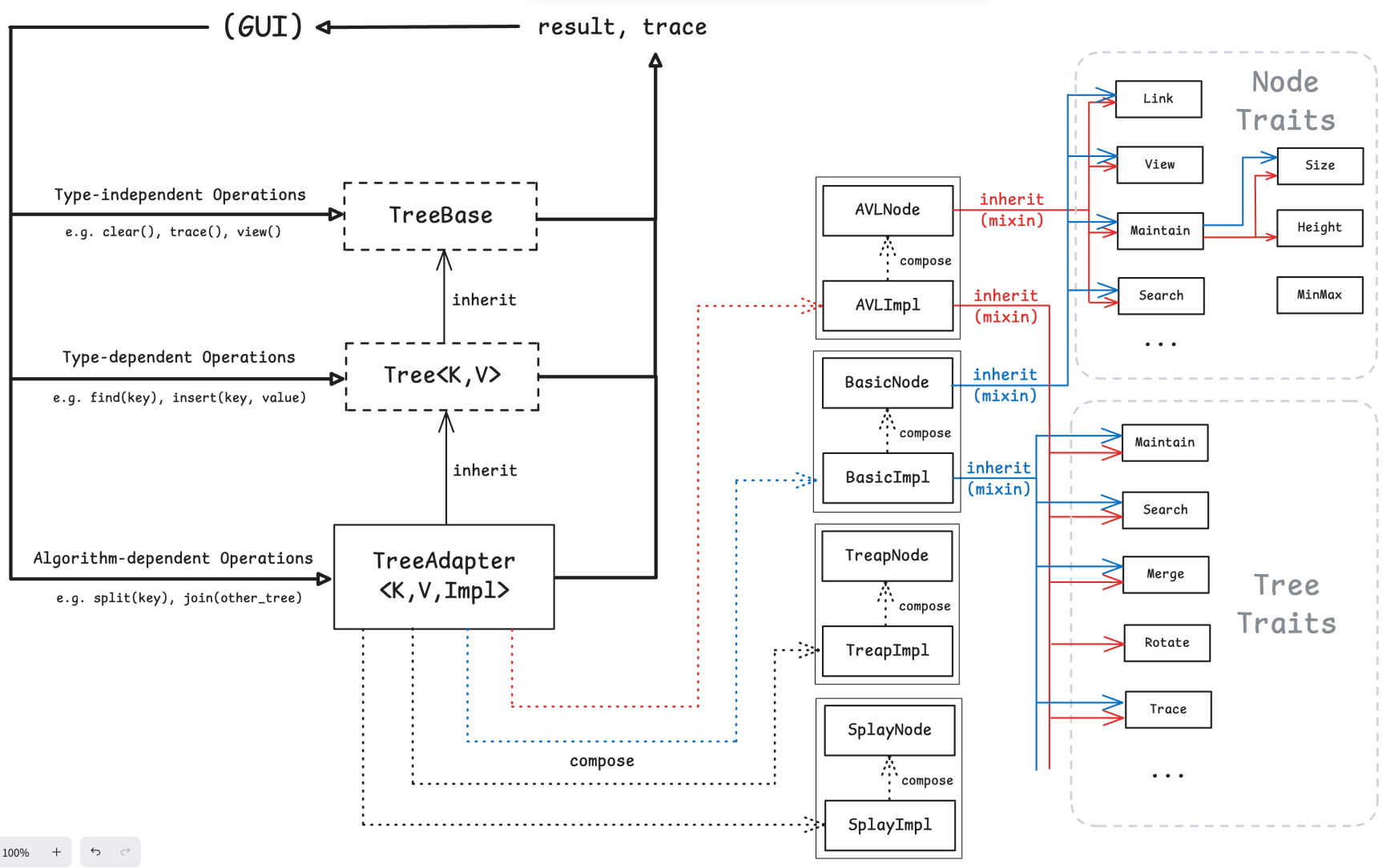
- 以 `maintain()`为例，每一次自底向上维护信息时，都需要调用 `node::maintain()`，然而这是一个虚函数，没法内联，每一次调用都有额外开销
- Tree 中只会存一个基类的 `Node` 指针，每一次使用子类 `Node` 特有信息时都需要 `static_cast` 或者 `dynamic_cast`
- 拓展功能比较麻烦
  - `Splay` 和 `AVL` 都可以旋转，要么实现两遍，要么创建一个 `RotatableTree`，增加继承层级
  - 更好的想法应该是把 `Rotate` 抽出来作为一个只提供旋转功能的 trait
  - 既然如此，为什么不把所有的功能都抽出来？

1.3 实现细节

重构!

- 所有树平级，
  复用的功能只由 trait 提供
- 由于不同的树之间没有子类型关系，需要一个 `TreeAdapter` 来绑定到相同的接口上

1.3 实现细节


(GUI)
result, trace
Type-independent Operations
e.g. clear(), trace(), view()
TreeBase
inherit
Type-dependent Operations
e.g. find(key), insert(key, value)
Tree<K,V>
inherit
Algorithm-dependent Operations
e.g. split(key), join(other_tree)
TreeAdapter
<K,V,Impl>
compose
AVLNode
compose
AVLImpl
BasicNode
compose
BasicImpl
TreapNode
compose
TreapImpl
SplayNode
compose
SplayImpl
inherit
(mixin)
Node
Traits
Link
View
Size
Maintain
Height
Search
MinMax
Tree
Traits
Maintain
Search
Merge
Rotate
Trace

1.3 实现细节

查看是否内联：

- 重构前

```
$ nm | c++filt
000000010001e7c8 legacy::AVLTree<int, int>::AVLNode::maintain()
000000010001c4ec legacy::Tree<int, int>::Node::maintain()
```

只有 Tree::maintain() 被内联了，Node 本身的 maintain() 没有被内联

- 重构后：

```
$ nm | c++filt
0000000100020578 AVLNode<int, int>::stringify() const
000000010001fe4c AVLNode<int, int>::~AVLNode()
```

```
Tree                        Insert         Find       Remove
legacy::AVLTree(ms)          48.40        11.65        49.86
AVLTree(ms)                  32.35        10.21        41.70
std::map(ms)                 25.09        11.58        30.74

CRTP Improvement(%)          33.15        12.32        16.35
```

1.3 实现细节

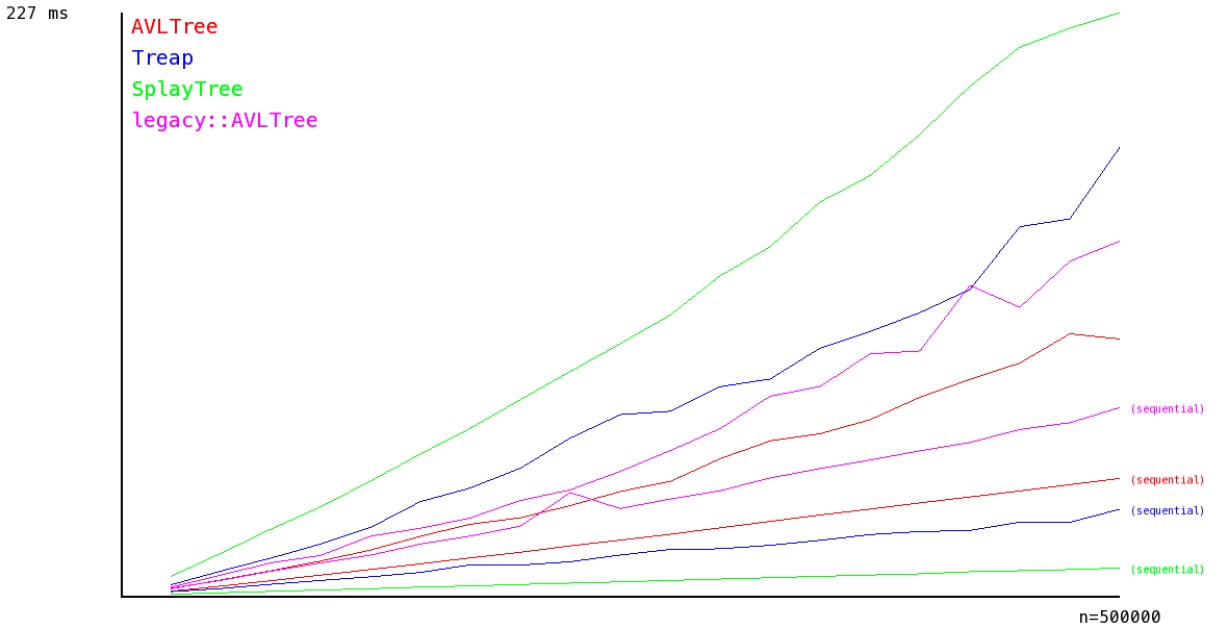


图 6　benchmark: insert

可以看到重构后提升还是很显著的

完整代码：https://github.com/cauphenuny/ucas-data-structure

1.4 单元测试

整个项目十分复杂，因此为每个功能写了测试

使用 doctest 库进行单元测试

```
$ build/balanced_tree test
[doctest] doctest version is "2.4.12"
[doctest] run with "--help" for options
===============================================================================
[doctest] test cases:   26 |   26 passed | 0 failed | 0 skipped
[doctest] assertions: 6854 | 6854 passed | 0 failed |
[doctest] Status: SUCCESS!
```

测试举例

```
SUBCASE("Split and merge") {
    // Split at 50
    auto other = tree->split(50);
    CHECK(other != nullptr);
    CHECK(tree->size() + other->size() == 7);

    Test::check(tree);
    Test::check(other);

    // Verify split worked correctly
```

1.4 单元测试

```
    CHECK(tree->find(30) != nullptr);
    CHECK(tree->find(20) != nullptr);
    CHECK(tree->find(40) != nullptr);
    CHECK(tree->find(50) == nullptr);
    CHECK(tree->find(70) == nullptr);

    CHECK(other->find(50) != nullptr);
    CHECK(other->find(70) != nullptr);
    CHECK(other->find(60) != nullptr);
    CHECK(other->find(80) != nullptr);

    // Merge back
    tree->merge(std::move(other));
    CHECK(tree->size() == 7);
    CHECK(tree->find(50) != nullptr);
    CHECK(tree->find(70) != nullptr);
    CHECK(tree->find(60) != nullptr);
    CHECK(tree->find(80) != nullptr);

    Test::check(tree);
}
```

2. 实习 2.4 马踏棋盘问题演示

2.1 算法

2.1.1 暴力搜索算法

暴力算法实现 `solve_brute_force(Point start)`:

通过手动维护一个栈记录走过的路径结点坐标与正在尝试的方向，当无路可走时利用栈进行回溯从而尝试新的路径。

```
    class SimpleStack {
    private:
        T* base;
        int top;
        int capacity;  // 当前容量

        void expand() { ...
    public:
        SimpleStack(int initial_capacity = 100) : base(nullptr), top(-1), capacity(initial_capacity)
{ ...                                  // 构造
        ~SimpleStack() { ...                  // 销毁
        void push(const T& value) { ... // 入栈
        void pop() { ...                      // 出栈
        T& peek() { ...                       // 读栈顶
        bool empty() const { ...              // 判断是否栈空
        int size() const { ...                // 返回栈元素个数
```

```
struct Node {
    Point pos;  // 当前坐标
    int move_index;  // 当前正在尝试的方向
};
```

2.1 算法

为了可视化搜索的过程，我们决定记录过程中每一步试探（包括回溯）。

最开始算法中每步都存储完整的棋盘（二维数组），但每步都存储一个棋盘带来的内存占用过大。

后来我们决定只使用起始点与终止点的坐标对记录每一步的行动，通过 stepNext 标签记录该步是前进还是回溯。

```
struct Arrow {
    Point start, end;
    bool stepNext; // 前进为1，后退为0
};

void Print_board(Board);

using Path = std::vector<Arrow>; // 一条可行路径

// 算法返回值：
return std::vector<Path> //允许返回多条可行路径
```

但即便如此，暴力搜索算法的大量路径试探仍会带来无法承受的内存开销。

2.1.2 贪心算法

贪心算法实现 solve_heuristic(Point start):

基于 H. C. von Warnsdorf 于 1823 提出的 Warnsdorf's Rule ——每步选择可移动方向最少得位置移动。该算法可以以极快的速度给出一个可行解。

通过 count_onward_moves() 计算落点的可走步数:

```
static int count_onward_moves(const Board& board, int x, int y) {
    int count = 0;
    for (int i = 0; i < 8; ++i) {
          int nx = x + dx[i];
          int ny = y + dy[i];
          if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) == 0) {
              ++count;
          }
    }
    return count;
}
```

2.1 算法

在 solve_heuristic(Point start) 内部对每一步的 MoveOption 数组排序，并向最小的方向进发。

```
// 枚举所有下一步的可选走法
for (int i = 0; i < 8; ++i) {
    int nx = x + dx[i];
    int ny = y + dy[i];
    if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) == 0) {
        int onward = count_onward_moves(board, nx, ny);
        options.push_back({nx, ny, onward});
    }
}
// 按后继步数升序排序
std::sort(options.begin(), options.end(), [](const MoveOption& a, const MoveOption& b) {
    return a.onward < b.onward;
});
```

但贪心算法只能得到一个可行解。我们希望算法可以找到多条可行解（具有找到全部可行解的潜力）。

2.1 算法

2.1.3 基于 Warnsdorf's Rule 的深度搜索算法

算法实现 `solve_heuristic_enhancer(Point start)`:

首次到达某结点时，基于 Warnsdorf's Rule 对其可行方向排序，优先选择出路最少的方向从而减少回溯次数。

由于框架仍是深度优先搜索，如果想找到多条可行路径，只需在找到一条可行路径后继续回溯即可。

```
while (!stk.empty()) {
    if (step == BOARD_SIZE * BOARD_SIZE) {
        if (!stk.empty()) {...} // 保存最后一步结果
        if(countHistory == NUM_OF_PATH) break;
        else {// 后退一步继续搜其他路径
            Point end = stk.peek().pos;
            stk.pop();  --step; board(end.x, end.y) = 0;
            Point start = stk.empty() ? end : stk.peek().pos;
            history.push_back({end, start, 0});
            continue;
        }
}
```

2.1 算法

```
    // 首次处理该节点时，按启发式规则排序可能方向
    if (current.sorted_dirs.empty()) {
        struct MoveOption {
            int dir;
            int onward;
        };
        std::vector<MoveOption> options;
        for (int i = 0; i < 8; ++i) {
            int nx = cur_pos.x + dx[i];
            int ny = cur_pos.y + dy[i];
            if (nx >= 0 && nx < BOARD_SIZE && ny >= 0 && ny < BOARD_SIZE && board(nx, ny) == 0) {
                int onward = count_onward_moves(board, nx, ny);
                options.push_back({i, onward});
            }
        }

        std::sort(options.begin(), options.end(), [](const MoveOption& a, const MoveOption& b) {
            return a.onward < b.onward;
        });

        for (const auto& opt : options)
            current.sorted_dirs.push_back(opt.dir);
    }
```

2.2 图形用户界面

图形用户界面的实现基于第三方库 SFML（Simple and Fast Multimedia Library），这是一个基于 C++ 开发的开源多媒体库，其一大特点是跨平台支持。

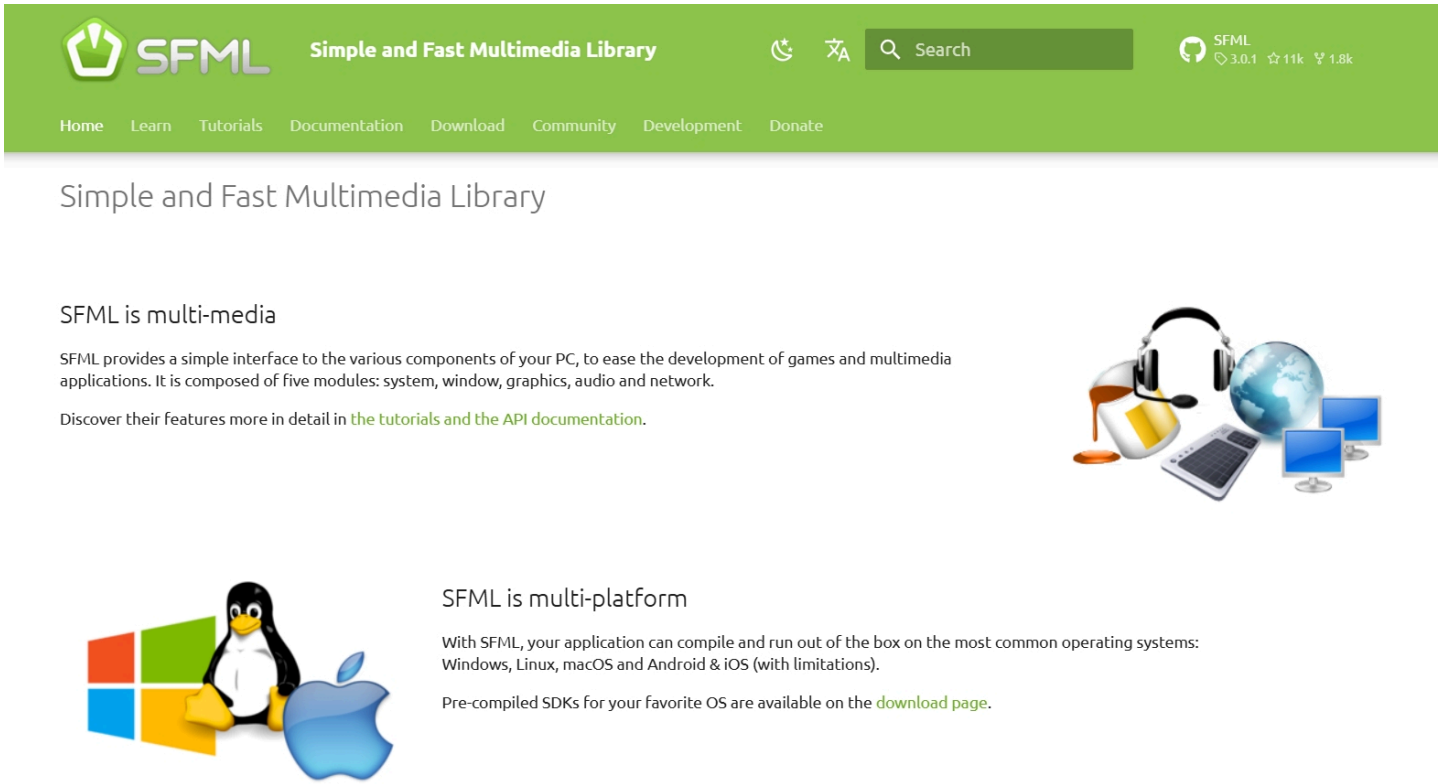


图 7　SFML 官网

2.2 图形用户界面

我们使用的是 SFML 的最新版本 3.0.1。

SFML 在从版本 2 升级到 3 时做了巨大调整，虽然代码设计得到优化，并开始支持更多高级特性，但这也导致 SFML 3 的 API 与 SFML 2 的基本完全不兼容。而现有的绝大部分资料都是关于 SFML 2 的使用（距离此次重大版本更新仅仅过去半年，而 SFML 2 已存在 12 余年），甚至 SFML 3 的官方文档也尚不完善。

在查看 API 接口源代码以外，我们还使用了一个强大的工具——DeepWiki。它可以根据 GitHub 仓库的文件内容，生成仓库专属 Wiki，包括仓库整体架构、主要功能模块和实现方式等。它还支持用户询问仓库相关信息。这一工具极大方便我们快速了解仓库代码功能、仓库结构等重要信息，节省大量时间。

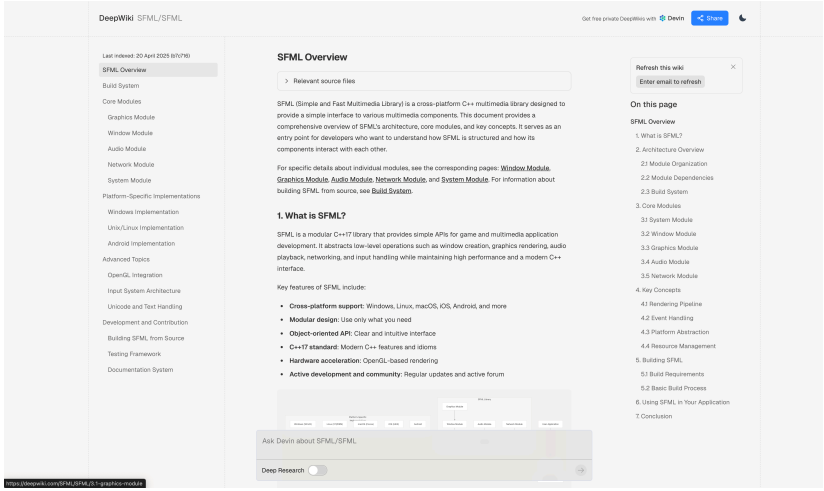


图 8　SFML 项目的 DeepWiki 页面

2.2 图形用户界面

2.2.1 GUI 设计

界面设计遵循关注点分离的原则，将棋盘渲染、控制面板、动画管理、事件分发与处理等功能封装到不同的类中。类与类之间维持继承与组合关系，形成下面的关系网。

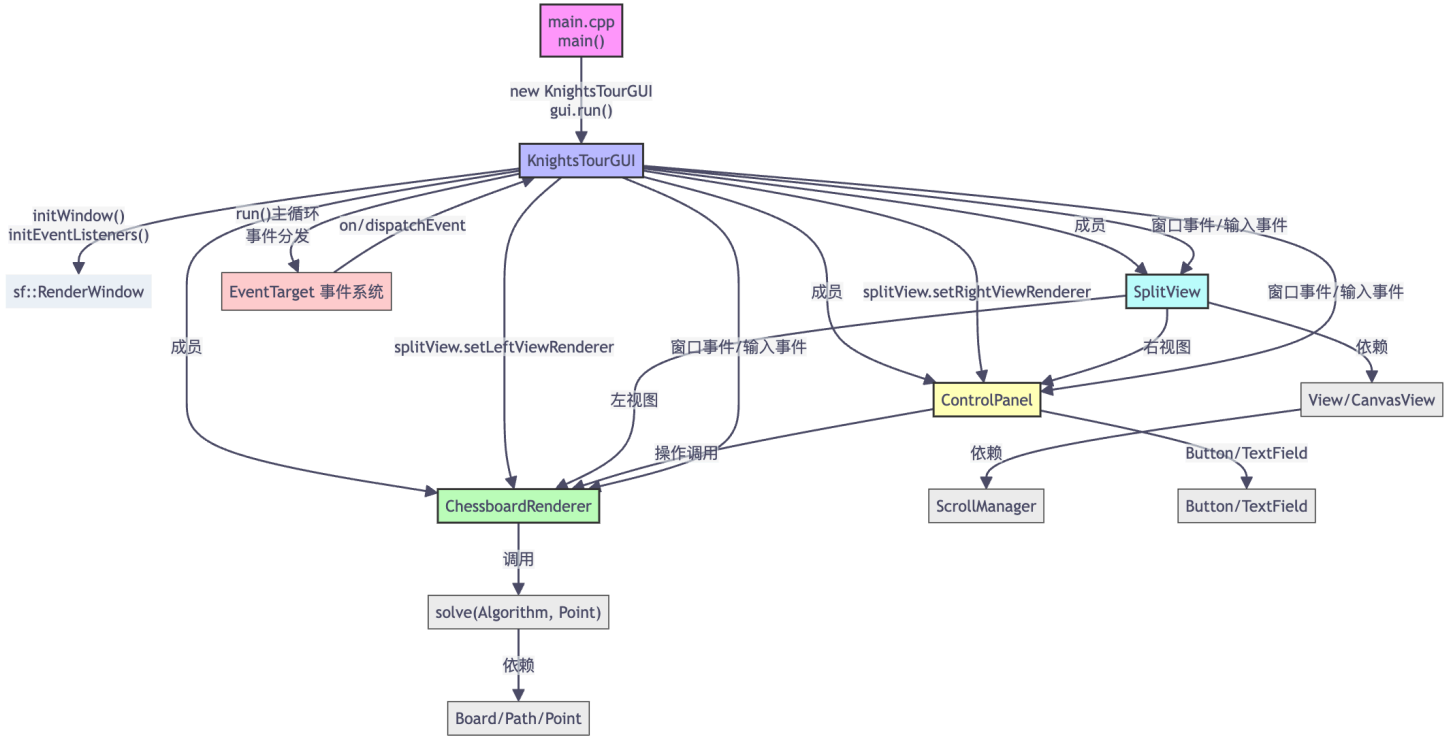


图 9　GUI 结构

2.2 图形用户界面

界面的主逻辑采用经典的游戏循环架构，即最外层循环判断窗口是否开启，循环内部进行事件处理、逻辑更新和渲染绘制三个核心阶段。

```
void KnightsTourGUI::run() {
    while (window.isOpen()) {
        static sf::Clock deltaClock;
        float deltaTime = deltaClock.restart().asSeconds();

        // 检查事件
        while (const std::optional event = window.pollEvent()) {
            dispatchEvent<sf::Event::Closed,
                          sf::Event::Resized,
                          sf::Event::MouseButtonPressed,
                          sf::Event::KeyPressed>
                (event);
        }

        update(deltaTime);
        render();
    }
}
```

2.2 图形用户界面

事件处理方面，使用模板特化与折叠表达式，实现诸多事件的统一分发。

```cpp
// 事件类型枚举
enum class EventType : uint8_t{
    WINDOW_CLOSE,
    WINDOW_RESIZE,
    MOUSE_WHEEL,
    ...
};

class EventTarget {
public:
    template<typename... TEventSubtypes>
    inline void dispatchEvent(const Event& event) {
        if (!event) return;
        (dispatchIfType<TEventSubtypes>(event), ...);
    }
private:
    ListenerMap listeners_;

    template<typename TEventSubtype>
    inline void dispatchIfType(const Event& event) {...}
};
```

```cpp
// 通过特化实现 SFML 事件类型到 EventType 的映射
template<typename TEventSubtype>
struct EventTypeMap;

template<>
struct EventTypeMap<sf::Event::Closed> {
    static constexpr EventType value =
EventType::WINDOW_CLOSE;
};

template<>
struct EventTypeMap<sf::Event::Resized> {
    static constexpr EventType value =
EventType::WINDOW_RESIZE;
};

...

template<typename TEventSubtype>
constexpr EventType event_t =
EventTypeMap<TEventSubtype>::value;
```

2.2 图形用户界面

这样写看上去很复杂。实际上在 SFML 2 中实现同样逻辑只需寥寥数行代码，见左边代码块。这是因为 SFML 2 中的 `sf::Event event` 包含一个可以直接访问的成员 `enum EventType type`，可以直接获取事件的类型并进行比较；而 SFML 3 中则删除了 `type`，取而代之的是一个私有成员 `m_data`。两个版本的 `Event` 类的结构如右边代码块所示（注释内是 SFML 2 的版本）。

可见 SFML 3 使用 `std::variant` 实现了更安全的事件类，但代价是对事件的处理也更加复杂。

```
switch (event.type) {
    case sf::Event::Closed:
        window.close();
        break;

    case sf::Event::Resized:
        ...
        break;
    ...

    default:
        break;
}
```

```
namespace sf {
    class Event {
    public:
        struct Closed {};
        struct Resized { Vector2u size; }
        ...
    /*
        enum EventType {Closed, Resized, ...};
        EventType type;
    */
    private:
        std::variant<Closed, Resized, ...> m_data;
    }
}
```

2.2 图形用户界面

2.2.2 GUI 展示

界面分为左右两栏，左侧为棋盘显示区域，右侧为控制面板。用户可以指定马的初始位置，选择执行的算法，调整播放速度等；棋盘区域将展示马的移动轨迹。

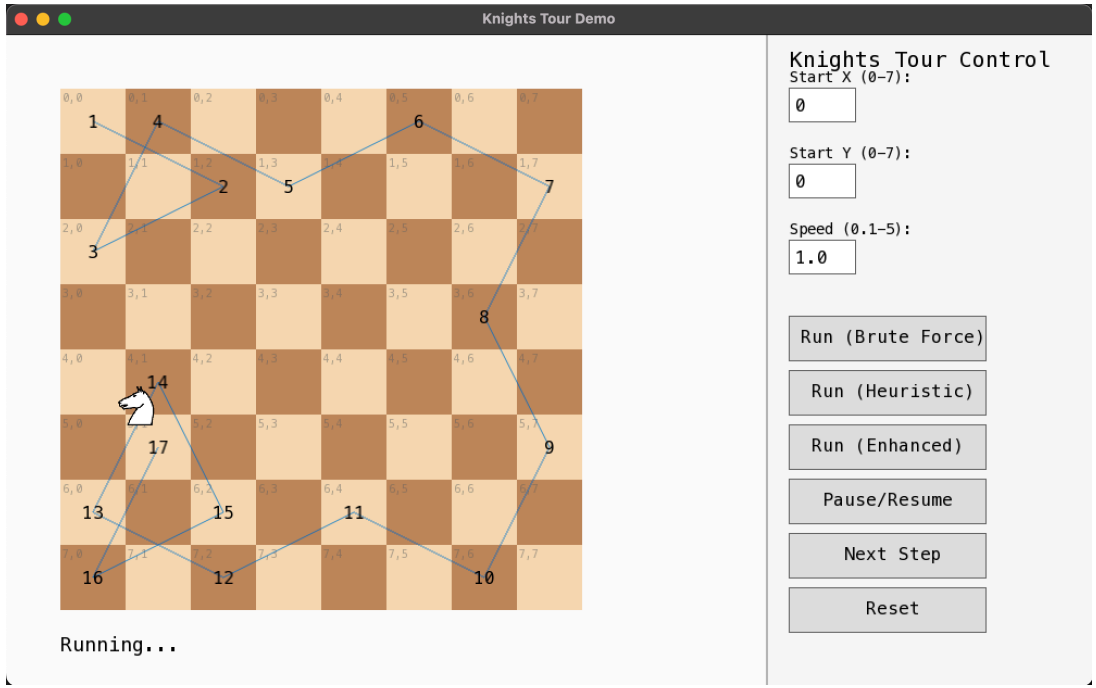


图 10　GUI 演示

经过实测，此图形用户界面在小组成员的不同开发环境中均能正常工作。

Thanks!