Kurt Gödel's Gottesbeweis auf dem Computer

Christoph Benzmüller

Fachbereich Mathematik und Informatik, FU Berlin

Marburg, 15. Juni 2014

(gemeinsame Arbeit mit Bruno Woltzenlogel-Paleo, TU Wien)

Internationale Presse (seit August 2013)

SPIEGEL ONLINE WISSENSCHAFT

Login | Registrierung

Politik | Wirtschaft | Panorama | Sport | Kultur | Netzwelt | Wissenschaft | Gesundheit | einestages | Karriere | Uni | Schule | Reise | Auto

Nachrichten > Wissenschaft > Mensch > Mathematik > Formel von Kurt Gödel: Mathematiker bestätigen Gottesbeweis

Formel von Kurt Gödel: Mathematiker bestätigen Gottesbeweis

Von Tobias Hürter

picture-alliance/ Imagno/ Wiener Stadt- und Landesbibliothek

Kurt Gödel (um das Jahr 1935): Der Mathematiker hielt seinen Gottesbeweis jahrzehntelang geheim

Ein Wesen existiert, das alle positiven Eigenschaften in sich vereint. Das bewies der legendäre Mathematiker Kurt Gödel mit einem komplizierten Formelgebilde. Zwei Wissenschaftler haben diesen Gottesbeweis nun überprüft - und für gültig befunden.

Montag, 09.09.2013 – 12:03 Uhr

Drucken | Versenden | Merken

Jetzt sind die letzten Zweifel ausgeräumt: Gott existiert tatsächlich. Ein Computer hat es mit kalter Logik bewiesen - das MacBook des Computerwissenschaftlers Christoph Benzmüller von der Freien Universität Berlin.

Germany
- Telepolis & Heise
- Spiegel Online
- FAZ
- Die Welt
- Berliner Morgenpost
- . . .

Austria
- Die Presse
- Wiener Zeitung
- ORF
- . . .

Italy
- Repubblica
- Ilsussidario
- . . .

India
- Delhi Daily News
- India Today
- . . .

US
- ABC News
- . . .

International
- Spiegel International
- United Press Intl.
- . . .

Internationale Presse (seit August 2013)

Home | Video | Themen | Forum | English | DER SPIEGEL | SPIEGEL TV | Abo | Shop RSS | Mobile | Newsletter

Sign in | Register

SPIEGEL ONLINE INTERNATIONAL

Front Page World Europe Germany Business Zeitgeist Newsletter

English Site > Germany > Science > Scientists Use Computer to Mathematically Prove Gödel God Theorem

Holy Logic: Computer Scientists 'Prove' God Exists

By David Knight

picture-alliance/ Imagno/ Wiener Stadt- und Landesbibliothek

Austrian mathematician Kurt Gödel kept his proof of God's existence a secret for decades. Now two scientists say they have proven it mathematically using a computer.

Two scientists have formalized a theorem regarding the existence of God penned by mathematician Kurt Gödel. But the God angle is somewhat of a red herring -- the real step forward is the example it sets of how computers can make scientific progress simpler.

Germany
- Telepolis & Heise
- Spiegel Online
- FAZ
- Die Welt
- Berliner Morgenpost
- . . .

Austria
- Die Presse
- Wiener Zeitung
- ORF
- . . .

Italy
- Repubblica
- Ilsussidario
- . . .

India
- Delhi Daily News
- India Today
- . . .

US
- ABC News
- . . .

International
- Spiegel International
- United Press Intl.
- . . .

Internationale Presse (seit August 2013)

SCIENCE NEWS

HOME / SCIENCE NEWS / RESEARCHERS SAY THEY USED MACBOOK TO PROVE GOEDEL'S GOD THEOREM

Researchers say they used MacBook to prove Goedel's God theorem

Oct. 23, 2013 | 8:14 PM | 1 comments

Internationale Presse (seit August 2013)

SCIENCE NEWS

HOME / SCIENCE NEWS / RESEARCHERS SAY THEY USED MACBOOK TO PROVE GOEDEL'S GOD THEOREM

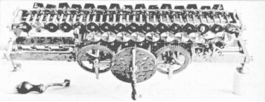
Researchers say they used MacBook to prove Goedel's God theorem

Oct. 23, 2013 | 8:14 PM | 1 comments

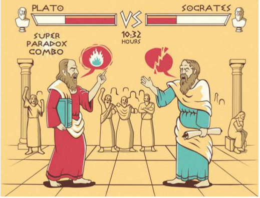
Stehen wir in Kontakt mit Steve Jobs?	Nein
Brauch man wirklich ein MacBook?	Nein
Hat Apple uns Geld geschickt?	Nein

Leibniz' Vision — Calculemus!

Leibniz (1646-1716)



Rechenmaschine



Streitende Philosophen

Leibniz war (u.a.) auf der Suche nach einer lingua characteristica (Sprache in der das gesamte Wissen formal ausgedrückt werden konnte) und einem calculus ratiocinator (Kalkül zum allgemeinen Schließen).

Vision: Zwei streitende/argumentierende Philosophen sollten Streitfragen durch einfaches *Rechnen* (Calculemus!) klären können. Dazu müssten sie sich lediglich auf eine Formalisierung des Problems in der lingua characteristica einigen und dann den calculus ratiocinator anwenden.

Ontologischer Gottesbeweis

Anselm von Canterbury (1033 – 1109)

Gott ist . . .

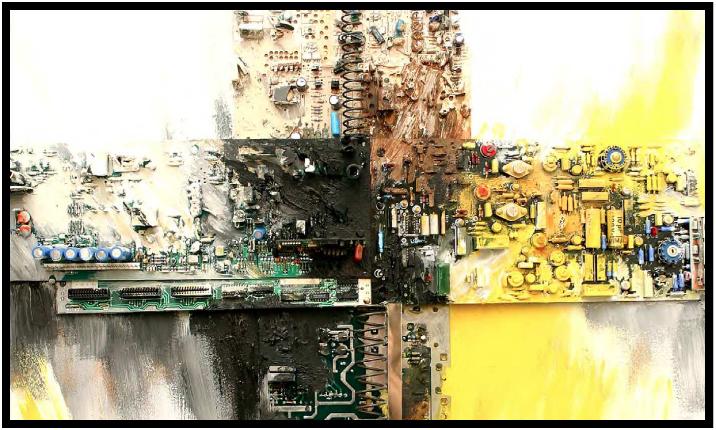
das, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann.

(id, quo nihil maius cogitari potest) (Proslogion, 1077/78)

Es folgt: **Gott existiert!?**

Die Voraussetzungen fehlten noch bei Leibniz

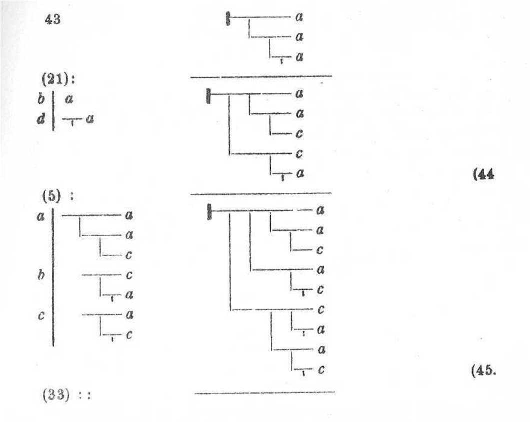
- Universelle Logiksprache
- Geeigneter Formaler Kalkül
- Geeignete Rechenmaschinen (Computer)
- Implementierung (Theorembeweiser)



F(o,r,m,a,l,e) L(o,g,i,k)
Eine sehr kurze und unvollständige Einführung

Entwicklung der modernen Logik seit Ende des 19. Jahrhunderts

Gottlob Frege
(1848-1925)



- Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
  - Prädikatenlogik (höherer Stufe) als formale Sprache

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Formale Logik

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\ istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: *Liebt Max Fussball?*	Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive

(weitere Konnektive: $\neg$, $\vee$, $\equiv$, $\exists$, $=$)

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X. \, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive
Individuensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
$istKindVon(max, christoph)$
$\forall X.\ istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive
Individuensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Formaler Kalkül (System abstrakter Regeln)

$$\frac{\triangle \wedge \square}{\triangle} \qquad \frac{\triangle \wedge \square}{\square} \qquad \frac{\triangle \quad \square}{\triangle \wedge \square} \qquad \frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)}$$

$$\frac{\forall X. \square}{[t \rightarrow X]\square} \quad \ldots \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}$$

$$\frac{\triangle \quad \triangle \supset \square}{\square} \quad \ldots \qquad \frac{istJunge(max) \qquad istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}{liebtFussball(max)}$$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen (1909-1945)

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{\quad}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \land istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: *Liebt Max Fussball?*	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \land istJunge(max)}{istJunge(max)}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\frac{istKlein(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \frac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	**Formale Logik**
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$$\dfrac{\dfrac{istJunge(max) \wedge istJunge(max)}{istJunge(max)} \qquad \dfrac{\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)}{istJunge(max) \supset liebtFussball(max)}}{liebtFussball(max)}$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X.istGott(X)$$
$$\Box \exists X.istGott(X)$$
$$\Diamond \exists X.istGott(X)$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{array}{l} \exists X. istGott(X) \\ \Box \exists X. istGott(X) \\ \Diamond \exists X. istGott(X) \end{array}$$

Elementare Aussagen (Wahr oder Falsch)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{array}{l} \exists X. istGott(X) \\ \Box \exists X. istGott(X) \\ \Diamond \exists X. istGott(X) \end{array}$$

Prädikat Individuum Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$
\begin{array}{ll}
 & regnet \wedge kalt \\
\wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\
\supset & glatteStrasse
\end{array}
$$

- Logik erster Stufe

$$
\begin{array}{ll}
 & istJunge(max) \\
\wedge & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\
\supset & liebtFussball(max)
\end{array}
$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$
\begin{array}{l}
\exists X.istGott(X) \\
\Box\exists X.istGott(X) \\
\Diamond\exists X.istGott(X)
\end{array}
$$

Prädikat Individuum Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & \mathit{regnet} \wedge \mathit{kalt} \\ \wedge & (\mathit{regnet} \wedge \mathit{kalt} \supset \mathit{glatteStrasse}) \\ \supset & \mathit{glatteStrasse} \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & \mathit{istJunge}(\mathit{max}) \\ \wedge & \forall X.\mathit{istJunge}(X) \supset \mathit{liebtFussball}(X) \\ \supset & \mathit{liebtFussball}(\mathit{max}) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\mathit{istGott}(X) \equiv \forall \phi.\mathit{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{array}{l} \exists X.\mathit{istGott}(X) \\ \Box \exists X.\mathit{istGott}(X) \\ \Diamond \exists X.\mathit{istGott}(X) \end{array}$$

Funktionen/Prädikate: in Allaussage, als Argument

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X.istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi.positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X.istGott(X)$$

$$\Box \exists X.istGott(X)$$

$$\Diamond \exists X.istGott(X)$$

Möglicherweise gilt . . .

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & regnet \wedge kalt \\ \wedge & (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse) \\ \supset & glatteStrasse \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & istJunge(max) \\ \wedge & \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X) \\ \supset & liebtFussball(max) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X. istGott(X)$$
$$\Box \exists X. istGott(X)$$
$$\Diamond \exists X. istGott(X)$$

Notwendigerweise gilt ...

Theorembeweiser

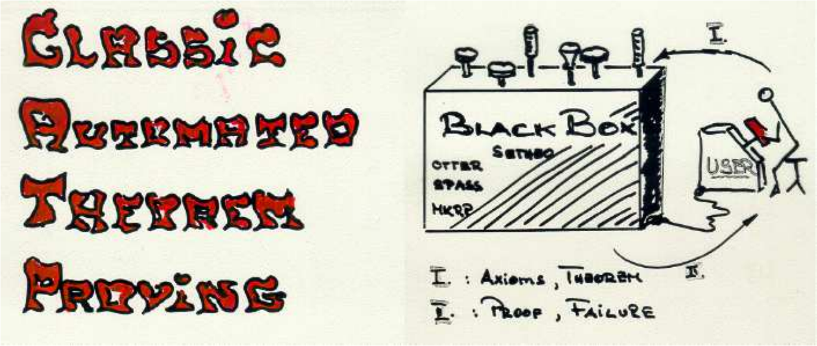


Bild: Jörg Siekmann

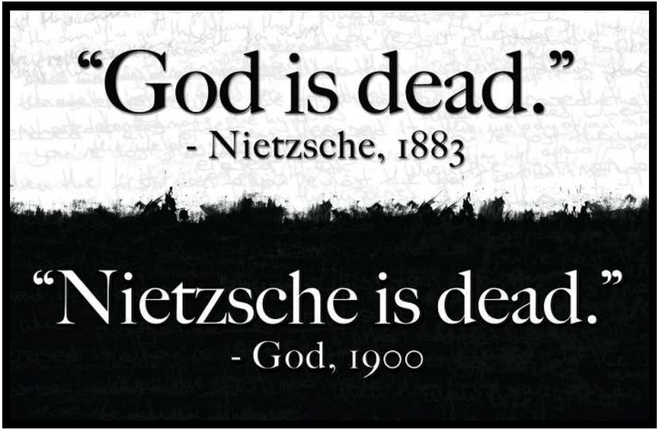
Demo: Theorembeweiser

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max ist ein kleiner Junge.	$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
Er ist ein Kind von Christoph.	$istKindVon(max, christoph)$
Alle Jungen mögen Fussball.	$\forall X.\, istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Frage: Liebt Max Fussball?	Theorem: $liebtFussball(max)$

Eingabe an Theorembeweiser (`http://www.tptp.org`)

```
fof(a1,axiom, istKlein(max) & istJunge(max) ).
fof(a2,axiom,( istKindVon(max,christoph) )).
fof(a3,axiom,( ![X]:(istJunge(X) => liebtFussball(X)) )).

fof(c,conjecture,( liebtFussball(max) )).
```



Gödel's Gottesbeweis

Ontologischer Gottesbeweis

Historische Entwicklung (pros und cons)

... Anselm v. C. Gaunilo ... Th. Aquinas ...... Descartes Spinoza Leibniz ... Hume Kant ... Hegel ... Frege ... Hartshorne Malcolm Lewis Plantinga Gödel ...

Ontologischer Gottesbeweis

Historische Entwicklung (pros und cons)

… Anselm v. C. Gaunilo … Th. Aquinas … … Descartes Spinoza Leibniz … Hume Kant … Hegel … Frege … Hartshorne Malcolm Lewis Plantinga Gödel …

Anselm's Definition von Gott:

"Gott ist das, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann. "

Gödel's Definition von Gott:

"Ein Gott-artiges Wesen besitzt alle positiven' Eìgenschaften."

$$G(x) \equiv \forall \phi . P(\phi) \supset \phi(x)$$

Zu zeigen durch logisches Schließen:

"(Notwendigerweise) existiert Gott."

$$\Box \exists x . G(x)$$

Ontologischer Gottesbeweis: Unterschiedliche Interessen

- Philosophie: Grenzen der Metaphysik & Epistemologie
  - Wir definieren ein metaphysischen Begriff (Gott),
  - aber wir wollen eine Aussage treffen für die reale Welt.

- Theologie: Gutes Argument sollte Atheisten überzeugen.

- Unsere: Können Computer (Beweiser) verwendet werden
  - ...zur Formalisierung der Definitionen, Axiome, Theoreme?
  - ...zur schrittweisen Verifikation der Argumente?
  - ...zur Automatisierung von (Unter-)Argumenten?

in Richtung: “Computer-unterstützte Theoretische Philosophie”

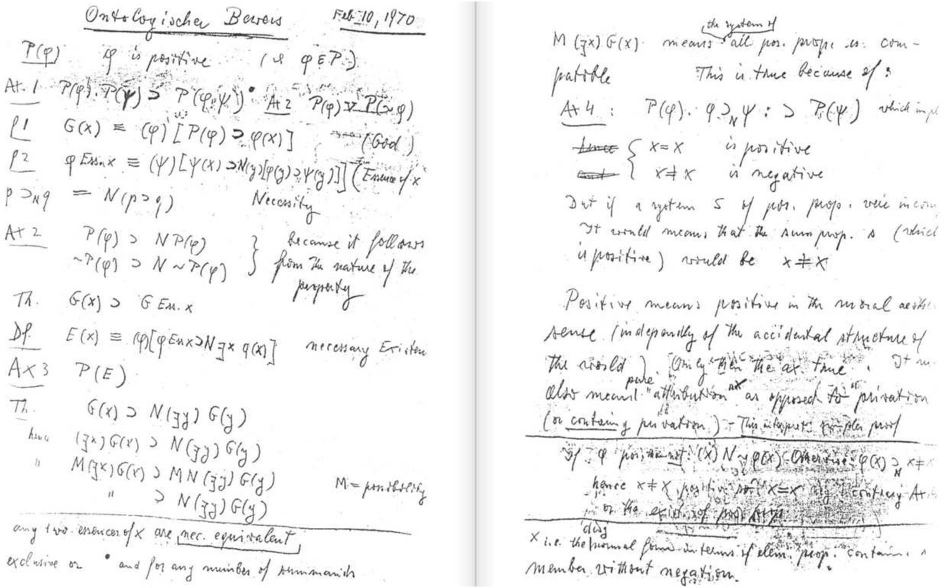
(cf. Leibniz dictum — Calculemus!)

Kurt Gödel (1906-1978)

- geboren 28.4.1906 in Brünn (Tschechien)
- kränklich, schmächtig, introvertiert
- Studium ab 1924 in Wien, Wiener Kreis
- 1933/34 erste Reisen nach Princeton, USA
- 1938 heiratet Adele Porkert (Kabarettänzerin)
- 1940 Flucht nach USA (über Russland/Japan)
- Professor in Princeton
- Enger Freund von Einstein

- 1929/30 Dissertation: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls
- 1930: Vortrag in Königsberg: Unvollständigkeitssätze
  "Die Logik wird nie mehr dieselbe sein." (John von Neumann)
- Viele interessante Arbeiten — aber: *"I do not fit in this century!"*

Gödel's Manuscript: 1930's, 1941, 1946-1955, 1970


Ontologischer Beweis Feb 10, 1970

$P(\varphi)$ φ is positive (or $\varphi \in P$)

Ax. 1 $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$ Ax 2 $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$

P1 $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

P2 $\varphi \text{ Ess } x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$ (Essence of x)

$p \supset_N q = N(p \supset q)$ Necessity

Ax 2 $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$, $\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$ } because it follows from the nature of the property

Th. $G(x) \supset G \text{ Ess. } x$

Df. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess } x \supset N \exists x\, \varphi(x)]$ necessary Existence

Ax 3 $P(E)$

Th. $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$

hence $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$

" $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$

" $\supset N(\exists y)G(y)$ M = possibility

any two essences of x are nec. equivalent

exclusive or * and for any number of summands

$M(\exists x)G(x)$ means the system of all pos. props. is compatible. This is true because of:

Ax 4: $P(\varphi). \varphi \supset_N \psi : \supset P(\psi)$ which impl

$x = x$ is positive

$x \neq x$ is negative

But if a system S of pos. props. were incompatible it would mean that the sum prop. s (which is positive) would be $x \neq x$

Positive means positive in the moral aesthetic sense (independently of the accidental structure of the world). Only then the ax. true. It may also mean pure "attribution"* as opposed to "privation" (or containing privation). This interpret. simpler proof

If φ pos. not: $(x) N \sim \varphi(x)$. Otherwise: $\varphi(x) \supset_N x \neq x$ hence $x \neq x$ positive not $x = x$ contrary Ax. or the exist. of pos. props.

* i.e. the disj. normal form in terms of elem. prop. contains a member without negation.

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften: $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists x G(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert: $\phi\ ess.\ x \equiv \phi(x)\ \wedge\ \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G\ ess.\ x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind: $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi\ ess.\ x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists x G(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall \phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall \phi \forall \psi[(P(\phi) \wedge \Box \forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu: $\forall \phi[P(\phi) \supset \Diamond \exists x \phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften: $G(x) \equiv \forall \phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond \exists x G(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall \phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert:

$$\phi \; ess. \; x \equiv \phi(x) \; \wedge \; \forall \psi(\psi(x) \supset \Box \forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G \; ess. \; x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind:

$$NE(x) \equiv \forall \phi[\phi \; ess. \; x \supset \Box \exists y \phi(y)]$$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box \exists x G(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \land \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften: $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists x G(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert: $\phi\ ess.\ x \equiv \phi(x) \land \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G\ ess.\ x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind: $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi\ ess.\ x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists x G(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften: $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists x G(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

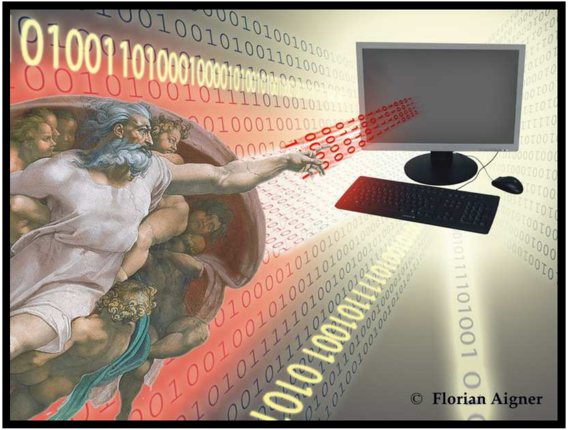
Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert: $\phi\ ess.\ x \equiv \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G\ ess.\ x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind: $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi\ ess.\ x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists x G(x)$



Gödel's Gottesbeweis auf dem Computer

Beitrag

Pionierarbeit zur Mechanisierung/Automatisierung

- eines modernen ontologischen Gottesbeweises
- von höherstufiger Modallogik

Beitrag

Herausforderung: Keine Beweiser für <u>höherstufige Modallogik</u> (QML)

Unsere Lösung: Einbettung in <u>klassischer Logik höherer Stufe</u> (HOL)

Was genau haben wir gemacht:

A:	Papier und Bleistift:	detaillierte Beweisskizze
B:	Formalisierung:	in klassischer Logik höherer Stufe (HOL)
	Automatisierung:	Theorembeweiser LEO-II und SATALLAX
	Konsistenz:	Modellgenerierer NITROX
C:	Schrittweise Verifikation:	interaktiver Beweisassistent COQ
D:	Verifikation & Automatisierung:	Beweisassistent ISABELLE

Konnten wir neue Einsichten gewinnen? Ja — Diskussion folgt!

Formalisierung in HOL

QML $\varphi, \psi \quad ::= \quad \ldots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi \mid \forall P\, \varphi$

HOL $s, t \quad ::= \quad C \mid x \mid \lambda x s \mid s\, t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x\, t$

Formalisierung in HOL

QML $\quad \varphi, \psi \quad ::= \quad \ldots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi \mid \forall P\, \varphi$

HOL $\quad s, t \quad ::= \quad C \mid x \mid \lambda x s \mid s\, t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x\, t$

QML in HOL: Formeln φ werden abgebildet auf HOL Prädikate

$$
\begin{array}{lcl}
\neg & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \neg\varphi s \\
\wedge & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda\psi_{\iota\to o}\lambda s_\iota(\varphi s \wedge \psi s) \\
\supset & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda\psi_{\iota\to o}\lambda s_\iota(\neg\varphi s \vee \psi s) \\
\Box & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \forall u_\iota\, (\neg rsu \vee \varphi u) \\
\Diamond & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \exists u_\iota\, (rsu \wedge \varphi u) \\
\forall & = & \lambda h_{\mu\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \forall d_\mu\, hds \\
\exists & = & \lambda h_{\mu\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \exists d_\mu\, hds \\
\forall & = & \lambda H_{(\mu\to(\iota\to o))\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \forall d_\mu\, Hds \\
 & & \\
\text{gültig} & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\forall w_\iota \varphi w
\end{array}
$$

Ax

Formalisierung in HOL

QML $\quad \varphi, \psi \quad ::= \quad \ldots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi \mid \forall P\, \varphi$

HOL $\quad s, t \quad ::= \quad C \mid x \mid \lambda x s \mid s\, t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x\, t$

QML in HOL: Formeln φ werden abgebildet auf HOL Prädikate

$$
\begin{array}{lcl}
\neg & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \neg\varphi s \\
\wedge & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda\psi_{\iota\to o}\lambda s_\iota(\varphi s \wedge \psi s) \\
\supset & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda\psi_{\iota\to o}\lambda s_\iota(\neg\varphi s \vee \psi s) \\
\Box & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \forall u_\iota\, (\neg rsu \vee \varphi u) \\
\Diamond & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\lambda s_\iota \exists u_\iota\, (rsu \wedge \varphi u) \\
\forall & = & \lambda h_{\mu\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \forall d_\mu\, hds \\
\exists & = & \lambda h_{\mu\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \exists d_\mu\, hds \\
\forall & = & \lambda H_{(\mu\to(\iota\to o))\to(\iota\to o)}\lambda s_\iota \forall d_\mu\, Hds \\
 & & \\
\text{gültig} & = & \lambda\varphi_{\iota\to o}\forall w_\iota \varphi w
\end{array}
\qquad \text{Ax}
$$

Gleichungen in Ax werden als Axiome an HOL Beweiser gereicht!

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula $\Diamond \exists x G(x)$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula $\Diamond \exists x G(x)$

QML formula in HOL gültig $(\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula	$\Diamond\exists x G(x)$
QML formula in HOL	gültig $(\Diamond\exists x G(x))_{\iota\to o}$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota (\Diamond\exists x G(x))_{\iota\to o}\, w$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula	$\Diamond \exists x G(x)$
QML formula in HOL	gültig $(\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota (\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}\, w$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge (\exists x G(x))_{\iota \to o} u)$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula	$\Diamond \exists x G(x)$
QML formula in HOL	gültig $(\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota (\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}\, w$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge (\exists x G(x))_{\iota \to o} u)$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge \exists x Gxu)$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula	$\Diamond\exists x G(x)$
QML formula in HOL	gültig $(\Diamond\exists x G(x))_{\iota\to o}$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota (\Diamond\exists x G(x))_{\iota\to o}\, w$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge (\exists x G(x))_{\iota\to o} u)$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge \exists x Gxu)$

Was tun wir hier?

Um zu zeigen, dass φ ein Theorem ist in QML,
–> zeigen wir anstelle dessen, dass gültig $\varphi_{\iota\to o}$ abgeleitet werden kann aus Ax in HOL.

Möglich mit interaktiven oder automatischen HOL Beweisern.

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula	$\Diamond \exists x G(x)$
QML formula in HOL	gültig $(\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota (\Diamond \exists x G(x))_{\iota \to o}\, w$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge (\exists x G(x))_{\iota \to o} u)$
Anwendung Gleichung aus Ax	$\forall w_\iota \exists u_\iota (rwu \wedge \exists x Gxu)$

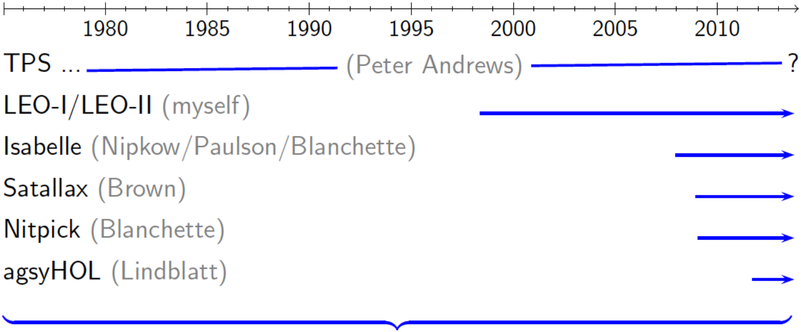
Was tun wir hier?

Um zu zeigen, dass φ ein Theorem ist in QML,
–> zeigen wir anstelle dessen, dass gültig $\varphi_{\iota \to o}$ abgeleitet werden kann aus Ax in HOL.

Möglich mit interaktiven oder automatischen HOL Beweisern.

Korrektheit und Vollständigkeit: (bzgl. Henkin Semantik)

Automatische Theorembeweiser für HOL



- all accept TPTP THF Syntax [SutcliffeBenzmüller, J.Form.Reas, 2009]
- can be called remotely via SystemOnTPTP at Miami
- they significantly gained in strength over the last years
- they can be bundled into a combined prover HOL-P

> Exploit HOL with Henkin semantics as metalogic
> Automate other logics (& combinations) via semantic embeddings
> — HOL-P becomes a Universal Reasoner —

Experimente und Resultate

Experimente

- Formale Kodierung (in HOL):
  - Axiome der Modallogik und der Einbettung von QML in HOL
  - Axiome, Definitionen und Theoreme in Gödel's Gottesbeweis
- Experimente mit automatischen Theorembeweisern:
  - LEO-II, Satallax, Nitrox
- Interaktive Beweise mit Beweisassistenten:
  - Isabelle and Coq

Alle Quellen sind online (jeder kann mitmachen!):

`https://github.com/FormalTheology/GoedelGod/`

Weitere Demo gerne nach dem Vortrag!

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- Beweis ist korrekt in Modallogik S5
  - mit konstanten Individuendomänen
  - mit variablen Individuendomänen
- schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ...

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- Beweis ist korrekt in Modallogik S5
  - mit konstanten Individuendomänen
  - mit variablen Individuendomänen
- schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ...
- $\exists x.G(x)$ kann direkt bewiesen werden, ohne Umweg über $\Box\exists x.G(x)$
- Gleichheit nicht notwendig zum Beweis von Theorem T1
- Einmalige Anwendung von A2 genügt zum Beweis von T1
- ...

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- Beweis ist korrekt in Modallogik S5
  - mit konstanten Individuendomänen
  - mit variablen Individuendomänen
- schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ...
- $\exists x.G(x)$ kann direkt bewiesen werden, ohne Umweg über $\Box\exists x.G(x)$
- Gleichheit nicht notwendig zum Beweis von Theorem T1
- Einmalige Anwendung von A2 genügt zum Beweis von T1
- ...
- Gott hat nur positive Eigenschaften: $$\forall x.G(x) \supset (\forall\varphi.\neg P(\varphi) \supset \neg\varphi(x)).$$
- Monotheismus: $$\forall x.\forall y.G(x) \land G(y) \supset x = y.$$

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Schlechte Nachricht

- Gödel's Axiome und Definitionen implizieren den modalen Kollaps: $\forall\phi.(\phi \supset \Box\phi)$

Fundamentale Kritik gegen Gödel's Gottesbeweis.

Alles was der Fall ist, ist notwendigerweise der Fall.

Es gibt keine kontingenten "Wahrheiten".
Alles ist determiniert.
Es gibt keinen freien Willen.

Auswege wurden vorgeschlagen von: Anderson, Fitting, Hájek, ...

Resultate (Gödel's Originalversion des Gottesbeweises)

Sehr schlechte Nachricht

- Die Axiome und Definitionen in Gödel's Originalscriptum (ohne Konjunkt $\phi(x)$ in der Definition von Essenz), sind inkonsistent.

$$\phi\ ess.\ x \equiv \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$$

(Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert.)

Zusammenfassung

Unsere Beiträge:

- Infrastruktur für das Beweisen in höherstufigen Modallogiken
- Verifikation von Gödel's Gottesbeweis mit HOL Beweisern
  - Experimente mit variierenden Logikparametern
- Neue Resultate und Einsichten (durch HOL Beweiser)
- Richtung: **Computer-assistierten Theoretischen Philosophie**
  - vgl. Ed Zalta's Computational Metaphysics Projekt (Stanford)
  - vgl. John Rushby's kürzliche Verification von Anselm's Beweis
  - Leibniz' dictum — Calculemus!
- Verbindung zwischen Informatik/KI, Philosophie and Theologie

Zusammenfassung

Unsere Beiträge:

- Infrastruktur für das Beweisen in höherstufigen Modallogiken
- Verifikation von Gödel's Gottesbeweis mit HOL Beweisern
  - Experimente mit variierenden Logikparametern
- Neue Resultate und Einsichten (durch HOL Beweiser)
- Richtung: **Computer-assistierten Theoretischen Philosophie**
  - vgl. Ed Zalta's Computational Metaphysics Projekt (Stanford)
  - vgl. John Rushby's kürzliche Verification von Anselm's Beweis
  - Leibniz' dictum — Calculemus!
- Verbindung zwischen Informatik/KI, Philosophie and Theologie

Laufende und weitere Arbeiten

- Formalisierung der (relevanten) Literatur
  - ... insbesondere Kritik und Verbesserungsvorschläge
- Eigene neue Beiträge — unterstützt durch Theorembeweiser?

Ja, es gibt Kontakt zu Philosophen und Theologen . . .