PRIMER PARCIAL – Física 1 Verano 2024 – DF FCEN UBA

IMPORTANTE: Hacer los problemas en hojas separadas. Justificar todas las respuestas. Poner nombre y apellido en todas las hojas y enumerar según: 1/5, 2/5, ..., 5/5

Problema 1

Una masa m_2 se encuentra sobre un plano horizontal, encima de m_2 se encuentra otra masa m_1 que a su vez está conectada a través de un sistema de poleas y sogas ideales con otra masa m_3 que se mueve sobre un arco de circunferencia según se muestra en la figura 1. La polea A es móvil mientras que la polea B y el anclaje O están fijos. Sólo existe rozamiento entre las superficie de m_1 y m_2 con coeficientes estático y dinámico $\mu_e = 1/6$ y μ_d ($< \mu_e$), respectivamente. No hay rozamiento entre m_2 y el plano horizontal ni entre m_3 y la base del arco de circunferencia. Hay gravedad. Considere que $m_1 = m_2 = m_3 = m$.

(a) Realice los diagramas de cuerpo libre e identifique claramente los pares de interacción de todas las fuerzas. Escriba las ecuaciones de Newton correspondientes y las ecuaciones de vínculo.

(b) Encuentre el rango de valores de θ para el cual m_1 no desliza respecto de m_2. Si se deja el sistema en reposo en $\theta = \pi/2$, ¿m_1 comenzará a deslizar respecto de m_2?

(c) Efectivamente, se deja el sistema en reposo en $\theta = \pi/2$. Encuentre la aceleración de m_2 y la velocidad angular con la que m_3 llega a $\theta = 0$, i.e. $\dot\theta(\theta = 0)$.

Datos: $m_1 = m_2 = m_3 = m$, g, R, $\mu_e = 1/6$, μ_d ($< \mu_e$)

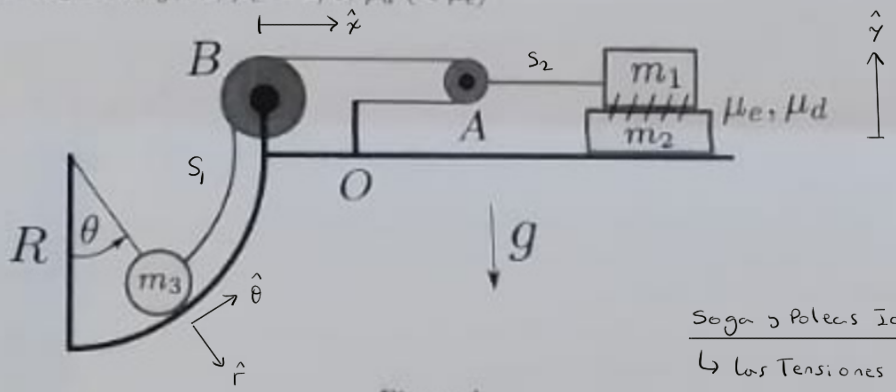


Figura 1

Soga y Poleas Ideales

↳ Las Tensiones en una misma soga son iguales.

↓

Luego $2T_1 = T_2$ (0)

a) Pares de Interacción ; Ecs Newton ; Ecs de Vínculo

F_{AB} : fza q siente A debido a B

Pares de Interacción

T := Tierra

A := Arco de Circunferencia

S := Soga (1, 2)

P := Piso

m_3

$\bar P_{3T} = -\bar P_{T3}$

$\bar N_{3A} = -\bar N_{A3}$

$\bar T_{3S} = -\bar T_{S3}$

m_1 y m_2

$\bar N_{21} = -\bar N_{12}$

$\bar P_{1T} = -\bar P_{T1}$

$\bar T_{1S} = -\bar T_{S1}$

$\bar N_{2P} = -\bar N_{P2}$

$\bar F_{r12} = -\bar F_{r21}$

Ec Newton

$$(m_3)\begin{cases} \hat r)\quad -m_3 R\dot\theta^2 = m_3 g\, c(\theta) - N_{3A} & (1)\\ \hat\theta)\quad m_3 R\ddot\theta = T_1 - m_3 g\, s(\theta) & (2)\end{cases}$$

$$(m_1)\begin{cases} \hat x)\quad m_1\ddot x_1 = Fr_{12} - T_2 & (3)\\ \hat y)\quad N_{12} = m_1 g & (4)\end{cases}$$

$$(m_2)\begin{cases} \hat x)\quad m_2\ddot x_2 = -Fr_{12} & (5)\\ \hat y)\quad N_{2S} = N_{12} + m_2 g & (6)\end{cases}$$

$|\vec N_{21}| = N_{21}$

$|\vec N_{12}| = N_{12}$

Ecs de Vínculo

Soga 1

$S_1 = R(\pi/2 - \theta) + x_A - x_B + x_A - x_O$

$\downarrow \partial^2/\partial t^2$

$R\ddot\theta = 2\ddot x_A$

$S_2 = x_1 - x_A$

$\downarrow \partial^2/\partial t^2$

$\ddot x_1 = \ddot x_A$

$\therefore\ R\ddot\theta = 2\ddot x_1$ (7)

b) (0) ; (7) y $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$ (F e)

$$\left.\begin{array}{l} (2) \to m\, 2\ddot{x}_1^{\times 2} = T_1^{\times 2} - m g\, s(\theta)^{\times 2} \\ (3) \to m\, \ddot{x}_1 = F_{re} - 2T_1 \end{array}\right\} \oplus\ 5m\,\ddot{x}_1 = F_{re} - 2mg\,s(\theta)$$

$$(5) \to m\, \ddot{x}_2^{\times 5} = -F_{re}^{\times 5}$$

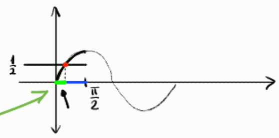
$$\ominus\left\{\begin{array}{l} 0 = 6F_{re} - 2mg\,s(\theta) \\ F_{re} = \frac{1}{3} m g\, s(\theta) \quad (8) \end{array}\right.$$

Considerando la cota para el rozamiento $|F_{re}| \leq \mu_e\, m\, g$ y (8)

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cancel{mg}\, s(\theta) \leq \mu_e \cancel{mg}$$

$$s(\theta) \leq 3\mu_e$$

$$\boxed{s(\theta) \leq \frac{1}{2}} \longrightarrow \text{Para } \theta \in [0; \pi/2]$$



Lueg resulta trivial q si se lo deja libre en $\frac{\pi}{2}$ el cuerpo deslizará de (8) se vé.

c) $\ddot{x}_{2(\theta=\frac{\pi}{2})}$; $\dot{\theta}_{(\theta=0)}$?

Caso rozamiento dinámico

Ec Newton

$$(m_3)\begin{cases} \hat{r}) & -m_3 R\dot{\theta}^2 = m_3 g\, c(\theta) - N_{34} \\ \hat{\theta}) & m_3 R\ddot{\theta} = T_1 - m_3 g\, s(\theta) \end{cases}$$

$$(m_1)\begin{cases} \hat{x}) & m_1 \ddot{x}_1 = F_{rd} - 2T_1 \\ \hat{y}) & N_{12} = m_1 g \end{cases}$$

$$(m_2)\begin{cases} \hat{x}) & m_2 \ddot{x}_2 = -F_{rd} \\ \hat{y}) & N_{2s} = N_{12} + m_2 g \end{cases}$$

$$\xrightarrow{R\ddot{\theta} = 2\ddot{x}_1} \frac{\cancel{m} R\ddot{\theta}}{2} + \cancel{m}\,\ddot{x}_2 = -2\left(\cancel{m} R\ddot{\theta} + \cancel{m} g\, s(\theta)\right)$$

$$R\ddot{\theta} - 2\mu_d g = -4R\ddot{\theta} - 4g\, s(\theta)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{5}\frac{\mu_d}{R} g - \frac{4}{5}\frac{g}{R} s(\theta)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{\mu_d \cdot m \cdot g}{m} \iff \boxed{\ddot{x}_2 = -\mu_d g} \quad (\text{cte})$$

$$\frac{d\dot{\theta}'}{d\theta'}\dot{\theta}' = \frac{2}{5}\frac{\mu_d}{R} g - \frac{4}{5}\frac{g}{R} s(\theta')$$

$$\left.\frac{\dot{\theta}'^2}{2}\right|_{\theta_0}^{\theta} = \frac{2}{5}\frac{\mu_d}{R} g(\theta - \theta_0) + \frac{4}{5}\frac{g}{R}\left(c(\theta) - c(\theta_0)\right)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \theta = 0$$

$$\boxed{\dot{\theta}_{(0)}^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{4}{5}\frac{\mu_d}{R} g\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{5}\frac{g}{R}\left(c(0) - c\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

Problema 2

Una partícula de masa m, que se encuentra engarzada en un alambre semicircular de radio R, puede moverse libremente en la dirección tangencial al alambre. Sobre la partícula se ejerce una fuerza de módulo F constante con dirección siempre vertical y sentido hacia abajo. A su vez, se conecta un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural despreciable ($\ell_0 \approx 0$) como se muestra en la Figura 2. No Hay gravedad.

(a) Plantee las ecuaciones de Newton y encuentre la ecuación de movimiento.

(b) Encuentre la ecuación que determina la/s posición/es de equilibrio. Utilice el método gráfico para hallar dicha/s posición/es de equilibrio y analice la estabilidad. ¿Existe algún rango de parámetros para el cual no hay ninguna posición de equilibrio?

(c) Considere conocida/s la/s posiciones de equilibrio halladas por el método gráfico y plantee la aproximación de pequeñas oscilaciones alrededor de alguna posición de equilibrio adecuada. Halle la ecuación que rige el movimiento y encuentre el período de oscilación. Detalle bajo qué condiciones iniciales es posible aplicar esta aproximación, ¿qué tipo de movimiento espera?

Datos: m, F, R, k, $\ell_0 \approx 0$

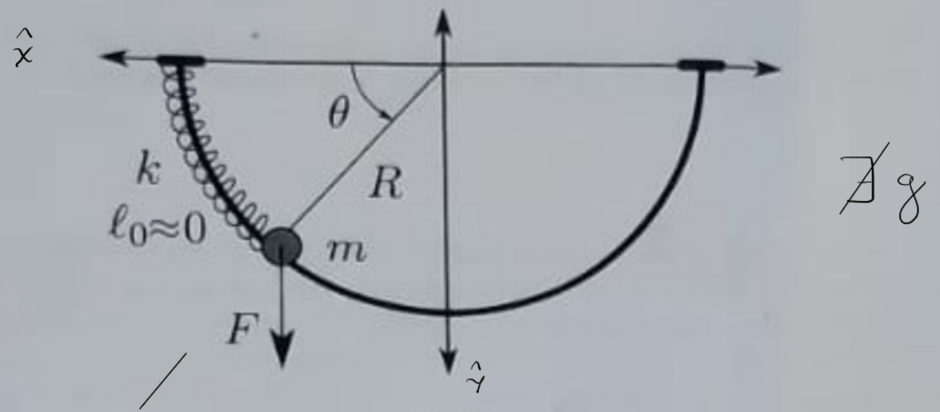
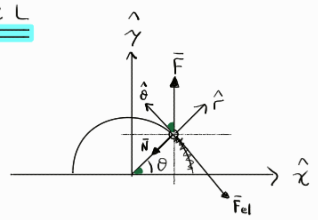


Figura 2

a) Ec Newton ; Ec Mov.

DCL



Ec Traslación (Newton)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{r}) & -mR\dot{\theta}^2 = F\cdot s(\theta) - N \\ \hat{\theta}) & mR\ddot{\theta} = F\cdot c(\theta) - kR\theta \end{array}}\quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array} \longrightarrow$$

Ec Movimiento

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\theta = \frac{F}{mR}c(\theta)} \quad (3)$$

b) Ec que determina las Pos de Equilibrio

$$\boxed{\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{F}{R}c(\theta) - k\theta}_{f(\theta)}}$$

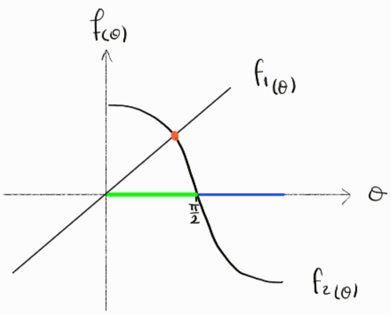
hablo eq. cuando la acel. angular se anule $\ddot{\theta} = 0$ cuando

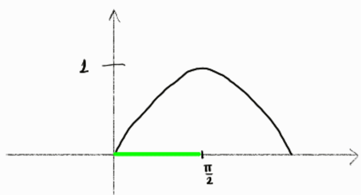
$$\underbrace{\overset{>0}{\frac{Rk}{F}}\cdot\theta}_{f_1(\theta)} = \underbrace{c(\theta)}_{f_2(\theta)} \longrightarrow$$

Para rango de valores para $\theta \in [0; \pi]$ veamos el método gráfico

$\therefore$ $\boxed{\theta_{eq} \in (0; \pi/2)}$ $\forall \{R, k, F\}$

Si $\theta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$ No hay eq

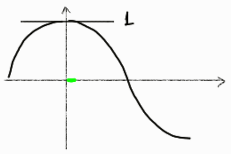




Estabilidad

$$f'(\theta_{eq}) = -\frac{F}{R}\underbrace{s(\theta_{eq})}_{0<\ <1} - k < 0 \longrightarrow \theta_{eq}\ \text{Estable!}$$

c) Tomamos Peq Osc para $\theta \sim 0 \longrightarrow c(\theta) \sim 1$



de (3)

$$\ddot{\theta} + k\theta = \frac{F}{R}$$

$\theta_g = \theta_h + \theta_p$

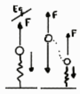
Propongo $\theta_p = C$ (cnt) $\longrightarrow$ $C = \dfrac{F}{kR}$

Propongo
$$\theta_h = A\,c(\omega t + \phi)$$
$$\dot{\theta}_h = -A\omega\, s(\omega t + \phi)$$
$$\ddot{\theta}_h = -A\omega^2 c(\omega t + \phi)$$

Ec q rige el Mov

$$\boxed{\theta_g = A\,c(\omega t + \phi) + \frac{F}{kR}}$$

Mov oscilatorio para $\theta_{eq} \sim \dfrac{F}{kR} \sim 0$



$$-A\omega^2 c(\omega t + \phi) + k A\, c(\omega t + \phi) = \frac{F}{R}$$

$$A\,c(\omega t + \phi)\,(\underbrace{-\omega^2 + k}_{=0}) = \frac{F}{R} \quad \Big\{ \; \omega^2 = k \longrightarrow$$

Período de Osc

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}}$$

$$\tau = \frac{1}{f} \qquad \omega = 2\pi f \longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

Problema 3

Una partícula de masa m se encuentra engarzada en un riel inclinado de ángulo α con la horizontal sobre el cual puede moverse libremente. A su vez un extremo de un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural despreciable ($\ell_0 \approx 0$) se conecta a la masa m, el otro extremo del resorte se halla engarzado a un eje vertical y se mueve de forma tal que el resorte siempre permanece con orientanción horizontal. Todo el dispositivo gira con velocidad angular Ω constante como se muestra en la figura 3. Hay gravedad.

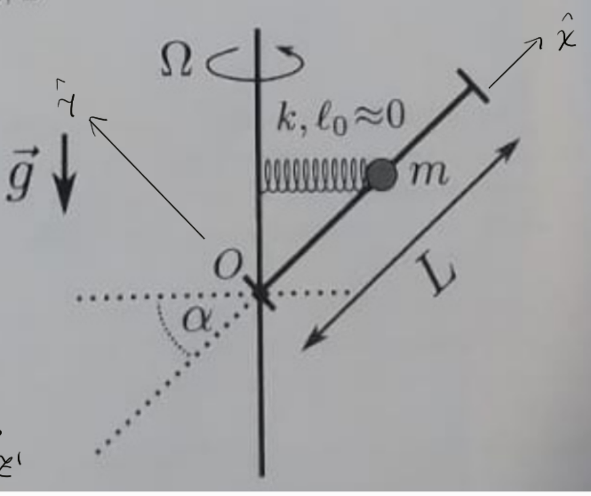
Desarrolle todo el problema en el sistema de referencia que se mueve solidario al dispositivo.

(a) Calcule las fuerzas no inerciales. Realice un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas indicando los pares de interacción.

(b) Halle la ecuación de movimiento y describa cualitativamente los distintos tipos de movimiento que podría realizar m. Encuentre el vector fuerza de vínculo $\vec{F}_v$ que ejerce el eje inclinado sobre la masa en función de la posición de m y datos.

(c) Considere que $k/m = (3/4)\Omega^2$ y que $\Omega^2 = 6g\sin\alpha/(L\cos^2\alpha)$. Halle la posición y la velocidad de m como función del tiempo si inicialmente se coloca en reposo a una distancia ~~arbitraria~~ $L/2$ del centro del dispositivo O. ¿Se dirige hacia el centro o hacia el extremo superior del riel?, ¿de qué depende?

Datos: m, k, $\ell_0 \approx 0$, Ω, α, g, L



a)

Terna Derecha $\overrightarrow{x'y'z'}$

Magnitudes Cinemáticas

Posición

$$\bar r' = x'\,\hat x' \qquad (1)$$

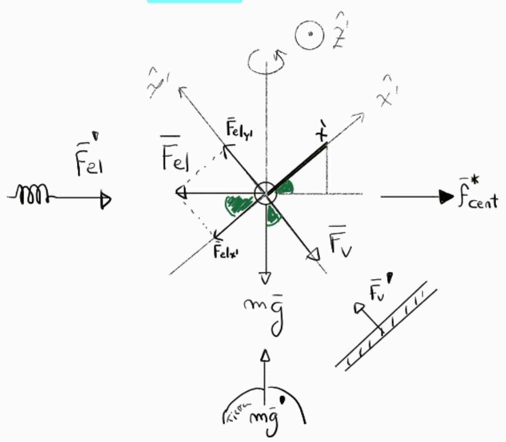
Velocidad

$$\bar v' = \dot x'\,\hat x' \qquad (2)$$

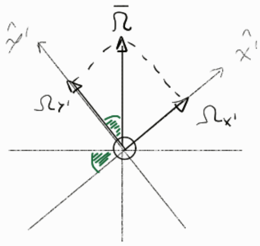
Omegón

$$\bar\Omega = s(\alpha)\,\Omega\,\hat x' + c(\alpha)\,\Omega\,\hat y' \qquad (3)$$

DCL



Omegón



Fuerzas de Interacción

De contacto

$$\bar F_{el} = -k\,\underbrace{x'c(\alpha)}_{\Delta\ell}\,c(\alpha)\,\hat x' + k\,\underbrace{x'c(\alpha)}_{\Delta\ell}\,s(\alpha)\,\hat y'$$

$$\bar F_v = -F_{vy}\hat y' - F_{vz}\hat z' \qquad (F_v > 0)$$

A distancia

$$\bar P = -m\,g\,s(\alpha)\,\hat x' - m\,g\,c(\alpha)\,\hat y'$$

Vínculos

$y' = 0$

$z' = 0$

Fuerzas No Inerciales

$$f^*_{cen} = -m\,\bar\Omega \wedge (\bar\Omega \wedge \bar r') = -m\,s(\alpha)\,c(\alpha)\,\Omega^2 x'\,\hat y' + m\,c^2(\alpha)\,\Omega^2 x'\,\hat x'$$

$$f^*_{cor} = -2m\,\bar\Omega \wedge \bar v' = 2\,m\,c(\alpha)\,\Omega\,x'\,\hat z'$$

$$\cancel{f_{Arr} = -m\,\gamma \wedge \bar r} \quad (\nexists;\ \Omega = cte)$$

b) Ec Mov ; Tipos de Mov de m ; $\bar{F}_{v(m, Datos)}$?

Pseudo-Newton (base) apartir de ahora omitiremos las primas

$\hat{x}'$) $m\ddot{x} = -k\,x\,c(\alpha)\,c(\alpha) - m\,g\,s(\alpha)$

$\hat{y}'$) $F_{vy} = k\,c(\alpha)\,s(\alpha)\,x - m\,c(\alpha)\,s(\alpha)\,\Omega^2 x = \boxed{(k - m\Omega^2)\,c(\alpha)\,s(\alpha)\,x}$

$\hat{z}'$) $\boxed{F_{vz} = 2\,m\,c(\alpha)\,\Omega\,x}$

Ec Mov

$$m\ddot{x} = -k\,x\,c^2(\alpha) - m\,g\,s(\alpha) = F(x) \longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}c^2(\alpha)\,x = -g\,s(\alpha)}$$

Mov Osc Armonica con Frecuencia $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,c(\alpha)$

y con $\boxed{x_{eq} = \frac{m\,g\,s(\alpha)}{k\,c^2(\alpha)}}$ $\ddot{x} = 0$

c) No tengo ganas de hacerlo

Proponer Sol de Ec dif ($x_G = x_H + x_p$) / usar Ci y analizar.