Taller de Simulación Numérica. Parte 3: Elementos Finitos

F. Pena y P. Quintela

Curso 2021-22

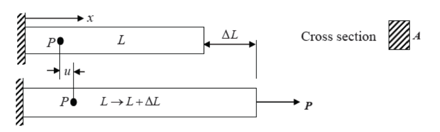
Taller de Simulación Numérica
Curso 2021-22

Tema 6. Método de elementos finitos. Problemas de contorno 1D

F. Pena; P. Quintela

1. Fundamentos de **Simulación** con FEM: Mallado del dominio. Calidad de la malla. Elemento finito. Discretización de la solución. Error de la aproximación. Sistema lineal asociado, matriz de rigidez y vector de cargas. Tratamiento de condiciones de contorno. Cálculos postproceso.
2. Aplicación al modelo de barra solicitada axialmente con **elementos finitos de Lagrange lineales**.
3. Aplicación a los modelos de **balance de masa de un reactor** ya resueltos con diferencias finitas.
4. Aplicación a la **ecuación del calor estacionaria 2D**.
5. Utilización de **Matlab** como herramienta de CAE.
6. Utilización de **COMSOL** como herramienta de CAD/CAE.

- Identificación del modelo matemático
    - 1D, 2D ó 3D.
    - Térmico, mecánico, hidrodinámico, cinética química, multifísica, .
    - Axial, torsión, flexión, tensiones planas, deformaciones planas, axisimétrico, con simetrías, ...
- Fases del método
    - Preproceso: CAD.
    - Simulación: CAE.
    - Postproceso.



- Desplazamiento: vector que indica el cambio de posición de cada punto material del cuerpo en cada instante.

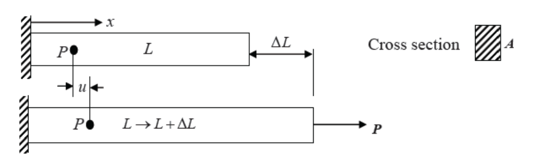
$$\text{Desplazamiento: } \mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$$
$$\downarrow$$
$$\text{Movimiento: } \mathbf{X}(\mathbf{p}, \mathbf{t}) = \mathbf{p} + \mathbf{u}(\mathbf{p}, t)$$
$$\downarrow$$
$$\text{Gradiente Deformación: } \mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$$

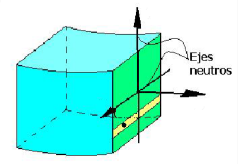
- Tensión: tensor relacionado con la fuerza por unidad de área.

$$1^{er} \text{ Piola Kirchhoff: } \mathbf{S}(\mathbf{p}, t)$$
$$\downarrow$$
$$\text{Lin. Cauchy: } \sigma_{xx} = P/A$$

6.2 FEM 1D. Barra solicitada axialmente

Modelo matemático





- El esfuerzo normal total sobre la sección $x = x_0$ es:

$$A\sigma_{xx}\big|_{x=x_0} = AE\frac{du}{dx}(x_0)$$

$$A\sigma_{xx} = AE\frac{du}{dx}\Bigg\} \Longrightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du(x)}{dx}\right) = q(x), \\ q(x) = \rho_0 gA;\, \sigma = E\frac{du(x)}{dx}, \\ u(0) = 0;\, EA\frac{du(L)}{dx} = P. \end{cases}$$

$Q(x) = AE\frac{du(x)}{dx}$ es el esfuerzo normal y $q(x)$ la carga por unidad de longitud.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du(x)}{dx}\right) = q\left(x\right), \\ q\left(x\right) = \rho_0 g A; \sigma = E\frac{du(x)}{dx} \\ u\left(0\right) = 0; EA\frac{du(L)}{dx} = P \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} -\int_0^L \frac{d}{dx}\left(AE\frac{du(x)}{dx}\right) v\left(x\right) dx \\ = \int_0^L \rho_0 g A v\left(x\right) dx, \\ \forall v\left(x\right); v\left(0\right) = 0. \end{array}\right.$$

$v\left(x\right)$ son conocidas como funciones test. Este modelo encaja en la expresión general:

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}\right) + r\left(x\right)u\left(x\right) = f\left(x\right), \ x \in [a,b] \\ u\left(a\right) = u_a \text{ ó } -p\left(a\right)\frac{du}{dx}\left(a\right) + h_a u\left(a\right) = g_a, \\ u\left(b\right) = u_b \text{ ó } \quad p\left(b\right)\frac{du}{dx}\left(b\right) + h_b u\left(b\right) = g_b, \end{array}\right\}$$

considerando:

$$\begin{array}{rcl} a & = & 0,\ b = L,\ p\left(x\right) = AE,\ r\left(x\right) = 0,\ f\left(x\right) = q\left(x\right) \\ u_a & = & 0,\ \text{CC Dirichlet en } x = 0;\ h_b = 0, g_b = P,\ \text{CC Neumann.} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}\right)+r\left(x\right)u\left(x\right)=f\left(x\right),\ x\in\left[a,b\right] \\ u\left(a\right)=u_a \text{ ó } -p\left(a\right)\frac{du}{dx}\left(a\right)+h_a u\left(a\right)=g_a, \\ u\left(b\right)=u_b \text{ ó } p\left(b\right)\frac{du}{dx}\left(b\right)+h_b u\left(b\right)=g_b. \end{array}\right\}$$

Multiplicando por una función test $v(x)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \int_a^b\left(-\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}\right)+r\left(x\right)u\left(x\right)\right)v\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(x\right)v\left(x\right)dx, \\ \forall v\left(x\right)\in V. \end{array}\right.$$

Aplicando integración por partes::

$$\left\{\begin{array}{l} \int_a^b p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx}dx+\int_a^b r\left(x\right)u\left(x\right)v\left(x\right)dx \\ \quad -p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}v\left(x\right)\Big|_{x=a}^{x=b}=\int_a^b f\left(x\right)v\left(x\right)dx, \\ \forall v\left(x\right)\in V. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \int_a^b p\left(x\right) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b r\left(x\right) u\left(x\right) v\left(x\right) dx \\ -p\left(x\right) \frac{du(x)}{dx} v\left(x\right) \big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b f\left(x\right) v\left(x\right) dx,\ \forall v\left(x\right) \in V. \end{array}\right.$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$\left\{\begin{array}{l} u\left(a\right) = u_a \text{ ó } -p\left(a\right) \frac{du}{dx}\left(a\right) + h_a u\left(a\right) = g_a, \\ u\left(b\right) = u_b \text{ ó } p\left(b\right) \frac{du}{dx}\left(b\right) + h_b u\left(b\right) = g_b. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \int_a^b p\left(x\right) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b r\left(x\right) u\left(x\right) v\left(x\right) dx \\ h_b u\left(b\right) v\left(b\right) + h_a u\left(a\right) v\left(a\right) = \int_a^b f\left(x\right) v\left(x\right) dx + g_b v\left(b\right) + g_a v\left(a\right), \\ \forall v\left(x\right) \in V; \left\{\begin{array}{c} v\left(a\right) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = a, \text{ y con } u\left(a\right) = u_a, \text{ y} \\ v\left(b\right) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = b, \text{ y con } u\left(b\right) = u_b\ . \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Si p, r y f son, por ejemplo funciones continuas, se puede tomar:

$$V = \{v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R};\ \int_a^b [v^2 + (v')^2] dx < +\infty\}.$$

Problema (Formulación fuerte)

Encontrar $u : x \in [a, b] \rightarrow u(x),\ u \in C^2([a, b])$,*verificando:*

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{du(x)}{dx}\right) + r\left(x\right)u\left(x\right) = f\left(x\right),\ \ x \in [a, b] \\ u\left(a\right) = u_a \ \text{ó}\ -p\left(a\right)\frac{du}{dx}\left(a\right) + h_a u\left(a\right) = g_a, \\ u\left(b\right) = u_b \ \text{ó}\ \quad p\left(b\right)\frac{du}{dx}\left(b\right) + h_b u\left(b\right) = g_b. \end{array}\right\}$$

Ejemplo (Formulación fuerte barra solicitada axialmente)

Encontrar $u : x \in [0, L] \rightarrow u(x),\ u \in C^2([0, L])$,*verificando:*

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du(x)}{dx}\right) = q\left(x\right),\ \ x \in [0, L] \\ q\left(x\right) = \rho_0 g A; \sigma = E\frac{du(x)}{dx} \\ u\left(0\right) = 0; EA\frac{du(L)}{dx} = P \end{array}\right\}$$

6.3 FEM 1D. Formulación variacional o débil

Problema (Formulación débil)

Encontrar $u \in V$, *verificando las condiciones Dirichlet si las hubiere* $(u(a) = u_a,\ u(b) = u_b)$, *y tal que:*

$$\begin{cases} \int_a^b p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b r(x) u(x) v(x)\, dx \\ h_b u(b) v(b) + h_a u(a) v(a) = \int_a^b f(x) v(x)\, dx + g_b v(b) + g_a v(a), \\ \forall v(x) \in V; \begin{cases} v(a) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = a, \\ v(b) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = b. \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo (Formulación débil para una barra solicitada axialmente)

$$\begin{aligned} \text{Encontrar } u &\in V \quad \text{tal que } u(0) = 0 \text{ y} \\ \int_0^L AE \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx &= \int_0^L \rho_0 g A v(x)\, dx + Pv(L), \\ \forall v &\in V; v(0) = 0. \end{aligned}$$

6.2 FEM 1D. Espacios de Sobolev

Sea $V = \{v : [a, b] \to \mathbb{R};\ \int_a^b [v^2 + (v')^2] dx < +\infty\}$. Las derivadas deben entenderse en el sentido de las distribuciones.

- El espacio V se dota de una norma, llamada norma de Sobolev, que se define por:

$$||v||_V = \left(\int_a^b [v^2 + (v')^2] dx \right)^{1/2}.$$

- Esta norma proviene del producto escalar:

$$(u, v) = \int_a^b (uv + u'v') dx.$$

- En la bibliografía es usual denotar a V por $H^1(a, b)$:

$$V = H^1(a, b).$$

- $H^1(a, b)$ es un espacio de Sobolev.

6.3 FEM 1D. Formulación variacional o débil

Sea V_0 el subespacio de V definido por:

$$V_0 = \left\{ v \in V \Bigg/ \begin{array}{l} v(a) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = a, \\ v(b) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = b, \end{array} \right\}, \qquad (1)$$

mientras que coincide con V si no hay condiciones Dirichlet.

- Desigualdad de Poincaré: Si el espacio (1) es tal que $V_0 \subsetneq V$ (es decir, hay condición Dirichlet en $x = a$ o en $x = b$), entonces:

$$\forall v \in V_0,\ M_1 ||v||_V^2 \le \int_a^b (v')^2 dx \le M_2 ||v||_V^2$$

siendo M_1 y M_2 constantes positivas.

- La desigualdad de Poincaré permite considerar para $V_0 \subsetneq V$ la norma:

$$||v||_{V_0} = \left(\int_a^b (v')^2 dx \right)^{1/2}.$$

- Se denota por $H_0^1(a,b)$ el subespacio de sobolev de $H^1(a,b)$:

$$H_0^1(a,b) = \left\{ v \in H^1(a,b)\,;\, v(a) = 0 \text{ y } v(b) = 0 \right\}. \qquad (2)$$

6.3 FEM 1D. Formulación variacional o débil

Sea V_0 el subespacio de V definido por:

$$V_0 = \left\{ v \in V \Big/ \begin{array}{l} v(a) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = a, \\ v(b) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = b, \end{array} \right\}, \tag{3}$$

mientras que coincide con V si no hay condiciones Dirichlet. Si alguna de las condiciones es Dirichlet, la solución u pertenece a V_0, solo en el caso de que sea homogénea.

- Condición Dirichlet no homogénea y solo en un extremo: Si existe condición Dirichlet, por ejemplo, en $x = a : u(a) = u_a$, entonces la solución

$$u(x) \in u_D(x) + V_0,$$

siendo $u_D(x)$ una función de V que verifique la condición de contorno, por ejemplo:

$$u_D(x) = \frac{x-b}{a-b} u_a, \;\; V_0 = \{v \in V; \;\; v(a) = 0\}.$$

Obsérvese que en el extremo b, u_D sería nula.

6.3 FEM 1D. Formulación variacional o débil

Sea V_0 el subespacio de V definido por:

$$V_0 = \left\{ v \in V \Big/ \begin{array}{l} v(a) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = a, \\ v(b) = 0 \text{ si Dirichlet en } x = b, \end{array} \right\}, \tag{4}$$

mientras que coincide con V si no hay condiciones Dirichlet.

- Condición Dirichlet no homogénea en ambos extremos: Si existe condición Dirichlet en ambos extremos, $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$, entonces la solución $u(x) \in u_D(x) + V_0$ siendo $u_D(x)$ una función de V que verifique ambas condiciones de contorno, por ejemplo:

$$u_D(x) = \frac{x-b}{a-b} u_a + \frac{a-x}{a-b} u_b,$$

$$V_0 = \{ v \in V;\; v(a) = 0 \text{ y } v(b) = 0 \}. \tag{5}$$

- En ausencia de condiciones Dirichlet, $u(x) \in V_0 = V$.

Problema (Formulación variacional o débil)

Encontrar $u \in V$, verificando las condiciones Dirichlet si las hubiere $(u(a) = u_a,\ u(b) = u_b)$, y tal que:

$$\begin{cases} \int_a^b p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b r(x)\, u(x)\, v(x)\, dx \\ +h_b u(b)\, v(b) + h_a u(a)\, v(a) = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx + g_b v(b) + g_a v(a), \\ \forall v(x) \in V_0. \end{cases}$$

Problema (Formulación variacional o débil general)

Encontrar $u \in V$, verificando las condiciones Dirichlet si las hubiere $(u(a) = u_a,\ u(b) = u_b)$, y tal que:

$$a(u, v) = L(v),\ \forall v \in V_0.$$

6.3 FEM 1D. Formulación variacional o débil

Ejemplo (Problema variacional general barra solicitada axialmente)

Encontrar $u \in V_0$ *tal que*

$$a(u, v) = L(v), \ \forall v \in V_0,$$

siendo $V_0 = \{v \in V;\ v(0) = 0\}$.

Ejemplo (Operadores barra solicitada axialmente)

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_0^L AE \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx, \\ L(v) = \int_0^L \rho_0 g A v\,(x)\, dx + P v\,(L)\,. \end{cases}$$

Obsérvese que a es una forma bilineal definida de $V \times V \to \mathbb{R}$ y L es lineal definida de $V \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(AE\frac{du(x)}{dx}\right) = q\left(x\right), \\ q\left(x\right) = \rho_0 g A; \sigma = AE\frac{du(x)}{dx} \\ u\left(0\right) = 0; EA\frac{du(L)}{dx} = P \end{array}\right\}$$

$$\Downarrow; \quad \Uparrow \quad \text{si} \quad u \quad \text{es regular}$$

$$\text{Encontrar} \quad u \in V \qquad \text{tal que } u(0) = 0 \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} \int_0^L AE\frac{du\left(x\right)}{dx}\frac{dv\left(x\right)}{dx}dx &= \int_0^L \rho_0 g A v\left(x\right)dx + Pv\left(L\right), \\ \forall v &\in V; v\left(0\right) = 0. \end{aligned}$$

Observación : $u\left(0\right) = 0$ elimina las transformaciones rígidas y garantiza la unicidad de solución

6.3 FEM 1D. Propiedades de los operadores

Definición (Operador continuo)

Se dice que el operador L es continuo sobre V si existe una constante M_L tal que:

$$|L(v)| \leq M_L ||v||_V, \ \forall v \in V.$$

Si $f(x) \in C([a,b])$ entonces el operador lineal:

$$L(v) = \int_a^b f(x)\, v(x)\, dx + g_b v(b) + g_a v(a),$$

es continuo sobre V, gracias a la desigualdad de Hölder y a la inyección continua de $H^1(0,L)$ en $C([0,L])$.

Ejemplo (Barra solicitada axialmente)

El operador lineal L asociado al modelo de barra solicitada axialmente es continuo:

$$|L(v)| = \left| \int_0^L \rho_0 g A v(x)\, dx + P v(L) \right| \leq M_L ||v||_V.$$

6.3 FEM 1D. Propiedades de los Operadores

Definición (Forma bilineal continua)

Se dice que la forma bilineal a es continua sobre $V \times V$, si existe una constante $M > 0$ tal que cualesquiera que sean las funciones $u, v \in V$ se verifica:

$$|a(u, v)| \leq M||u||_V \ ||v||_V .$$

Si $p(x)$ y $r(x) \in C([a, b])$ entonces el operador bilineal:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_a^b p(x) \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx + \int_a^b r(x) u(x) v(x) dx \\ &+ h_b u(b) v(b) + h_a u(a) v(a) \end{aligned} \quad (6)$$

es continuo sobre $V \times V$.

Ejemplo (Barra solicitada axialmente)

La forma bilineal a asociada al modelo de barra solicitada axialmente es continua:

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^L AE \frac{du\,(x)}{dx} \frac{dv\,(x)}{dx} dx \right| \leq AE \int_0^L |u'(x)v'(x)| dx \\
&\leq M||u||_V \; ||v||_V ,
\end{aligned}
$$

donde $M = AE$.

6.3 FEM 1D. Propiedades de los operadores

Definición (Forma bilineal coerciva)

Se dice que la forma bilineal a es V_0- coerciva si existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v,v) \geq \alpha ||v||_V^2, \ \forall v \in V_0.$$

Ejemplo (Barra solicitada axialmente)

La forma bilineal a asociada al modelo de barra solicitada axialmente es coerciva:

$$a(v,v) = \int_0^L AE \frac{dv\,(x)}{dx} \frac{dv\,(x)}{dx} dx \geq \alpha ||v||_V^2, \ \forall v \in V_0,$$

gracias a la desigualdad de Poincaré.

6.3 FEM 1D. Propiedades de los operadores

Teorema

Sea V_0 está definido por la ecuación (3), y el coeficiente $p(x)$ continuo en $[a,b]$ y tal que existe $m_p > 0$, tal que $min_{x\in[a,b]} p(x) \geq m_p$. Supongamos que se verifica uno de los siguientes escenarios:

- *El coeficiente $r(x)$ es continuo en $[a,b]$ y tal que existe $m_r > 0$, tal que $min_{x\in[a,b]} r(x) \geq m_r$. Además, si existe alguna condición Robin, entonces el correspondiente coeficiente h_a, h_b es positivo.*
- *Si $r(x) = 0$, y si existe alguna condición Robin, entonces el correspondiente coeficiente h_a, h_b es positivo. En caso de no haya alguna condición Dirichlet, entonces $h_a + h_b > 0$.*

Entonces la forma bilineal (6) es V_0-coerciva.

Es importante recordar que si no hay condiciones Dirichlet, entonces $V_0 = V$.

Teorema (Lema de Lax Milgram)

Si la forma bilineal a es continua sobre $V \times V$ y V_0-coerciva, y si el operador lineal L es continuo sobre V, entonces el problema

$$\text{Encontrar } u \in u_D + V_0 \text{ tal que} \tag{7}$$

$$a(u, v) = L(v), \ \forall v \in V_0, \tag{8}$$

admite una única solución.

Definición (Problema aproximado)

Sea $V_h \subset V$ de dimensión finita tal que $lim_{h \to 0} (\dim (V_h)) = +\infty$. Se define el problema aproximado de (7)-(8) como:

$$\text{Encontrar } u_h \in u_{Dh} + V_{h0} \text{ tal que}$$

$$a(u_h, v_h) = L(v_h), \ \forall v_h \in V_{h0}. \tag{9}$$

- Sea $V_h \subset V$ de dimensión finita tal que $\lim_{h\to 0}(\dim(V_h)) = +\infty$.
- a continua sobre $V \times V$, y V_0- coerciva.
- L continuo sobre V.

Definición (Problema discreto)

Se define el problema aproximado de (7)-(8) como:

$$\begin{aligned} &\textit{Encontrar } u_h(\equiv \mathbf{u}_h) \in u_{Dh} + V_{h0} \textit{ tal que} \\ &a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in V_{h0}, \end{aligned} \tag{10}$$

siendo $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega^i(x)$, *siendo* u_h^i *la* $i-$*ésima componente de* $\mathbf{u}_h$, *y* $\langle \omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots \omega^{N_h} \rangle$ *una base de* V_h.

- Sea $V_h \subset V$ de dimensión finita tal que $\lim_{h\to 0}(\dim(V_h)) = +\infty$.

Definición (Problema discreto)

Se define el problema aproximado de (7)-(8) como:

$$\begin{gathered}\textit{Encontrar } u_h(\equiv \mathbf{u}_h) \in u_{Dh} + V_{h0} \textit{ tal que}\\ a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in V_{h0},\end{gathered} \tag{11}$$

siendo $u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega^i(x)$, *y* $\langle \omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots \omega^{N_h} \rangle$ *una base de* V_h.

Teorema (Lema de Cea, cota de error)

Existe una constante $C > 0$, *independiente de* h *tal que*

$$\|u - u_h\| \le C \inf_{w_h \in u_{Dh}+V_{h0}} \|u - w_h\| = C\ d(u, V_h). \tag{12}$$

- Sea $V_h \subset V$ de dimensión finita tal que $\lim_{h\to 0}\left(\dim\left(V_h\right)\right) = +\infty$:

$$\begin{aligned} V_h &= \langle \omega^1, \omega^2, \omega^3, \ldots . \omega^{N_h} \rangle . \\ V_{h0} &= \langle \hat{\omega}^1, \hat{\omega}^2, \hat{\omega}^3, \ldots . \hat{\omega}^{\hat{N}_h} \rangle \end{aligned}$$

  En la práctica, la base de V_{h0} es un subconjunto de la de V_h : $\hat{\omega}^i = \omega^{J(i)}$. En el caso de no tener condiciones Dirichlet, entonces $V_{h0} = V_h$ y $\hat{N}_h = N_h$.

- La solución discreta $u_h \in u_{Dh} + V_{h0} \subset V_h$ se escribe como:

$$u_h\left(x\right) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega^i\left(x\right).$$

- Sea $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h}$, el vector columna:

$$\mathbf{u}_h = \left(u_h^1, u_h^2, \ldots, u_h^{N_h}\right)^T.$$

- Este problema discreto se resuelve:

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Encontrar } \mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ tal que} \\ a(\sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega^i(x), \omega^j(x)) = L(\omega^j(x)), \ \forall j, \ 1 \leq j \leq N_h, \\ \text{bloqueando el sistema para que } u_h^I = u_{Dh}^I \text{ si } I \notin \{J(i)\}_{i=1,\ldots,\hat{N}_h}. \end{array}\right.$$

Vamos a omitir por el momento el tratamiento de las condiciones de contorno, y usaremos aún $\mathbf{u}_h$ para denotar la solución del problema más general siguiente:

Definición (Formulación variacional del problema discreto ampliado)

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Encontrar } \mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{N_h} \textit{ tal que} \\ a(\sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega^i(x), \omega^j(x)) = L(\omega^j(x)), \ \forall j, \ 1 \leq j \leq N_h. \end{array}\right.$$

Definición (Formulación matricial del problema discreto ampliado)

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Encontrar } \mathbf{u}_h = \left\{ u_h^i \right\} \in \mathbb{R}^{N_h} \textit{ tal que} \\ A_h \, \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h, \\ \left(A_h\right)_{ji} = a(\omega^i\left(x\right), \omega^j\left(x\right)),\ b_h^j = L(\omega^j\left(x\right)),\ \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq N_h. \end{array} \right.$$

- A_h es la matriz de rígidez y $\mathbf{b}_h$ el vector de cargas. En la práctica, A_h y $\mathbf{b}_h$ deberán incluir también las aportaciones de las condiciones de contorno Robin que puedan existir, y en el caso de que haya condiciones Dirichlet sufrir un proceso de bloqueo para garantizar que $u_h (\equiv \mathbf{u}_h) \in u_{Dh} + V_{h0}$, esto es, $u_h^I = u_{Dh}^I$ si $I \notin \left\{J\left(i\right)\right\}_{i=1,\ldots,\hat{N}_h}$.

- El método de elementos finitos construye buenos subespacios V_h para utilizar la aproximación de Galerkin:
  - Los elementos de la base se eligen de forma que sean fáciles de calcular los elementos de la matriz de rígidez y del vector de esfuerzos.
  - Sea fácil de implementar el bloqueo de las condiciones Dirichlet.
  - Que la matriz de rígidez tenga el mayor número posible de ceros: matrices huecas o sparse.
  - Que los ceros a ser posible estén cerca de la diagonal principal para que el ancho de banda de la matriz sea mínimo.
  - Que la $d(u, V_h) = O\left(h^k\right)$ cuando $h \to 0$, siendo k un real positivo.

- Mallado del dominio.

  Sea $h > 0$.Se construye la malla del dominio:

$$\bar{\Omega} = [a, b] = \cup_{i=1}^{N_h-1}[x_i, x_{i+1}] = \cup_{k=1}^{N_h-1} T_k, \;\; T_k = [x_k, x_{k+1}] \qquad (13)$$

  Cada elemento T_k tiene dos vértices: $x_1^k = x_k$, y $x_2^k = x_{k+1}$.
  Se define la longitud del elemento $k: h_k = x_{k+1} - x_k$. El parámetro h de la malla verifica:

$$h = \text{máx}_{1 \leq k \leq N_h-1} h_k$$

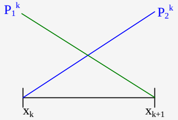
  El número de elementos de la malla es $N_{el} = N_h - 1$; el número de vértices es $N_{ver} = N_h$.

Elemento Finito Se asocia a la malla $(T_k)_{k=1}^{N_{el}}$ una familia de elementos finitos:

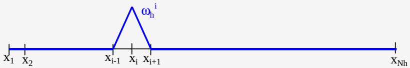
- Para cada elemento de la malla T_k se define el espacio de funciones de dimensión finita P_{T_k}.
- Se definen los grados de libertad Σ_{T_k} sobre el elemento T_k: puntos y valores característicos sobre el elemento, con los que si se conoce el valor de una función de V_h, se determina de forma única un elemento de P_{T_k}.

1. Elementos Lagrange lineales

$$V \supset V_h = \{v_h \in C([a,b]) : v_{h/T_k} \in P_1, 1 \leq k \leq N_{el}\},$$



Base local de V_h sobre el elemento T_k.



Grafo de la función básica ω_h^i.

$$\omega_h^i(x)\,|_{T_k} = a_1^{ik} + a_2^{ik} x;\ \omega_h^i(x_j) = \delta_{ij}.$$

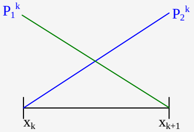
Los nodos locales son los vértices de los segmentos/elementos

2. Los nodos son los vértices de la malla: $n_i = x_i$, $N_{nod} = N_{ver}$. El nº total de grados de libertad es N_{ver}.

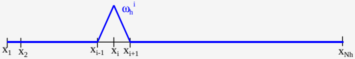
6.6 FEM 1D

Elementos finitos de Lagrange 1D

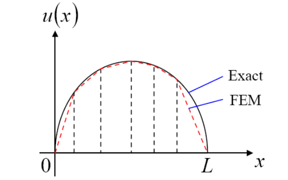
1. **Elementos Lagrange lineales**



Base local de V_h.



Grafo de la función básica ω_h^i.



2. $$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega_h^i(x)\,,\, u_h^i = u_h(x_i) \in \mathbb{R}.$$

   Los grados de libertad son los valores de la función en los vértices ($\equiv$ nodos) de la malla.

3. La matriz es tridiagonal: $(A_h)_{ij} = a(\omega_h^j, \omega_h^i) = 0$ si $|i-j| > 1$.

Cota de error Si $u \in H^2(a,b)$ entonces la aproximación por elementos finitos de Lagrange lineales en dimensión 1D es:

$$\left\| u^{(l)} - u_h^{(l)} \right\|_{L^2(a,b)} = O\left(h^{2-l}\right), \ l \in \{0,1\},$$

siendo

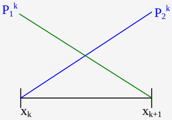
$$\begin{aligned} H^2(a,b) &= \{v \in L^2(a,b) : \frac{dv}{dx} \text{ y } \frac{d^2v}{dx^2} \in L^2(a,b)\}, \\ ||v||_{H^2(a,b)} &= \left(||v||_{0,2}^2 + ||\frac{dv}{dx}||_{0,2}^2 + ||\frac{d^2v}{dx^2}||_{0,2}^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- En el cálculo de A_h debemos integrar funciones sobre $[a, b]$:

$$\int_a^b = \sum_{k \in \mathcal{T}_h} \int_{T_k}$$

En T_k, una base local de V_h sobre el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ está constituida por los polinomios de grado 1, P_1^k y P_2^k:

$$\begin{aligned} P_1^k(x_k) &= 1,\ P_1^k(x_{k+1}) = 0, \\ P_2^k(x_k) &= 0,\ P_2^k(x_{k+1}) = 1. \end{aligned}$$



Base local en

Si x_j^k denota el j-ésimo nodo de T_k:

$$\begin{aligned} P_i^k(x_j^k) &= \delta_{ij}, i, j \in \{1, 2\}, \\ x_j^k &= x_{k+j-1}. \end{aligned}$$

- Si $v_h \in V_h$,

$$v_{h/T_k} = v_{h/[x_k,x_{k+1}]} = \gamma_1 P_1^k + \gamma_2 P_2^k,$$

siendo $\gamma_1 = v_h(x_k)$ y $\gamma_2 = v_h(x_{k+1})$.

- $$v_{h/[x_k,x_{k+1}]} = [P_1^k \ P_2^k]\,(x) \begin{pmatrix} v_h(x_k) \\ v_h(x_{k+1}) \end{pmatrix} = [P^k]\,(x)\,(\mathbf{v}_h)_k.$$

- $$v'_{h/[x_k,x_{k+1}]} = [(P_1^k)' \ (P_2^k)']\,(x) \begin{pmatrix} v_h(x_k) \\ v_h(x_{k+1}) \end{pmatrix} = [DP^k]\,(x)\,(\mathbf{v}_h)_k.$$

- Consideremos los términos con integral de la forma bilineal:

$$
\begin{aligned}
a(u_h, v_h) &= \int_a^b p(x)\, u_h' v_h' dx + \int_a^b r(x)\, u_h v_h dx \\
&= \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x)\, u_h' v_h' dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} r(x)\, u_h v_h dx \right) \\
&= \sum_{k=1}^{N_{el}} a_k(u_h, v_h).
\end{aligned}
$$

- $$
\begin{aligned}
a_k(u_h, v_h) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v_h')^t p(x)\, u_h' dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v_h)^t\, r(x)\, u_h dx \\
&= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\mathbf{v}_h)_k^t [DP^k]^t p(x)\, [DP^k]\, (\mathbf{u}_h)_k\, dx \\
&\quad + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\mathbf{v}_h)_k^t [P^k]^t r(x)\, [P^k]\, (\mathbf{u}_h)_k\, dx,
\end{aligned}
$$

- Sea $\left[A_h^k\right]$ la matriz 2×2 definida por:

  $$\left[A_h^k\right] = \int_{x_k}^{x_{k+1}} [DP^k]^t p(x)\, [DP^k] dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} [P^k]^t r(x)\, [P^k] dx,$$

  de forma que:

  $$a_k(u_h, v_h) = (\mathbf{v}_h)_k^t \left[A_h^k\right] (\mathbf{u}_h)_k\,.$$

- La matriz $\left[A_h^k\right]$ es la matriz elemental asociada al elemento T_k.

- $$a(u_h, v_h) = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_h)_k^t \left[A_h^k \right] (\mathbf{u}_h)_k \,.$$
- Los vectores $(v_h)_k$ y $(u_h)_k$ son grados de libertad locales

$$(\mathbf{u}_h)_k = \begin{pmatrix} u_h(x_k) \\ u_h(x_{k+1}) \end{pmatrix}, \, T_k \in \mathcal{T}_h.$$

- El vector de grados de libertad globales es el vector $(\tilde{u}_h)$ definido por:

$$\mathbf{u}_h = \begin{pmatrix} u_h(x_1) \\ u_h(x_2) \\ \dots \\ u_h(x_{N_h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_h^1 \\ u_h^2 \\ \dots \\ u_h^{N_h} \end{pmatrix}.$$

$$\left[B^k\right] = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} & & & \downarrow^{k} & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \uparrow_{k+1} & & & \end{pmatrix} \in M_{2\times N_h},$$

$$B^k_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_j = x^k_i, \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases} \qquad (u_h)_k = \left[B^k\right] \mathbf{u}_h.$$

- $$\begin{aligned} a(u_h, v_h) &= \sum_{T_k\in\mathcal{T}_h} \mathbf{v}_h^t \left[B^k\right]^t \left[A^k_h\right] \left[B^k\right] \mathbf{u}_h \\ &= \mathbf{v}_h^t \left[\sum_{T_k\in\mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t \left[A^k_h\right] \left[B^k\right]\right] \mathbf{u}_h. \end{aligned}$$
- $\left[B^k\right]$ es la matriz de ensamblado.

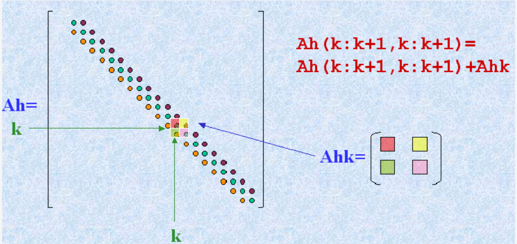
- La matriz de rígidez es tridiagonal:

$$(A_h)_{ij} = a(\omega_h^j, \omega_h^i) = 0 \text{ si } |i-j| > 1.$$

- $$(A_h)_{ij} = \left(\sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \right)_{ij} = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left(\left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \right)_{ij}.$$

- $$\begin{aligned} \left(\left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \right)_{ij} &= \sum_{r,s=1}^{2} \left[B^k\right]^t_{ir} \left[A_h^k\right]_{rs} \left[B^k\right]_{sj} \\ &= \begin{cases} \left[A_h^k\right]_{11} & \text{si } i = j = k, \\ \left[A_h^k\right]_{12} & \text{si } i = k, j = k+1, \\ \left[A_h^k\right]_{21} & \text{si } i = k+1, j = k, \\ \left[A_h^k\right]_{22} & \text{si } i = j = k+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

- $$\left(\left[B^k\right]^t\left[A_h^k\right]\left[B^k\right]\right)_{ij}=\begin{cases}\left[A_h^k\right]_{11} & \text{si } i=j=k,\\ \left[A_h^k\right]_{12} & \text{si } i=k, j=k+1,\\ \left[A_h^k\right]_{21} & \text{si } i=k+1, j=k,\\ \left[A_h^k\right]_{22} & \text{si } i=j=k+1,\\ 0 & \text{en otro caso,}\end{cases}$$
- Ensamblado de la matriz elemental correspondiente al elemento k:



- Consideremos el término integral de la forma lineal:

$$
\begin{aligned}
L(v_h) &= \int_a^b f(x)\, v_h dx = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\, v_h dx \\
&= \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v_h)^t f(x)\, dx = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{v}_h)_k^t \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[P^k\right]^t f(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

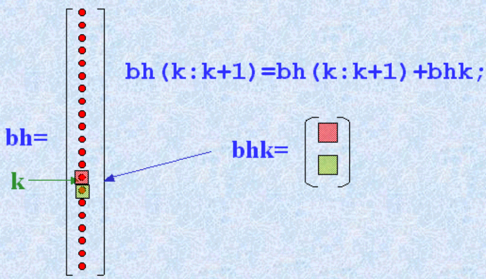
- Vector de carga elemental correspondiente al elemento k:

$$
(\mathbf{b}_h)_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[P^k\right]^t f(x)\, dx.
$$

- En términos de los grados de libertad globales:

$$
L(v_h) = \mathbf{v}_h^t \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t (\mathbf{b}_h)_k \,.
$$

- Cada elemento de la malla sólo aporta a dos componentes del vector de cargas:



Ensamblado del vector de carga elemental.

Encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathbb{M}_{N_h \times 1}$ tal que:
$\mathbf{v}_h^t \left[\sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \right] \mathbf{u}_h = \mathbf{v}_h^t \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t (\mathbf{b}_h)_k$,
$\forall \mathbf{v}_h \in \mathbb{M}_{N_h \times 1}$.

- En particular, tomando como v_h los elementos de la base del espacio de elementos finitos, la expresión anterior es equivalente al sistema algebraico:

Encontrar $\mathbf{u}_h \in \mathbb{M}_{N_h \times 1}$ tal que:
$\sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \mathbf{u}_h = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t (\mathbf{b}_h)_k$.

- $$A_h = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t \left[A_h^k\right] \left[B^k\right] \text{ y } \mathbf{b}_h = \sum_{T_k \in \mathcal{T}_h} \left[B^k\right]^t (\mathbf{b}_h)_k .$$

- A_h es la matriz del sistema y $\mathbf{b}_h$ el vector de carga.

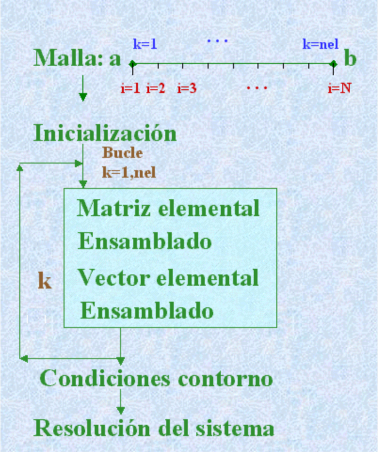


Figura: Diagrama de Flujo.

- Sea $\hat{T} = [0, 1]$ el elemento de referencia.
- Consideremos la aplicación afín:

$$F_k : \hat{x} \in \hat{T} \to F_k(\hat{x}) = (x_{k+1} - x_k)\hat{x} + x_k$$
$$= (x_2^k - x_1^k)\hat{x} + x_1^k \in T_k$$

- F_k transforma $\hat{T}$ en T_k y lleva vértices en vértices:

$$F_k(0) = x_k = x_1^k \text{ y } F_k(1) = x_{k+1} = x_2^k.$$

- $$J(F_k) = x_{k+1} - x_k = long(T_k) = h_k.$$

- Sean

$$\hat{P}_i = P_i^k \circ F_k, \ \ i = 1, 2,$$

$\hat{P}_1$ y $\hat{P}_2$ constituyen la base local del elemento de referencia, ya que ambos son polinomios de grado uno y verifican:

$$\hat{P}_1(0) = 1, \hat{P}_1(1) = 0, \quad \hat{P}_2(0) = 0, \hat{P}_2(1) = 1.$$

- Es fácil ver que los únicos polinomios de grado uno que verifican estas propiedades son:

$$\hat{P}_1(\hat{x}) = 1 - \hat{x} \text{ y } \hat{P}_2(\hat{x}) = \hat{x}.$$

- Por consiguiente:

$$\left[\hat{P}\right] = \left[\begin{array}{cc} 1-\hat{x} & \hat{x} \end{array}\right] = \left[P^k \circ F_k\right].$$

- Por la regla de la cadena, se verifica:

$$\frac{d}{d\hat{x}}\left(P_i^k \circ F_k\right)(\hat{x}) = \frac{d}{dx}P_i^k(F_k(\hat{x}))\frac{d}{d\hat{x}}F_k(\hat{x}) = h_k\frac{d}{dx}P_i^k(F_k(\hat{x})).$$

- $$\left[\hat{D}\hat{P}\right] = \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \end{array}\right] = h_k\left[DP^k \circ F_k\right] = h_k\left[DP^k \circ F_k\right].$$

- $$\begin{aligned}\left[A_h^k\right] &= h_k\{\int_0^1 [DP^k\circ F_k]^t (p\circ F_k)[DP^k\circ F_k]d\hat{x}\\ &+\int_0^1 [P^k\circ F_k]^t (r\circ F_k)[P^k\circ F_k]d\hat{x}\}\\ &= \frac{1}{h_k}\int_0^1 [\hat{D}\hat{P}]^t (p\circ F_k)[\hat{D}\hat{P}]d\hat{x} + h_k\int_0^1 [\hat{P}]^t (r\circ F_k)[\hat{P}]d\hat{x}.\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left[A_h^k\right] &= \frac{1}{h_k}\int_0^1 \left[\begin{array}{r} -1\\ 1\end{array}\right](p\circ F_k)\left[\begin{array}{rr} -1 & 1\end{array}\right]d\hat{x}\\ &+h_k\int_0^1 \left[\begin{array}{r} 1-\hat{x}\\ \hat{x}\end{array}\right](r\circ F_k)\left[\begin{array}{rr} 1-\hat{x} & \hat{x}\end{array}\right]d\hat{x}.\end{aligned}$$

- La matriz elemental sobre el elemento T_k es:

$$\begin{aligned}\left[A_h^k\right] &= \frac{1}{h_k}\int_0^1 (p\circ F_k)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} d\hat{x} \\ &+ h_k\int_0^1 (r\circ F_k)\begin{bmatrix} (1-\hat{x})^2 & (1-\hat{x})\,\hat{x} \\ (1-\hat{x})\,\hat{x} & \hat{x}^2\end{bmatrix} d\hat{x}.\end{aligned}$$

- Si p y q son constantes:

$$\left[A_h^k\right] = \frac{p}{h_k}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} + \frac{r}{6}h_k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
\left[A_h^k\right] &= \frac{1}{h_k}\int_0^1 (p\circ F_k)\left[\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] d\hat{x} \\
&+ h_k \int_0^1 (r\circ F_k)\left[\begin{array}{cr} (1-\hat{x})^2 & (1-\hat{x})\,\hat{x} \\ (1-\hat{x})\,\hat{x} & \hat{x}^2 \end{array}\right] d\hat{x}.
\end{aligned}
$$

- En otro caso se elije una fórmula de integración; por ejemplo considerando la fórmula de Poncelet:

$$
\begin{aligned}
\left[A_h^k\right] &\approx \frac{1}{h_k} p(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})\left[\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array}\right] \\
&+ h_k r(\frac{x_k + x_{k+1}}{2})\left[\begin{array}{cc} 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[A_h^k\right] &= \frac{1}{h_k}\int_0^1 (p\circ F_k)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d\hat{x} \\
&\quad + h_k \int_0^1 (r\circ F_k)\begin{bmatrix} (1-\hat{x})^2 & (1-\hat{x})\,\hat{x} \\ (1-\hat{x})\,\hat{x} & \hat{x}^2 \end{bmatrix} d\hat{x}.
\end{aligned}
$$

- O fórmula del trapecio:

$$
\begin{aligned}
\left[A_h^k\right] &\approx \frac{1}{h_k}\frac{p(x_k)+p(x_{k+1})}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&\quad + h_k \frac{1}{2}\begin{bmatrix} r(x_k) & 0 \\ 0 & r(x_{k+1}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Integración del segundo miembro:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{b}_h)_k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[P^k\right]^t f dx = h_k \int_0^1 \left[P^k \circ F_k\right]^t (f \circ F_k) d\hat{x} \\
&= h_k \int_0^1 \left[\hat{P}\right]^t (f \circ F_k) d\hat{x} = h_k \int_0^1 \left[\begin{array}{r} 1 - \hat{x} \\ \hat{x} \end{array} \right] (f \circ F_k) d\hat{x} \\
&\approx h_k \; f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ 1/2 \end{array} \right].
\end{aligned}
$$

- Condiciones de contorno de bloqueo o Dirichlet

$$u_h(x) = \begin{cases} u_a, & \text{si Dirichlet en} \quad x = a \\ u_b, & \text{si Dirichlet en} \quad x = b \end{cases}$$

- Opción 1:Sustitucción: Se sustituye la primera y/o la última ecuación del sistema:

$$\begin{array}{rcl} [A_h]_{11} & = & 1;\ \ [A_h]_{1j} = 0, 2 \leq j \leq N_h;\ \ b_h^1 = u_a,\ \text{y/o} \\ [A_h]_{N_h\ j} & = & 0, 1 \leq j \leq N_h - 1; [A_h]_{N_h\ N_h} = 1;\ \ b_h^{N_h} = u_b \end{array}$$

- Opción 2. Bloqueo por pivote: Se substituye la primera y la última ecuación por otras computacionalmente equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} 10^{30} u_h^1 + [A_h]_{12} u_h^2 + .. + [A_h]_{1N_h} u_h^{N_h} & = & 10^{30} u_a \\ [A_h]_{N_h 1} u_h^1 + [A_h]_{N_h 2} u_h^2 + ... + [A_h]_{N_h N_h - 1} u_h^{N_h - 1} + 10^{30} u_h^{N_h} & = & 10^{30} u_b \end{array}$$

- Opción 2: Para mantener la diferencia significativa del bloqueo teniendo en cuenta la magnitud de la matriz original, se recomienda substituir la primera y la última ecuación por otras computacionalmente equivalentes:

$$\begin{aligned} 10^{30}[A_h]_{11}u_h^1 + [A_h]_{12}u_h^2 + .. + [A_h]_{1N_h}u_h^{N_h} &= 10^{30}[A_h]_{11}u_a, \\ [A_h]_{N_h1}u_h^1 + ... + [A_h]_{N_hN_h-1}u_h^{N_h-1} + \\ 10^{30}[A_h]_{N_hN_h}u_h^{N_h} &= 10^{30}[A_h]_{N_hN_h}u_b. \end{aligned}$$

- Opción 3: Condensación: Eliminar la primera y/o la última incógnitas del sistema, eliminando las correspondientes filas de la matriz de rígidez y del vector de cargas. Requiere previamente modificar el vector de cargas:

$$\begin{aligned} b_h^2 &= b_h^2 - [A_h]_{21}u_a, \\ b_h^{N_h-1} &= b_h^{N_h-1} - [A_h]_{N_h-1\ N_h}u_b. \end{aligned}$$

- Condiciones de contorno Robin

$$p\left(b\right)u'\left(b\right)+h_b u\left(b\right)=g_b$$

- $$-\int_a^b \left(pu'(x)\right)' v(x)dx+\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx=\int_a^b f(x)v(x)dx.$$

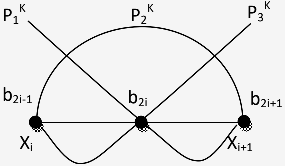
$$\int_a^b p\left(x\right)u'(x)v'(x)dx+\int_a^b r(x)u(x)v(x)dx+\underbrace{h_b u\left(b\right)}_{\text{Matriz}}v(b)$$

$$=\int_a^b f(x)v(x)dx+\underset{\longleftrightarrow}{g_b}{}_{\text{Vector carga}}v(b)-pu'(a)v(a).$$

- $$\begin{aligned} b_h^{N_h} &= b_h^{N_h}+g_b. \\ \left[A_h\right]_{N_h\ N_h} &= \left[A_h\right]_{N_h\ N_h}+h_b \end{aligned}$$

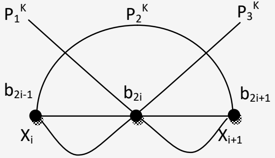
1. Elementos Lagrange cuadráticos

$$V \supset V_h = \{v_h \in C([a,b]) : v_{h/[x_i,x_{i+1}]} \in P_2, 1 \leq i \leq N_h - 1\},$$

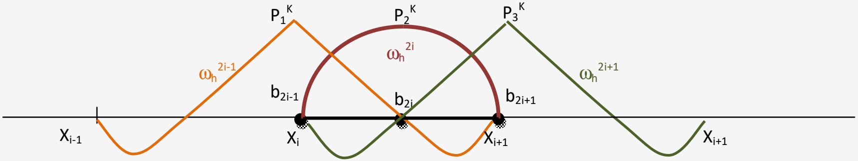


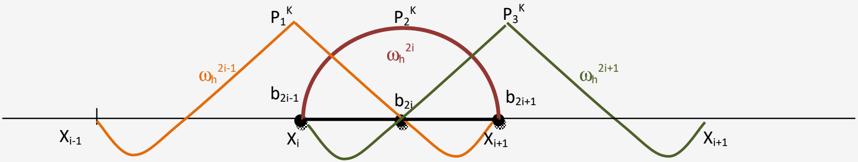
Base local de V_h.

2. Los nodos son los vértices de la malla y los puntos medios de los elementos.
3. El n^o de grados de libertad es $N_{nod} = 2N_{ver} - 1$.
4. Los nodos se denotan por n_i. En las figuras aparecen denotados por b_i, $1 \leq i \leq N_{nod}$.



Base local de V_h.





1. $N_h = 2N_{ver} - 1$

$$u_h\left(x\right) = \sum_{i=1}^{N_h} u_h^i \omega_h^i\left(x\right), u_h^i = u_h\left(n_i\right) \in \mathbb{R}.$$

Los grados de libertad son los valores de la función en los nodos de la malla, en este caso en los vértices y en los puntos medios de los elementos

2. La matriz tiene un ancho de banda 3:

$$(A_h)_{ij} = a(\omega_h^j, \omega_h^i) = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geq 2, \text{. si } i \text{ par.} \\ 0 \text{ si } |i-j| \geq 3, \text{. si } i \text{ impar.} \end{cases}$$

- La matriz tiene un ancho de banda 4:

$$(A_h)_{ij} = a(\omega_h^j, \omega_h^i) = \begin{cases} 0 \text{ si } |i-j| \geq 2, . \text{ si } i \text{ par.} \\ 0 \text{ si } |i-j| \geq 3, . \text{ si } i \text{ impar.} \end{cases}$$

- Cada elemento de la malla sólo hace aportaciones a cuatro elementos de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & 0 & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

Cota de error Si $u \in H^3(a, b)$ entonces la aproximación por elementos finitos de Lagrange cuadráticos en dimensión 1D es:

$$\left\| u^{(l)} - u_h^{(l)} \right\|_{L^2(a,b)} = O\left(h^{3-l}\right), \; l \in \{0, 1, 2\}.$$