SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

ΩMEGA

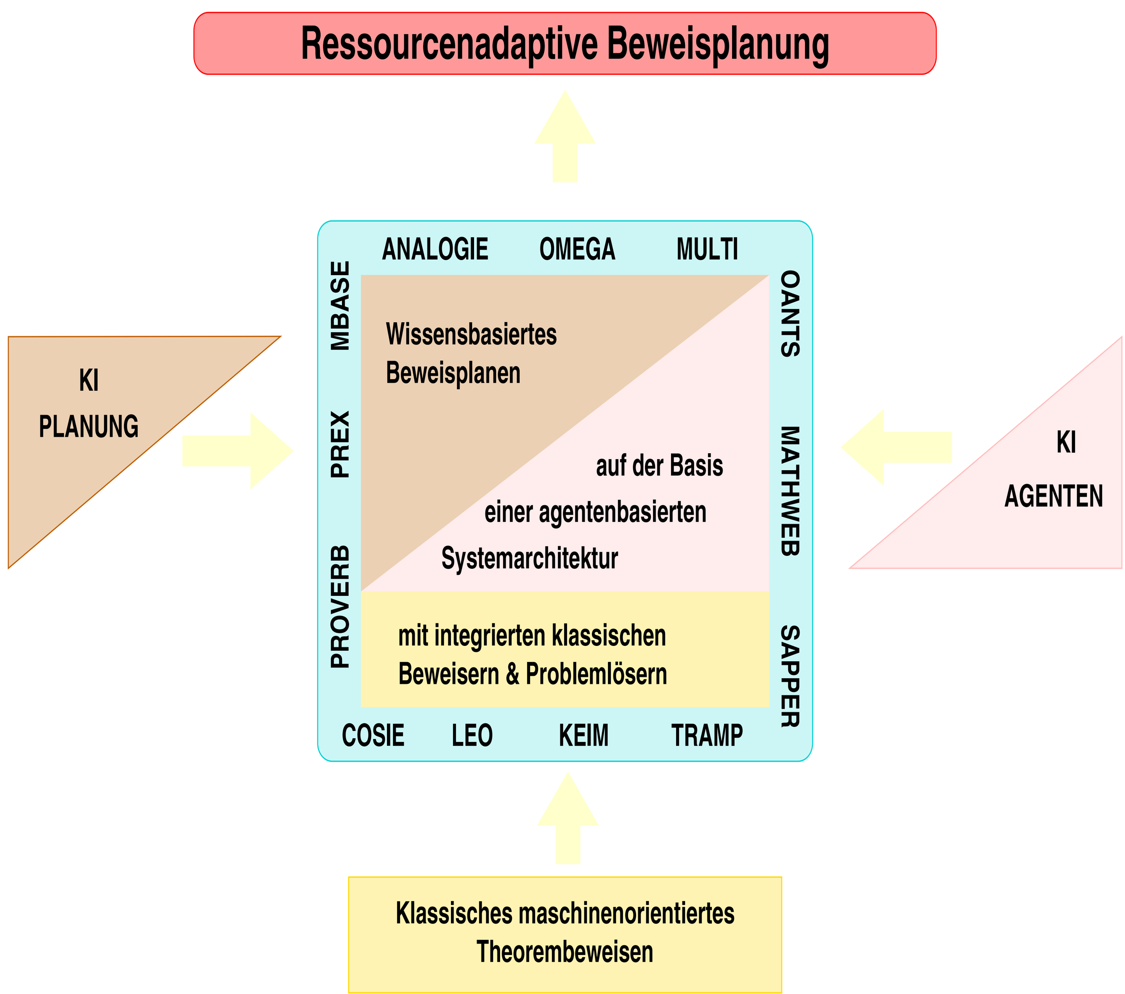
# Ressourcenadaptive Beweisplanung

Ωmega

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

## Zusammenfassung des Projekts

Im Projekt OMEGA wird das mathematische Assistenzsystem ΩMEGA entwickelt, in dessen Mittelpunkt die wissensbasierte Beweisplanung steht. Beweisplanung abstrahiert von der Beweissuche auf Kalkülebene des traditionellen automatischen Beweisens. Dazu werden häufig wiederkehrende und mathematisch motivierte Muster einzelner Beweisschritte zu sogenannten Beweismethoden zusammengefasst. Interpretiert als Planoperatoren werden diese dann in einem deliberativen Suchprozess zu Beweisplänen verkettet; domänenspezifisches, mathematisches Vorgehenswissen kann dabei zur Steuerung der Plankonstruktion eingesetzt werden.




Das langfristige Ziel unserer Forschungen ist die weitere Entwicklung der wissensbasierten Beweisplanung. Im besonderen soll die Integration des deliberativen, wissensbasierten Beweisplanens mit dem reaktiven agentenbasierten Theorembeweisen, die Trennung der Beweisplanebenen von der Logikebene (Abstraktion) und das Lernen von Vorgehenswissen untersucht werden.

## Beteiligte Wissenschaftler

### Grundausstattung

Prof. Dr. Jörg Siekmann (Informatik)
Dr. Christoph Benzmüller (Informatik)
PD Dr. Erica Melis (Informatik)
PD Dr. Helmut Horacek (Informatik)
Aljoscha Buschardt (Computerlinguistik, SHK)
Stephan Walter (Computerlinguistik, SHK)

### Ergänzungsausstattung

Dipl. Inform. Andreas Meier (Informatik)
Andreas Franke (Informatik)
Achim Bergmeister (Informatik, SHK)
Malte Hübner (Informatik, SHK)
Siegfried Scholl (Informatik, SHK)
Christian Ludt (Informatik, SHK)

## Projektpräsentation

Gebäude 43.8, Neubau DFKI, Foyer

## Status im SFB

Fortsetzung Projekt B1 OMEGA

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

# Ressourcen im wissensbasierten Beweisen

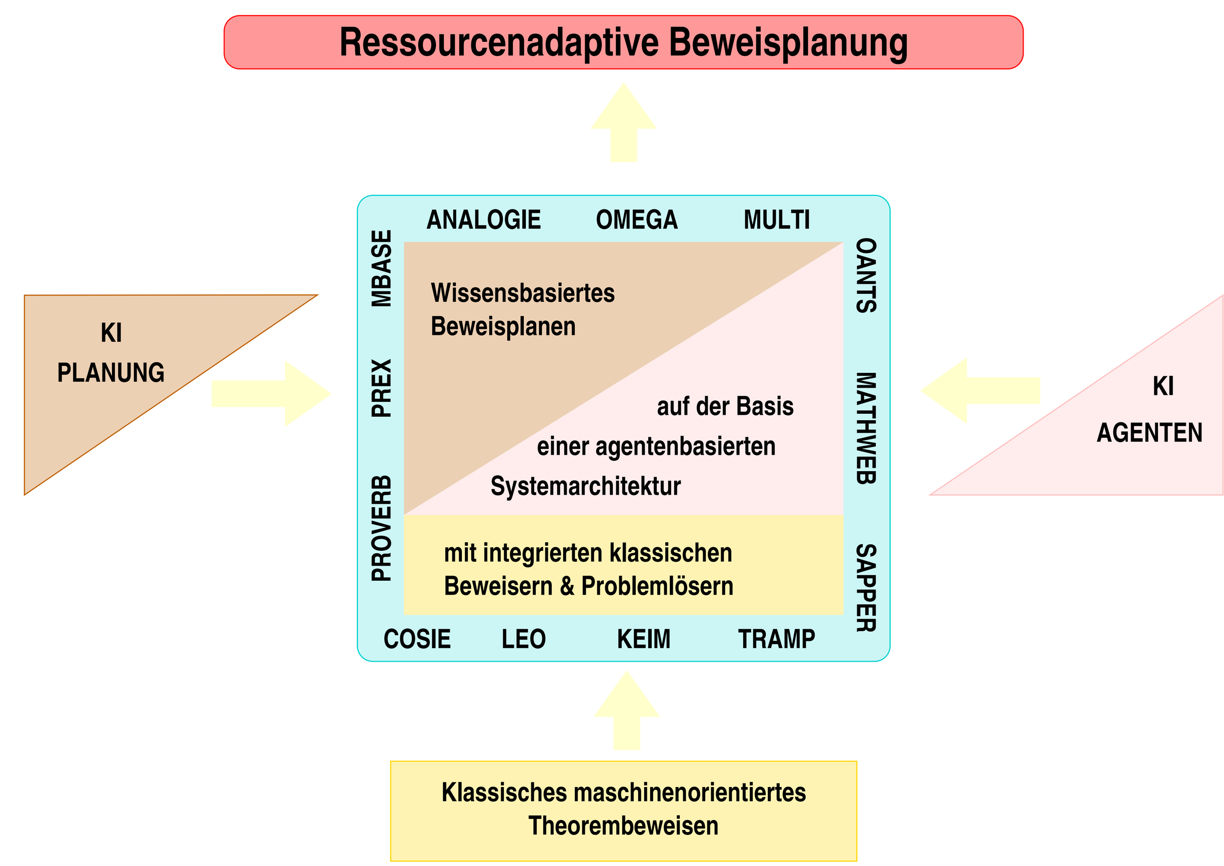
SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

## Motivation

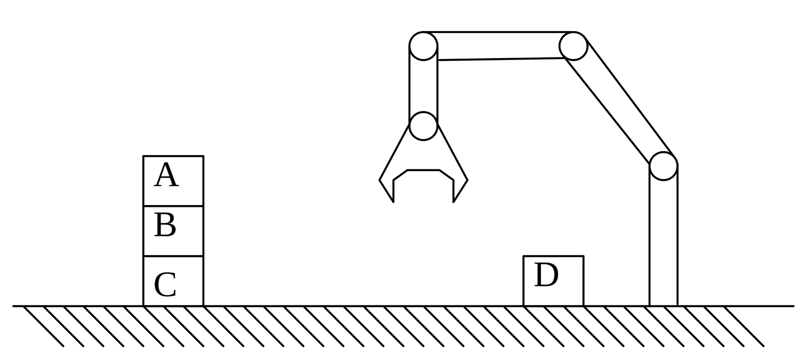
- Beschränkungen des klassischen automatischen Theorembeweisens
- Neue Paradigmen:
  - Wissensbasiertes Beweisplanen
  - Agentenbasiertes Beweisen
- Ziel: leistungsfähiges mathematisches Assistenzsystems

Voraussetzung: Wissensbasiertheit, Heterogenität, Flexibilität
⇒ Ressourcenbeschränkungen im integrierten System und beim Benutzer




## Wissensbasiertes Beweisplanen

### Ausgangspunkt: KI Planen




- Anfangszustand: on(A,B), on(B,C), ontable(C), free(A), . . .
- Zielzustand: ontable(B)
- Operator:

PUTDOWN$(X)$
prec:
$holding(X)$
effect:
$\oplus\, on\_table(X)$, $hand\_empty$
$\ominus\, holding(X)$

Beweisproblem = Planungsproblem mit Anfangszustand Beweisannahmen, Zielzustand Theorem

Ziel: Mathematisches Wissens (generell + speziell) benutzen in automatischem und interaktivem Beweisplanen

### Methoden

Operatoren der Beweisplanung, Wissen über geeignete mathematische Schritte
z.B. verschiedene Schritte zum Abschätzen von Ungleichungen

### Kontrollregeln

Steuerung der Suche, Vorgehenswissen über Anwendung von Methoden/Strategien
z.B. Präferieren von Methoden/Strategien in bestimmten Beweissituationen

### Strategien

Integration verschiedener Algorithmen, Wissen über geeignete Beweistechniken
z.B. mehrere Strategien zum Beweisen von Gruppeneigenschaften (Zurückführen auf bekannte Resultate, Gleichheitsbeweisen, vollständige Fallunterscheidung)

Ressourcenaspekt:
Wissen in Methoden, Kontrollregeln und Strategien
Explizites Reasoning über Rechenzeit

## Interaktion

Anwenden von Kalkülregeln + Taktiken
+ Methoden durch Benutzer
graphische Benutzeroberfläche
Beweiserklärungskomponente

Ressourcenaspekt:
Expertenwissen des Benutzers

## Externe Systeme

Integration von externen "Spezialisten"
Computeralgebrasysteme, Constraintlöser, Automatische Beweiser

Ressourcenaspekt:
Wissen in/über externe Systeme
Steuerungswissen bzgl. Zeit/Speicher

## Agenten

Reaktives (vs. deliberatives) Verhalten
Zusammenspiel heterogener Verfahren

Ressourcenaspekt:
explizites Reasoning über Effizienz (bzgl. Interaktion und Rechenverhalten)
Effektivität (bzgl. Beweiszustand)

## Projektziele von MI 4

AP1 Integration des deliberativen, wissensbasierten Beweisplanens mit dem reaktiven agentenbasierten Theorembeweisen

AP2 weitere Entwicklung der wissensbasierten Beweisplanung, insbesondere Trennung der Beweisplanebene von der Logikebene

AP3 weitere Entwicklung des agentenbasierten Theorembeweisen

AP4 weitere Fallstudien

AP5 Lernen von Vorgehenswissen

AP6 Infrastruktur

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Beweisplanen mit mehreren Strategien

Ωmega


Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis


## Motivation

Verschiedene Strategien erforderlich
(möglichst flexibel kombinierbar)

Flexibilisierung des Planungsalgorithmus

Ziele:

- Integration anderer Algorithmen
- Fehleranalyse und -behandlung
- Instantiierung von Meta-Variablen
- Strukturierung der Ressource Wissen: Methoden, Kontrollregeln
- gezielte Realisierung verschiedener Beweistechniken

⇒ Einführung einer Strategie-Ebene

## Konzepte

Verfeinerungs- und Modifikationsalgorithmen

Beispiele:

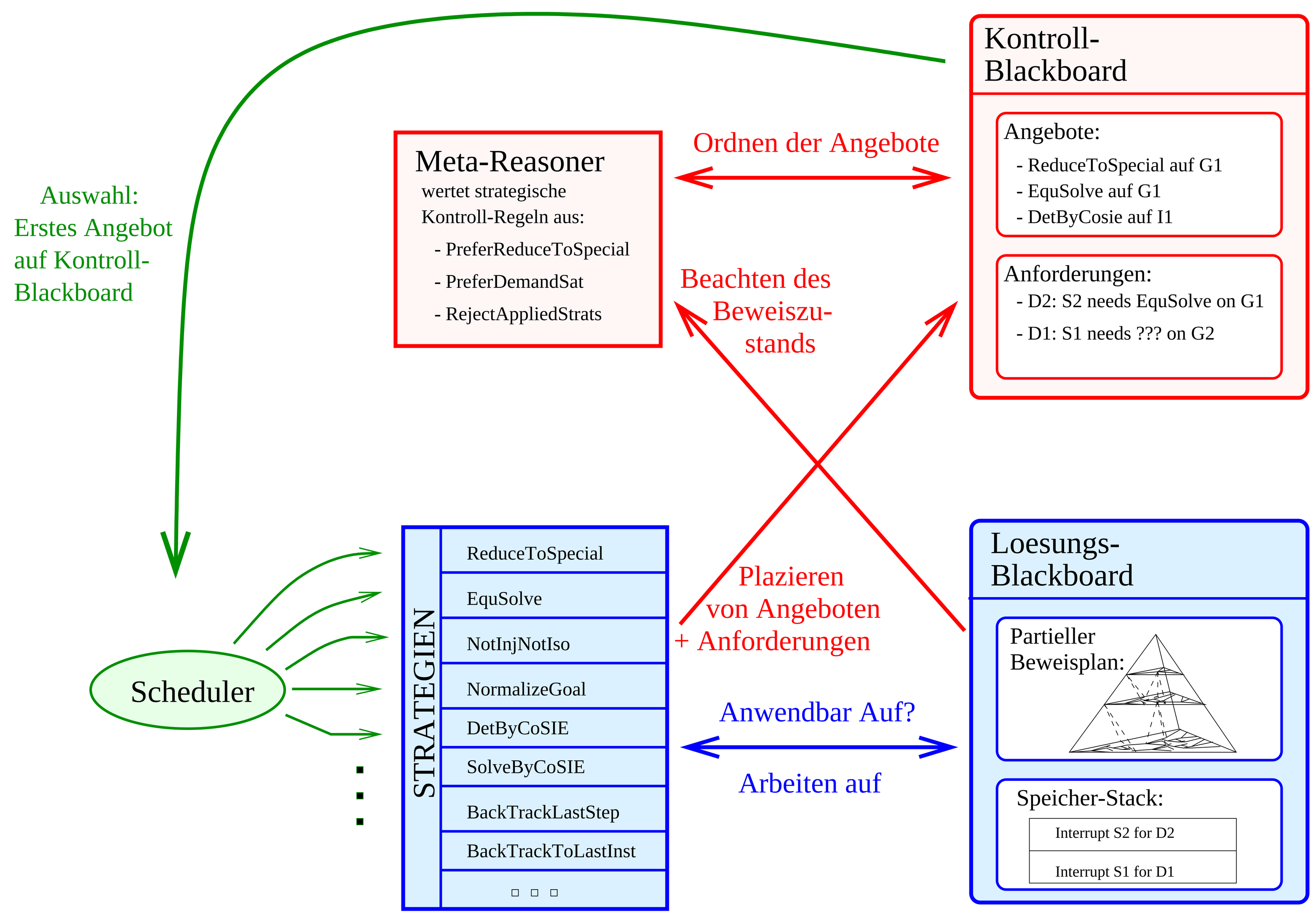
- $PPlanner$: wendet Methoden an
- $BackTrack$: macht Schritte rückgängig
- $InstMeta$: instantiiert Meta-Variablen
- $CPlanner$ : wendet Analogie an

Strategien

Verschiedene Parametrisierungen der Algorithmen
z.B. Planung mit verschiedenen Mengen von Methoden
und Kontrollregeln

⇒ Kombination verschiedener Algorithmen (heterogen) +
Kombination verschiedener Parametrisierungen (homogen)

## Blackboardarchitektur von MULTI




## Meta-Reasoning/Steuerung (Bsp.)

Flexible Kombination von Strategien durch
Meta-Reasoning auf Strategie-Ebene

- Präferenzierung von Strategien
  - erst schnelle aber unvollständige Strategie
    dann langsamere aber zuverlässigere Strategie
  - möglichst frühe Meta-Variablen Instantiierung
    zur Suchraum Einschränkung
- Fehlerbehandlung
  - präferiere Strategie, die Fehler umgeht,
    gegenüber Backtracking
  - wähle aus zwischen verschiedenen $BackTrack$ Strategien
- ressourcenadaptiertes Verhalten
  Analyse der Kostenverteilung
  ⇒ Abbruch + Neustart randomiserter Strategien

## Fallstudien

- $\epsilon$-$\delta$ Beweise
  - flexible Meta-Variablen Instantiierung mit $InstMeta$ Strategien
    (passende Instanzen berechnet von Constraintlöser $CoSIE$)
  - Verschachteln von Strategien über Speicher-Stack + Anforderungen
- Gruppen-Eigenschaften von Restklassen-Strukturen
  - mehrere Beweistechniken realisiert in verschiedenen Strategien
  - flexible Meta-Variablen Instantiierung mit $InstMeta$ Strategie
    (passende Instanzen berechnet von Computeralgebrasystemen)
  - verschiedene $BackTrack$ Strategien

## Weitere Arbeiten/Offene Probleme

- Ausbau des math. motivierten Meta-Reasoning
- bisher kaum Wissen über Kombination mit Analogie
- bisher keine Parallelität von Strategien
- Ausbau des ressourcenadaptiven Verhaltens

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

# Beweisplanen und Externe Systeme

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

## Beweisplanen und Constraintlösen (Kooperation mit C 1/MI 6 NEP)

### Motivation

Im mathematischen Beweisen:

- große Suchräume
- Konstruktion von Objekten mit theoriespezifischen Eigenschaften (Constraints)

$\Rightarrow$ effiziente, logisch-korrekte Constraintlöser, die mit dem Beweisplaner kooperieren

### Beispiel: $\epsilon$-$\delta$ Beweise

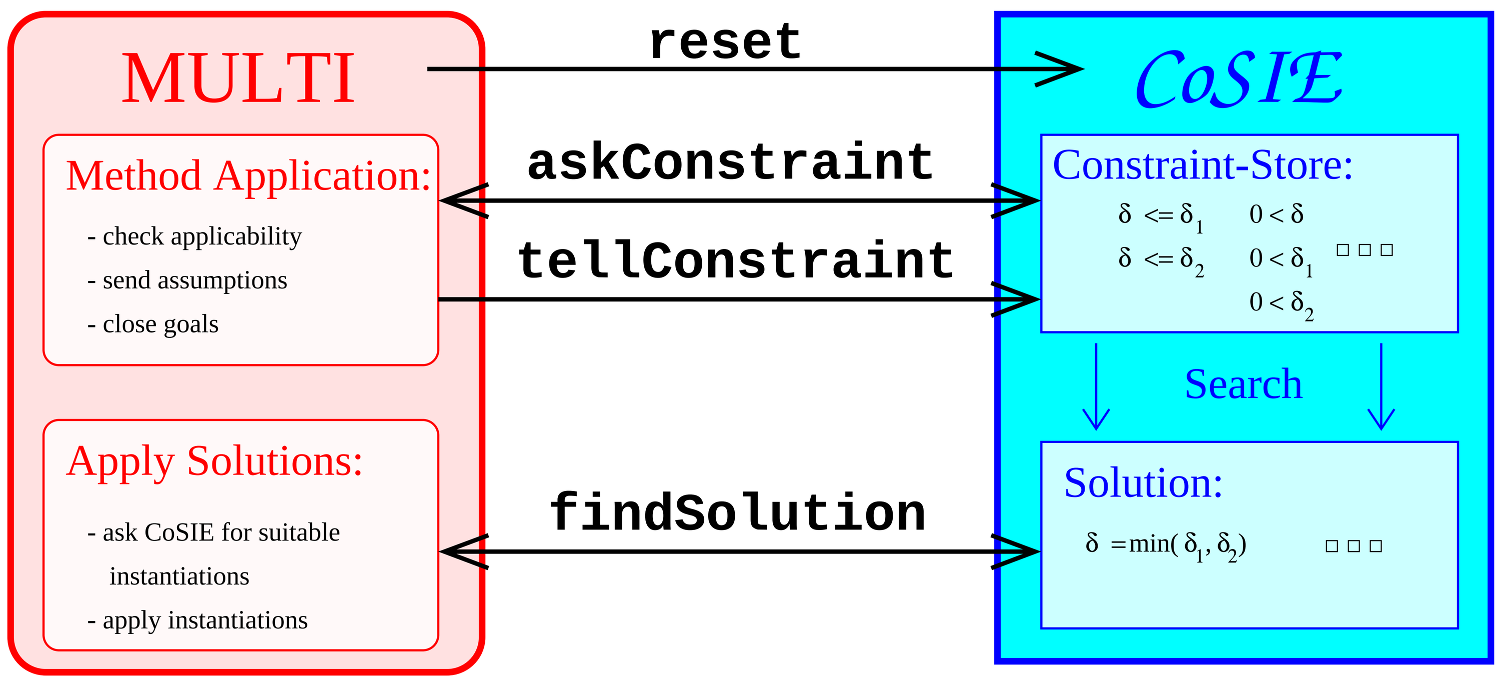
z.B. LIM+: $\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x \to a} g(x) = l_2 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$

Definition: $\lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon (0 < \epsilon \to \exists \delta (0 < \delta \wedge \forall x (|x-a| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon)))$$

Während der Beweisplanung entstehen Constraints aus

- Beweisannahmen: $0 < \delta_1, 0 < \delta_2, \ldots$
- Zielen: $\delta \leq \delta_1$, $\delta \leq \delta_2$, $\ldots$




### Anforderungen an Constraintlösen für Beweisplanen

- Aufsammeln von Constraints während des Beweisplanens
- Einschränken des Suchraums durch Konsistenztest
- Konstruktion geeigneter numerischer/symbolischer Objekte
- Logische Korrektheit:
  - Constraints hängen von Hypothesen ab ($x = a \vdash c$)
  - Eigenvariablen-Bedingungen
  - Constraints in Annahmen und Zielen

### Constraintlöser $\mathcal{C}o\mathcal{SIE}$

- implementiert in Mozart Oz, Erweiterung des RI Modules
- arithmetische Constraints über $\mathbb{R}$
- Integration von numerischem und symbolischem Constraintlösen
- Aufbau eines Kontextbaumes: Constraints werden relativ zu ihrem Kontext (Hypothesen) gespeichert
- sucht für Meta-Variablen nach Instanzen, die alle Constraints erfüllen

## Beweisplanen und Computeralgebrasysteme (CAS)

### Einbindung in Kontrollregeln

Vorschläge werden berechnet während der Beweissuche

$a)$ Instantiierung von Meta-Variablen

$b)$ Einschränkung des Suchraumes

Verifikation direkt durch den Planer

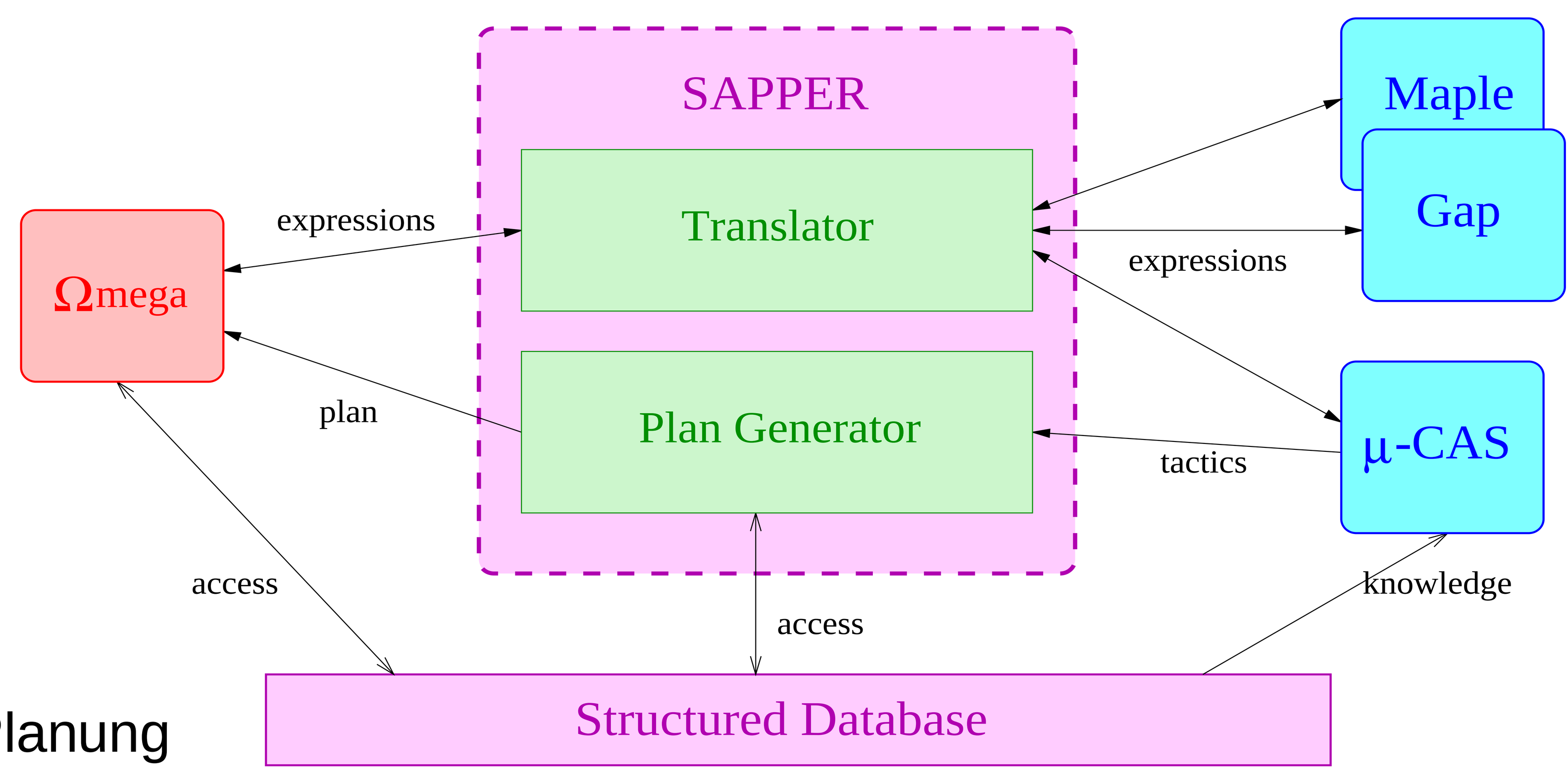
### Einbindung in Methoden

Berechnen von Termen und Lösen von Gleichungen

Idee: Trenne schwierige Berechnungen und deren einfache Überprüfung

Methode macht komplexe Berechnungen mit einem Standard-CAS während Planung

Verifikation der trivialen Richtung während der Expansion mittels $\mu\mathcal{CAS}$




Ausnutzen des Wissens über Domäne und CAS (Ressource) um spezielle CAS auszuwählen

### Beispiel für CAS-Expansion: $\epsilon$-$\delta$ Beweise

$$\begin{array}{ll} ((l_1+l_2)-f(x))-g(x) & \\ (-1*(g(x)-l_2))+(l_1-f(x)) & (\mathtt{CAS}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} ((l_1+l_2)-f(x))-g(x) & \\ ((l_1+l_2)+(-1*f(x)))-g(x) & (-2+) \\ ((-1*f(x))+(l_1+l_2))-g(x) & (C+) \\ ((-1*f(x))+(l_1+l_2))+(-1*g(x)) & (-2+) \\ (-1*g(x))+((-1*f(x))+(l_1+l_2)) & (C+) \\ (-1*g(x))+((-1*f(x))+(l_2+l_1)) & (C+) \\ (-1*g(x))+(l_2+((-1*f(x))+l_1)) & (Pop+) \\ (-1*g(x))+(l_2+(l_1+(-1*f(x)))) & (C+) \\ ((-1*g(x))+l_2)+(l_1+(-1*f(x))) & (A+L) \\ ((-1*g(x))+l_2)+(l_1-f(x)) & (+2-) \\ ((-1*g(x))+(-1*(-1*l_2)))+(l_1-f(x)) & (\text{Split-Mono}*) \\ (-1*(g(x)-l_2))+(l_1-f(x)) & (\text{Cumm-Left}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} \vdots & \\ \vdots & \\ (-1*g(x))+((-1*f(x))+(l_2+l_1)) & (C+) \\ (-1*g(x))+(((-1*f(x))+l_2)+l_1) & (A+L) \\ (-1*g(x))+((l_2+(-1*f(x)))+l_1) & (C+) \\ (-1*g(x))+(l_2+((-1*f(x))+l_1)) & (A+R) \\ \vdots & \\ \vdots & \end{array}$$

### Beispieldomänen

- Restklassenbeweise (Maple, Gap, $\mu\mathcal{CAS}$)
- $\epsilon$-$\delta$ Beweise (Maple, $\mu\mathcal{CAS}$)
- Optimierungsprobleme ($\mu\mathcal{CAS}$)

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Beweisplanbasiertes Instruktionsdesign

Ωmega
KnAc

Kooperation zwischen Projekt MI 4 Omega und B 3 KnAc

## Einführung

### Frage

Kann die explizite Repräsentation von Methoden des Beweisplanens für Instruktionsmaterial eingesetzt werden, das den Erwerb von mathematischen Problemlösefertigkeiten fördert?

### Experimentelle Überprüfung zweier Hypothesen

- Instruktionsmaterial, das auf Beweisplanmethoden basiert, steigert Problemlöseperformanz
- Performanzverbesserung steigt mit zunehmender Transferdistanz

## Methode

*Teilnehmer und Ablauf:* 38 Studierende erhielten Instruktionsmaterial zum Thema Grenzwertbeweise und bearbeiteten sechs Testprobleme von wachsendem Schwierigkeitsgrad. Das Instruktionsmaterial bestand aus:

- Informelle Einführung in Grenzwertbeweise
- Formale Definition des Grenzwertbegriffes mit graphischer Veranschaulichung
- Ausgearbeitetes Beispiel einer Grenzwertberechnung mit graphischer Veranschaulichung

*Unabhängige Variablen:* Vier unterschiedliche Instruktionsmaterialien, die sich in Reihenfolge der Abschnitte und im Lösungsansatz für ausgearbeitete Beispielaufgaben unterscheiden.
*Abhängige Variablen:* In der Testphase wurde die Problemlöseperformanz für isomorphe Testprobleme sowie für einfache und kompliziertere Transferprobleme erfaßt.

### Instruktionsmaterialvarianten

*Textbuch-basiert: Einführung - Definition - Beispiel*
Gemäß Aufbau eines Lehrbuches: ein Beispiel ohne Erläuterungen.

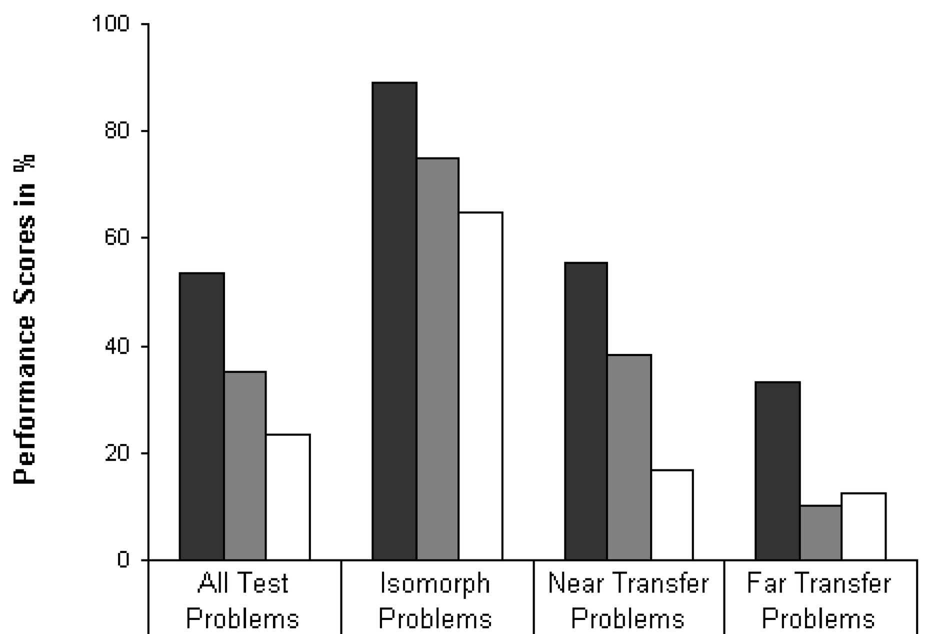
*Beispiel-basiert: Einführung - Beispiel - Beispiel - Definition*
Gemäß Lehreinheit für Oberstufenlehrer: Graphische und rechnerische Herleitung des Grenzwertbegriffs über eine Folge von Beispielen

*Methoden-basiert: Einführung - Beispiel - Definition - Methode* (Variante A)/*Einführung - Definition - Beispiel - Methode* (Variante B)
Verwendung der Beweisplanmethode `complex-estimate`. Explizite Beschreibung der Methode und Anwendung an einem ausgearbeiteten Beispiel. Varianten unterschieden sich nur bzgl. Reihenfolge der Abschnitte und wurden in Analyse zusammengefaßt.

## Resultate und Diskussion

| | All Test Problems | Isomorph Problems | Near Transfer Problems | Far Transfer Problems |
|---|---|---|---|---|
| Method ($n_1$=18) vs. Textbook ($n_2$=10) | **p = 0,08** U = 60,5 | **p = 0,10** U = 69,5 | p = 0,17 U = 71,5 | **p = 0,07** U = 66 |
| Method ($n_1$=18) vs. Example ($n_3$=10) | **p = 0,01** U = 43,5 | **p = 0,07** U = 66,5 | **p = 0,01** U = 48 | **p = 0,10** U = 68 |
| Textbook ($n_2$=10) vs. Example ($n_3$=10) | p = 0,15 U = 36,5 | p = 0,37 U = 46 | **p = 0,10** U = 35,5 | p = 0,31 U = 46 |

Paarweiser Vergleich der Instruktionsvarianten in Abhängigkeit von der Transferdistanz mittels Mann-Whitney-U-Test




| | All Test Problems | Isomorph Problems | Near Transfer Problems | Far Transfer Problems |
|---|---|---|---|---|
| Method-Based | 54 | 89 | 56 | 33 |
| Textbook-Based | 35 | 75 | 38 | 10 |
| Example-Based | 23 | 65 | 17 | 13 |

Mittlere Performancescores in Abhängigkeit von der Instruktionsvariante und der Transferdistanz

- Bestätigung der ersten Hypothese: Methoden-basiertes Instruktionsmaterial zeigt signifikante positive Auswirkungen auf die Problemlöseperformanz der Versuchspersonen (gleicher Zeitaufwand).
- Zweite Hypothese konnte nicht bestätigt werden (evtl. wegen zu großer Transferdistanz).

→ erste Evidenz: explizietes Lehren von Methoden sinnvoll
*Automated Proof Planning for Instructional Design*
*Melis, Glasmacher, Gerjets, Ullrich*
*Annual Conference of the Cognitive Science Society 2001*

## Weitere Arbeiten

Weitere Experimente ΩMEGA MI 4 und Star-Like EM 3

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Analogie im Beweisplanen


Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis


## Motivation

- Analogie wichtige menschliche Problemlösestrategie
- Wiederverwendung von (Teil)-Beweisen wenn effizienter

## Probleme

- Matching kann viele analogen Probleme nicht erkennen
- Erkennung von analogen Teilbeweisen war nicht möglich
- Matching als Heuristik zur Steuerung des analogen Transfers unzureichend
- Reformulierung der Methoden reicht nicht aus, um Quellplan an Zielproblem anzupassen

## Lösungen

- Erweiterung des Matchers: Termabbildungen, Hinzufügen, Vertauschen und Entfernen von Teilformeln und Verwendung von Heuristiken
- Ausnutzen der Planungsinformation zum Steuern des Transfers
- Anpassungen des Quellplans auf Planebene, nicht auf Methodenebene

## Algorithmus

Eingabe: Zielproblem.
Retrieval: Bestimme und lade Quellplan
Zielassoziation:

**solange** kein geeigneter Match $\sigma$ zwischen Quell(unter)ziel und Zieltheorem gefunden:
Füge Planungsschritte in den Zielplan ein.

Transfer:

**für alle** Planungsschritte $P_S$ des Quellplans
bestimme ähnlichsten Zielschritt $P_T$ zu $P_S$ mit $\sigma$.
**wenn** $P_T = \emptyset$ **dann** wähle Reformulierung:

- ∗ Anwendung von Domänenwissen,
- ∗ Lemmavorschlag,
- ∗ Überspringen
- ∗ Einfügen von Planungsschritten

**sonst** wende $P_T$ im Ziel an.

Ausgabe: (partieller) Zielplan.

## Evaluierung von Varianten

- Variante M: Auswahl der Knoten über Matchen von Quell- und Zielknoten, keine Information der Planebene
- Variante S: Transfer wird über die Anwendungsbedingungen der Methoden gesteuert
- Variante P: Transfer nutzt planungsbedingten Abhängigkeiten.
- Variante S+P: Transfer nutzt Anwendungsbedingungen der Methoden und Planabhängigkeiten.

Ergebnis: Variante S+P findet bei weniger Aufwand, sowohl in Zeit, Methoden- und Knotenmatchings, qualitativ bessere Beweispläne.

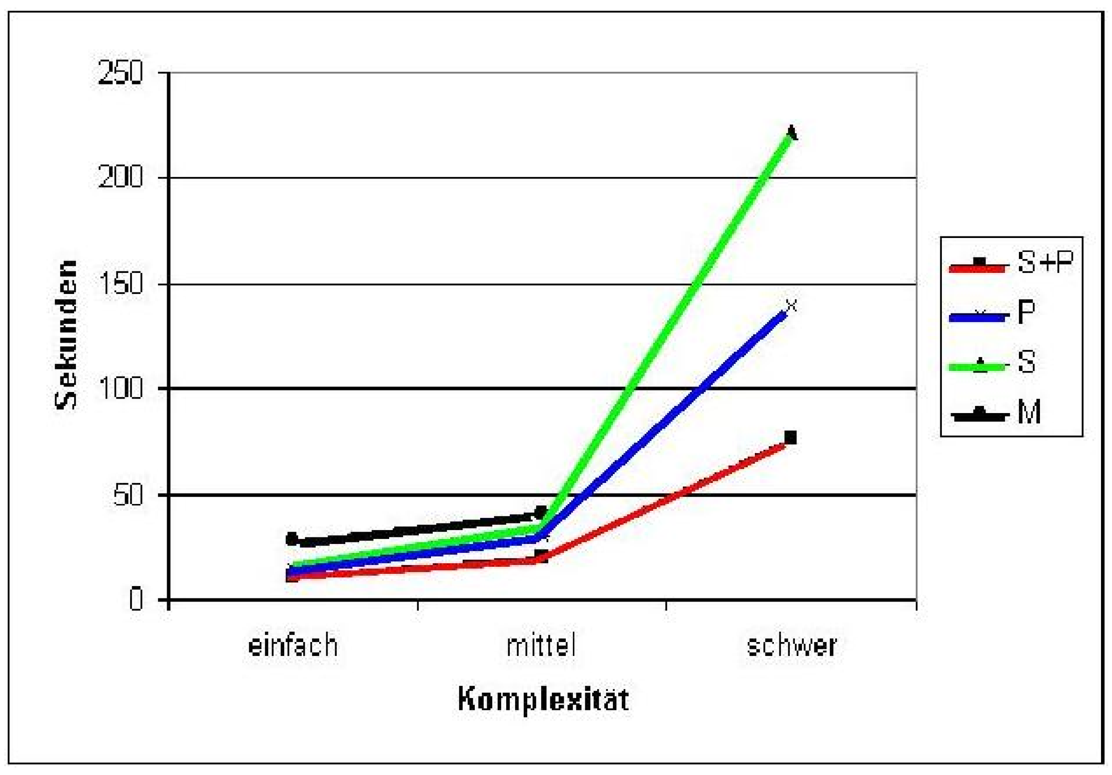
## Offene Probleme

- automatisches Retrieval eines Quellplans
- Heuristiken zur Erkennung von Analogie innerhalb eines Beweises
- intelligente Reformulierung von Methoden

## Vergleich der Analogievarianten

| | S+P | P | S | M |
|---|---|---|---|---|
| Sekunden | 57 | 250 | 530 | - |
| Methodenmatchings | 154 | 968 | 3072 | - |
| angewendete Methoden | 15 | 44 | 149 | - |
| gematchte Knoten | 15 | 44 | 149 | - |
| angewendete Reformulierungen | 0 | 3 | 5 | - |
| offene Knoten | 0 | 1 | 1 | - |

Ergebnisse beim Transfer eines Planes mit hoher Komplexität




Mittlere Transferzeit bei Plänen mit wachsender Komplexität

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Fallstudien

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

## Beweisplanung

### $\varepsilon$-$\delta$-Beweise

Gebiet:

- Grenzwerte von Folgen und Funktionen, Stetigkeit von Funktionen
- Aussagen über spezielle Funktionen, wie $\lim_{x \to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$
- allgemeine Theoreme, wie *Der Grenzwert einer konvergenten Folge mit nicht-negativen Folgengliedern ist nicht-negativ.*
- Theoreme, Beispiel- und Übungsaufgaben aus Kapiteln 3, 4 und 5 von *Bartle & Sherbert: "Introduction to Real Analysis"*

40 Beispiele mit MULTI planbar
(prinzipiell unendlich viele, etwa bei Stetigkeit von Polynomen)

$\varepsilon$-$\delta$-Beweispläne waren Grundlage für

- empirische Untersuchungen der Analogiekomponente
- Experimente mit Kontrollregeln für indirekte Beweise

### Interaktives Beweisplanen

Beweiskonstruktion in Form von "Übungsaufgaben":

- Benutzer konstruiert einen Beweis mit Methoden
- Methodenauswahl für den Benutzer durch $\Omega$ANTS
- Beweisplaner als Hilfesystem, wenn Benutzer nicht weiterkommt

$\Rightarrow$ interaktive Strategie von MULTI

Gebiete:

- algebraische Eigenschaften von Restklassen
- Eigenschaften von Gruppenhomomorphismen
  - z.B. *Das Bild einer Gruppe* $(G, \circ)$ *unter einem Homomorphismus* $h : (G, \circ) \to (K, \star)$, *ist abgeschlossen bezüglich* $\star$.
  - 15 Beispiele

### Klassifikation von Restklassenstrukturen

Kongruenzklassen der ganzen Zahlen $\mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4 \setminus \{\bar{0}_4\}, \ldots$ mit Operationen $+, -, *$ und deren Kombinationen, kartesische Produkte von Restklassen

Klassifikation bzgl. der algebraischen Eigenschaften

- als Magma, Quasigruppe, Monoid, ..., abelsche Gruppe
- dabei Beweise/Gegenbeweise für Abgeschlossenheit, Assoziativität, Kommutativität, Existenz von neutralem, inversen Elementen und Teilern
- mittels der Strategien: Theoremanwendung, Gleichungslösen, Fallunterscheidung
- bisher ca. 14000 Strukturen klassifiziert

Klassifikation bzgl. der Isomorphieklasse

- dabei Beweise/Gegenbeweise für Isomorphie zweier Strukturen
- mittels der Strategien: Theoremanwendung, Gleichungslösen, Fallunterscheidung und randomisierte Gleichungsumformungen
- bisher ca. 8000 Strukturen klassifiziert

### Diagonalisierung

Beweisschema:

- aufzählen einer Menge $E$ mit Hilfe einer Funktion $f$
- finde Element aus $E$, das einer Eigenschaft von $f$ widerspricht

Konstruktion dieses Diagonalelements mit Hilfe von Constraints

Theoreme: Cantors Theorem, Halteproblem, Überabzählbarkeit der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$, ...

### Vollständigkeitsbeweise

Implementation der Excess-literal-number-Technik durch Methoden und Kontrollregeln

Anwendung auf aussagenlogische Kalküle:
Resolution, Tautologieelimination, Lockresolution, lineare Resolution

## Agentenbasiertes Beweisen mit $\Omega$ANTS

Mengentheorie:

- Gleichheit von Mengen bezüglich Mengenoperationen, z.B. $\forall A, B, C : (A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C))$
- bisher ca. 10000 Gleichungen entschieden

Gruppentheorie:

- Äquivalenzbeweise für unterschiedliche Gruppendefinitionen
- Eindeutigkeit des neutralen und der inversen Elemente

Agenten realisieren folgendes Vorgehen:

- Anwendung von Regeln des NIC-Kalküls
- Expansion von Definitionen
- Anwendung spezieller Taktiken, etwa zur Behandlung des Deskriptionsoperators bei Gruppendefinitionen

Entstehende Unterprobleme werden von Agenten für externe Systeme, wie OTTER (Beweiser für Prädikatenlogik) und SATCHMO (Modellgenerierer) gelöst.

Demos online unter
`http://www.ags.uni-sb.de/~omega/demo/`

UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

## Bereiche zukünftiger Fallstudien

- Ausweitung der Beweise in der Analysis
- Beweise in der Algebra
- elementare Mengentheorie (in Kooperation mit Projekt DIALOG MI 3)

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Stellung des OMEGA-Projekts

Ωmega

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

## Kooperationen im SFB

**Laufende Kooperationen:**

- NEP (C 1): Constraintlösen in der Beweisplanung
- KNAC (B 3): Beweisplanung und Instruktionsdesign
- LISA (C 2): mathematische Services in der Sprachverarbeitung
- AGINT (D 1): Agentenbasiertes Theorembeweisen, verteilte mathematische Services, mathematische Wissensbank

**Weitere geplante Kooperationen:**

- Fortsetzung laufender Kooperationen:
  NEP (MI 6)
  STAR-LIKE (EM 3)
- $\lambda$-PLAN (MI 6): theoretische Fundierung des Beweisplanens
- DIALOG (MI 4): ΩMEGA als dynamische mathematische Wissensquelle in einem tutoriellen Dialog

## Internationale Kooperationen

- Carnegie Mellon University (USA) und Cornell University (USA): Weiterentwicklung des Beweisplanens und der Analogie
- Universität Edinburgh (GB): Beweisplanen und Analogie
- Universitäten Birmingham (GB) und Edinburgh (GB): agentenbasierte Architekturen für das Theorembeweisen und Lernen von Methodenwissen
- Technische Universität Budapest (H), Fachbereich Mathematik: Beweisplanen und Wissensrepräsentation
- Leitung des europäischen Netzwerks CALCULEMUS: 8 Partneruniversitäten
- IRST und Universität Genua (I): MATHWEB-System und Constraintlösen
- DFKI: Lernsoftware und formale Softwareentwicklung; Anwendung von ΩMEGA in der ACTIVEMATH Lernumgebung
- laufende Doktorarbeiten im ΩMEGA-Umfeld in Birmingham und Genua

## Ausgewählte Veröffentlichungen

Publikationen im OMEGA-Kontext Berichtszeitraum: $>$ 100
In Zeitschriften: ca. 20
Auf internationalen Konferenzen: ca. 35


- M. Kohlhase, A. Franke, S. Hess, C. Jung und V. Sorge: *Agent-Oriented Integration of Distributed Mathematical Services*, Journal of Universal Computer Science, 5(3), 1999
- E. Melis und J. Siekmann: *Knowledge-Based Proof Planning*, Journal of Artificial Intelligence, 115(1), 1999
- E. Melis und J.Zimmer und T. Müller: *Extensions of Constraint Solving for Proof Planning*, European Conference on Artificial Intelligence, 2000
- E. Melis: *The Heine-Borel Challenge Problem: In Honor of Woody Bledsoe*, Journal of Automated Reasoning, 20(3), 1998
- E. Melis und A. Meier: *Proof Planning with Multiple Strategies*, First International Conference on Computational Logic, 2000
- E. Melis: *AI-Techniques in Proof Planning*, European Conference on Artificial Intelligence, 1998
- C. Benzmüller, M. Bishop und V. Sorge: *Integrating* TPS *and* ΩMEGA, Journal of Universal Computer Science, 5(3), 1999
- Manfred Kerber, Michael Kohlhase, Volker Sorge: Integrating Computer Algebra into Proof Planning Journal of Automated Reasoning, 21(3), 1998
- Andreas Meier: TRAMP: Transformation of Machine-Found Proofs into Natural Deduction Proofs at the Assertion Level, 17th Conference on Automated Deduction, 2000
- J. Siekmann, et. al.: LOUI: Lovely Omega User Interface, Formal Aspects of Computing, 11(3), 1999
- J. Siekmann, et. al.: An Interactive Proof Development Environment + Anticipation = A Mathematical Assistant?, International Journal of Computing Anticipatory Systems (CASYS), 3, 1999


## ΩMEGA/MATHWEB Installationen

USA: Carnegie Mellon University and Cornell University
Großbritannien: Universitäten Birmingham und Edinburgh
Italien: Universität Genua
Ungarn: Technische Universität Budapest
Deutschland: 3 x Saarbrücken

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

# Beweisplanen und Interaktion

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

Projekt MI 4 OMEGA: Siekmann, Benzmüller, Melis
Fortsetzung von Projekt B 1 OMEGA: Siekmann, Kohlhase, Melis

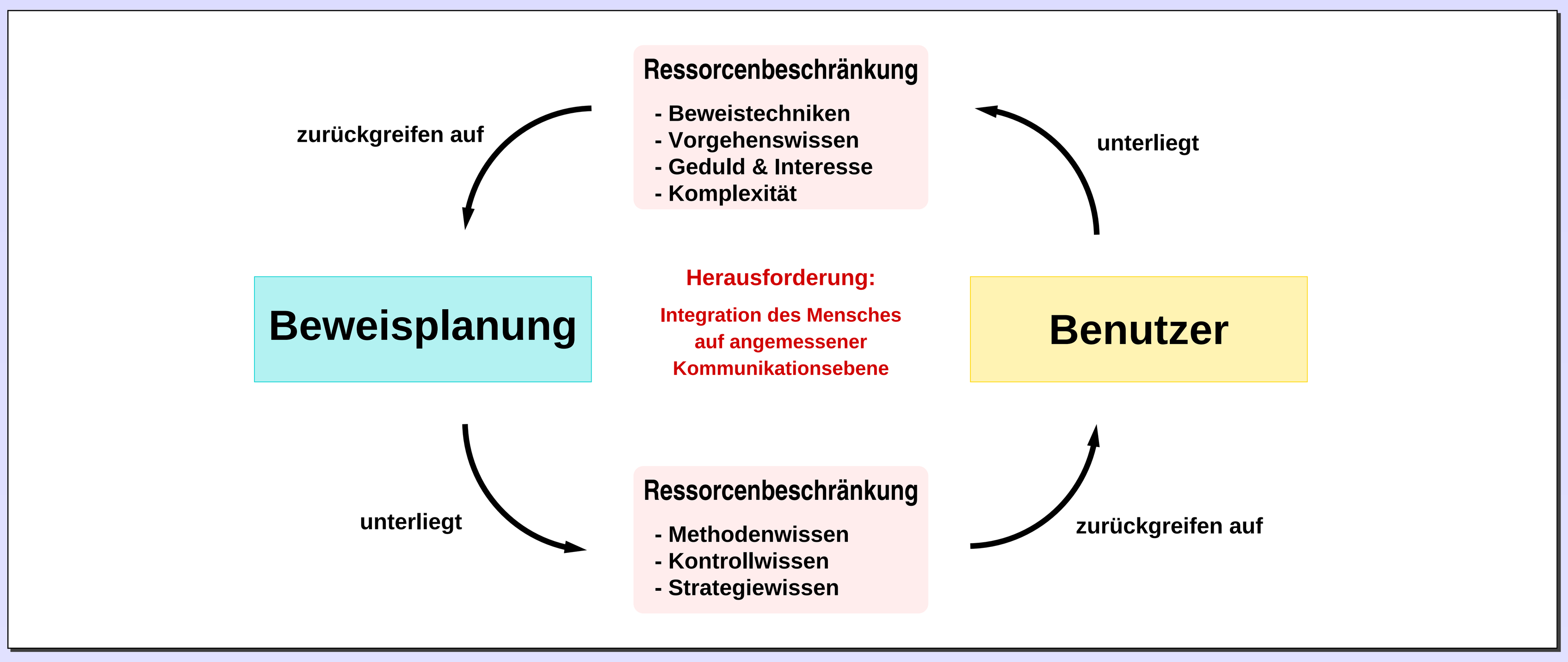
## Motivation

Ziel des ΩMEGA Projektes: Entwicklung eines mathematischen Assistenzsystems

⇒ Interaktion mit Benutzer ist gewünscht + wichtig

⇒ Expertenwissen des Benutzers als Ressource

Vorraussetzung: Adäquate Kommunikation von Beweisen und flexible Interaktionsmechanismen




## Module zur Unterstützung der Interaktion

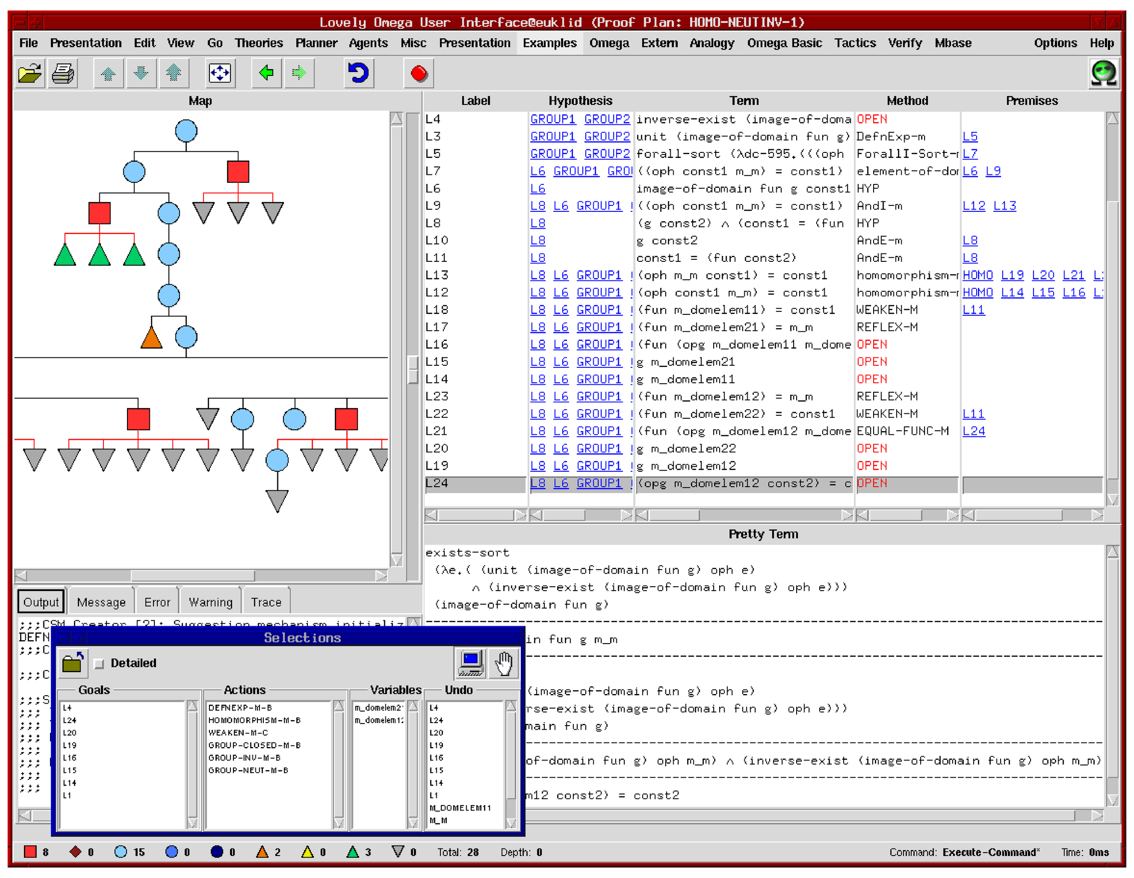
### LOUI

Graphische Benutzerschnittstelle mit Hypertexteigenschaften

Unterstützt multimodale Präsentation von Beweisen:

- Linearisierte, ND-Beweise
- Beweisbäume, Verbalisierung mittels *P.rex*

Gewichtetes Präsentieren von Information (u.a. mit Vorschlagsagenten, siehe AGINT)



### Interaktives Beweisplanen

Interaktives Beweisen:
Benutzer wendet Regeln und Taktiken an

Interaktives Beweisplanen:

- Anwendung von Methoden
- Instantiierung von Variablen
- Aufruf des Planers

Wird bisher nur im Rahmen von festgelegten "Aufgaben" verwendet

Generierung von Vorschlägen für Interaktionsmöglichkeiten durch Agenten

### Integration über MathWeb

### *P.rex*

(Kooperation mit FABEON, GradKoll Kognitionswissenschaft)

Komponente zur Beweispräsentation und eingeschränktem Dialog
Vorarbeit in Richtung natürlichsprachliche Benutzerschnittstelle

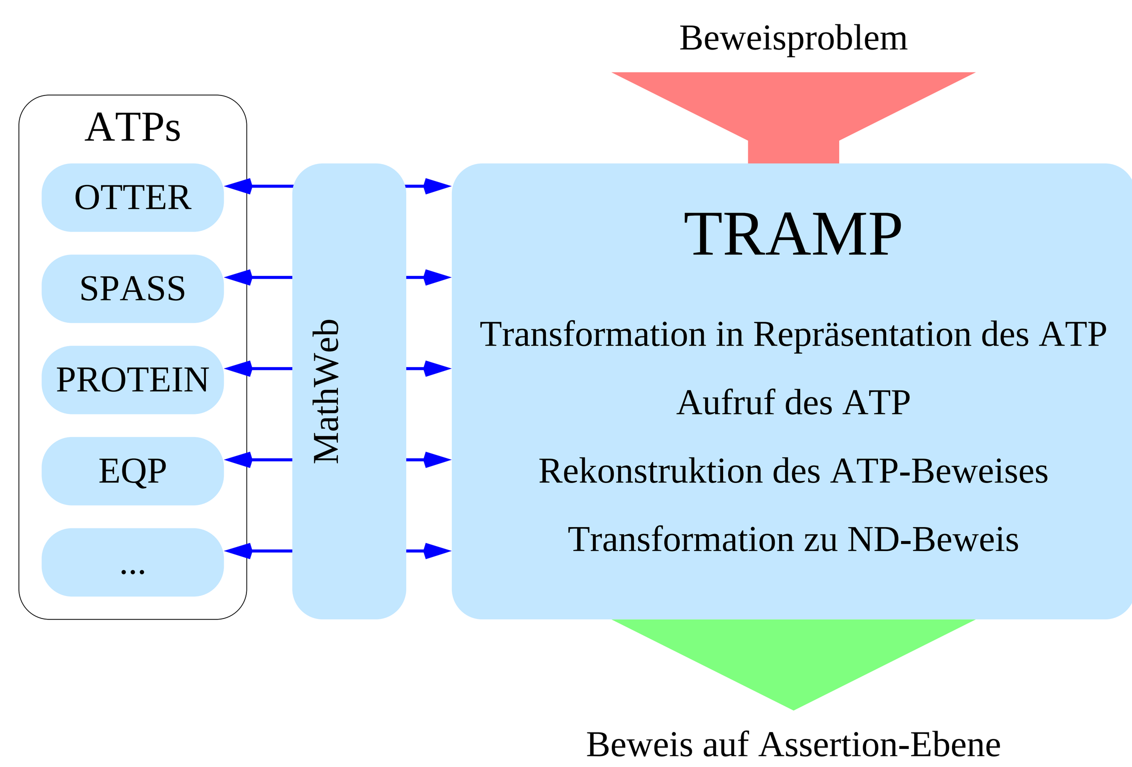
> ***P.rex***: Since $a \in U$ or $a \in V$, $a \in U \cup V$ by the $\cup$-Lemma.
> **User**: This step is too difficult.
> ***P.rex***: Do you understand the premises?
> **User**: Yes.
> ***P.rex***: In order to prove that $a \in U \cup V$ let us consider the following cases.
> Case 1: Let $a \in U$. That leads to $a \in U \cup V$ by the definition of $\cup$.
> Case 2: Let $a \in V$. Then $a \in U \cup V$ by the definition of $\cup$.
> Do you understand this step?
> **User**: Yes.
> ***P.rex***: In order to prove that $a \in F \cup G$ let us consider the following cases.
> Case 1: Let $a \in F$. Therefore $a \in F \cup G$ by the definition of $\cup$.
> Case 2: Let $a \in G$. Then $a \in F \cup G$ by the definition of $\cup$.

Fernziel: flexibler natürlichsprachlicher Dialog

⇒ Projekt MI 3 DIALOG

### Tramp

Komponente macht Beiträge (Beweise) externer Beweiser im Kalkül des natürlichen Schließens verfügbar




Integration weiterer Systeme im Berichtszeitraum

## Herausforderungen

- Wie kann Wissen des Benutzers als Ressource in Beweisplanung berücksichtigt werden?
- Kann die Agenten-Perspektive eine flexible Interaktion mit dem ΩMEGA-System begünstigen?
- Wie kann ein Beweis/Plan-Kontext dem Benutzer adäquat vermittelt werden?
- Was sind sinnvolle Interaktionsmöglichkeiten und was nicht?
- Wie können Methoden stärker an menschliches Verständnis angepasst werden?
- neue Projekte ⇒ Projekte MI 3 DIALOG und MIPPA

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

SFB 378
Ressourcenadaptive
Kognitive Prozesse

# Beweisplanbasiertes Instruktionsdesign

Ωmega
KnAc

Kooperation zwischen Projekt MI 4 Omega und B 3 KnAc

## Einführung

### Frage

Kann die explizite Repräsentation von Methoden des Beweisplanens für Instruktionsmaterial eingesetzt werden, das den Erwerb von mathematischen Problemlösefertigkeiten fördert?

### Experimentelle Überprüfung zweier Hypothesen

- Instruktionsmaterial, das auf Beweisplanmethoden basiert, steigert Problemlöseperformanz
- Performanzverbesserung steigt mit zunehmender Transferdistanz

## Methode

*Teilnehmer und Ablauf:* 38 Studierende erhielten Instruktionsmaterial zum Thema Grenzwertbeweise und bearbeiteten sechs Testprobleme von wachsendem Schwierigkeitsgrad. Das Instruktionsmaterial bestand aus:

- Informelle Einführung in Grenzwertbeweise
- Formale Definition des Grenzwertbegriffes mit graphischer Veranschaulichung
- Ausgearbeitetes Beispiel einer Grenzwertberechnung mit graphischer Veranschaulichung

*Unabhängige Variablen:* Vier unterschiedliche Instruktionsmaterialien, die sich in Reihenfolge der Abschnitte und im Lösungsansatz für ausgearbeitete Beispielaufgaben unterscheiden.
*Abhängige Variablen:* In der Testphase wurde die Problemlöseperformanz für isomorphe Testprobleme sowie für einfache und kompliziertere Transferprobleme erfaßt.

### Instruktionsmaterialvarianten

*Textbuch-basiert: Einführung - Definition - Beispiel*
Gemäß Aufbau eines Lehrbuches: ein Beispiel ohne Erläuterungen.

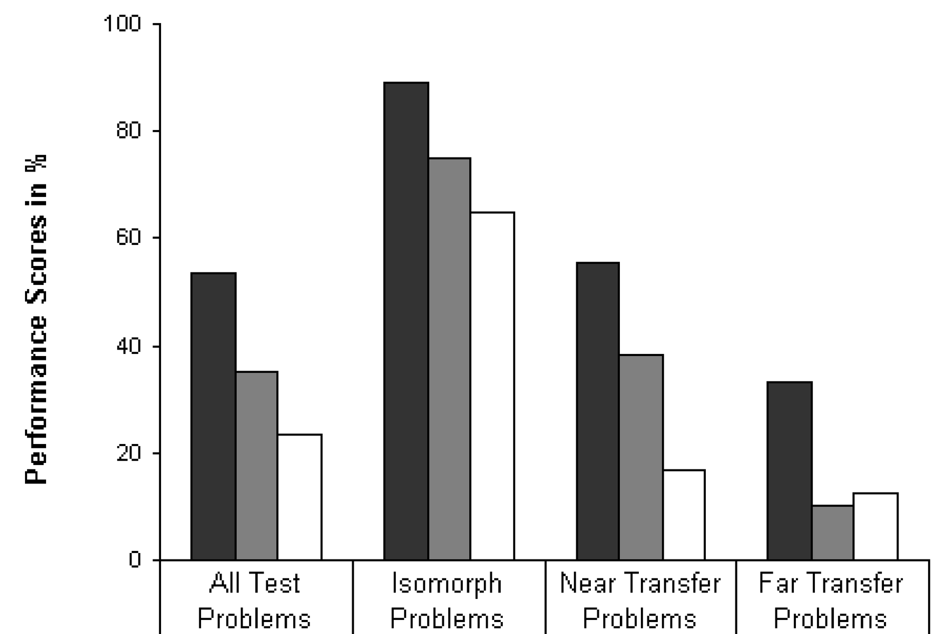
*Beispiel-basiert: Einführung - Beispiel - Beispiel - Definition*
Gemäß Lehreinheit für Oberstufenlehrer: Graphische und rechnerische Herleitung des Grenzwertbegriffs über eine Folge von Beispielen

*Methoden-basiert: Einführung - Beispiel - Definition - Methode* (Variante A)/*Einführung - Definition - Beispiel - Methode* (Variante B)
Verwendung der Beweisplanmethode `complex-estimate`. Explizite Beschreibung der Methode und Anwendung an einem ausgearbeiteten Beispiel. Varianten unterschieden sich nur bzgl. Reihenfolge der Abschnitte und wurden in Analyse zusammengefaßt.

## Resultate und Diskussion

| | All Test Problems | Isomorph Problems | Near Transfer Problems | Far Transfer Problems |
|---|---|---|---|---|
| Method ($n_1$=18) vs. Textbook ($n_2$=10) | **p = 0,08** U = 60,5 | **p = 0,10** U = 69,5 | p = 0,17 U = 71,5 | **p = 0,07** **U = 66** |
| Method ($n_1$=18) vs. Example ($n_3$=10) | **p = 0,01** U = 43,5 | **p = 0,07** U = 66,5 | **p = 0,01** U = 48 | **p = 0,10** U = 68 |
| Textbook ($n_2$=10) vs. Example ($n_3$=10) | p = 0,15 U = 36,5 | p = 0,37 U = 46 | **p = 0,10** U = 35,5 | p = 0,31 U = 46 |

Paarweiser Vergleich der Instruktionsvarianten in Abhängigkeit von der Transferdistanz mittels Mann-Whitney-U-Test




| | All Test Problems | Isomorph Problems | Near Transfer Problems | Far Transfer Problems |
|---|---|---|---|---|
| Method-Based | 54 | 89 | 56 | 33 |
| Textbook-Based | 35 | 75 | 38 | 10 |
| Example-Based | 23 | 65 | 17 | 13 |

Mittlere Performancescores in Abhängigkeit von der Instruktionsvariante und der Transferdistanz

- Bestätigung der ersten Hypothese: Methoden-basiertes Instruktionsmaterial zeigt signifikante positive Auswirkungen auf die Problemlöseperformanz der Versuchspersonen (gleicher Zeitaufwand).
- Zweite Hypothese konnte nicht bestätigt werden (evtl. wegen zu großer Transferdistanz).

→ erste Evidenz: explizietes Lehren von Methoden sinnvoll

*Automated Proof Planning for Instructional Design*
*Melis, Glasmacher, Gerjets, Ullrich*
*Annual Conference of the Cognitive Science Society 2001*

## Weitere Arbeiten

Weitere Experimente ΩMEGA MI 4 und Star-Like EM 3

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES