

First-Order Logic: Theory and Practice

Christoph Benz Müller

Freie Universität Berlin

Block Lecture, WS 2012, October 1-12, 2012

Sidetrack: Hornlogic

Syntax Aussagenlogik: $s, t ::= P \mid \neg s \mid s \vee t \mid s \wedge t \mid s \Rightarrow t \mid$
 $\perp \mid \top \mid s \wedge t \mid s \Rightarrow t \mid \perp \mid \top$



Syntax der Aussagenlogik (AL)

$s, t ::= P \mid \neg s \mid s \vee t \mid s \wedge t \mid s \Rightarrow t \mid \perp \mid \top \mid s \wedge t \mid s \Rightarrow t \mid \perp \mid \top$

Semantik

► Interpretationsfunktion

$I : AL \longrightarrow \{T, F\}$

- atomare Aussagen P :

wähle $I(P) \in \{T, F\}$

- $I(\neg s), I(s \vee t), I(s \wedge t), I(s \Rightarrow t), I(\perp), I(\top)$ festgelegt wie folgt

- $I(\neg s), I(s \vee t), I(s \wedge t), I(s \Rightarrow t), I(\perp), I(\top)$ festgelegt wie folgt

s	t	$\neg s$	$s \vee t$	$s \wedge t$	$s \Rightarrow t$	\perp	\top
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F	F	T

definiert als

$\neg s \vee t$

Definition Hornklausel:

(alternative Sichtweise)

$$P \vee \neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_n \quad \overbrace{\neg Q_1 \vee \dots \vee \neg Q_n}^{\text{Bedingungsteil } n \geq 0} \quad P \Leftarrow Q$$

max. ein positives Literal (Konklusion)

Es gibt drei Typen von Hornklauseln (Beispiele)

C

Fakt : ' C gilt '

$C \Leftarrow \top$

$A \vee \neg B \vee \neg D$

Regel : ' A gilt falls B und D gelten '

$A \Leftarrow B \wedge D$

$\neg B \vee \neg D$

Ziel : ' Gelten B und D ? '

$\perp \Leftarrow B \wedge D$

$A \vee C \vee \neg B \vee \neg D$

$A \vee C \Leftarrow B \wedge D$

~~$A \vee D \vee \neg B \vee \neg C$~~

verboten

~~$A \vee D \Leftarrow B \wedge C$~~

Definition Hornformel:

Hornformel = Konjunktionen von Hornklauseln

$$k \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} (P^1 \vee \neg Q_1^1 \vee \dots \vee \neg Q_n^1) \\ \wedge (P^2 \vee \neg Q_1^2 \vee \dots \vee \neg Q_n^2) \\ \dots \\ \wedge (P^k \vee \neg Q_1^k \vee \dots \vee \neg Q_n^k) \end{array} \right.$$

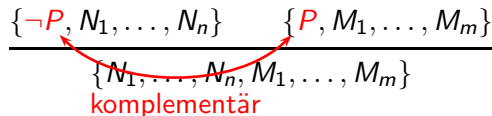
$$k \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} \{P^1, \neg Q_1^1, \dots, \neg Q_n^1\} \\ \wedge \{P^2, \neg Q_1^2, \dots, \neg Q_n^2\} \\ \dots \\ \wedge \{P^k, \neg Q_1^k, \dots, \neg Q_n^k\} \end{array} \right.$$

$$k \geq 1 \left\{ \begin{array}{l} \{P^1, \neg Q_1^1, \dots, \neg Q_n^1\} \\ \{P^2, \neg Q_1^2, \dots, \neg Q_n^2\} \\ \dots \end{array} \right\}$$

Definition Resolution:

$$\frac{\{\neg P, N_1, \dots, N_n\} \quad \{P, M_1, \dots, M_m\}}{\{N_1, \dots, N_n, M_1, \dots, M_m\}}$$

komplementär



Beispiele und (generelle) Beobachtungen:

<p>Ziel</p> <p>'Gelten A und D?'</p> $\frac{\{\neg A, \neg D\}}{\{\neg D, \neg B\}}$ <p style="text-align: center;">Ziel</p>	<p>Regel</p> <p>'A gilt falls B und D gelten'</p> $\frac{\{A, \neg B, \neg D\}}{\{\neg D, \neg B\}}$
--	--

'Gelten D und B?'

<p>Ziel</p> $\frac{\{\neg A, \neg D\}}{\{\neg A\}}$ <p style="text-align: center;">Ziel (oder leer)</p>	<p>Fakt</p> $\frac{\{D\}}{\{\neg A\}}$
---	--

Algorithmus: SLD-Resolution

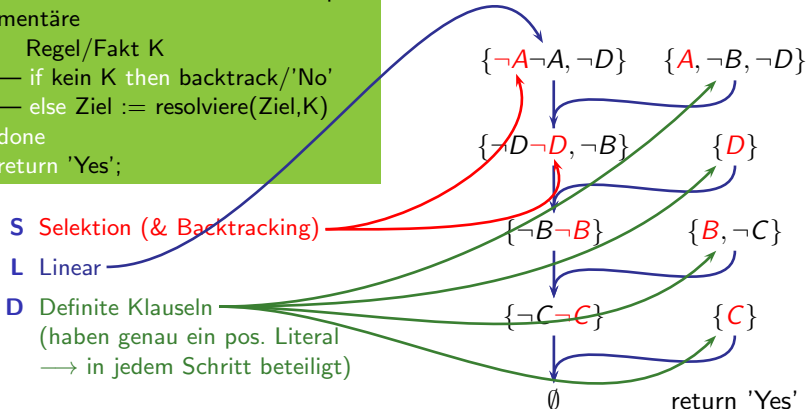
```

while Ziel  $\neq \emptyset$  do
  — wähle Literal L und komplementäre
    Regel/Fakt K
  — if kein K then backtrack/'No'
  — else Ziel := resolviere(Ziel, K)
done
return 'Yes';
    
```

Programm:

```

{C}
{D}
{B,  $\neg C$ }
{A,  $\neg B, \neg D$ }
{ $\neg A, \neg D$ }
    
```



- ▶ Hornlogik-Fragment der Prädikatenlogik
 - ▶ andere Algorithmen: Markierungsalgorithmus, Gentzenkalkül,
...
 - ▶ Vollständigkeit & Korrektheit der Verfahren
 - ▶ Komplexität der Verfahren

- ▶ Hornlogik-Fragment der Prädikatenlogik erster Stufe
 - ▶ ...
 - ▶ PROLOG
 - ▶ ...

- ▶ Hornlogik-Fragment der Logik höherer Stufe
 - ▶ ...
 - ▶ λ -PROLOG
 - ▶ ...