Sonderforschungsbereich 378
Ressourcenadaptive Kognitive Prozesse

Automatisches Beweisen in Logik höherer Stufe

Christoph Benzmüller

chris@ags.uni-sb.de

The ΩMEGA Group

http://www.ags.uni-sb.de/~chris

FB Informatik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Germany

Berlin, 8. Mai 1999

Motivation:
Formalisierung math. Schließens

Logik erster Stufe

- Vorteil: Semi-Entscheidbarkeit des Folgerungsbegriffs
- Nachteil: Ausdrucksschwäche

Ausweg

1. Mögl.: Axiomatisierung der Mengentheorie, z.B. ZF
   $\Longrightarrow$ unnatürlich; entgegen der mathematischen Praxis
2. Mögl.: Logik höherer Stufe

Motivation:
Formalisierung math. Schließens

Logik höherer Stufe

- Vorteil: Ausdruckstärke; natürliche Formalisierungen
- Nachteil: Unentscheidbarkeit des Folgerungsbegriffs

Ausweg

Abschwächung des Semantikbegriffs:

Standardsemantik $\Longrightarrow$ Henkin-Semantik

Ziel ist nun

Entwicklung und Realisierung Henkin-vollständiger Beweiskalküle

Übersicht zum Vortrag

1. Klassische Typtheorie & Standard- bzw. Henkin-Semantik
2. Traditionelle Beweisverfahren (basierend auf Resolution)
3. Probleme mit der Henkin-Vollständigkeit
4. Extensionale Resolution höherer Stufe
   (evtl. Paramodulation & RUE-Resolution)
5. Beweisprinzip der abstrakten Konsistenz

Klassische Typtheorie

- Typen: (i) $\{i,o\} \in T$ (ii) $\alpha,\beta \in T$, dann $\alpha \longrightarrow \beta \in T$
- Terme:
  - (i) $V_\alpha \subseteq \Lambda;\ \ V_\alpha\ Menge\ von\ Variablen\ (\alpha \in T)$
  - (ii) $C_\alpha \subseteq \Lambda;\ \ C_\alpha\ Menge\ von\ Konstanten (\alpha \in T)$

    Bedingungen: $\neg_{o\longrightarrow o} \in C_{o\longrightarrow o},\ \ \vee_{o\longrightarrow(o\longrightarrow o)} \in C_{o\longrightarrow(o\longrightarrow o)},$

    $\Pi_{(\alpha\longrightarrow o)\longrightarrow o} \in C_{(\alpha\longrightarrow o)\longrightarrow o}$ $(\alpha \in T)$
  - (iii) Applikationen: $\mathbf{A}_{\alpha\longrightarrow\beta}, \mathbf{B}_\alpha \in \Lambda,$ dann $(\mathbf{A}\ \mathbf{B})_\beta \in \Lambda$
  - (iii) Abstraktionen: $X_\alpha \in V_\alpha, \mathbf{A}_\beta \in \Lambda,$ dann $(\lambda X.\mathbf{A})_{\alpha\longrightarrow\beta} \in \Lambda$
- λ-Konversion / β-Normalform / $\beta\eta$-(Kopf-)Normalform:

$$\lambda X_\gamma.\mathbf{A} \longleftrightarrow^\alpha \lambda Y_\gamma.\mathbf{A}[Y/X]$$

$(\lambda X_\gamma.\mathbf{A})\ \mathbf{B}_\gamma \longrightarrow^\beta \mathbf{A}[\mathbf{B}/X]$ $\qquad$ $\lambda X.\mathbf{A}\ X \longrightarrow^\eta \mathbf{A},$ falls $X \notin Free(\mathbf{A})$

Standardsemantik

- Universum: Wähle: D_ι
  Festgelegt: $D_o = \{\bot, \top\}, \quad D_{\alpha\rightarrow\beta} = Funcs(D_\alpha, D_\beta)$
- Interpretation: Wähle: $I_\alpha : C_\alpha \longrightarrow D_\alpha$
  Festgelegt: $I(\neg_{o\rightarrow o})$ und $I(\vee_{o\rightarrow(o\rightarrow o)})$ wie üblich

  $I(\Pi_{(\alpha\rightarrow o)\rightarrow o})$ ist Prädikat $p \in D_{(\alpha\rightarrow o)\rightarrow o}$, so daß f¨ur jedes $q_{\alpha\rightarrow o} \in D_{\alpha\rightarrow o} : p\, q_{\alpha\rightarrow o} = \top$ gdw. q gilt f¨ur alle $a \in D_\alpha$
  $\Rightarrow \forall X_\alpha.\mathbf{A}_o$ wird kodiert als $\Pi\ (\lambda X_\alpha.\mathbf{A}_o)$
- Variablenbelegung: $\varphi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow D_\alpha$
- Interpretation von Termen: $I_\varphi : \Lambda_\alpha \longrightarrow D_\alpha$
  $I_\varphi(X) = \varphi(X), \quad I_\varphi(c) = I(c), \quad I_\varphi(\mathbf{A}\ \mathbf{B}) = I_\varphi(A)\ I_\varphi(B)$,
  $I_\varphi(\lambda X_\alpha.\mathbf{B}_\beta) = f \in D_{\alpha\rightarrow\beta}$, so daß $fa = I_{\varphi[a/X]}(\mathbf{B})$ für alle $a \in D_\alpha$
- Modell: $\mathcal{M} = (\mathcal{D} : \{D_\alpha\}, \mathcal{I} : \{I_\alpha\})$, Erfüllbarkeit und Gültigkeit wie üblich

Henkin-Semantik

- wie Standardsemantik, außer: $D_{\alpha\rightarrow\beta} \subseteq Functions(D_\alpha, D_\beta)$
- Bedingung aber: I_Φ is total (d.h., jeder Term hat eine Denotation)
- Es gilt:
  - Jedes Standardmodell ist ein Henkin-Modell
  - Es gibt weniger Henkin-Modelle als Standardmodelle
  - Gültigkeit in Henkin-Sem. $\Rightarrow$ Gültigkeit in Standardsem.
  - Erfüllbarkeit in Henkin-Sem. $\Leftarrow$ Erfüllbarkeit in Standardsem.

$\Rightarrow$ Gödel 1931: Es kann keine vollständigen Kalküle für die Standardsemantik geben

$\Rightarrow$ Henkin 1950: Henkin-Semantik erlaubt vollständige Kalküle

Eigenschaften der klassischen Typtheorie

- Komprehensionsprinzip ist eingebaut $(\exists F_{\alpha\to\beta}\centerdot\forall X_{\alpha}\centerdot(F\ X) = \mathbf{A}_{\beta})$
- Optional: Auswahlaxiom $(\exists F_{(\alpha\to o)\to\alpha}\centerdot\forall M_{\alpha\to o}\centerdot(\exists X_{\alpha}\centerdot M\ X) \Rightarrow M\ (F\ M))$ und "Descriptionoperator" ι
- Leibniz-Gleichheit denotiert intendierte Gleichheitsrelation (d.h. eine funktionale Kongruenzrelation)

$$\doteq^{\alpha} := \lambda X_{\alpha}\centerdot\lambda Y_{\alpha}\centerdot\forall P_{\alpha\to o}\centerdot PX \Rightarrow PY$$

d.h.: $a_{\alpha} \doteq^{\alpha} b_{\alpha}$ expandiert zu $\forall P_{\alpha\to o}\centerdot Pa \Rightarrow Pb$

$\Longrightarrow$ Gleichheit ist fest eingebaut (bei Standard- oder Henkin-Semantik)

aber . . . Mechanisierung ist sehr aufwendig

Resolution erster Stufe

- Initialisierung: Klauselnormalisierung
- Beweissuche: Resolution & Faktorisierung

$$\frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad [\mathbf{B}]^{\beta} \vee \mathbf{D} \quad \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}) \quad \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \{T, F\}}{\sigma(\mathbf{C} \vee \mathbf{D})} \; Res$$

$$\frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee [\mathbf{B}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad \sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{B}) \quad \alpha \in \{T, F\}}{\sigma([\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C})} \; Fac$$

- Nebenrechnungen: Unifikation erster Stufe (entscheidbar, unitär)

Klauselnormalisierung $\mathcal{CNF}$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A} \vee \mathbf{B}]^T}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}]^T \vee [\mathbf{B}]^T} \vee^T \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]^F}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}]^F} \vee_l^F \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}]^F}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{B}]^F} \vee_r^F$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\neg \mathbf{A}]^T}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}]^F} \neg^T \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\neg \mathbf{A}]^F}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}]^T} \neg^F \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\Pi^\alpha \mathbf{A}]^T \quad X_\alpha \text{ neue Variable}}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}\ X]^T} \Pi^T$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\Pi^\alpha \mathbf{A}]^F \quad \mathsf{s}_\alpha \text{ Skolem-Term}}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A}\ \mathsf{s}_\alpha]^F} \Pi^F$$

Andrews' Resolution höherer Stufe (1971)

- Initialisierung: keine
- Neu: Kalkülregeln für λ-Konversion & zusätzliche Disjunktions- und Simplifikationsregeln
- Neu: Klauselnormalisierung als Bestandteil des Kalküls
- Beweissuche: Resolution (Cut), Simplifikation (Faktorisierung identischer Literale)
- Rückschritt: Substitutionsregel (beliebige Instantiierung freier Variablen, d.h. Aufzählung des Herbrand-Universums)

Wichtigster Beitrag: Adaptation des Beweisprinzips der abstrakten Konsistenz

Ansatz von Jensen/Pietrowski (1972)

- Initialisierung: Skolemisierung, keine Normalisierung
- Axiome: Reduktion (Normalisierung) & Expansion
  z.B. $[P \Rightarrow Q]^T \vee [P]^T \qquad [P \Rightarrow Q]^T \vee [Q]^F \qquad \ldots$
- Beweissuche: (Hyper-)Resolution
- Nebenrechnungen: Unifikation bis Ordnung k

Wichtigster Beitrag: Unifikation höherer Stufe (bis Ordnung k)

Huet's Constraint Resolution (1972)

- Initial & nach vorzeitiger Unifikation: Klauselnormalisierung
- Beweissuche: Constraint Resolution/Faktorisierung

$$\frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad [\mathbf{B}]^{\beta} \vee \mathbf{D} \quad \alpha \neq \beta, \alpha \in \{T, F\}}{\mathbf{C} \vee \mathbf{D} \vee [\mathbf{A} \neq^{?} \mathbf{B}]}\ Res \qquad \frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee [\mathbf{B}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad \alpha \in \{T, F\}}{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \vee [\mathbf{A} \neq^{?} \mathbf{B}]}\ Fac$$

- Final: Unifikation/Prä-Unifikation (aber erlaubt: vorzeitige Unifikation)
- Zusätzlich: Splitting Regeln

z.B. $$\frac{[P\ \overline{\mathbf{T}^n}]^{T} \vee \mathbf{C} \quad \alpha \neq \beta, \alpha \in \{T, F\}}{[X_o]^{F}\mathbf{C} \vee [(P\ \overline{\mathbf{T}^n}) \neq^{?} (\neg X_o)]}\ Split^{T}_{\neg} \qquad \frac{[P\ \overline{\mathbf{T}^n}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad \alpha \neq \beta, \alpha \in \{T, F\}}{[X_o]^{T} \vee [Y_o]^{T}\mathbf{C} \vee [(P\ \overline{\mathbf{T}^n}) \neq^{?} (X_o \vee Y_o)]}\ Split^{T}_{\vee}$$

Wichtigster Beitrag: Constraint Idee, Prä-Unifikation

Andrews' Konnektionsmethode (1989)

- Initialisierung: keine
- Deshalb: Schrittweise Normalisierung im Kalkül
- Beweissuche: Bildung von Konnektionen in Matrix
- Nebenrechnungen: Prä-Unifikation nach Huet, Multiple "Matingsearch Prozessoren"
- Verbesserung: Huet's Splitting Regeln $\Longrightarrow$ Primitive Substitution

$$\frac{[Q_\gamma\ \overline{\mathbf{U}^k}]^\alpha \vee \mathbf{C} \quad \mathbf{P} \in \mathcal{GB}_\gamma^{\{\neg,\vee\}\cup\{\Pi^\beta|\beta\in\mathcal{T}^k\}}}{[Q_\gamma\ \overline{\mathbf{U}^k}]^\alpha \vee \mathbf{C} \vee [Q = \mathbf{P}]^F}\ Prim$$

Beispiel:

$P := \lambda\overline{X^n}.\neg(H\ \overline{X^n})$

$P := \lambda\overline{X^n}.(H^1\ \overline{X^n}) \vee (H^2\overline{X^n})$

Wichtigster Beitrag: Primitive Substitution, Matrix-Kalkül, Multiple Strategien

Weitere Ansätze

- Snyder's E-Unifikation (1990) in bisherigen Ansätzen
- Wolfram's Theorie-Resolution (1993)
- Kohlhase's sortierte Constraint Resolution (1994)
- Higher-Order Rewriting (sehr aktiv seit ca. 10 Jahren; z.B. Nipkow, Prehofer)
- Extensionale Resolution (Benzmüller & Kohlhase; 1997)
- Extensionale Paramodulation/RUE-Resolution höherer Stufe (Benzmüller; 1998)

Probleme

- Extensionalitätsaxiome werden benötigt in: Andrews' Resolution höherer Stufe (1971), Huet's Constraint Resolution (1972), Jensen & Pietrowski (1972), Wolfram (1993), Kohlhase (1994), TPS-System, HOL-System, ...
  - EXT-Func$^{\doteq}$: $\forall F_{\alpha\to\beta} \centerdot \forall G_{\alpha\to\beta} (\forall X_\beta \centerdot F\ X \doteq G\ X) \Rightarrow F \doteq G$

    expandiert: $\forall F_{\alpha\to\beta} \centerdot \forall G_{\alpha\to\beta} \centerdot (\forall X_\beta \centerdot \forall P_{\beta\to o} \centerdot P\ (F\ X) \Rightarrow P\ (G\ X) \Rightarrow \forall Q_{(\alpha\to\beta)\to o} \centerdot Q\ F \Rightarrow Q\ G$

    Klauseln: $\mathcal{C}_1 : [p_{\beta\to o}\ (F\ s_\beta)]^T \vee [Q\ F]^F \vee [Q\ G]^T, \mathcal{C}_2 : [p_{\beta\to o}\ (G\ s_\beta)]^T \vee [Q\ F]^F \vee [Q\ G]^T$
  - EXT-Bool$^{\doteq}$: $\forall A_o \centerdot \forall B_o \centerdot (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow A \doteq^o B$

    expandiert: $\forall A_o \centerdot \forall B_o \centerdot (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\forall Q_{o\to o} \centerdot Q\ A \Rightarrow Q\ B)$

    Klauseln: $\mathcal{C}_1 : [A]^F \vee [B]^F \vee [P\ A]^F \vee [P\ B]^T, \mathcal{C}_2 : [A]^T \vee [B]^T \vee [P\ A]^F \vee [P\ B]^T, \mathcal{C}_3 :$ $[A]^F \vee [B]^T \vee [p\ A]^T, \mathcal{C}_4 : [A]^F \vee [B]^T \vee [p\ B]^F, \mathcal{C}_5 : [A]^T \vee [B]^F \vee [p\ A]^T, \mathcal{C}_6 : [A]^T \vee [B]^F \vee [p\ B]^F$

Extensionale Resolution $\mathcal{ER}$

Constraint Resolution

$$\frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad [\mathbf{B}]^{\beta} \vee \mathbf{D} \quad \alpha \neq \beta}{\mathbf{C} \vee \mathbf{D} \vee [\mathbf{A} = \mathbf{B}]^{F}}\ Res \qquad \frac{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee [\mathbf{B}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad \alpha \in \{T, F\}}{[\mathbf{A}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \vee [\mathbf{A} = \mathbf{B}]^{F}}\ Fac$$

$$\frac{[Q_{\gamma}\ \overline{\mathbf{U}^{k}}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \quad \mathbf{P} \in \mathcal{GB}_{\gamma}^{\{\neg,\vee\}\cup\{\Pi^{\beta} \mid \beta \in \mathcal{T}^{k}\}}}{[Q_{\gamma}\ \overline{\mathbf{U}^{k}}]^{\alpha} \vee \mathbf{C} \vee [Q = \mathbf{P}]^{F}}\ Prim$$

Achtung: Resolution/Faktorisierung auf Unifikations-Constraints nicht erlaubt

Primitive Substitution: $\exists P_{\alpha\to o} \centerdot P\ a_{\alpha} \quad \xrightarrow{CNF} \quad \mathcal{C}_1 : [P\ a]^{F}$

$$Prim(\mathcal{C}_1, [\lambda X_{\alpha} \centerdot \neg(P' X)/P]) : \qquad \mathcal{C}_2 : [P' a]^{T}$$

Extensionale Resolution $\mathcal{ER}$ – Forts.

Prä-Unifikation höherer Stufe

$$\frac{\mathbf{C} \vee [red\mathbf{A}_{\alpha\to\beta}\ \mathbf{C}_\alpha = green\mathbf{B}_{\alpha\to\beta}\ \mathbf{D}_\alpha]^F}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A} = \mathbf{B}]^F \vee [\mathbf{C} = \mathbf{D}]^F}\ Dec$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{A} = \mathbf{A}]^F}{\mathbf{C}}\ Triv \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [F_\gamma\}\overline{\mathbf{U}^n} = h\ \overline{\mathbf{V}^m}]^F \quad \mathbf{G} \in \mathcal{GB}^h_\gamma}{\mathbf{C} \vee [F = \mathbf{G}]^F \vee [F\ \overline{\mathbf{U}^n} = h\ \overline{\mathbf{V}^m}]^F}\ FlexRigid$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [(\lambda X_\alpha.\mathbf{M}_\beta) = \mathbf{N}_{\alpha\to\beta}]^F}{\mathbf{C} \vee [(\lambda X_\alpha.\mathbf{M})\ s = \mathbf{N}\ s]^F}\ Func_1 \quad \frac{\mathbf{C} \vee [(\lambda X_\alpha.\mathbf{M}_\beta) = (\lambda Y_\alpha.\mathbf{N}_\beta)]^F}{\mathbf{C} \vee [(\lambda X_\alpha.\mathbf{M})\ s = (\lambda X_\alpha.\mathbf{N})\ s]^F}\ Func_2$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [X = \mathbf{A}]^F \quad X \notin Free(\mathbf{A})}{(\mathbf{C}[\mathbf{A}/X])}\ Subst \qquad \frac{\mathcal{D} \quad \mathcal{C} \in \mathcal{CNF}(\mathcal{D})}{\mathcal{C}}\ Cnf$$

Extensionale Resolution $\mathcal{ER}$ – Forts.

Extensionalität: Rekursive Aufrufe an die Beweissuche aus der Unifikation

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_o = \mathbf{N}_o]^F}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_o \Leftrightarrow \mathbf{N}_o]^F}\ Equiv \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_\alpha = \mathbf{N}_\alpha]^F}{\mathbf{C} \vee [\forall P_{\alpha\to o^{\blacksquare}} P\ M \Rightarrow P\ N]^F}\ Leib$$

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_{\alpha\to\beta} = \mathbf{N}_{\alpha\to\beta}]^F \quad s_\alpha \text{ Skolem term for this clause}}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}\ s = \mathbf{N}\ s]^F}\ Func$$

- Vermutung: Regel *Leib* kann auf Typ ι beschränkt werden

$\Rightarrow$ Erster Henkin-vollständiger Kalkül der zusätzliche axiome im Suchraum vermeidet (CADE-15)

$\Rightarrow$ Unterschied zu Huet (1972): frühzeitige Unifikation ist essentiell

Beispiel: $(\lambda X_\alpha \blacksquare auto_{\alpha\to o}\ X \wedge klein_{\alpha\to o}\ X) = (\lambda X_\alpha \blacksquare klein\ X \wedge auto\ X)$

$$\forall P_{(\alpha\to o)\to o} \blacksquare P\ (\lambda X_\alpha \blacksquare auto_{\alpha\to o}\ X \wedge klein_{\alpha\to o}\ X) \Rightarrow P\ (\lambda X_\alpha \blacksquare klein\ X \wedge auto\ X)$$

c1: $\boxed{[p\ (\lambda X \blacksquare auto\ X \wedge klein\ X]^T}$ *c2:* $\boxed{[p\ (\lambda X \blacksquare klein\ X \wedge auto\ X]^F}$

c3: $\boxed{[(p\ (\lambda X \blacksquare auto\ X \wedge klein\ X)) = (p\ (\lambda X \blacksquare klein\ X \wedge auto\ X))]^F}$

c4: $\boxed{[(\lambda X \blacksquare auto\ X \wedge klein\ X) = (\lambda X \blacksquare klein\ X \wedge auto\ X)]^F}$

c5: $\boxed{[(auto\ s \wedge klein\ s) = (klein\ s \wedge auto\ s)]^F}$

c6: $\boxed{[(auto\ s \wedge klein\ s) \equiv (klein\ s \wedge auto\ s)]^F}$

c7: $\boxed{[auto\ s]^T \vee [klein\ s]^T}$ *c8:* $\boxed{[auto\ s]^T}$ *c9:* $\boxed{[klein\ s]^T}$ *c10:* $\boxed{[auto\ s]^F \vee [klein\ s]^F}$

Mechanisierung primitiver Gleichheit

- Warum: Leibniz Gleichheit führt viele flexible Köpfe in Suchraum ein (Primitive Substitution)

$\Rightarrow$ Evtl. verbessert primitive Gleichheit die Möglichkeiten zur Mechanisierung

- Definition basierend auf Reflexivitätsprinzip:
  $\stackrel{..}{=}^{\alpha} \;:= \lambda X_\alpha \blacksquare \lambda Y_\alpha \blacksquare \forall Q_{\alpha\to\alpha\to o} \blacksquare (\forall Z_\alpha \blacksquare (Q\ Z\ Z)) \Rightarrow (Q\ X\ Y)$

- Modifizierte Leibniz Gleichheit:
  $\stackrel{...}{=}^{\alpha} \;:= \lambda X_\alpha \blacksquare \lambda Y_\alpha \blacksquare \forall P_{\alpha\to o} \blacksquare ((a_o \vee \neg\, a_o) \wedge P\ X) \Rightarrow ((b_o \vee \neg\, b_o) \wedge P\ Y)$

$\Rightarrow$ Es ist nicht entscheidbar, ob Problem definierte Gleichungen enthält

$\Rightarrow$ Ein Henkin-vollständiger Kalkül muß stets auch die definierte Gleichheit behandeln, unabhängig von einer primitiven Gleichheitsbehandlung

Extensionale Paramodulation EP

$$\frac{[\mathbf{A}[\mathbf{T}_\beta]]^\alpha \vee C \quad [\mathbf{L} =^\beta \mathbf{R}]^T \vee D}{[\mathbf{A}[\mathbf{R}]]^\alpha \vee C \vee D \vee [\mathbf{T} =^\beta \mathbf{L}]^F}\ Para$$

$$\frac{[\mathbf{A}]^\alpha \vee C \quad [\mathbf{L} =^\beta \mathbf{R}]^T \vee D}{[P_{\alpha\to o}\ \mathbf{R}]^\alpha \vee C \vee D \vee [\mathbf{A} =^o P_{\beta\to o}\ \mathbf{L}]^F}\ Para'$$

- Negative Gleichungsliterale repräsentieren Unifikations-Constraints
- Resolution auf Unifikations-Constraints ist nicht erlaubt

$$\frac{[p\ (f\ (f\ a))]^T \quad [f = g]^T}{[p\ (f\ (g\ a))]^T}\ Para, Uni$$

$$\frac{[p\ (f\ (f\ a))]^T \quad [f = g]^T}{[p\ (g\ (f\ a))]^T}\ Para, Uni$$

$$\cfrac{\cfrac{[p\ (f\ (f\ a))]^T \quad [f = g]^T}{[P\ g]^T \vee [(P\ f) = (p\ (f\ (f\ a)))]^F}\ Para'}{\begin{array}{ll} [p\ (f\ (f\ a))]^T & with\ [\lambda X_\blacksquare (p\ (f\ (f\ a)))/P] \\ [p\ (f\ (g\ a))]^T & with\ [\lambda X_\blacksquare (p\ (f\ (X\ a)))/P] \\ [p\ (g\ (f\ a))]^T & with\ [\lambda X_\blacksquare (p\ (X\ (f\ a)))/P] \\ [p\ (g\ (g\ a))]^T & with\ [\lambda X_\blacksquare (p\ (X\ (X\ a)))/P] \end{array}}\ UNI$$

Extensionale Paramodulation EP – Forts.

- In erster Stufe Reflexivitätsregel notwendig $\longrightarrow$ hier eingebaut in UNI

$$\frac{[(fX) = (fa)]^F}{\Box}\ Ref \qquad\qquad \frac{[(fX) = (fa)]^F}{\Box}\ UNI$$

- Beispiel:

$$\mathcal{C}_1 : [\overbrace{nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota \blacksquare ((auto\ X \wedge klein\ X) \wedge kippt\ X))}^{\{X | auto\ X \wedge klein\ X \wedge kippt\ X\} \in nicht\text{-}leer_{(\iota \to o) \to o}}]^T \qquad \mathcal{C}_2 : [\ \overbrace{auto\ X \wedge klein\ X = klw\ X}^{\forall X_\iota \blacksquare (auto\ X \wedge klein\ X) = klw\ X}\ ]^T$$

To show: $\mathcal{C}_3 : [\underbrace{nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota \blacksquare klw\ X \wedge kippt\ X)}_{\{X | klw\ X \wedge kippt\ X\} \in nicht\text{-}leer}]^F$

- Typische Widerlegung basierend auf Paramodulation/Termersetzung:

$$Para(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2), UNI : \quad \mathcal{C}_4 : [nicht\text{-}leer\ (\lambda X \blacksquare (klw\ X \wedge kippt\ X))]^T$$

$$Res(\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_3), UNI : \quad \Box$$

Problem mit positiven Gleichheitsliteralen

- Einzelne positive Gleichheitsliterale können widersprüchlich sein

$$[\mathbf{A}_o = \neg \mathbf{A}_o]^T \qquad [\overbrace{(\lambda X \centerdot klein\ X) = (\lambda X \centerdot \neg(klein\ X))}^{\{X|klein\ X\}=\overline{\{X|klein\ X\}}}]^T$$

- Zusätzliche Extensionalitätsregeln benötigt

$$\frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_o {=} \mathbf{N}_o]^T}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_o {\Leftrightarrow} \mathbf{N}_o]^T}\ Equiv' \qquad \frac{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}_{\alpha\to\beta} = \mathbf{N}_{\alpha\to\beta}]^T \quad X \text{ new}}{\mathbf{C} \vee [\mathbf{M}\ X = \mathbf{N}\ X]^T}\ Func'$$

- Neue Regeln verstärken den differenzreduzierenden Charakter des Kalküls

- Henkin-Vollständigkeit ohne zusätzliche Axiome (bewiesen bisher nur mit zusätzlicher FlexFlex-Regel)

Extensionale Paramodulation EP – Forts.

- Geringfügig modifiziertes Problem: keine Termersetzung möglich!

$\mathcal{C}_1' : [nicht\text{-}leer(\lambda X_\iota\blacksquare((auto\ X \wedge kippt\ X) \wedge klein\ X))]^T \qquad \mathcal{C}2_2 : [(auto\ X \wedge klein\ X) = klw\ X]^T$

Zu Zeigen: $\mathcal{C}_3 : [nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota\blacksquare klw\ X \wedge kippt\ X)]^F$

$Para(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2) : \quad \mathcal{C}_4 : [nicht\text{-}leer\ (\lambda X\blacksquare(klw\ X \wedge klein\ X))]^T \vee [(auto\ X \wedge klein\ X) = (auto\ X \wedge kippt\ X)]^F$

$\ldots$

Anstelle von Termersetzung verwende Differenzreduktion

$$
\begin{array}{ll}
Res(\mathcal{C}_1', \mathcal{C}_3) : & \mathcal{C}_4 : [(nicht\text{-}leer(\lambda X_\iota\blacksquare((auto\ X \wedge kippt\ X) \wedge klein\ X))) = \\
 & \quad (nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota\blacksquare klw\ X \wedge kippt\ X))]^F \\
Dec(\mathcal{C}_4), Func, Equiv : & \mathcal{C}_5 : [((auto\ s \wedge kippt\ s) \wedge klein\ s) \equiv (klw\ s \wedge kippt\ s)]^F \\
Equiv'(\mathcal{C}_2) : & \mathcal{C}_6 : [(auto\ X \wedge klein\ X) \equiv klw\ X]^T \\
CNF(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) : & \ldots \qquad \Box
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Unvermeidbarer Mix von Termersetzung & Differenzreduktion

Extensionale RUE-Resolution ERUE

- Motivation: Kalkül für reine Differenzreduktion
- Extensionale RUE-Resolution:
  - Ersetze Paramodulationsregel ...
  - durch Resolution und Faktorisierung auf Unifikations-Constraints

- $\mathcal{C}_1 : [\textit{nicht-leer}\ (\lambda X_\iota \blacksquare ((auto\ X \land klein\ X) \land kippt\ X))]^T \qquad \mathcal{C}_2 : [(auto\ X \land klein\ X) = klw\ X]^T$

$$\mathcal{C}_3 : [\textit{nicht-leer}\ (\lambda X_\iota \blacksquare klw\ X \land kippt\ X)]^F$$

$$\begin{array}{ll} Res(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3), Dec, Func : & \mathcal{C}_4 : [((auto\ s \land klein\ s) \land kippt\ s) = (klw\ s \land kippt\ s)]^F \\ Dec(\mathcal{C}_4), Triv : & \mathcal{C}_5 : [(auto\ s \land klein\ s) = klw\ s]^F \\ Res(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_2), UNI : & \ldots\ \Box \end{array}$$

Extensionale RUE-Resolution ERUE

- Geringfügig modifiziertes Beispiel

- $\mathcal{C}_1 : [nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota\blacksquare((auto\ X \wedge kippt\ X) \wedge klein\ X))]^T \qquad \mathcal{C}_2 : [(auto\ X \wedge klein\ X) = klw\ X]^T$

$$\mathcal{C}_3 : [nicht\text{-}leer\ (\lambda X_\iota\blacksquare klw\ X \wedge kippt\ X)]^F$$

$$\begin{array}{ll}
Res(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3), Dec, Func : & \mathcal{C}_4 : [((auto\ s \wedge kippt\ s) \wedge klein\ s) = (klw\ s \wedge kippt\ s)]^F \\
Equiv(\mathcal{C}_4) : & \mathcal{C}_5 : [((auto\ s \wedge kippt\ s) \wedge klein\ s) \equiv (klw\ s \wedge kippt\ s)]^F \\
Equiv'(\mathcal{C}_2) : & \mathcal{C}_6 : [(auto\ X \wedge klein\ X) \equiv klw\ X]^T \\
CNF(\mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6) : & \ldots\ \square
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Reine Differenzreduktion besser handhabbar als gemischter Ansatz?

- Henkin-Vollständigkeit ohne zusätzliche Axiome
  (bewiesen bisher nur mit zusätzlicher FlexFlex-Regel)

Zusammenfassung

- Übersicht zur Entwicklung des automatischen Beweisens in Logik höherer Stufe; inbesondere eigene Kalküle $\mathcal{ER}$, $\mathcal{EP}$ und $\mathcal{ERUE}$
- Implementierung LEO
- Vielversprechende Experimente
- Adaptation von Smullyan's / Andrews' Beweisprinzip der abstrakten Konsistenz hinsichtlich der Henkin-Semantik

Higher-Order Abstract Consistency

Definition 0.1 (Properties for Abstract Consistency Classes). Let Γ_Σ be a class of sets of Σ-sentences.

∇_c If $\mathbf{A}$ is atomic, then $\mathbf{A} \notin \Phi$ or $\neg\mathbf{A} \notin \Phi$.

$\nabla_\neg$ If $\neg\neg\mathbf{A} \in \Phi$, then $\Phi * \mathbf{A} \in \Gamma_\Sigma$.

∇_β If $\mathbf{A} \in \Phi$ and $\mathbf{B}$ is the β-normal form of $\mathbf{A}$, then $\mathbf{B} * \Phi \in \Gamma_\Sigma$.

$\nabla_\mathfrak{f}$ If $\mathbf{A} \in \Phi$ and $\mathbf{B}$ is the $\beta\eta$-normal form of $\mathbf{A}$, then $\mathbf{B} * \Phi \in \Gamma_\Sigma$.

$\nabla_\vee$ If $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} \in \Phi$, then $\Phi * \mathbf{A} \in \Gamma_\Sigma$ or $\Phi * \mathbf{B} \in \Gamma_\Sigma$.

$\nabla_\wedge$ If $\neg(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \in \Phi$, then $\Phi \cup \{\neg\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}\} \in \Gamma_\Sigma$.

$\nabla_\forall$ If $\Pi^\alpha \mathbf{F} \in \Phi$, then $\Phi * \mathbf{F}\mathbf{W} \in \Gamma_\Sigma$ for each $\mathbf{W} \in$ *cwff*$_\alpha(\Sigma)$.

$\nabla_\exists$ If $\neg\Pi^\alpha \mathbf{F} \in \Phi$, then $\Phi * \neg(\mathbf{F}w) \in \Gamma_\Sigma$ for any constant $w \in \Sigma_\alpha$, which does not occur in Φ.

$\nabla_\mathfrak{b}$ If $\neg(\mathbf{A} \doteq^o \mathbf{B}) \in \Phi$, then $\Phi \cup \{\mathbf{A}, \neg\mathbf{B}\} \in \Gamma_\Sigma$ or $\Phi \cup \{\neg\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \in \Gamma_\Sigma$.

$\nabla_\mathfrak{q}$ If $\neg(\mathbf{F} \doteq^{\alpha\to\beta} \mathbf{G}) \in \Phi$, then $\Phi * \neg(\mathbf{F}w \doteq^\beta \mathbf{G}w) \in \Gamma_\Sigma$ for any constant $w \in \Sigma_\alpha$, which does not occur in Φ.

$\nabla_\mathfrak{e}$ **(r)** $\neg(\mathbf{A} =^\alpha \mathbf{A}) \notin \Phi$

(s) if $\mathbf{F}[\mathbf{A}]_p \in \Phi$ and $\mathbf{A} = \mathbf{B} \in \Phi$, then $\Phi * \mathbf{F}[\mathbf{B}]_p \in \Gamma_\Sigma$

Higher-Order Abstract Consistency