Artificial Intelligence

Christoph Benzmüller and Raul Rojas

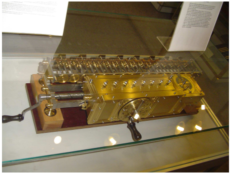
Freie Universität Berlin

Block Lecture, SS 2014

Eine (sehr kurze und sehr unvollständige) Geschichte der Logik

Anfänge der Formalen Logik — Pioniere

Aristoteles (384-322 BC)

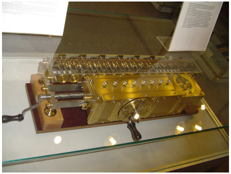


Rechenmaschinen

Leibniz (1646-1716)

Anfänge der Formalen Logik — Pioniere


Aristoteles (384-322 BC)


Rechenmaschinen

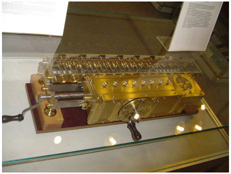

Leibniz (1646-1716)

Bsp.: Modus Barbara

Alle Rechtecke sind Vierecke	Alle A sind B
Alle Quadrate sind Rechtecke	Alle C sind A
Es folgt: Alle Quadrate sind Vierecke	Es folgt: Alle C sind B

Anfänge der Formalen Logik — Pioniere

Aristoteles (384-322 BC)



Rechenmaschinen

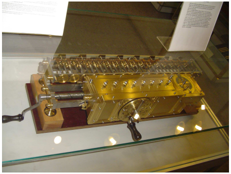
Leibniz (1646-1716)

Leibniz war (u.a.) auf der Suche nach einer *lingua characteristica* (Sprache in der das gesamte Wissen formal ausgedrückt werden konnte) und einem *calculus ratiocinator* (Kalkül zum allgemeinen Schließen).

Vision: Zwei streitende/argumentierende Philosophen sollten Streitfragen durch einfaches *rechnen* (Calculemus!) klären können. Dazu müssten sie sich lediglich auf eine Formalisierung des Problems in der lingua characteristica einigen und dann den calculus ratiocinator anwenden.

Anfänge der Formalen Logik — Pioniere

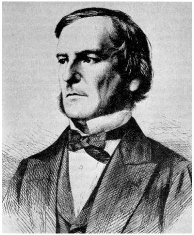
Aristoteles (384-322 BC)



Rechenmaschinen

Leibniz (1646-1716)

De Morgan (1806-1871)

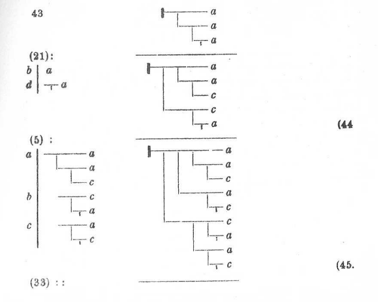


Boole (1815-1864)

Cantor (1845-1918)

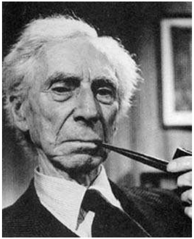
Anfänge der Formalen Logik — Jetzt wurde es spannend!

Gottlob Frege
(1848-1925)

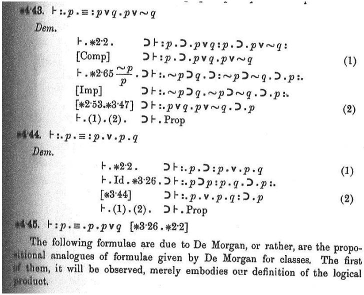


- Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
  - Prädikatenlogik (höherer Stufe) als formale Sprache
- Logizismus: Mathematik lässt sich auf die Logik zurückführen
- Grundlagen der Arithmetik (1884)
- Grundgesetze der Arithmetik (1893,1903)

Anfänge der Formalen Logik — Jetzt wurde es spannend!



Betrand Russell
(1872-1970)



*4·43. ⊢ :. p . ≡ : p ∨ q . p ∨ ∼q

Dem.

⊢ . *2·2 . ⊃ ⊢ : p . ⊃ . p ∨ q : p . ⊃ . p ∨ ∼q :
[Comp] ⊃ ⊢ : p . ⊃ . p ∨ q . p ∨ ∼q (1)
⊢ . *2·65 $\frac{\sim p}{p}$. ⊃ ⊢ :. ∼p ⊃ q . ⊃ : ∼p ⊃ ∼q . ⊃ . p :.
[Imp] ⊃ ⊢ :. ∼p ⊃ q . ∼p ⊃ ∼q . ⊃ . p :.
[*2·53.*3·47] ⊃ ⊢ :. p ∨ q . p ∨ ∼q . ⊃ . p (2)
⊢ . (1) . (2) . ⊃ ⊢ . Prop

*4·44. ⊢ :. p . ≡ : p . ∨ . p . q

Dem.

⊢ . *2·2 . ⊃ ⊢ :. p . ⊃ : p . ∨ . p . q (1)
⊢ . Id . *3·26 . ⊃ ⊢ :. p ⊃ p : p . q . ⊃ . p :.
[*3·44] ⊃ ⊢ :. p . ∨ . p . q : ⊃ . p (2)
⊢ . (1) . (2) . ⊃ ⊢ . Prop

*4·45. ⊢ : p . ≡ . p . p ∨ q [*3·26 . *2·2]

The following formulae are due to De Morgan, or rather, are the propositional analogues of formulae given by De Morgan for classes. The first of them, it will be observed, merely embodies our definition of the logical product.

- Findet Paradoxon in Frege's Prädikatenlogik (Russel's Paradox):

$$\text{sei } R = \{x | x \notin x\}\text{; es gilt } x \in R \Leftrightarrow x \notin R$$

- schlägt Lösung vor: Russel's Typentheorie
- (anderer Ausweg: Zermelo's Mengentheorie, Hilbert-Gruppe)
- Principia Mathematica (mit Whitehead, 1910, 1912, 1913)
  - verfolgt ähnliches Ziel wie Frege, vermeidet Paradoxien
  - Herleitung der Arithmetik aus der Logik, Basis für Mathematik

Anfänge der Formalen Logik — Jetzt wurde es spannend!

David Hilbert
(1862-1943)

Hilbert's twenty-three problems are:

Problem	Brief explanation
1st	The continuum hypothesis (that is, there is no set whose cardinality is strictly between that of the integers and that of the real numbers)
2nd	Prove that the axioms of arithmetic are consistent.
3rd	Given any two polyhedra of equal volume, is it always possible to cut the first into finitely many polyhedral pieces which can be reassembled to yield the second?
4th	Construct all metrics where lines are geodesics.

23 Probleme (1900)

- Einflussreichster Mathematiker seiner Zeit, breites Arbeitsspektrum
- Grundlagen der Geometrie (1899)
- Hilbert's Programm – Logische Fundierung der Mathematik
  - 1900–1917: Formuliert Programm; gewinnt Mitstreiter
  - 1917–1930: Vorlesungen mit Bernays und Behmann (1917-1921), Logik 1. Stufe, Arbeit am Programm (inkl. Widerspruchsfreiheit der Arithmetik), Lehrbuch Grundzüge der theoretischen Logik (1928, mit Ackermann)
  - nach 1931: Moderne Beweistheorie

Anfänge der Formalen Logik — Jetzt wurde es spannend!

Kurt Gödel (1906-1978)

- geboren 28.4.1906 in Brünn (Tschechien)
- kränklich, schmächtig, introvertiert
- Studium ab 1924 in Wien, Wiener Kreis
- 1933/34 erste Reisen nach Princeton, USA
- 1938 heiratet Adele Porkert (Kabarettänzerin)
- 1940 Flucht nach USA (über Russland/Japan)
- Professor in Princeton, Freund von Einstein
- Hungertod

- 1929/30 Dissertation: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls (Vollständigkeit der Logik 1. Stufe — Hilbert's Programm)
- 6. Sep. 1930: Vortrag in Königsberg: Unvollständigkeitssätze "Die Logik wird nie mehr dieselbe sein." (John von Neumann)
- 1931: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme I (Unvollständigkeitsätze)
- 1938: Wichtiger (negativer) Beitrag zur Beweisbarkeit der Kontinuumshypothese
- Weiter interessante Arbeiten — aber: *"I do not fit in this century!"*

Weitere Vorkenntnisse zur Vorlesung

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	
He is the son of chris	
All babies are cute.	
Question: Is Max cute?	

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X.\,(isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Logische Konnektive (weitere Konnektive: $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $=$)

Konstantensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole

Beispiel-Formalisierung in Logik Erster Stufe

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X.\,(isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive
Konstantensymbole (so viele wie wir benötigen)
Prädikaten- und Relationensymbole

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X.\ (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Logische Konnektive
Konstantensymbole
Prädikaten- und Relationensymbole (so viele wie wir benötigen)

$$\frac{\triangle \wedge \Box}{\triangle} \quad \frac{\triangle \wedge \Box}{\Box} \quad \frac{\triangle \quad \Box}{\triangle \wedge \Box} \qquad \frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)}$$

$$\frac{\forall X. \Box}{[t \to X]\Box} \quad \ldots \qquad \frac{\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}$$

$$\frac{\triangle \quad \triangle \Rightarrow \Box}{\Box} \quad \ldots \qquad \frac{(isBaby\ max) \qquad (isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}{(isCute\ max)}$$

Axiom (Axiomenschemata)

$\triangle \vee \neg\triangle$ $\qquad$ $(isBaby\ max) \vee \neg(isBaby\ max)$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen (1909-1945)

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of Chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})}{}$$

Freie Universität Berlin

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of Chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$$\frac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)}$$

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of Chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \land (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})}{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max})} \qquad \frac{\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)}{}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})$
He is the son of Chris	$(\mathit{isSonOf}\ \mathit{max}\ \mathit{chris})$
All babies are cute.	$\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)$
Question: Is Max cute?	Theorem: $(\mathit{isCute}\ \mathit{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \wedge (\mathit{isBoy}\ \mathit{max})}{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max})} \qquad \frac{\forall X. (\mathit{isBaby}\ X) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ X)}{(\mathit{isBaby}\ \mathit{max}) \Rightarrow (\mathit{isCute}\ \mathit{max})}$$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

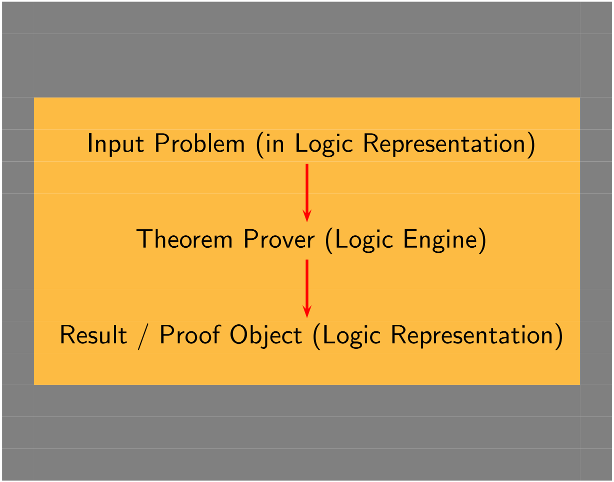
Natürliche Sprache	Formale Logik
Max is a baby boy.	$(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)$
He is the son of Chris	$(isSonOf\ max\ chris)$
All babies are cute.	$\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)$
Question: *Is Max cute?*	Theorem: $(isCute\ max)$

Formaler Beweis

$$\dfrac{\dfrac{(isBaby\ max) \wedge (isBoy\ max)}{(isBaby\ max)} \quad \dfrac{\forall X. (isBaby\ X) \Rightarrow (isCute\ X)}{(isBaby\ max) \Rightarrow (isCute\ max)}}{(isCute\ max)}$$

Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

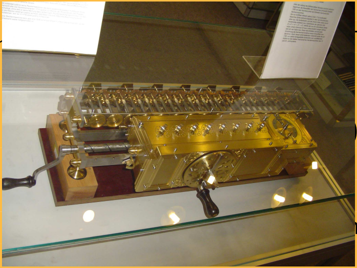


Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

Inpu tion)

)



Result ntation)

Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

Computational Linguistics

Original Problem (Natural Language / Mathural)

Input Problem (in Logic Representation)

$\downarrow$

Theorem Prover (Logic Engine)

$\downarrow$

Result / Proof Object (Logic Representation)

Human-oriented Proof (Natural Language / Mathural)

Automated Theorem Proving (ATP)

Artificial Intelligence

Computational Linguistics

Original Problem (Natural Language / Mathural)

↓

Input Problem (in Logic Representation)

↓

Theorem Prover (Logic Engine)

↓

Result / Proof Object (Logic Representation)

↓

Human-oriented Proof (Natural Language / Mathural)

Wichtige Begriffe in der Logik

- Ausdrucksstärke der Sprache (Expressivität)
- Kalkül
  - Axiome
  - Schlussregeln
- Korrektheit und Widerspruchsfreiheit/Konsistenz:
  Es gibt keine Formel $\triangle$, so dass $\triangle$ und $\neg\triangle$ ableitbar sind.
- Entscheidbarkeit vs. Unentscheidbarkeit
- Vollständigkeit

Ausdrucksstärke von Logiken versus Berechnungseigenschaften?

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \land isCold \\ \land & (itRains \land isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \land & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{array}$$

Ausdrucksstärke von Logiken versus Berechnungseigenschaften?

- Aussagenlogik

$$
\begin{array}{ll}
 & itRains \wedge isCold \\
\wedge & (itRains \wedge isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\
\Rightarrow & slipperyRoad
\end{array}
$$

- Logik erster Stufe

$$
\begin{array}{ll}
 & isHuman(sokrates) \\
\wedge & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\
\Rightarrow & isMortal(sokrates)
\end{array}
$$

- Logik höherer Stufe

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\
\Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x)
\end{array}
$$

entscheidbar

Ausdrucksstärke von Logiken versus Berechnungseigenschaften?

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & \mathit{itRains} \land \mathit{isCold} \\ \land & (\mathit{itRains} \land \mathit{isCold} \Rightarrow \mathit{slipperyRoad}) \\ \Rightarrow & \mathit{slipperyRoad} \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & \mathit{isHuman}(\mathit{sokrates}) \\ \land & (\forall x.\mathit{isHuman}(x) \Rightarrow \mathit{isMortal}(x)) \\ \Rightarrow & \mathit{isMortal}(\mathit{sokrates}) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F.\mathit{isSurjective}(F) \Leftrightarrow \forall y.\exists x.y = F(x)) \\ \Rightarrow & \mathit{isSurjective}(\lambda x.x) \end{array}$$

unentscheidbar, vollständig

Ausdrucksstärke von Logiken versus Berechnungseigenschaften?

- Aussagenlogik

$$\begin{array}{ll} & itRains \land isCold \\ \land & (itRains \land isCold \Rightarrow slipperyRoad) \\ \Rightarrow & slipperyRoad \end{array}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{array}{ll} & isHuman(sokrates) \\ \land & (\forall x. isHuman(x) \Rightarrow isMortal(x)) \\ \Rightarrow & isMortal(sokrates) \end{array}$$

- Logik höherer Stufe

$$\begin{array}{ll} & (\forall F. isSurjective(F) \Leftrightarrow \forall y. \exists x. y = F(x)) \\ \Rightarrow & isSurjective(\lambda x. x) \end{array}$$

unentscheidbar, unvollständig

The TPTP Problem (and System) Library
for Automated Theorem Proving

`www.tptp.org`