

First-Order Logic: Theory and Practice

Christoph Benz Müller

Freie Universität Berlin

Block Lecture, WS 2012, October 1-12, 2012

What is this Lecture About?

Natürliche Sprache

Max is a baby boy.

He is the son of chris

All babies are cute.

Question: Is Max cute?

Formale Logik

$(\text{isBaby } \text{max}) \wedge (\text{isBoy } \text{max})$

$(\text{isSonOf } \text{max } \text{chris})$

$\forall X. (\text{isBaby } X) \Rightarrow (\text{isCute } X)$

Theorem: $(\text{isCute } \text{max})$

Logische Konnektive

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

(weitere Konnektive: $\neg, \vee, \leftrightarrow, \exists, =$)

(so viele wie wir benötigen)

(so viele wie wir benötigen)

$$\frac{\Delta \wedge \Box}{\Delta} \quad \frac{\Delta \wedge \Box}{\Box} \quad \frac{\Delta \quad \Box}{\Delta \wedge \Box}$$

$$\frac{(isBaby \text{ max}) \wedge (isBoy \text{ max})}{(isBaby \text{ max})}$$

$$\frac{\forall X. \Box}{[t \rightarrow X] \Box} \quad \dots$$

$$\frac{\forall X. (isBaby X) \Rightarrow (isCute X)}{(isBaby \text{ max}) \Rightarrow (isCute \text{ max})}$$

$$\frac{\Delta \quad \Delta \Rightarrow \Box}{\Box} \quad \dots$$

$$\frac{(isBaby \text{ max}) \quad (isBaby \text{ max}) \Rightarrow (isCute \text{ max})}{(isCute \text{ max})}$$

Axiom (Axiomenschemata)

$$\Delta \vee \neg \Delta$$

$$(isBaby \text{ max}) \vee \neg (isBaby \text{ max})$$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen
(1909-1945)

Natürliche Sprache

Formale Logik

Max is a baby boy.

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

He is the son of Chris

$(isSonOf\ max\ chris)$

All babies are cute.

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

Question: Is Max cute?

Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isBaby\ max)$
 $(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isBaby\ max)$

$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$

$(isBaby\ max)$
 $\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$

$(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)$

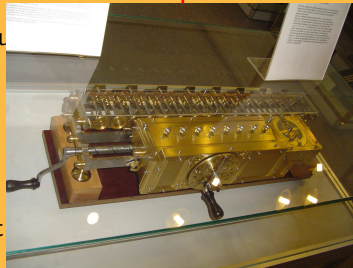
Original Problem (Natural Language / Mathural)

Input

tion)

Result

tation)



Human-oriented Proof (Natural Language / Mathural)

- ▶ Syntax, Ausdrucksstärke der Sprache (Expressivität)
- ▶ Semantik
- ▶ Kalkül
 - ▶ Axiome
 - ▶ Schlussregeln
- ▶ Korrektheit und Widerspruchsfreiheit/Konsistenz:
Es gibt keine Formel Δ , so dass Δ und $\neg\Delta$ ableitbar sind.
- ▶ Entscheidbarkeit vs. Unentscheidbarkeit
- ▶ Vollständigkeit

► Aussagenlogik

$itRains \wedge isCold$
 $\wedge (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad)$
 $\Rightarrow slipperyRoad$

► Logik erster Stufe

$isHuman(sokrates)$
 $\wedge (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x))$
 $\Rightarrow isMortal(sokrates)$

► Logik höherer Stufe

$(\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x))$
 $\Rightarrow isSurjective(\lambda x. x)$

entscheidbar
unentscheidbar, unvollständig

unentscheidbar, vollständig

- ▶ Ist Ausdrucksstark (Expressiv)

- ▶ Axiomatische Mengenlehre
- ▶ Turing-vollständig:

Turing zeigt, dass es kein Verfahren gibt, mit dem man die Beweisbarkeit einer FOL Formel entscheiden kann: *Corresponding to each computing machine M we construct a formula $Un(M)$ and we show that, if there is a general method for determining whether $Un(M)$ is provable, then there is a general method for determining whether M ever prints 0.*

- ▶ Es gibt aber relevante Einschränkungen hinsichtlich Ausdrucksstärke

- ▶ Natürliche Zahlen (Induktion)
- ▶ Überabzählbare Mengen
- ▶ modale Operatoren
- ▶ ... viele pragmatische Einschränkungen

- ▶ Viele entscheidbare Fragmente

- ▶ Wohlverstandene Semantik und Beweistheorie

The TPTP Problem (and System) Library for Automated Theorem Proving

www.tptp.org