BİÇİMSEL DİLLER VE OTOMATLAR

Hazırlayanlar:

Prof.Dr. Emre HARMANCI
Yard.Doç.Dr. Osman Kaan EROL

İçindekiler:

Program:

Hafta	**Konu**
1	1.1, 1.2
2	1.2, 1.3 + ödev
3	1.3, 2.1 + uygulama
4	2.1, 2.2 + ödev
5	2.3, 2.4 + uygulama
6	**1.Vize**
7	2.5, 2.6
8	3.1 + ödev
9	3.2 + uygulama
10	3.3 + ödev
11	4 + uygulama
12	**2.Vize**
13	4, 5 + ödev
14	5 + uygulama
	Final

Kaynakça:

1. M. Mano, *Digital Design*, Prentice-Hall, 1984
2. D.F. Stanat, D.F. McAllister, *Discrete Mathematics in Computer Science*, Prentice-Hall, 1977
3. H.R. Lewis, C.H.Papadimitriou, *Elements of the Theory of Computation*, Prentice-Hall, 1981
4. J.C. Martin, *Introduction to Languages and the Theory of Computation – Second Edition*, Mc Graw Hill, 1997
5. P.J. Denning, J.B.Dennis, J.E. Qualitz, *Machines, Languages, and Computation*, Prentice Hall 1978
6. J.E. Hopcroft, J.D. Ullman, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation – Second Edition*, Addison-Wesley, 2001
7. P. Dehornoy, *Mathematiques de l'Informatique, Cours et Exercises Corrigés*, Dunod, 2000

BÖLÜM 1
Sonlu Durumlu Makinalar (Finite State Machine - FSM)

1.1 Tanım ve modeller (Mealy ve Moore Modelleri)

Sonlu durumlu makinalar;

G: Giriş büyüklükleri alfabesi ve $G \in \boldsymbol{G}$
D: Durum büyüklükleri alfabesi ve $D \in \boldsymbol{D}$
Ç: Çıkış büyüklükleri alfabesi ve $Ç \in \boldsymbol{Ç}$
U: ***G*** x ***D*** -> ***D*** tanımlı gelecek durum fonksiyonu
V: ***D*** ->***Ç*** veya ***G*** x ***D*** -> ***Ç*** tanımlı çıkış fonksiyonunu göstersin.

Örnek:

$\boldsymbol{G} = B^n{}_2 = \{0, 1\}^n$

$G_0 = 0100111$ olabilir (bu durumda n = 7’ dir)

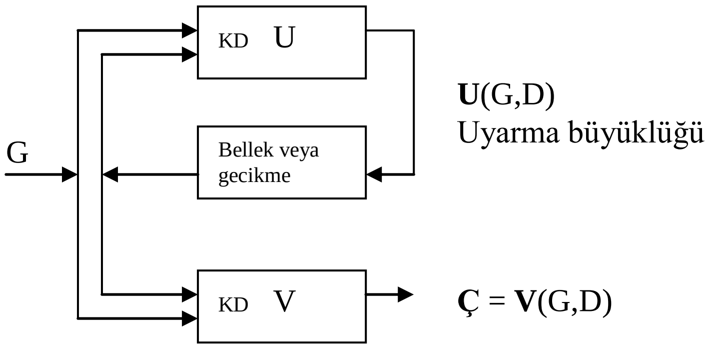
G kümesinin eleman sayısı $|\boldsymbol{G}| = 2^n$’dir. | . | yerine Card(.) tanımı da kullanılır.

FSM = {***G, D, Ç, U, V***} şeklinde tanımlanan makinalara sonlu durum makinası adı verilir. İki farklı ana yapıları bulunur:

A. Mealy Modeli:

$\boldsymbol{G} \, X \, \boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{Ç}$

Çıkış, giriş ve durumların bir fonksiyonudur. (KD = kombinezonsal devre)

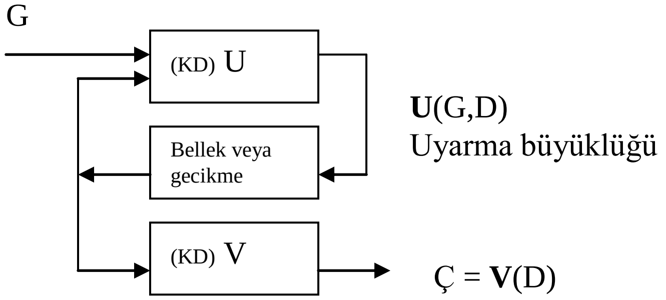


Şekil 1.1 Mealy modeli

B. Moore Modeli:

$\boldsymbol{D} \rightarrow \boldsymbol{Ç}$

Durumlar sistemin çıkışlarıdır. (KD = kombinezonsal devre)



Şekil 1.2 Moore modeli

Sonlu durumlu makina bir sayısal devre ile gerçekleştirilirse, giriş ve çıkış fonksiyonları her iki modelde de kombinezonsal devrelerle yerine getirilir. Ardışıl senkron devrelerde yeni durumların belirlenmesinde durum saklama (bellek) elemanı olarak kullanılan ikililerin (Flip-flop, FF) tanım bağıntıları etkin olur. Asenkron devrelerde ise bellek elemanı saf gecikmedir. Senkron devrelerde, Q kullanılan FF'lerin tanım bağıntılar vektörü olmak üzere:

$\mathbf{D}(t^+) = \mathbf{Q}(\mathbf{D}(t), \mathbf{U}(\mathbf{D}(t), \mathbf{G}(t)))$ şeklinde verilebilir. Eğer FF'ler D tipi iseler ya da saf bellek özelliği gösteriyorlarsa $\mathbf{D}(t^+) = \mathbf{U}(\mathbf{D}(t), \mathbf{G}(t))$ elde edilir. D tipi FF yerine saf gecikme kullanılırsa asenkron devre için de senkron devre tanımları kullanılabilir. Q fonksiyonu kullanılan FF tipine bağlı olarak aşağıdaki formlardan biri olabilir:

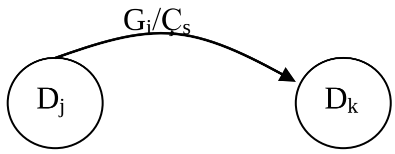
$Q^+ = JQ' + K'Q$, JK tipi FF bağıntısı. J ve K giriş büyüklükleridir.
$Q^+ = T \oplus Q$, T tipi FF bağıntısı. T giriş büyüklüğüdür.
$Q^+ = D_g$, D tipi FF bağıntısı. D_g giriş büyüklüğüdür.
$Q^+ = S + R'Q$ – SR tipi FF bağıntısı. S ve R giriş büyüklükleridir.

Sonlu durumlu makinaların aşağıda belirtilen özelliklere sahip oldukları kabul edilir:

1. Giriş, çıkış ve durum kümeleri (alfabeleri) sonludur;
2. Gerekircidir (ing: Determinist). Şimdiki giriş ve durum, sonraki durumu ve çıkışı kesinlikle belirler. Sisteme makina denmesini sağlayan özellik budur. Makine kavramı gerekirciliği içerir. Gerekirci olmayan sistemler makine olamaz. Gerekirci olmayan sistemlerde belirli bir giriş - durum çiftine birden fazla sayıda çıkış ve sonraki durum değeri karşı düşebilir. Bu tip sistemler Determinist Olmayan Otomat bölümünde detaylı olarak işlenecektir.
3. Büyüklük dönüştürücü veya "transducer" özelliği. Bu özellik sayısal ayrık zamanlı sistemler (digital discrete-time systems) için aşağıdaki gibi tanımlanır:
   - Sekans: Sıralı simge dizisi (Bu bağlamda sıra zamanı belirler). *n* sekans uzunluğudur.
   - $[\Lambda]$: boş katarı içine alan "singleton" yani tek elemanlı küme.
   - G*: giriş sekansı kümesi $G^* = [\Lambda] \cup G \cup G^2 \cup ... \cup G^n \cup ...$
   - Ç*: çıkış sekans kümesi $Ç^* = [\Lambda] \cup Ç \cup Ç^2 \cup ... \cup Ç^n \cup ...$
   - $x \in G^*$ ve $w \in Ç^*$ olmak üzere:
   Belirli bir başlangıç durumunda, belirli bir *x* girişi altında belirli bir *w* çıkışı elde edilecektir. $w = f(x)$ dönüşümünün iki özelliği bulunmaktadır:
   - **Uzunluğun korunması** (length preservation - zamanda sıkıştırmanın olmaması),
   $|x|$, *x* dizisinin simge sayısı, uzunluğu olmak üzere $|w| = |x| = n; \forall n \in N$
   - **Önek içindeliği** (prefix inclusivity)
   $x = x_1x_2 \wedge f(x) = w = w_1w_2 \wedge |x_1| = |w_1| \Rightarrow f(x_1) = w_1$

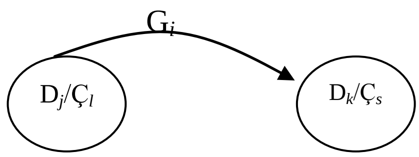
FSM modellemede aşağıda verilen durum tablo ve diyagramları kullanılır:

	G_1	..	G_i	..	G_m
D_1					
..					
D_j			$D_k/Ç_s$		
..					
D_n					



Şekil 1.3 Mealy modeli durum tablo ve diyagramı

	G_1	..	G_i	..	G_m	Ç
D_1						$Ç_1$
..						..
D_j			D_k			$Ç_l$
..						..
D_n						$Ç_p$



Şekil 1.4 Moore modeli durum tablo ve diyagramı

<u>Örnek:</u>

5,10, 25 birimlik metal paraları kabul eden bir makina, 15 birime bir sakız veriyor ve paranın üstünü iade ediyor. Bu makinaya ait Mealy ve Moore modellerini çıkarınız.

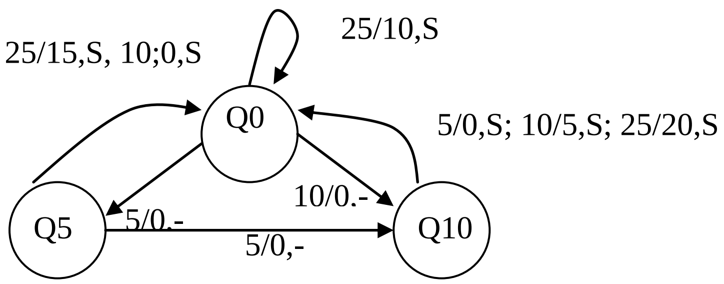
<u>A. Mealy Modeli</u>

A.1. Durum tablosu:

	5	*10*	*25*
Q_0	Q_5/0,-	Q_{10}/0,-	Q_0/10,S
Q_5	Q_{10}/0,-	Q_0/0,S	Q_0/15,S
Q_{10}	Q_0/0,S	Q_0/5,S	Q_0/20,S

$Q_x/i,j$: *x* para durumu, *i* para üstü, *j* ise sakız verince S, vermeyince “-“ olan çıkış.

A.2. Durum Diyagramı



<u>B. Moore Modeli</u>

B.1. Durum Tablosu

	5	*10*	*25*	*Çıkış*
Q_0	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	0,-
Q_5	Q_{10}	Q_{15}	Q_{30}	0,-
Q_{10}	Q_{15}	Q_{20}	Q_{35}	0,-
Q_{15}	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	0,S
Q_{20}	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	5,S
Q_{25}	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	10,S
Q_{30}	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	15,S
Q_{35}	Q_5	Q_{10}	Q_{25}	20,S

Not: Moore modelindeki durum sayısı, en az Mealy modelindeki farklı durum/çıkış sayısı kadar olmalıdır. Durumlar atılan para ile ilişkilendirilmemelidir. Para atılmadığında mevcut durum korunur. Buna göre:

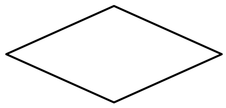
Q_0 başlangıç durumu olmak üzere (istenirse kaldırılabilecek bir durumdur, bir daha bu duruma girilmez),

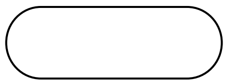
$Q_5/0,-$ $\rightarrow$ Q_5
$Q_{10}/0,-$ $\rightarrow$ Q_{10}
$Q_0/0,S$ $\rightarrow$ Q_{15}
$Q_0/5,S$ $\rightarrow$ Q_{20}
$Q_0/10,S$ $\rightarrow$ Q_{25}
$Q_0/15,S$ $\rightarrow$ Q_{30}
$Q_0/20,S$ $\rightarrow$ Q_{35}

B.2. Durum diyagramını siz oluşturunuz.

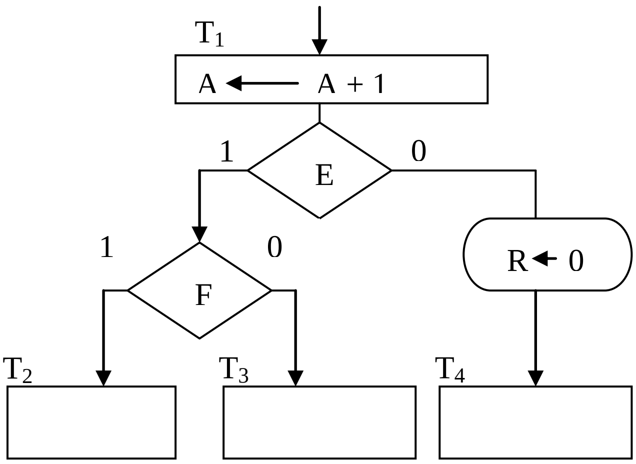
1.2 Algoritmik Durum Makinası modeli ile ardışıl sistem tasarımı

Akış diyagramı ve durum diyagramı ile karşılaştırma yapıldığında her iki diyagram arasında benzerliklerin olduğu görülecektir. Akış diyagramında karar aşamaları (geçişi sağlayan koşullar) açık olarak gösterilirken, durum diyagramında kol değerleri olarak ifade edilir. Ayrıca akış diyagramlarındaki durum ve koşullara bağlı işlemler durum diyagramlarının çıkışları ile ilişkilendirilebilir. Ancak burada Mealy ve Moore modellerine göre melez bir kullanım oluşur. İşlev olarak birbirinin aynısıdır. Akış diyagramlarında kullanılan simgeler aşağıdaki gibidir:

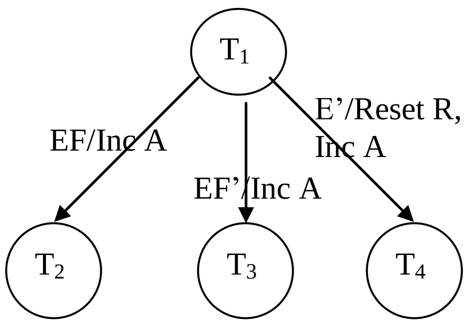
1. Karar Baklavaları

2. Durum ve duruma bağlı işlemler, dikdörtgenler

3. Koşullara bağlı işlem, ovaller


Akış diyagramı ile ilgili örnek:

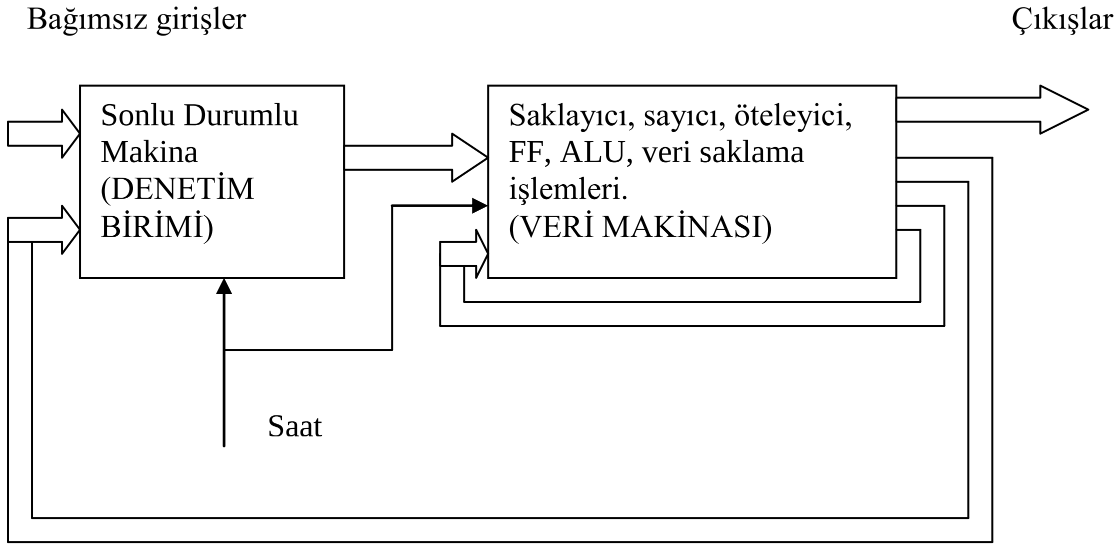


Şekil 1.5 Akış diyagramı



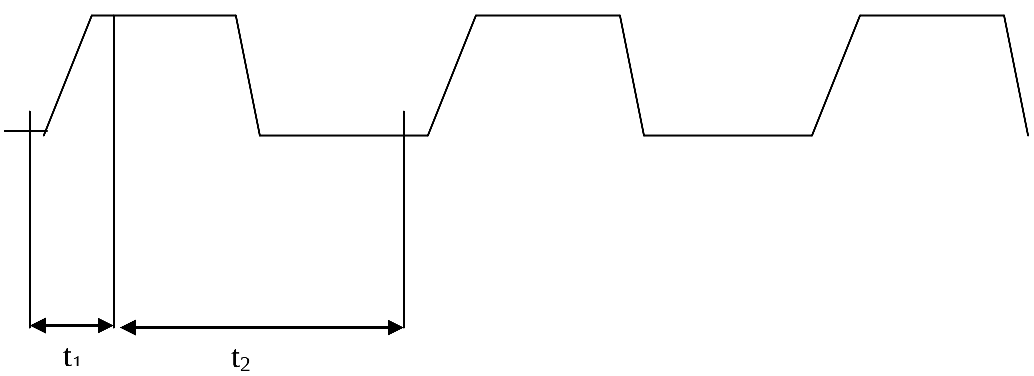
Şekil 1.6 Durum diyagramı

Algoritmik Durum Makinası yönteminin sayısal sistemlere uygulanması:



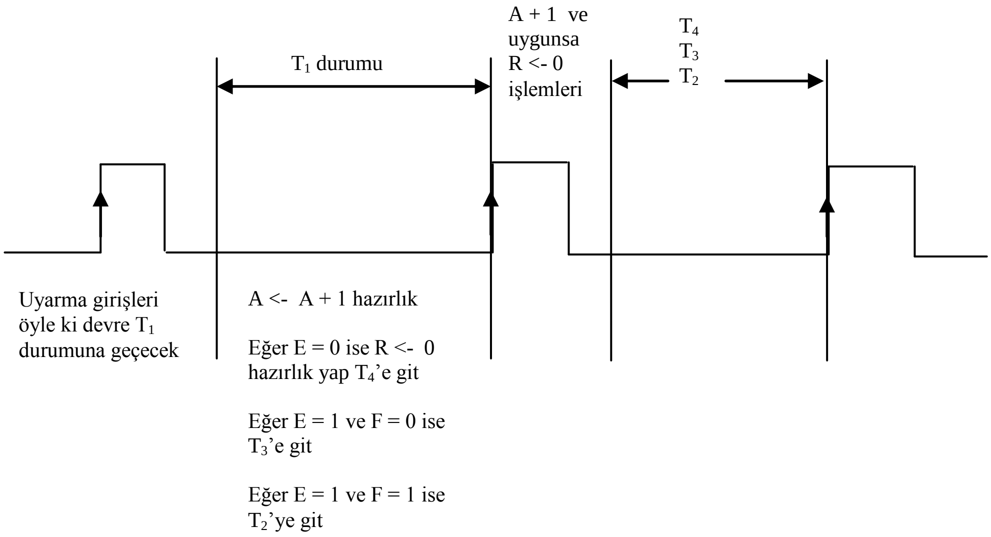
Şekil 1.7 Devre modeli

Şekil 1.7 ile senkron bir ardışıl devre yapısı verilmiştir. Saatin etkin kenarında ya da kayıt süresince giriş, durum ve çıkışlar sabit ve tanımlı olmalıdır. Aşağıdaki şekilde yükselen etkin kenarlı saat işareti uygulanmış bir sistemde, t_1 süresince girişlerin (sistem ve FF girişleri) değişmeden sabit kalması gereklidir. Kalan t_2 zamanı içerisinde işaretler değişebilir. Zaman tanım bölgesinde t_1 ve t_2 sürelerinin gösterimi aşağıdaki gibidir:



Şekil 1.8.A Zamanlama çizelgesi

Buna göre Şekil 1.5'te akış diagramı verilmiş makinaya ilişkin işlemlerin zaman içinde yürütülme sırasını gösterir zamanlama diagramı Şekil 1.8.B'de verilmiştir.

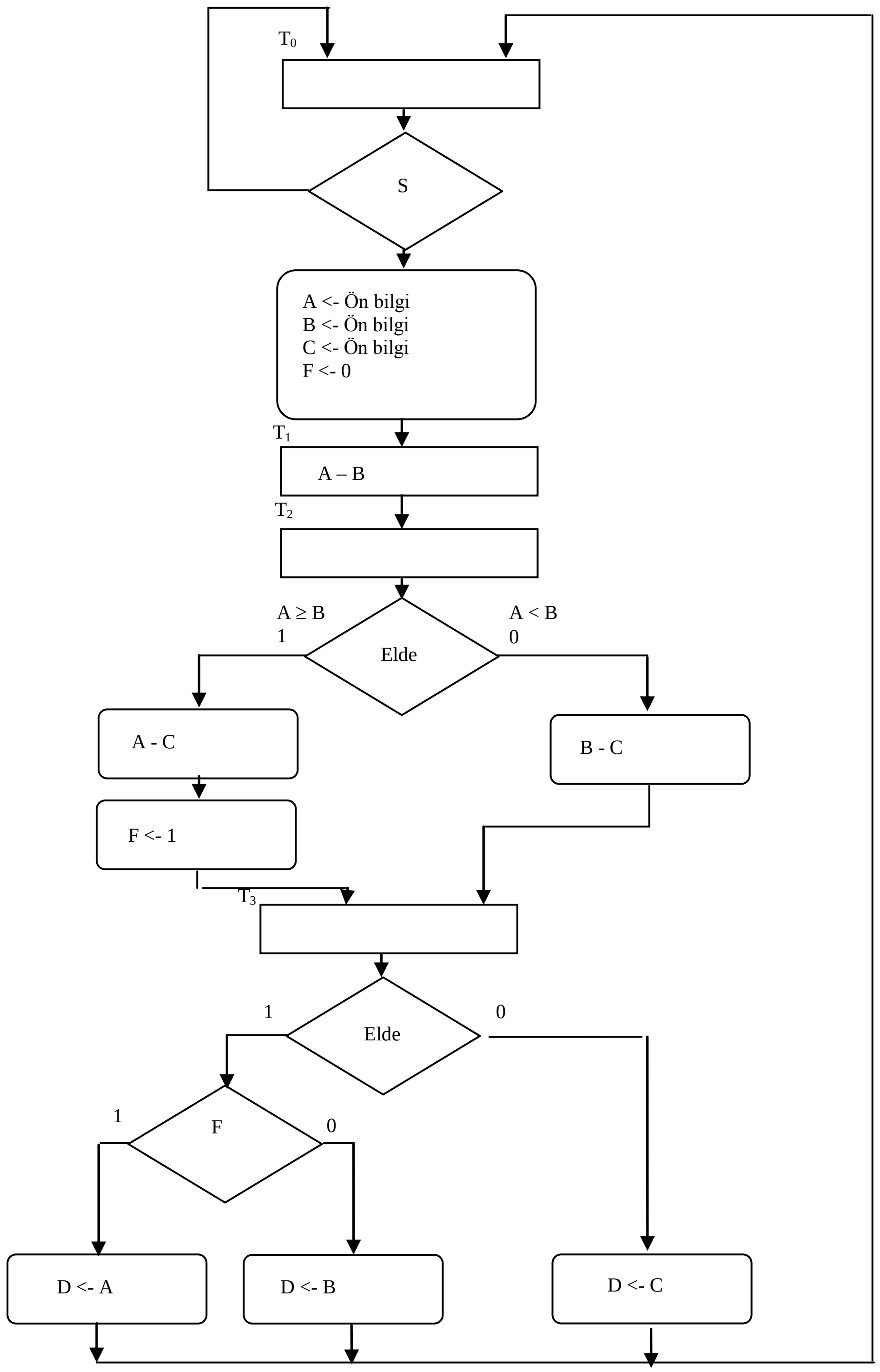


Şekil 1.8.B. Şekil 1.5'te verilen makinanın zamanlama grafiği

Örnek:

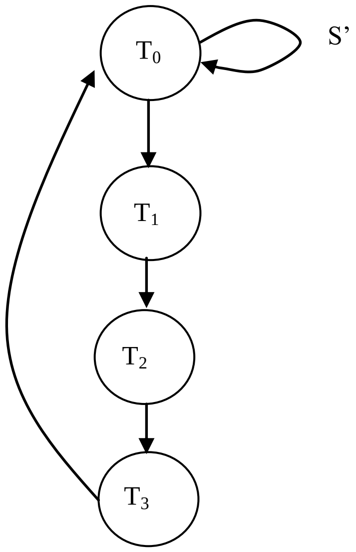
3 adet pozitif sayının en büyüğünü bulan bir algoritmik durum makinası (ASM) tasarlanacaktır. Makine bir giriş işaretinin "1" olması ile çalışmaya başladıktan sonra sekiz bitlik A, B, C saklayıcılarına ilgili sayılar yüklenecektir. Makine çalışmasını tamamlayıp başlangıç durumuna döndüğünde "D" saklayıcısında en büyük sayı yer alacaktır (D = Max(A, B, C)). Bu devrede karşılaştırma işlemlerini yapmak için bir adet kombinezonsal çıkartma devresi kullanılacaktır. Çıkartma sonucu ayrı bir "elde" bayrağında tutulacaktır.

a) Yukarıda tanımlanan devrenin ASM diagramını çiziniz.
b) Veri makinesini tasarlayarak çiziniz. Kullandığınız elemanların giriş işaretlerini belirtiniz.
c) Denetim birimini her duruma bir D FF karşı düşürerek tasarlayıp çiziniz.



Şekil 1.9 Soruda verilen makinanın akış diagramı

Bu makinanın durum diagramı ise aşağıdaki gibidir:

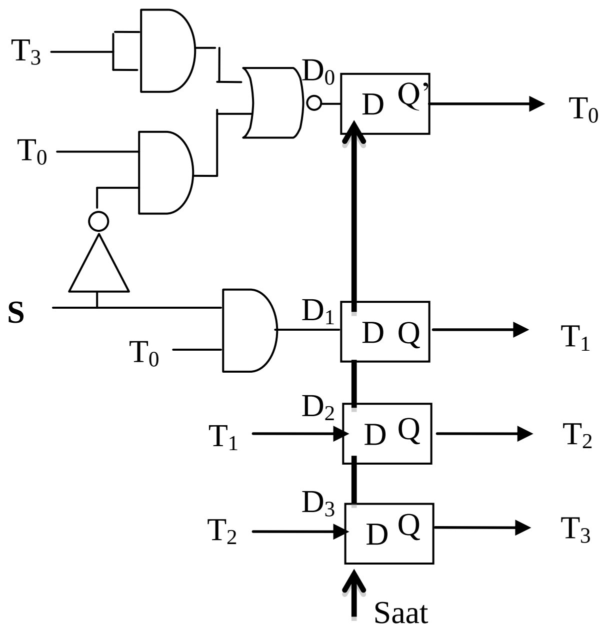


Durum makinasına ilişkin denklemler:

$T_0 = T_3 + s'T_0$
$T_1 = sT_0$
$T_2 = T_1$
$T_3 = T_2$

Şekil 1.10 Durum diagramı

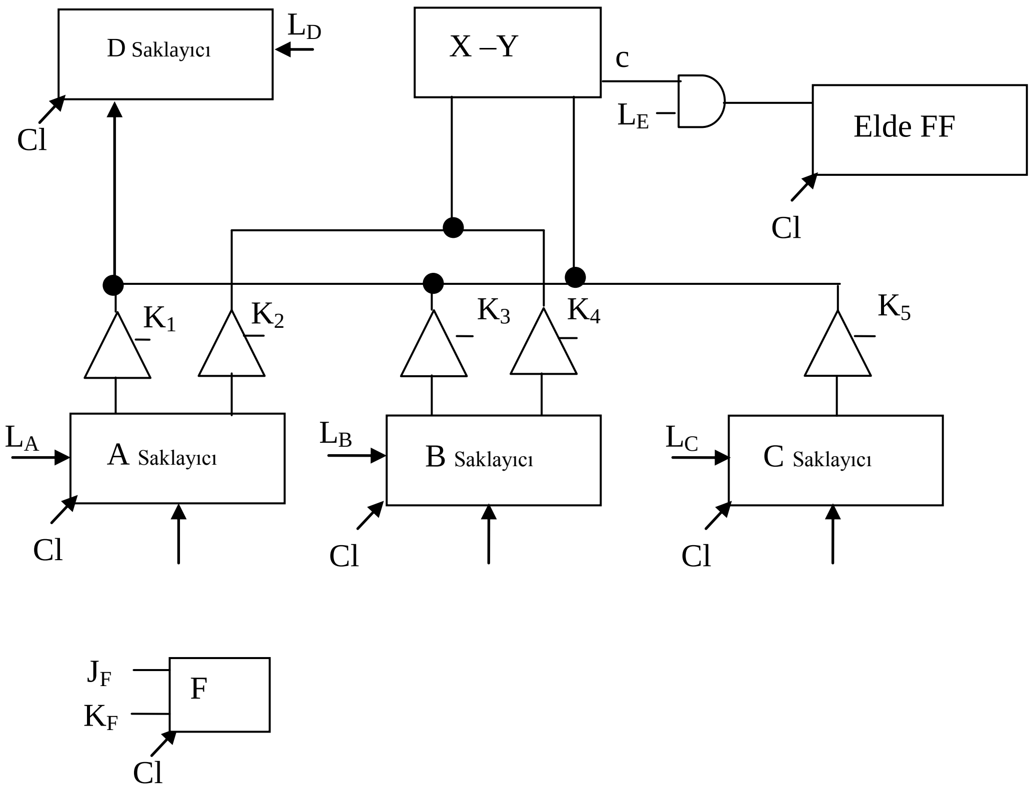
Durum makinasının elektrik devre şeması ise verilen denklemlerden hareketle aşağıdaki gibi bulunur. Burada dikkat edilmesi gereken husus T_0 durumuna ait çıkışın D-FF Q’ çıkışından alınmasının gerekliliğidir. Sistem resetlendiğinde bütün FF’ların çıkışları normalde “0” olur. Sistemimizin reset durumu T_0 olduğundan, bu durumun çıkışı reset anında “1” olmalıdır. Q’ çıkışı bize bu şartı sağlar. Ancak D-FF girişi de tümlenmelidir.



Bütün FF’lara giden saat ve reset işaretleri şekilde gösterilmemiştir.

Şekil 1.11 Durum makinasının elektrik devre şeması

Saklayıcı, öteleyici ve diğer veri saklama işlemlerine ait blok ise aşağıda verilmiştir:



Şekil 1.12 Saklayıcı, öteleyici ve FF bloğunun elektrik devre şeması. Cl saat işaretidir.

Yukarıdaki devreye ilişkin denklemler ise:

$L_A = L_B = L_C = sT_0$
$L_D = T_3$
$L_E = T_1 + T_2$
$J_F = ET_2$
$K_F = sT_0$
$K_1 = T_3FE$
$K_2 = T_1 + T_2E$
$K_3 = T_1 + T_3F'E$
$K_4 = T_2E'$
$K_5 = T_2 + T_3E'$

şeklinde verilebilir.

1.2 Durum eşdeğerliliği, durum uyuşması ve durum indirgemesi

Tasarlanması öngörülen bir devrenin ya da sistemin işlevlerinin sözle anlatımından giderek ortaya çıkarılan durum tablosunda eşdeğerli ya da birbirleriyle uyuşma gösteren durumlar olabilir. Bu özelliği taşıyan durum sınıflarını ortaya çıkarıp, durum tablosunu daha az durumu olan başka bir tabloya dönüştürme işlemine durum indirgenmesi adı verilir.

1.2.1 Durum eşdeğerliği ve tümüyle tanımlanmış tabloların indirgenmesi:

<u>Tanım:</u> M makinesinin d_i ve d_j durumlarının eşdeğerli olması için gerek ve yeter koşul, her iki durum için makinaya uygulanan herhangi bir giriş dizisinin aynı çıkış dizisini oluşturabilmesidir. Bir $d_i \equiv d_j$ olarak gösterilir.

$\equiv$ bir eşdeğerlik bağıntısıdır, zira bu bağıntı:

$d_i \equiv d_i$	(yansıma)
$d_i \equiv d_j \Rightarrow d_j \equiv d_i$	(bakışlılık)
$d_i \equiv d_j$ ve $d_j \equiv d_k \Rightarrow d_i \equiv d_k$	(geçiş)

özelliklerinin tümünü taşımaktadır. Şu halde M makinesinin durumlar kümesi D, $\equiv$ bağıntısı ile ayrık eşdeğerlilik sınıflarına bölümlenebilir. Eşdeğerlilik sınıflarının kesişimi boştur. Her eşdeğerlik sınıfı indirgenmiş tablonun bir durumunu oluşturacaktır. Ancak bu bölümleme sonucunda :

- Eşdeğerliliği açıkça beliren,
- Eşdeğerliliği başka durum çiftlerinin eşdeğerliliğini gerektiren durum çiftleri ortaya çıkarılır.

Bu iki kavramın açıklanması aşağıdaki teoremde verilmiştir.

<u>Teorem:</u> Aynı makinenin iki durumunun eşdeğerli olması için gerek ve yeter koşullar, durum tablosunda her giriş için bu iki duruma ilişkin

1. Çıkışların eşit olması ve
2. a) Gelecek durumların doğrudan ya da karşılıklı olarak eşdeğerlik göstermesi,
   2 b) Gelecek durumların eşdeğerliği için doğrudan ya da dolaylı olarak eşdeğerliliği gereken durum çiftleri varsa bunların arasında çıkışta eşdeğerliliği sağlamayan durum çiftinin olmamasıdır.

Gerektirmelerin sağlaması yönlendirilmemiş bağıntı grafından ve gerektirme merdiveni adını alan tablodan yararlanılarak sağlanır.

<u>Örnek:</u>

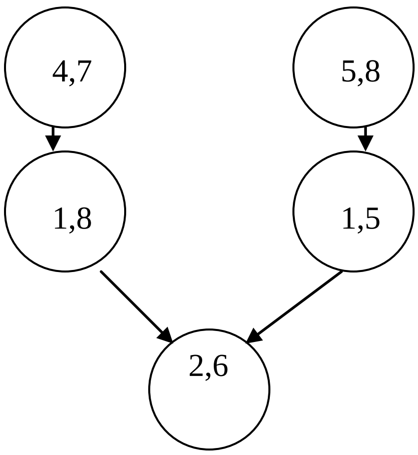
İndirgenmemiş durum tablosu aşağıdaki gibi verilmiş bir sistem olsun:

Q \ I	I_1	I_2	I_3	I_4
Q_1	$Q_1/0$	$Q_2/1$	$Q_5/1$	$Q_1/0$
Q_2	$Q_2/1$	$Q_2/0$	$Q_6/0$	$Q_3/0$
Q_3	$Q_3/1$	$Q_7/0$	$Q_4/0$	$Q_3/0$
Q_4	$Q_1/0$	$Q_7/1$	$Q_4/1$	$Q_3/0$
Q_5	$Q_5/0$	$Q_6/1$	$Q_5/1$	$Q_5/0$
Q_6	$Q_2/1$	$Q_6/0$	$Q_2/0$	$Q_3/0$
Q_7	$Q_8/0$	$Q_7/1$	$Q_4/1$	$Q_3/0$
Q_8	$Q_8/0$	$Q_6/1$	$Q_5/1$	$Q_1/0$

Gerektirme merdiveni oluşturulurken durum numaralama 1'den başlayarak *n*-1'e kadar yukarıda, 2'den başlayarak *n*'ye kadar solda yapılır. Ele alınan durum çiftlerinde öncelikle çıkışlara bakılır. Çıkışlar uyuşmuyorsa o iki durum çifti eşdeğer değildir. Çıkışlar uyuşuyorsa, o zaman uyuşması gereken durum çiftleri (farklı olan durumlar) o göze yazılır. Bu durum çiftleri de kendi aralarında eşdeğerse, o zaman o göze eşdeğer sembolü olan O yazılır. Örnek tablo aşağıdaki gibi oluşturulur:

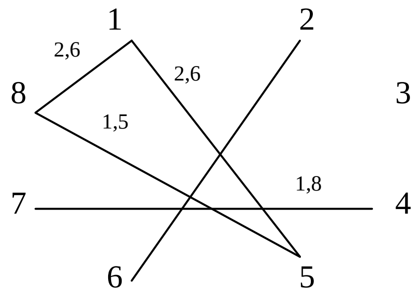
	1	2	3	4	5	6	7
2	X						
3	X	2,7 4,6 X					
4	2,7 4,5 1,3 X	X	X				
5	2,6 O	X	X	1,5 6,7 3,5 X			
6	X	O	2,3 6,7 2,4 X	X	X		
7	2,7 4,5 X	X	X	1,8 O	5,8 4,5 6,7 3,5 X	X	
8	2,6 O	X	X	1,8 7,6 4,5 X	1,5 O	X	6,7 4,5 1,3 X

Bu tablodan 2-6 durum çiftinin eşdeğer oldukları açıkça görülmekte, diğer eşdeğer durumlar, başka durumların eşdeğerliliğini gerektirmektedir. Bu gerektirmeler aşağıdaki grafla verilebilir:



Şekil 1.13 Yönlendirilmiş gerektirme grafı

Yönlendirme grafına göre 4 ile 7'nin eşdeğer olması için 1 ile 8'in eşdeğerli olması gereklidir. Benzer şekilde 1-8'in eşdeğerli olması için 2-6'nın eşdeğerli olması gereklidir. 2-6'nın eşdeğerliliği açıktır. Başka bir şart gerekmemektedir. 5-8'in eşdeğerliliği için 1-5'in, ve 1-5'in eşdeğerliliği için yine 2-6'nın eşdeğerliliği gerekmektedir.
Yönlendirilmemiş bağlantı grafını elde etmek için öncelikle tüm durumlar saat yönünde yazılır. Daha sonra eşdeğer olan durum çiftleri bir çizgi ile birleştirilir. Bunlar gerektirme merdivenindeki "O" ile gösterilmiş gözlere ait durum çiftleridir.



Şekil 1.14 Yönlendirilmemiş bağlantı grafı

Şekil 1.14'a göre 1-5-8 tam bağlı bir alt graf oluşturur. Buna "klik" de denir. 3 numaralı durum ait olan küme bir singleton'dur (tek elemanlı küme).

Sonuç olarak 4 adet eşdeğerlik sınıfı ve aşağıdaki indirgenmiş durum tablosu elde edilir:

		I_1	I_2	I_3	I_4
Q_1'	(Q_1, Q_5, Q_8)	Q_1'/0	Q_2'/1	Q_1'/1	Q_1'/0
Q_2'	(Q_2, Q_6)	Q_2'/1	Q_2'/0	Q_2'/0	Q_3'/0
Q_3'	Q_3	Q_3'/1	Q_4'/0	Q_4'/0	Q_3'/0
Q_4'	(Q_4, Q_7)	Q_1'/0	Q_4'/1	Q_4'/1	Q_3'/0

1.2.2 Durum uyuşması, uyuşma bağıntısı ve tümüyle tanımlanmamış durum tabloların indirgenmesi:

Tanım:

Uyuşma bağıntısı: Tümüyle tanımlanmama sözle anlatımın bir sonucu olabileceği gibi, durum kodlaması sonucu oluşan durum değişkenlerinin kullanılmayan kombinezonları olarak da ortaya çıkabilir. Bu özelliği olan tabloları indirgemekte durum eşdeğerliliği yerine durum uyuşması kullanılır. Eşdeğerlilik bağıntısı yerini uyuşma bağıntısına bırakır. Uyuşma bağıntısı yansıma ve bakışlılık özelliği olan, ancak geçiş özelliğini her zaman sağlamayan ikili bir bağıntı şeklidir ve γ ile gösterilecektir.

Örnek:

$d(x,y)$, x ile y arasındaki uzaklığı göstersin. Buna göre:
$R_\gamma = \{(a,b) \mid d(a, b) \leq 2, \quad a, b \in N\}$ *olarak tanımlanır.*
$d(1, 3) \leq 2$ ve $d(3, 5) \leq 2$ ancak $d(1, 5) > 2$ olacağından
$1\ \gamma\ 3$ ve $3\ \gamma\ 5$ yazılabilirken $1\ \gamma\ 5$ yazılamaz. Bu örnek geçiş özelliğinin bulunmadığını gösterir. Ancak 1 ile 2 ve 2 ile 3 arasındaki uzaklıklar söz konusu olsaydı, geçişlilik özelliğinden bahsedilebilirdi. Bu nedenle uyuşma bağıntısı geçiş özelliğini her zaman sağlamaz diyebiliriz.

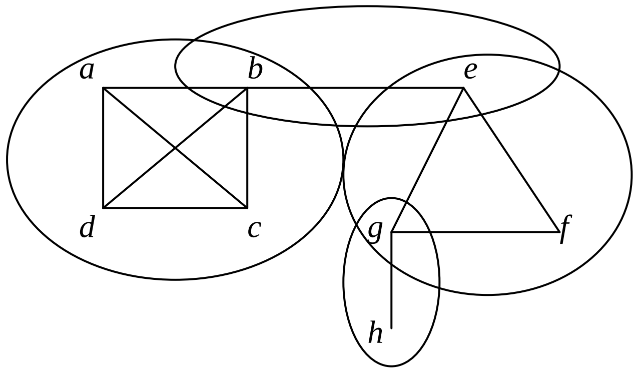
Uyuşanlar sınıfı: Uyuşma bağıntısı tanımlandığı küme üzerinde uyuşanlar sınıflarını oluşturur. Uyuşanlar sınıfının her eleman çifti arasında ikişer ikişer uyuşma vardır. Diğer bir deyişle uyuşanlar sınıfı içinde geçiş özelliği vardır. İki uyuşanlar sınıfının kesişimi boş olmayabilir.

En üst uyuşanlar sınıfı: Bir uyuşanlar sınıfının tanımlandığı küme içinde kendini içine alan daha üst bir sınıf bulunamıyorsa, söz konusu uyuşanlar sınıfına en üst uyuşanlar sınıfı denir. En üst uyuşanlar sınıfı, klik adını da alır. Grafı tam graftır.

Örnek:

$(a, b, c, d) \supseteq (a, b, c) \supseteq (a, b)$ şeklinde yazılan uyuşanlar sınıfında (a, b, c, d) bağıntısı en üst uyuşanlar sınıfı özelliği gösterir.

R γ ={ $a \gamma b$, $a \gamma c$, $a \gamma d$, $b \gamma c$, $b \gamma d$, c γ d, $b \gamma e$, $e \gamma f$, $e \gamma g$, $g \gamma f$, $g \gamma h$} bağıntı kümesi, çiftler kümesi olsun. Bu bağıntı kümelerinde $a \gamma b$ ifadesi a γ a, a γ b, b γ a, b γ b ifadelerini kapsar ve bu dört ifadenin yerine kullanılır. Şekil 1.15 ile küme içindeki uyuşan gruplar gösterilmiştir..



Şekil 1.15 Küme içindeki uyuşan gruplar

{ $\{a, b, c, d\}$ $\{b, e\}$ $\{e, f, g\}$ $\{g, h\}$ } => Tam örtü

Örtü: Elemanlarının bileşimi, tanımlandığı kümenin tüm elemanlarını içine alan uyuşanlar sınıfları kümesine verilen ad.

Tam örtü: Bir küme üzerinde bir uyuşma bağıntısının oluşturduğu en üst uyuşanlar sınıfları kümesidir. Şekil 1.15'de {b, e} grubunu bir örtü içerisine almayabiliriz. Bu durumda da bütün elemanlar (düğüm noktaları) örtülmüş olur ancak bu tam örtü olmaz.

Uyuşan durumlar: M makinasının d_i ve d_j durumlarının uyuşma göstermesi, her iki durum için makinaya uygulanan herhangi bir giriş sekansı tanımlanmamış çıkışlar dışında aynı çıkış dizisini oluşturabilmesi ile tanımlanır ve $d_i \gamma d_j$ ile gösterilir.

$d_i \gamma d_i$

$d_i \gamma d_j \Rightarrow d_j \gamma d_i$

$d_i \gamma d_j$ ve $d_j \gamma d_k$ ise buradan $d_i \gamma d_k$ yazılamaz.

Örnek:

d_1 = ab∅ef
d_2 = a∅fef
d_3 = acfef

d_1 ile d_2, d_2 ile d_3 uyuşmakta ancak d_1 ile d_3 uyuşmamaktadır.

M makinasının durumlar kümesi *D* üzerinde uyuşması açıkça beliren ya da uyuşması başka durum çiftlerinin uyuşmasını gerektiren uyuşan durum çiftleri ortaya çıkarılır.

Teorem: Aynı makinanın iki durumunun uyuşması için gerek ve yeterli koşullar, her giriş için bu iki duruma ilişkin:

1. Çıkışların uyuşma göstermesi
2. a) Gelecek durumların doğrudan ya da karşılıklı olarak uyuşma göstermesi

   2 b) Gelecek durumların uyuşma göstermesi için doğrudan ya da dolaylı olarak uyuşmaları gereken durum çiftleri varsa, bunların arasında çıkışta uyuşma sağlamayan durum çiftinin olmamasıdır.

Durum indirgemesi: Uyuşan durum sınıflarını ortaya çıkarıp, durum tablosunu daha az durumlu başka bir tablo haline dönüştürmeye durum indirgemesi denir.

Tam örtü ile indirgeme: Uyuşanlar çiftlerinin bulunmasında yönlendirilmemiş uyuşma grafı ve gerektirme merdiveni kullanılır. Uyuşma grafı üzerinden tam örtüyü ortaya çıkarma zor bir iş değildir. Tam örtünün herhangi bir sınıfına yeni bir durum atayıp indirgenmiş makina elde edilebilir, ancak bu makina çoğu kere en iyi indirgenmiş makina olmaz. Optimal çözümü bulmak için kapalı örtü tanımı geliştirilmiştir.

Kapalı örtü: Kapalı örtü öyle bir örtüdür ki, bu örtüden bir uyuşanlar sınıfına ait bir durum çiftinin uyuşması için diğer durum çiftlerinin uyuşması gerekiyorsa, bu durum çiftlerinin her biri kapalı örtünün herhangi bir uyuşanlar sınıfı içinde yer almalıdır. Tam örtü her zaman kapalı bir örtüdür.

Minimal kapalı örtü: En az sayıda uyuşanlar sınıfı ile örtme ve kapalılık özelliklerini taşıyan uyuşanlar sınıfları kümesidir.

Tam örtü bulunduktan sonra, minimal kapalı örtüye geçmede gerektirme grafından yararlanılır. Ancak bu işin sistemli ve hızlı çözüme götüren bir yolu olduğu söylenemez.

Örnek:

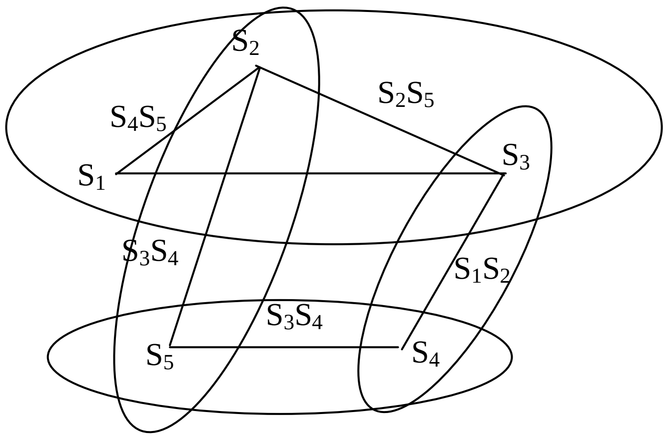
İndirgenmemiş durum tablosu aşağıdaki gibi olan bir sonlu durumlu makina ele alınsın. Bu makinanın durumlarını tam örtü ve kapalı örtü kavramlarını kullanarak indirgeyiniz.

	i_1	i_2	i_3	i_4
S_1	-	-	$S_5/1$	-
S_2	-	$S_5/1$	$S_4/-$	-
S_3	$S_3/0$	$S_2/1$	-	$S_1/0$
S_4	$S_3/0$	$S_1/1$	$S_4/0$	-
S_5	$S_4/0$	$-/1$	$S_3/-$	$S_4/-$

İndirgenmemiş durum tablosu

S_1				
S_4 - S_5	S_2			
O	S_2 - S_5	S_3		
X	S_1 – S_5, X	S_1 – S_2	S_4	
S_3 - S_5, X	S_3 – S_4	S_3 – S_4, S_1 – S_4, X	S_3 – S_4	S_5

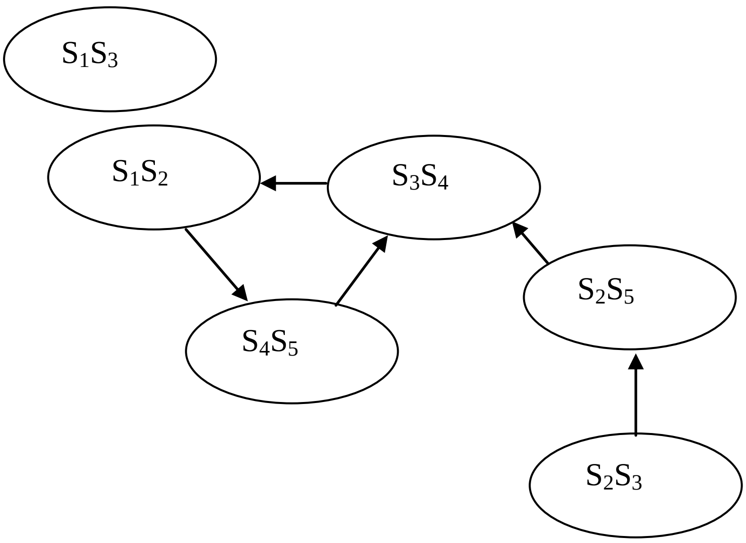
Gerektirme merdiveni



Şekil 1.16 Yönlendirilmemiş bağıntı grafı ve en üst uyuşanlar sınıfları aşağıdaki gibi bulunabilir:

{ (S_1 S_2 S_3), (S_3 S_4), (S_2 S_5), (S_4 S_5) }
a b c d

Buna göre indirgenmiş makinada 4 adet durum bulunur.



Şekil 1.17 Gerektirme grafı

Ancak gerektirme grafında (S_1 S_2), (S_3 S_4), (S_4 S_5)'in kapalılık ve örtme özelliği olan uyuşanlar sınıfları kümesi olduğu görülebilir. Buna göre indirgenmiş makinaların yeni durum tabloları aşağıdaki gibi bulunur:

		i_1	i_2	i_3	i_4
(S_1 S_2)	a	-	c/1	c/1	-
(S_3 S_4)	b	b/0	a/1	b,c/0	a/0
(S_4 S_5)	c	b/0	a/1	b/0	b,c/-

Mealy indirgenmiş durum tablosu

		i_1	i_2	i_3	i_4	Ç
u	(a/1)	-	z	z	-	1
v	(a/0)	-	z	z	-	0
w	(b/0)	w	u	w	v	0
z	(c/1)	w	u	w	w	1

Moore indirgenmiş durum tablosu