First-Order Logic: Theory and Practice

Christoph Benzmüller

Freie Universität Berlin

Block Lecture, WS 2012, October 1-12, 2012

What is this Lecture About?

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.
He is the son of chris
All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive (weitere Konnektive: $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $=$)

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Logische Konnektive
Konstantensymbole (so viele wie wir benötigen)
Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole (so viele wie wir benötigen)

$$\frac{\triangle \wedge \square}{\triangle} \qquad \frac{\triangle \wedge \square}{\square} \qquad \frac{\triangle \quad \square}{\triangle \wedge \square} \qquad\qquad \frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)}$$

$$\frac{\forall X. \square}{[t \rightarrow X]\square} \quad \ldots \qquad\qquad \frac{\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}$$

$$\frac{\triangle \quad \triangle \Rightarrow \square}{\square} \quad \ldots \qquad \frac{(isBaby\ max) \qquad (isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}{(isCute\ max)}$$

Axiom (Axiomenschemata)

$\triangle \vee \neg\triangle$ $\qquad$ $(isBaby\ max) \vee \neg(isBaby\ max)$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen (1909-1945)

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of Chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of Chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})}{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max})}$$

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of Chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X.\,(isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$$\frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)} \qquad \frac{\forall X.\,(isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of Chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: *Is Max cute?*	Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$$\frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)} \qquad \frac{\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \land (isBoy\ max)$
He is the son of Chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X.\ (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$$\dfrac{\dfrac{(isBaby\ max) \land (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)} \qquad \dfrac{\forall X.\ (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}}{(isCute\ max)}$$

Artificial Intelligence

Input Problem (in Logic Representation)

$\downarrow$

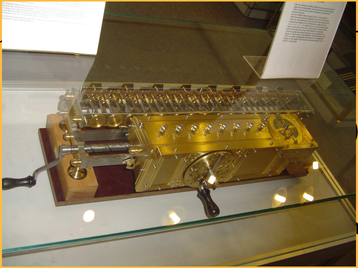
Theorem Prover (Logic Engine)

$\downarrow$

Result / Proof Object (Logic Representation)

Artificial Intelligence

Inpu tion)



)

Result ntation)

Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

Computational Linguistics

Original Problem (Natural Language / Mathural)

Input Problem (in Logic Representation)

↓

Theorem Prover (Logic Engine)

↓

Result / Proof Object (Logic Representation)

Human-oriented Proof (Natural Language / Mathural)

Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

Computational Linguistics

Original Problem (Natural Language / Mathural)

$\downarrow$

Input Problem (in Logic Representation)

$\downarrow$

Theorem Prover (Logic Engine)

$\downarrow$

Result / Proof Object (Logic Representation)

$\downarrow$

Human-oriented Proof (Natural Language / Mathural)

Wichtige Begriffe in der Logik

- Syntax, Ausdrucksstärke der Sprache (Expressivität)
- Semantik
- Kalkül
  - Axiome
  - Schlussregeln
- Korrektheit und Widerspruchsfreiheit/Konsistenz:
  Es gibt keine Formel $\triangle$, so dass $\triangle$ und $\neg\triangle$ ableitbar sind.
- Entscheidbarkeit vs. Unentscheidbarkeit
- Vollständigkeit

Ausdrucksstärke versus Berechnungseigenschaften

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \wedge & (\forall x.isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F.isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y.\exists x.y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x.x) \end{array}$$

Ausdrucksstärke versus Berechnungseigenschaften

Freie Universität Berlin

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \land isCold \\ \land & (itRains \land isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \land & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{array}$$

entscheidbar

Ausdrucksstärke versus Berechnungseigenschaften

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \wedge & (\forall x.isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F.isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y.\exists x.y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x.x) \end{array}$$

unentscheidbar, vollständig

Ausdrucksstärke versus Berechnungseigenschaften

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \wedge isCold \\ \wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \wedge & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{array}$$

unentscheidbar, unvollständig

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:
    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ...viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ...viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ...viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - . . . viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

Logik erster Stufe

- Ist Ausdrucksstark (Expressiv)
  - Axiomatische Mengenlehre
  - Turing-vollständig:

    Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula Un(M) and we show that, if there is a general method for determining whether Un(M) is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*)
- Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke
  - Natürliche Zahlen (Induktion)
  - Überabzählbare Mengen
  - modale Operatoren
  - ... viele pragmatische Einschränkungen
- Viele entscheidbare Fragmente
- Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

The TPTP Problem (and System) Library
for Automated Theorem Proving

`www.tptp.org`