APLICACIONES EN FÍSICA E INGENIERÍA CON COMSOL
PRÁCTICA 10
Taller de Simulación Numérica. Curso 2021-22

2. **Aplicación con datos no regulares**. Considérese la **ecuación de Poisson sobre el disco unidad** ω,

$$-\Delta u = \delta(x,y), \quad \text{en} \quad \omega, \tag{1}$$

siendo $\delta(x,y)$ la distribución delta de Dirac centrada en el origen, y con la condición de contorno Dirichlet homogénea:

$$u = 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\omega. \tag{2}$$

a) Comprobar que la solución débil del problema es:

$$u = -\frac{1}{2\pi}\log(r), \tag{3}$$

siendo r la coordenada radial $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Utilizar MATLAB para aproximar numéricamente esta solución. Calcular las normas L^2 y H^1 del error si en la resolución se usa un mallado fino homogéneo, con un mallado adaptativo.

c) Idem con COMSOL.

Solución:

a) En primer lugar observar que el segundo miembro de la ecuación, $\delta(x,y)$, no es una función sino una **distribución**. En algunos textos se define como la "función" que verifica:

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) \neq (x_0, y_0), \\ +\infty & \text{si} \quad (x,y) = (x_0, y_0). \end{cases}$$

y

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x - x_0, y - y_0) = 1.$$

Por tanto, ya podemos ver que $\delta(x - x_0, y - y_0)$ no puede ser una función usual: así definida sería nula excepto en un conjunto de medida nula, y por tanto su integral debería ser nula y no la unidad. Ello es debido a que realmente es un nuevo concepto matemático originado para formular variables físicas que presentan impulsos instantáneos (como puede ser por ejemplo la formulación de golpear un balón).

Distribución Veamos la definición rigurosa de distribución: Sea $\omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $C_0^\infty(\omega)$ el conjunto de las funciones de clase $C^\infty(\omega)$ y cuyo soporte es compacto.

Las distribuciones sobre ω son los elementos del espacio dual de $C_0^\infty(\omega)$, de forma que si T es una distribución sobre ω, se puede escribir:

$$(T, \varphi), \ \varphi \in C_0^\infty(\omega),$$

como el resultado de evaluar el operador lineal T sobre φ.

Todas las funciones integrables pueden considerarse distribuciones; en efecto si f es integrable sobre ω, se puede definir su distribución asociada como:

$$(T_f, \varphi) = \int_\omega f \varphi d\mathbf{x}, \ \ \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Pero **existen distribuciones que no son funciones** como puede ser la delta de Dirac. Si, por ejemplo $\omega \subset \mathbb{R}^2$ puede definirse la distribución sobre ω:

$$(\delta(x - x_0, y - y_0), \varphi) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & (x_0, y_0) \notin \omega, \\ \varphi(x_0, y_0) & \text{si} & (x_0, y_0) \in \omega, \end{array} \right. , \varphi \in C_0^\infty(\omega).$$

Así definida $\delta(x - x_0, y - y_0)$ es un operador lineal sobre $C_0^\infty(\omega)$, y por tanto es una distribución. Cuando (x_0, y_0) coincide con el origen de coordenadas se omite y se escribe simplemente $\delta(x, y)$.

Derivada de una distribución Una propiedad importante es el concepto de derivada en el sentido de las distribuciones que se define como la distribución:

$$(D_{x_i} T, \varphi) = -\left(T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \ \ \varphi \in C_0^\infty(\omega), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Como dada $\varphi \in C_0^\infty(\omega)$, sus derivadas parciales de cualquier orden también pertenecen a $C_0^\infty(\omega)$, entonces la derivada de las distribuciones están bien definidas para todos los órdenes. Por ejemplo:

$$\left(D_{x_j}(D_{x_i} T), \varphi\right) = -\left(D_{x_i} T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right), \ \ \varphi \in C_0^\infty(\omega), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Podéis ver que si una función es derivable en el sentido clásico, su derivada clásica coincide con la derivada en el sentido de las distribuciones. Pero hay funciones, que no admiten derivada clásica pero sí en el sentido de las distribuciones. Consideremos todo $\mathbb{R}$, y la función escalón en $x = x_0 \in \mathbb{R}$:

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x < x_0, \\ 1 & \text{si} & x \geq x_0. \end{array} \right.$$

La derivada clásica de H es cero para todo $x \neq x_0$, mientras que no existe en $x = x_0$. Veamos como es la derivada de la distribución asociada a H:

$$\begin{aligned} (DT_H, \varphi) &= -(T_H, \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \varphi'(x) dx \\ &= -\int_{x_0}^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in C_0^\infty(\omega), \end{aligned}$$

ya que al ser φ de soporte compacto su valor es cero cuando $x \to +\infty$. Así, la derivada de la función escalón en x_0 es la distribución delta de Dirac concentrada en x_0. Y visto como era la derivada clásica de la función escalón para puntos $x \neq x_0$, que era nula, es por ello que en ocasiones se indica que la delta es nula para todo $x \neq x_0$.

Solución fuerte Consideremos ahora la función candidata a solución:

$$u=-\frac{1}{2\pi}\log(r).$$

Observemos primero que, en sentido clasico, su gradiente está bien definido lejos del origen de coordenadas; en efecto, en coordenadas polares:

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta=-\frac{1}{2\pi r}\mathbf{e}_r,\ \forall r\neq 0.$$

Su divergencia:

$$\nabla\cdot(\nabla u)=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{2\pi r}\right)=0,\ \forall r\neq 0.$$

Por tanto, u lejos del origen de coordenadas es solución fuerte del problema, pero en el origen su gradiente clásico no está definido y por tanto no se verifica la ecuación en ese punto. No es, por tanto, una solución fuerte del problema (1)-(2).

Regularidad de u Veamos que la función $u\in L^2(\omega)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_\omega u^2dxdy &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\log(r)\right)^2 dxdy=2\pi\int_0^1\frac{1}{4\pi^2}r\left(\log(r)\right)^2dr\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 r\left(\log(r)\right)^2dr\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\left(r^2\left(\log(r)\right)^2|_{r=\varepsilon}^{r=1}\right)-\int_\varepsilon^1 r\log(r)dr\right)\right),\end{aligned}$$

ya que:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\left(\log(r)\right)^2\right)=2r\left(\log(r)\right)^2+2r^2\frac{1}{r}\log(r)=2r\left(\log(r)\right)^2+2r\log(r).$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que $\frac{d}{dr}\left(r^2\log(r)\right)=2r\log(r)+r$:

$$\begin{aligned}\int_\omega u^2dxdy &= \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\left(r^2\left(\log(r)\right)^2|_{r=\varepsilon}^{r=1}\right)-\int_\varepsilon^1 r\log(r)dr\right)\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\left(r^2\left(\log(r)\right)^2|_{r=\varepsilon}^{r=1}\right)-\frac{1}{2}r^2\log(r)|_{r=\varepsilon}^{r=1}+\frac{1}{4}r^2|_{r=\varepsilon}^{r=1}\right)\right)\\ &= \frac{1}{8\pi},\end{aligned}$$

al tener en cuenta que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^2\left(\log^2(\varepsilon)-\log(\varepsilon)\right)=0.$$

En consecuencia, $u\in L^2(\omega)$.

Como función u también puede ser considerada una distribución:

$$\varphi \in C_0^{\infty}(\omega) \rightarrow (T_u, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_D \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varphi(x,y)\, dxdy \in \mathcal{R}.$$

Efectivamente, la distribución está bien definida ya que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_D \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \varphi(x,y)\, dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \log(r)\, \varphi(r,\theta)\, d\theta dr,$$

que está bien definida simplemente aplicando la desigualdad de Hölder.
La distribución ∇u, se puede definir a partir de la distribución $VP\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, siendo VP el valor principal de Cauchy,.definida por:

$$\varphi \in C_0^{\infty}(\omega) \rightarrow \left(VP\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \varphi\right) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{D \setminus D_\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \varphi(x,y)\, dxdy,$$

siendo D y D_ε, los discos de centro el origen y radio 1 y ε respectivamente. Así:

$$\nabla u = -\frac{1}{2\pi} VP\left(\frac{1}{r}\right) \mathbf{e}_r.$$

El gradiente de u no está en $L^2(\omega)$, si bien es la derivada en el sentido de las distribuciones de una función de $L^2(\omega)$, pudiendose decir entonces que $u \in L^2(\omega) \cap H^{--1}(\omega)$.

Formulación débil de (1-2). Ahora ya estamos en condiciones de obtener la formulación variacional del problema (1)-(2). Sea v una función test, $v \in C_0^{\infty}(\omega)$. Al ser v de soporte compacto, la clausura de su soporte esta contenida en ω, y por tanto v es nula sobre la $\partial\omega$. Aplicando las distribuciones indicandas en los dos miembros de la ecuación (1) sobre v se obtiene:

$$(-\Delta u, v) = (\delta(x,y), v(x,y)) = v(0,0),$$

donde por abuso del lenguaje ya se escribe u para indicar a la distribución T_u asociada a u. Incluso en muchas ocasiones el primer miembro se expresa como:

$$(-\Delta u, v) = -\int_\omega \Delta u(x,y)\ \ v(x,y)\, dxdy.$$

Sobre distribuciones las fórmulas de Green y Gauss son también válidas, pudiendo escribir:

$$-\int_\omega \Delta u(x,y)\ \ v(x,y)\, dxdy = \int_\omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y)\, dxdy - \int_{\partial\omega} \nabla u(x,y) \cdot \mathbf{n}\ v(x,y)\, d\gamma.$$

Así, la formulación variacional será: Encontrar $u \in V$, tal que $u = 0$, sobre $\partial\omega$, y:

$$\int_\omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y)\, dxdy = v(0,0), \forall v \in C_0^{\infty}(\omega). \tag{4}$$

Comprobación de solución débil Consideremos ahora la función candidata a solución:

$$u = -\frac{1}{2\pi}\log(r).$$

Observemos primero que, en sentido clasico, su gradiente está bien definido lejos del origen de coordenadas; en efecto, en coordenadas polares:

$$\nabla u = -\frac{1}{2\pi} VP\left(\frac{1}{r}\right)\mathbf{e}_r.$$

Veamos que sí es solución débil. Sea $v \in C_0^\infty(\omega)$,

$$\begin{aligned}\int_\omega \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y)\,dxdy &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{D\setminus D_\varepsilon} -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial v}{\partial r} r dr d\theta \\ &= --\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(v(1,\theta)-v(\varepsilon,\theta)\right) = v(0,0), \forall v \in C_0^\infty(\omega).\end{aligned}$$

Verificándose, por tanto, la formulación variacional (4). Además, la distribución $u = 0$, sobre $\partial\omega$, pues su traza es nula en la frontera ($r = 1$).