Codes LDPC

Banier Corentin et Karboul Maher

Université de Bordeaux

18 Mai 2021

Introduction et présentation des objectifs

Dans ce travail, nous allons étudier, dans un premier temps, comment fabriquer des instances de code LDPC notamment avec le modèle de Mr.Gallager. Puis, nous comprendrons comment décoder ces codes en effectuant un tas d'expériences. Et à la fin de ce projet, on essaiera "d'optimiser" ce dernier en limitant le nombre d'équation à satisfaire par un mot de code erroné.

Définition d'un code LDPC

Définition : Un code LDPC régulier est défini comme l'espace nul d'une matrice de contrôle de parité H, qui a les propriétés suivantes :

1. Chaque ligne à p valeurs 1.
2. Chaque colonne à q valeurs 1.
3. p et q ont des petites valeurs en comparaison avec la longueur du code et avec le nombre de ligne de la matrice H.

Représentation des codes LDPC

Les codes LDPC peuvent être représentés sous forme matricielle ou sous la forme d'un graphe biparti.
Par exemple, la matrice suivante :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut être définie de la manière suivante :

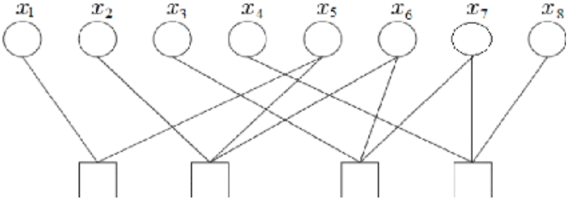

Figure – Graphe de Tanner associé à H

Figure – Mr. Robert Gray Gallager

Ingénieur Américain né en 1931.

- Travaux sur le théorie de l'information.
- Publication en 1963 de sa thèse sur les codes de contrôle de parité de basse densité (LDPC).
- Rédacteur en chef adjoint sur le codage au sein de l'IEEE Transactions on Information Theory de 1963 à 1964.
- Rédacteur associé pour les communications informatiques de 1977 à 1980.

Voici un exemple d'une matrice de Gallager :

$$H = \left[\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Pour nos expérimentations, nous avons créer une fonction qui nous produit une matrice de la forme suivante :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algorithme de décodage

Algorithme 1 : Algorithme de décodage LDPC

Data : Soient E un motif d'erreur et H une matrice de parité de taille n.

Result : Syndrome de l'erreur courant

On définit les h_i, $\forall i \in [\![0 \,;\, n]\!]$ les colonnes de la matrice H.
Et on note $\omega(e)$ le poids de e.
$S = \sigma(E) = H.\,{}^tE$
for $i \leftarrow 0$ **to** n **do**
    if $\omega(S + h_i) \leqslant \omega(S)$ **then**
        $E_1 \leftarrow E_1 + h_i$
    end
end
if $S = \omega(E_1)$ **then**
    le syndrome de l'erreur trouvé est le syndrome de l'erreur courante;
    return E_1
else
    on répète l'algorithme avec le nouveau motif d'erreur trouvé;
    $S = \sigma(E) + \sigma(E_1) = \sigma(E + E_1)$;
    return E_1+ **repeat**
    until $\omega(S) = 0$;
end

Expérimentations

Modification de la ligne 5 de l'algorithme précédant :

$$\omega(S + h_i) \leqslant \omega(S)$$

On essaie d'exclure les positions parasites : $\omega(S + h_i) \leqslant \omega(S) - a$, pour un entier a fixé.

Expérimentations ; n=1000

Test sur 200 vecteurs erreurs	Poids des colonnes							
Poids des vecteurs erreurs	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.915	0.745	1.0	0.96	0.99	1.0	1.0	1.0
2	-	-	1.0	-	-	1.0	1.0	1.0
3	-	-	1.0	-	-	1.0	1.0	1.0
4	-	-	1.0	-	-	1.0	1.0	1.0
5	-	-	1.0	-	-	1.0	1.0	1.0
6	-	-	0.995	-	-	1.0	1.0	1.0
7	-	-	1.0	-	-	0.945	1.0	0.995
8	-	-	0.98	-	-	0.74	0.995	0.825
9	-	-	0.975	-	-	-	0.985	0.55
10	-	-	0.95	-	-	-	0.955	-
11	-	-	0.925	-	-	-	0.885	-
12	-	-	0.87	-	-	-	0.75	-
13	-	-	0.775	-	-	-	-	-
Sec	263	560	3458	203	131	3050	3318	3176

Test sur 200 vecteurs erreurs	Poids des colonnes								
Poids des vecteurs erreurs	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.995	1.0	0.995	0.995	0.985
6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.985	0.985	1.0
7	0.99	0.985	1.0	0.99	0.995	0.955	0.97	0.92	0.995
8	1.0	0.905	0.985	0.8	0.99	0.685	0.955	0.605	0.93
9	0.98	0.51	0.97	0.395	0.94	-	0.895	-	0.645
10	0.915	-	0.855	-	0.76	-	0.8	-	-
11	0.725	-	0.57	-	-	-	0.58	-	-
12	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sec	2748	4246	5099	4169	2204	1968	4503	2317	1997

Figure – Probabilité de décodage sur 200 vecteurs erreurs d'un certain poids en fonction du poids des colonnes d'une matrice de code LDPC

Expérimentations ; n=1000

Test sur 200 vecteurs erreurs	Poids des colonnes							
Poids des vecteurs erreurs	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	0.97	1.0	0.99	1.0	1.0	1.0	0.995	1.0
4	0.895	0.99	0.99	0.99	1.0	1.0	1.0	1.0
5	0.835	0.98	0.965	0.995	0.99	0.995	0.99	1.0
6	0.725	0.97	0.91	0.975	0.95	0.985	0.985	1.0
7	-	0.945	0.82	0.96	0.915	0.98	0.96	0.975
8	-	0.905	0.81	0.965	0.865	0.965	0.925	0.97
9	-	0.86	0.67	0.905	0.835	0.925	0.91	0.955
10	-	0.82	-	0.885	0.825	0.9	0.81	0.93
11	-	0.775	-	0.845	0.635	0.845	0.705	0.855
12	-	-	-	0.785	-	0.825	-	0.82
13	-	-	-	-	-	0.69	-	0.745
Sec	890.10541	2082.2615	1405.0217	2035.7087	1475.5731	3694.9955	1457.6259	1953.6691

Test sur 200 vecteurs erreurs	Poids des colonnes								
Poids des vecteurs erreurs	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	0.99	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5	0.99	0.995	0.995	1.0	1.0	1.0	0.995	1.0	0.995
6	0.99	1.0	0.985	1.0	0.99	0.995	0.985	0.995	0.985
7	0.965	0.995	0.96	0.99	0.98	0.99	0.97	0.98	0.975
8	0.915	0.985	0.93	0.98	0.94	0.945	0.955	0.95	0.935
9	0.88	0.95	0.9	0.965	0.865	0.9	0.895	0.935	0.81
10	0.81	0.905	0.83	0.935	0.78	0.83	0.8	0.785	0.7
11	0.725	0.85	0.745	0.855	-	0.655	0.58	-	-
12	-	0.82	-	0.7	-	-	-	-	-
13	-	0.625	-	-	-	-	-	-	-
Sec	1661.5760	2652.2734	1629.5295	3899.7826	1297.3502	1951.0012	1456.2781	1609.3909	1606.9477

Figure – Probabilité de décodage sur 200 vecteurs erreurs d'un certain poids en fonction du poids des colonnes d'une matrice de code LDPC

Expérimentations ; n=2000

Test sur 25 vecteurs erreurs	Poids des colonnes									
Poids des vecteurs erreurs	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	0.92	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5	0.88	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.96	1.0	1.0	1.0	1.0
7	0.76	0.96	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
8	-	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
9	-	0.92	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.96	1.0
10	-	1.0	0.92	0.96	0.92	0.96	1.0	1.0	0.96	0.96
11	-	0.96	0.88	1.0	0.96	1.0	1.0	1.0	1.0	0.96
12	-	0.8	0.88	0.96	0.92	0.96	0.96	1.0	1.0	1.0
13	-	0.88	0.76	0.92	0.92	1.0	1.0	1.0	0.92	1.0
14	-	0.72	-	0.88	0.8	0.92	1.0	0.96	0.88	1.0
15	-	-	-	1.0	0.76	1.0	0.92	0.96	0.8	0.96
16	-	-	-	0.84	-	1.0	1.0	0.84	0.92	1.0
17	-	-	-	0.76	-	0.96	0.92	0.88	0.96	0.88
18	-	-	-	-	-	0.92	1.0	0.88	0.84	0.84
19	-	-	-	-	-	0.84	0.96	0.84	0.8	0.8
20	-	-	-	-	-	0.92	0.84	0.76	0.76	0.88
21	-	-	-	-	-	0.72	1.0	-	-	0.8
22	-	-	-	-	-	-	0.88	-	-	0.72
23	-	-	-	-	-	-	0.8	-	-	-
24	-	-	-	-	-	-	0.72	-	-	-

Test sur 25 vecteurs erreurs	Poids des colonnes									
Poids des vecteurs erreurs	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
3	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
4	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
10	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
11	1.0	1.0	1.0	0.96	1.0	0.96	1.0	1.0	1.0	1.0
12	1.0	1.0	0.96	1.0	1.0	0.96	1.0	0.96	1.0	1.0
13	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.92	0.96	1.0	1.0	0.88
14	1.0	0.96	0.96	1.0	1.0	1.0	1.0	0.92	0.96	1.0
15	0.96	0.92	1.0	0.96	1.0	0.92	1.0	0.92	0.96	0.84
16	1.0	0.88	1.0	0.92	1.0	0.96	0.96	0.7	0.84	0.92
17	1.0	0.84	1.0	0.88	0.84	0.96	0.96	-	0.56	0.92
18	0.96	0.8	0.84	0.84	0.88	0.76	0.48	-	-	0.68
19	0.88	0.92	0.88	0.8	0.64	-	-	-	-	-
20	0.7	0.88	0.72	0.84	-	-	-	-	-	-
21	-	0.64	-	0.48	-	-	-	-	-	-

Figure – Probabilité de décodage sur 25 vecteurs erreurs d'un certain poids en fonction du poids des colonnes d'une matrice de code LDPC

Conclusion

1. Plus la taille des matrices augmente, plus l'algorithme de décodage fonctionne bien.
2. La suppressions des positions parasites améliore la qualité des résultats mais on ne décode pas forcément plus.
3. Une diminution exagérée du poids du syndrome entraine un oubli de certaine position érronée.

Nous adressons nos remerciements à Mr. Zémor Gilles de nous avoir guider dans la réalisation et l'implémentation de ce projet.