

Análisis dinámico de un sistema multicuerpo plano por formulación de Lagrange

Dinámica computacional de sistemas
multicuerpo 2023-2S

Contenido

- Trabajo virtual
- Ecuación de Lagrange sin restricciones
- Ecuación de Lagrange con restricciones
- Caso de estudio: análisis dinámico de un mecanismo de 4 barras con ecuaciones de gobierno dinámico prescritas

Trabajo virtual

Trabajo virtual hecho por la fuerza \vec{F} actuando en la partícula P

$$\delta W \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Donde el vector posición de cualquier partícula está dado por

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n; t)$$

Donde q_i son las coordenadas generalizadas

Del trabajo virtual δW

$$\begin{aligned} \delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i &= Q_{q_1}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \delta q_1 \\ &+ Q_{q_2}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \delta q_2 \\ &+ \dots \\ &+ Q_{q_n}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) \delta q_n \end{aligned}$$

$$\delta W = -\delta(U) + (\delta W)_{nc}$$

U: energía potencial

$$\delta(U) = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_n} \delta q_n$$

$$-\frac{\partial U}{\partial q_i} : \text{fuerzas generalizadas conservativas}$$

$$(\delta W)_{nc} \stackrel{\text{def}}{=} (Q_{q_1})_{nc} \delta q_1 + \dots + (Q_{q_n})_{nc} \delta q_n$$

$(Q_{q_1})_{nc}$: fuerzas generalizadas no conservativas actuando en el sistema

Ecuación de Lagrange

Ecuación de Lagrange cuando no hay restricciones entre las coordenadas generalizadas

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_{q_k} \text{ para } k = 1, 2, \dots, n$$

La ecuación de Lagrange representa un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden para las coordenadas generalizadas. En general las ecuaciones diferenciales resultantes son no lineales y acopladas

Ecuación de Lagrange cuando hay restricciones entre las coordenadas generalizadas

Ecuaciones de restricción

$$\begin{aligned} a_1(q_1, q_2, \dots, q_n; t) &= 0 \\ a_2(q_1, q_2, \dots, q_n; t) &= 0 \\ &\vdots \\ a_m(q_1, q_2, \dots, q_n; t) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación de Lagrange cuando hay restricciones

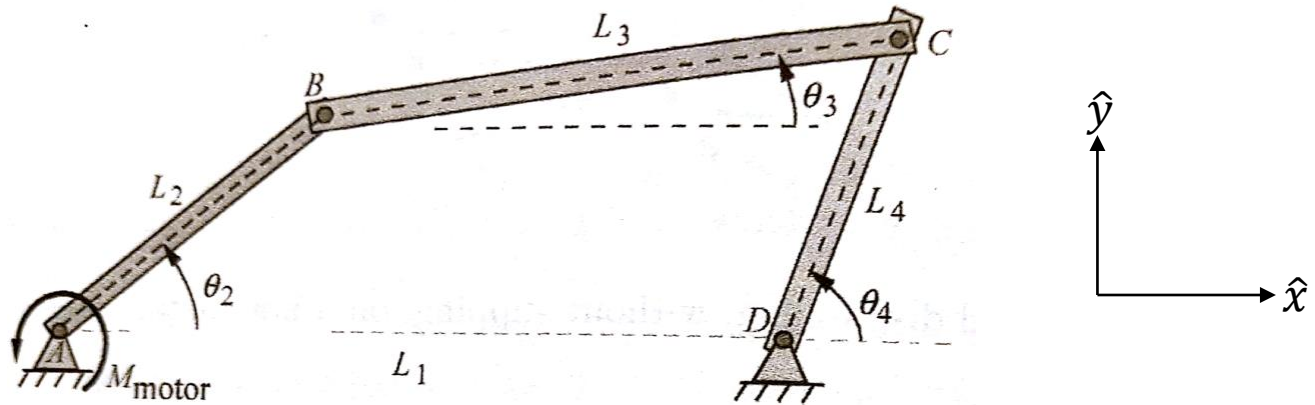
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_{q_k} + \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial q_k} + \lambda_2 \frac{\partial a_2}{\partial q_k} + \dots + \lambda_m \frac{\partial a_m}{\partial q_k}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$

Las ecuaciones resultantes consiste en n ecuaciones diferenciales de segundo orden y m ecuaciones algebraicas de restricción

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange



El mecanismo de 4 barras se encuentra en un plano horizontal y es conducido por un motor que aplica a la barra AB un momento conocido $M_{\text{motor}}(t) = \pi/6 + 1.5\pi \sin(kt)$ N · m, donde $k = 2$ rad/s

El mecanismo parte desde el reposo, es decir, con $\dot{\theta}_2(0) = 0$. La posición inicial del eslabón 2 es $\theta_2(0) = 30^\circ$.

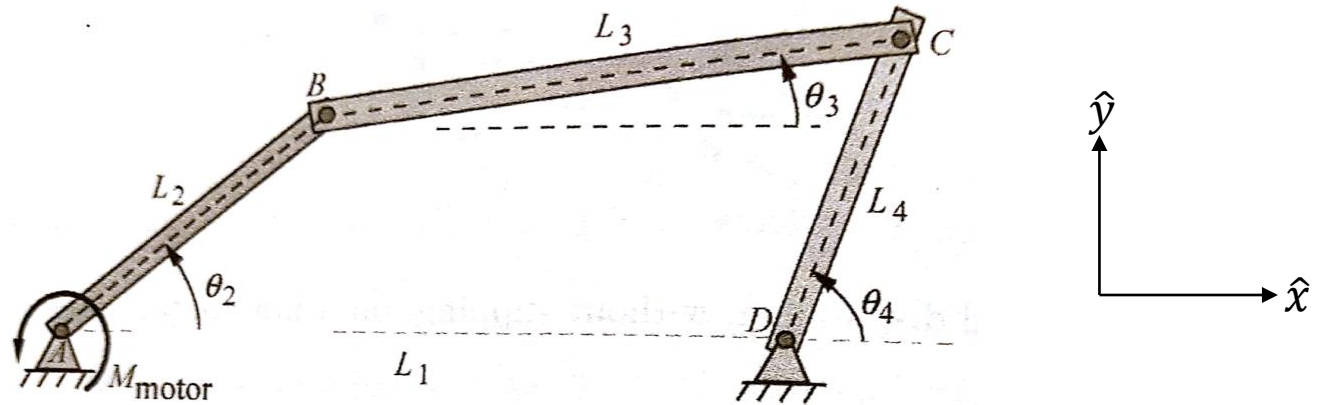
Las longitudes de los eslabones son: $L_1 = 1$ m, $L_2 = 0.4$ m, $L_3 = 0.8$ m, $L_4 = 0.7$ m

Las masas de los eslabones son: $m_2 = 3.75$ kg, $m_3 = 3$ kg, $m_4 = 3$ kg.

Se desea obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento para este sistema restringido en términos de θ_2 e integrarlas numéricamente. Finalmente se desean las gráficas de θ_2 y θ_4 versus t para t en un rango razonable.

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange

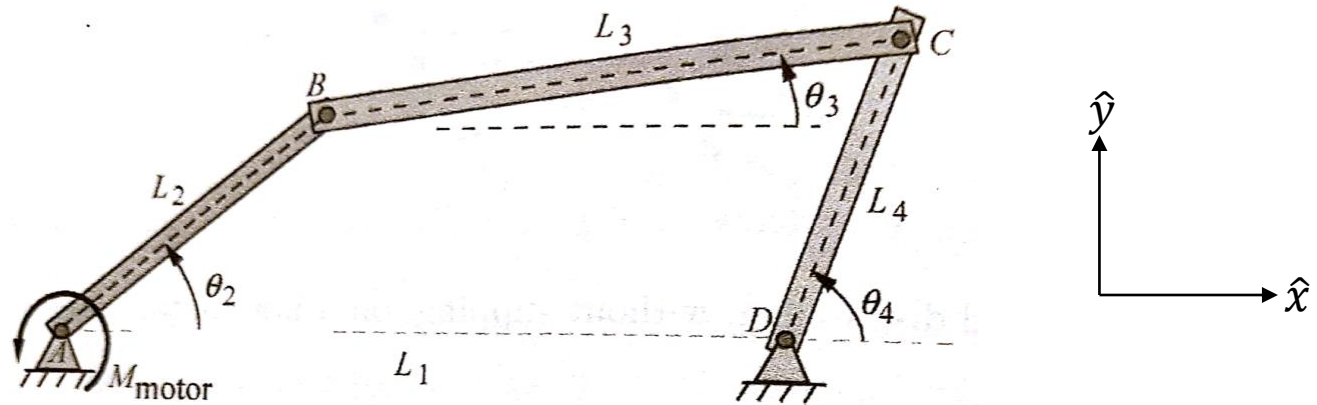


En términos de los vectores unitarios \hat{x} y \hat{y} , la velocidad absoluta del centro de masa C_3 de la barra BC es:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{C_3} &= \frac{d}{dt} \overrightarrow{DC} + \frac{d}{dt} \overrightarrow{CC_3} = \frac{d}{dt} [L_4 (\hat{x} \cos \theta_4 + \hat{y} \sin \theta_4)] \\ &\quad + \frac{d}{dt} \left[\frac{L_3}{2} (-\hat{x} \cos \theta_3 - \hat{y} \sin \theta_3) \right] \\ &= \left(\frac{L_3}{2} \dot{\theta}_3 \sin \theta_3 - L_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 \right) \hat{x} + \left(L_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 - \frac{L_3}{2} \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 \right) \hat{y}\end{aligned}$$

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange



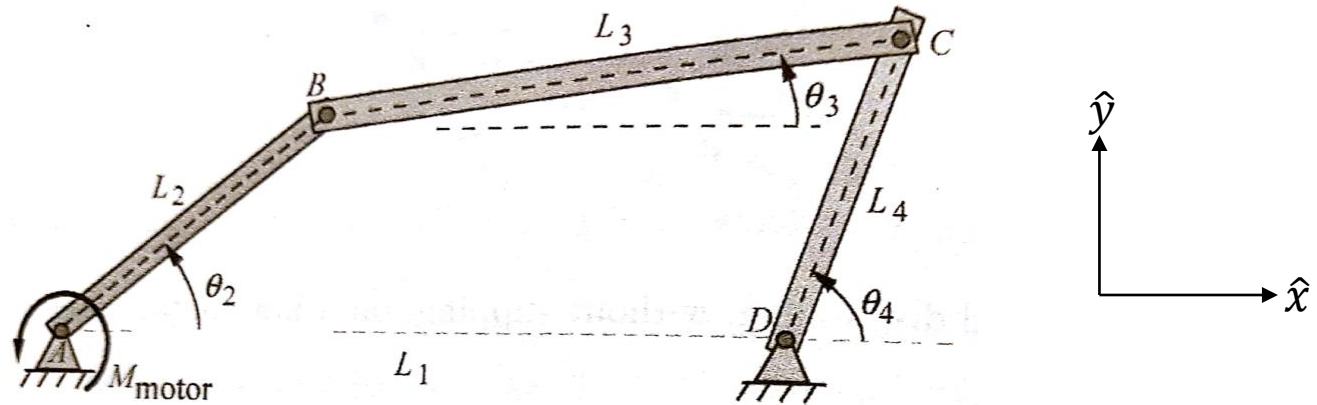
La energía cinética del sistema es:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3\vec{v}_{C_3} \cdot \vec{v}_{C_3} = \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}m_3\left[\left(L_4\dot{\theta}_4\cos\theta_4 - \frac{L_3}{2}\dot{\theta}_3\cos\theta_3\right)^2 + \left(L_4\dot{\theta}_4\sin\theta_4 - \frac{L_3}{2}\dot{\theta}_3\sin\theta_3\right)^2\right] \\
 &= \frac{1}{2}I_A\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}I_D\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2}I_3\dot{\theta}_3^2 + \frac{1}{2}m_3\left[L_4^2\dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{4}L_3^2\dot{\theta}_3^2 - L_3L_4\dot{\theta}_3\dot{\theta}_4\cos(\theta_4 - \theta_3)\right]
 \end{aligned}$$

Las barras son esbeltas y se modelan como líneas. Los momentos de inercias de las barras son: $I_A = m_2 L_2^2/3$, $I_D = m_4 L_4^2/3$, $I_3 = m_3 L_3^2/12$

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange



Los ángulos θ_2 , θ_3 y θ_4 son mutuamente dependientes. Las ecuaciones de restricción son:

$$\underbrace{L_2 \cos \theta_2 + L_3 \cos \theta_3 - L_4 \cos \theta_4 - L_1}_{\triangleq a_1(\theta_2, \theta_3, \theta_4)} = 0$$

$$\underbrace{L_2 \sin \theta_2 + L_3 \sin \theta_3 - L_4 \sin \theta_4}_{\triangleq a_2(\theta_2, \theta_3, \theta_4)} = 0$$

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange

El trabajo virtual δW realizado por todas las fuerzas y momentos que actúan en el sistema es:

$$\delta W = M_{\text{motor}} \delta \theta_2 \triangleq Q_{\theta_2} \delta \theta_2$$

Ya que hay dos restricciones se tendrán dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$. Para las variables θ_2, θ_3 y θ_4 , las ecuaciones de Lagrange con restricciones resultan en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= Q_{\theta_2} + \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial \theta_2} + \lambda_2 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_3} - \frac{\partial T}{\partial \theta_3} &= Q_{\theta_3} + \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial \theta_3} + \lambda_2 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_4} - \frac{\partial T}{\partial \theta_4} &= Q_{\theta_4} + \lambda_1 \frac{\partial a_1}{\partial \theta_4} + \lambda_2 \frac{\partial a_2}{\partial \theta_4} \end{aligned}$$

Donde $Q_{\theta_2} = M_{\text{motor}}$, $Q_{\theta_3} = Q_{\theta_4} = 0$. Estas ecuaciones llevan a las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 &= M_{\text{motor}} - \lambda_1 L_2 \sin \theta_2 + \lambda_2 L_2 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{3} m_3 L_3^2 \ddot{\theta}_3 - \frac{1}{2} m_3 L_3 L_4 \left[\ddot{\theta}_4 \cos(\theta_4 - \theta_3) - \dot{\theta}_4^2 \sin(\theta_4 - \theta_3) \right] \\ &= -\lambda_1 L_3 \sin \theta_3 + \lambda_2 L_3 \cos \theta_3 \\ \left(\frac{1}{3} m_4 + m_3 \right) L_4^2 \ddot{\theta}_4 - \frac{1}{2} m_3 L_3 L_4 \left[\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_4 - \theta_3) + \dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_4 - \theta_3) \right] \\ &= \lambda_1 L_4 \sin \theta_4 - \lambda_2 L_4 \cos \theta_4 \end{aligned}$$

Que tienen 5 incógnitas (los tres ángulos y los dos multiplicadores de Lagrange)

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange

Es necesario incluir las siguientes dos ecuaciones que resultan de tomar la segunda derivada temporal de las ecuaciones algebraicas de restricción.

$$L_2\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + L_3\ddot{\theta}_3 \sin \theta_3 - L_4\ddot{\theta}_4 \sin \theta_4 + L_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 + L_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - L_4\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 = 0$$

$$L_2\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 + L_3\ddot{\theta}_3 \cos \theta_3 - L_4\ddot{\theta}_4 \cos \theta_4 - L_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 - L_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + L_4\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 = 0$$

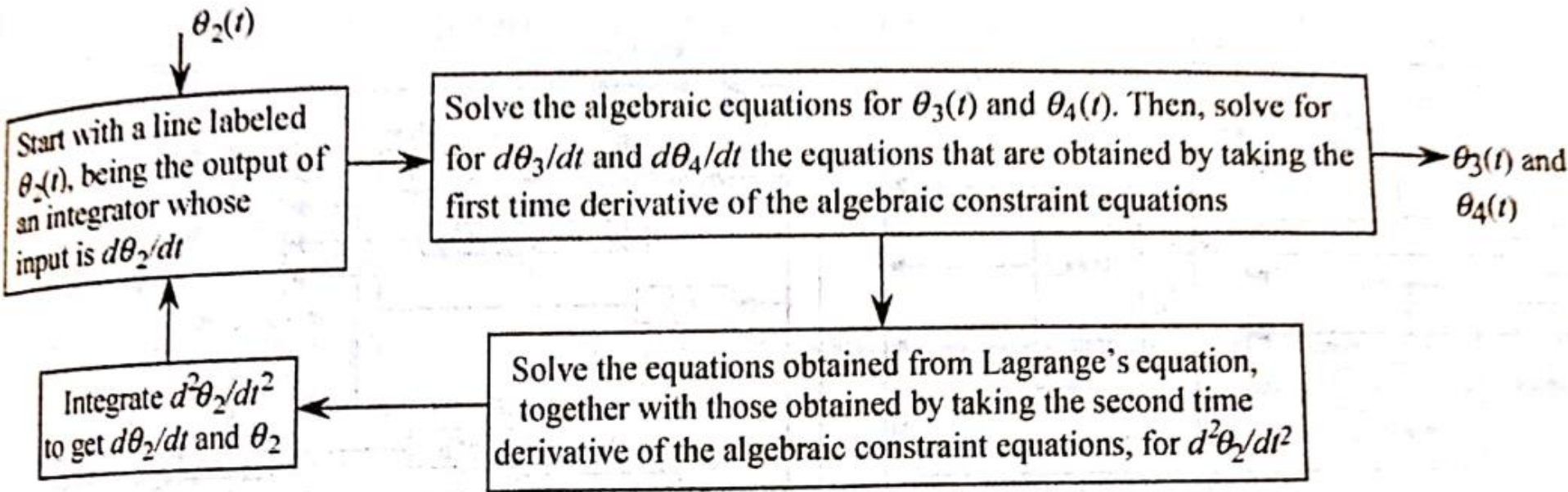
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2L_2^2 & 0 & 0 & L_2 \sin \theta_2 & -L_2 \cos \theta_2 \\ 0 & \frac{1}{3}m_3L_3^2 & -\frac{1}{2}m_3L_3L_4c43 & L_3 \sin \theta_3 & -L_3 \cos \theta_3 \\ 0 & -\frac{1}{2}m_3L_3L_4c43 & (\frac{1}{3}m_4 + m_3)L_4^2 & -L_4 \sin \theta_4 & L_4 \cos \theta_4 \\ L_2 \sin \theta_2 & L_3 \sin \theta_3 & -L_4 \sin \theta_4 & 0 & 0 \\ L_2 \cos \theta_2 & L_3 \cos \theta_3 & -L_4 \cos \theta_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{motor} \\ -\frac{1}{2}m_3L_3L_4\dot{\theta}_4^2 \sin(\theta_4 - \theta_3) \\ \frac{1}{2}m_3L_3L_4\dot{\theta}_3^2 \sin(\theta_4 - \theta_3) \\ L_4\dot{\theta}_4^2 \cos \theta_4 - L_3\dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 - L_2\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \\ -L_4\dot{\theta}_4^2 \sin \theta_4 + L_3\dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 + L_2\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

Donde c43 significa $\cos(\theta_4 - \theta_3)$

Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange

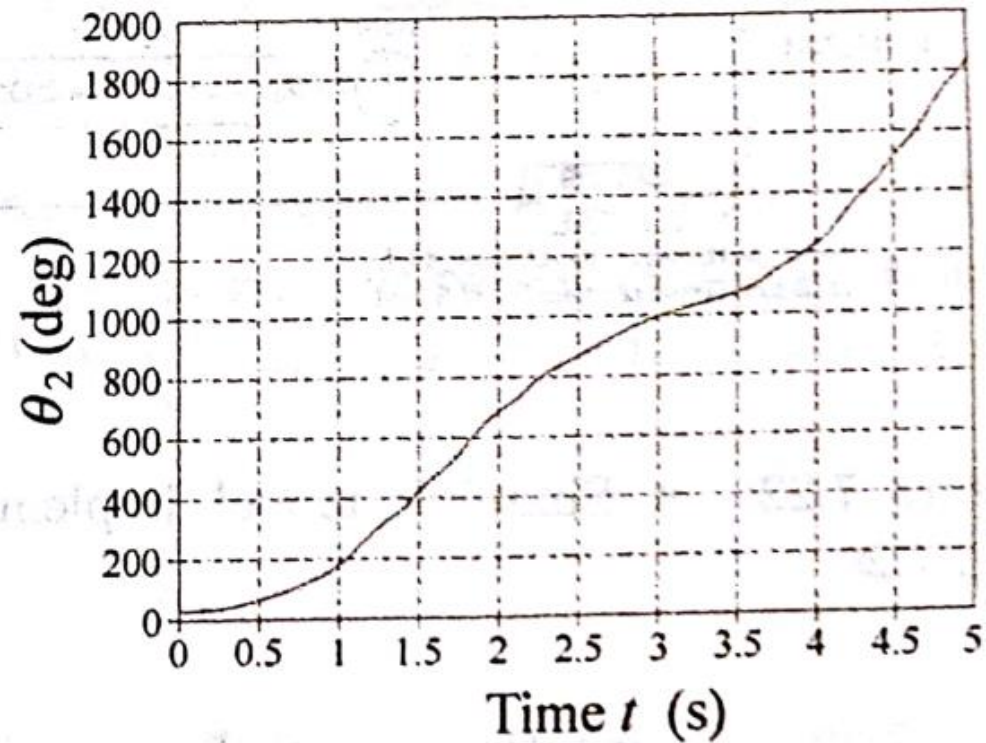
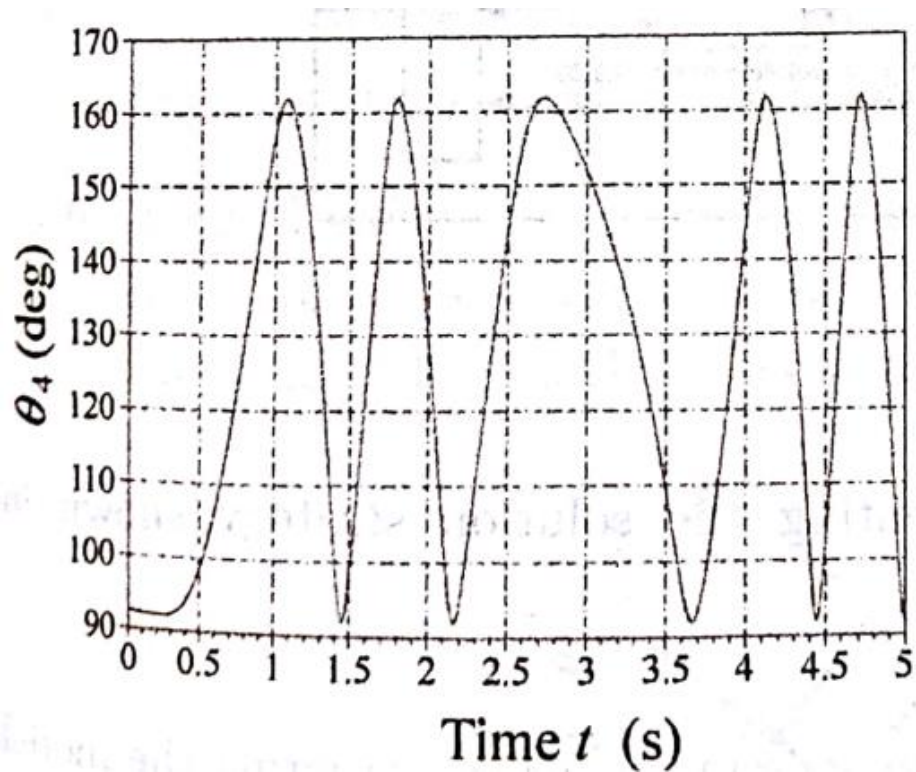
El siguiente diagrama de flujo describe el proceso de solución del sistema de ecuaciones mixto de ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas para resolver la dinámica del mecanismo.



Dinámica de un mecanismo de 4 barras

Formulación por ecuaciones de Lagrange

La solución requerida se encuentra en las siguientes figuras:



Bibliografía

- Crespo Da Silva, “Fundamentals of Dynamics and Analysis of Motion”, Dover Publications, 2016.