IM 更新过程下有限规则网络中公共品博弈的固定概率

陈泊帆 1900011030

摘要：本文主要讨论了在 IM 更新过程下，有限规则网络的公共品博弈的合作策略的固定概率。首先，本文简单地介绍了网络博弈发展的现有研究成果。接着，本文介绍了本文所研究的规则网络上公共品博弈的模型。然后，本文引入了 IM 过程作为博弈演化的方式，利用随机微分方程的方法解出了在本文论述的模型下公共品博弈的固定概率的表达式。最后，本文对所得出的结果进行直观的解释并与前人的类似论文对比讨论。

关键词：固定概率/有限规则网络/公共品博弈/IM 更新过程

目录

一．引言

关于博弈演化的讨论一直是群体网络研究的热点话题。近年来，Nowak M.A.，Sasaki A.，Taylor C.，Fudenberg D. (2004)[1] 等研究者把前人对于无限个体的博弈演化的研究进行扩展，建立了有限 N 个体下博弈演化的模型，并引入了有限演化稳定策略和博弈的固定概率。Ohtsuki H.，Hauert C.，Lieberman E.，Nowak M.A. (2006) [2] 等研究者在有限 N 个体博弈的基础上引入了规则的网络结构，并给出了在此结构下博弈的固定概率表达式。Allen B.，Lippner G.，Chen Y.-T.，Fotouhi B.，Momeni N. （2017）[3]等研究者进一步放松了前人研究中对规则网络的要求，引入了节点具有不同的度并带有不同权重的较为任意的网络结构，并推导出了固定概率的表达式。

本文的框架建立在 Ohtsuki, H. 论文[2]的基础上，希望在节点具有相同的度和权重的规则网络下，利用 IM 更新规则讨论多个体公共品博弈的固定概率。

二． 网络上的公共品博弈建模

公共品博弈指的是一种多人参与的博弈类型。假设参与博弈的人数为N，其中有i个人选择了合作策略 C，$N-i$个人选择了不合作的策略 D。

对于选择了合作策略 C 的人，他们每个人在这次博弈中所获得的收益是

$$P_C(i) = i/N * b - c$$

对于选择了背叛策略 D 的人，他们每个人在这次博弈中所获得的收益是

$$P_D(i) = i/N * b$$

可以看出$P_c(i) < P_D(i)$，所以如果只存在单次博弈且没有网络结构，每个人都将选择背叛的最佳策略。

但是，如果在公共品博弈的基础上增加一定的网络结构，结果可能有所不同。我们定义在度为k的有限规则网络上进行公共品博弈的规则如下：每个节点都作为组织者，组织和其所连的k个节点和自己进行一次公共品博弈。所以在度为k的网络下，每个节点都将进行自己组织的和连接节点组织的总共$k+1$次博弈，每次博弈参加的人数也应当是$k+1$人，如下图。

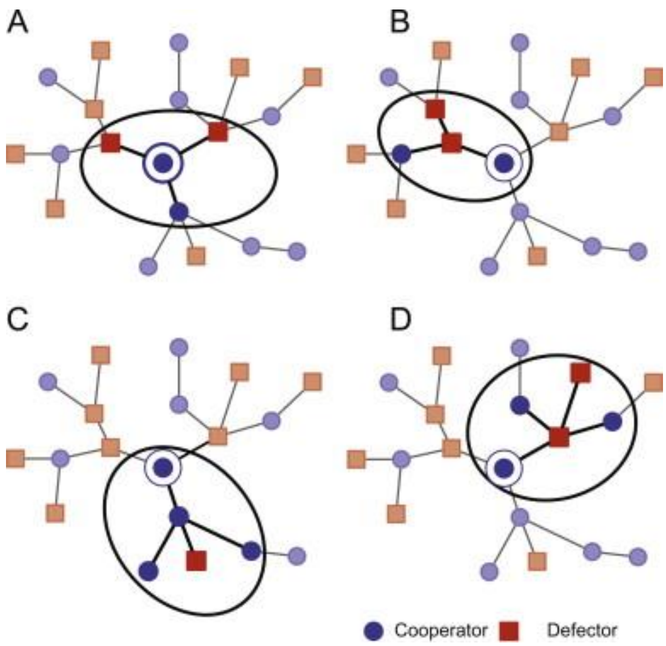

图 1 单个节点参加公共品博弈示意图[4]

此时

$$P_C(i) = i/(k+1) * b - c$$

$$P_D(i) = i/(k+1) * b$$

本文我们在这个博弈收益的假设中增加$b < (k+1)c$的条件，因为如果$b > (k+1)c$网络上博弈的个体就会发现，只要自己采用合作策略就一定会对自己形成更高的收益，就没有讨论的必要了。

我们认为这$k+1$次博弈的总收益为每个节点在一个状态下的博弈收益π，每个节点进行选择的适应度f可以表示成

$$f = (1-w) + w * \pi$$

其中w代表了博弈对节点演化的影响程度。同时本文我们认为博弈的结果对演化是一种弱选择作用，即$w << 1$。

三． 网络上公共品博弈的固定概率

3.1 记号和网络状态的表示

我们在度为k节点数为N的有限规则网络下建立我们的模型。我们在网络中用p_C代表采用合作策略的 C 节点的比例，p_D代表采用背叛策略的 D 节点的比例。$q_{X|Y}$代表在已知一个采用了 Y 策略节点的前提下其邻居采用 X 策略的可能性，p_{XY}代表连接 XY 两个策略的节点的边占所有边的比例。

对于一个网络结构来说，由于描述网络的各个变量之间存在如下关系，因此我们可以仅仅通过p_C和$q_{C|C}$两个变量来描述整个网络的演化过程中的状态。

$$
\begin{aligned}
p_C + p_D &= 1 \\
q_{C|X} + q_{D|X} &= 1 \\
p_{XY} &= q_{X|Y} \cdot p_Y \\
p_{CD} &= p_{DC}
\end{aligned}
$$

3.2 给定状态下各节点公共品博弈下的适应度

给定了网络的状态后，我们可以描述每个节点的适应度。首先我们需要选择我们在这一次状态下关心的有可能发生状态转移的节点。

假设我们先选择了一个 D 节点。我们设这个 D 节点周围连接着k_C个 C 节点和k_D个 D 节点。接下来我们将分别讨论这关心的 D 节点和周围的 D 节点和 C 节点进行公共品博弈的收益情况。

a. 关注的 D 节点的收益$\boldsymbol{\pi_0^D}$

对于自己（D 节点）组织的博弈来说，旁边存在k_C个 C 节点和k_D个 D 节点，所获得的收益为

$$F_o = P_D(k_C)$$

对于旁边 C 节点组织的博弈来说，其相邻$(k-1) * q_{C|C}$个 C 节点，所获得的收益为

$$F_C = P_D\big(1 + (k-1) * q_{C|C}\big)$$

对于旁边 D 节点组织的博弈来说，其相邻$(k-1) * q_{C|D}$个 C 节点，所获得的收益为

$$F_D = P_D\Big((k-1) * q_{C|D}\Big)$$

综上选定的 D 节点在此状态下博弈的总收益为

$$\pi_0^D = F_o + k_C * F_C + k_D * F_D$$

代入得

$$\pi_0^D=\frac{b}{k+1}\Big[k_C+k_C\times\big(1+(k-1)q_{C|C}\big)+k_D\times\Big((k-1)q_{C|D}\Big)\Big]$$

b. 关注的 D 节点相邻的 C 节点的收益$\boldsymbol{\pi_C^D}$

对于这个 D 节点旁边的 C 节点来说，我们简化起见认为它旁边有一个原本关心的 D 节点，$(k-1)*q_{C|C}$个 C 节点，$(k-1)*q_{D|C}$个其他 D 节点。这k个相邻节点和自己都将组织公共品博弈。

对于自己（C 节点）组织的博弈来说，所获得的收益为

$$F_o=P_C\big(1+(k-1)*q_{C|C}\big)$$

对于原本关心的 D 节点组织的博弈来说，所获得的收益为

$$F_X=P_C(k_C)$$

对于这个 C 节点旁边的 C 节点组织的博弈，我们认为它相邻$(k-1)*q_{C|C}+1$个 C 节点，还有自己也是 C 节点，因此博弈所获得的收益为

$$F_C=P_C\big(2+(k-1)*q_{C|C}\big)$$

对于这个 C 节点旁边的 D 节点组织的博弈，我们认为它相邻$(k-1)*q_{C|D}+1$个 C 节点，因此博弈所获得的收益为

$$F_D=P_C\big(1+(k-1)*q_{C|D}\big)$$

综上，选定的 D 节点旁边的 C 节点$k+1$次公共品博弈的总收益为

$$\pi_C^D=F_o+F_X+(k-1)*q_{C|C}*F_C+(k-1)*q_{D|C}*F_D$$

代入得

$$\pi_C^D=\frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|C}\big[3+(k-1)q_{\mathrm{C|C}}\big]+1+k_C \\ +(k-1)q_{D|C}[1+(k-1)q_{C|D}]\Big]-(k+1)*c$$

c. 关注的 D 节点相邻的 D 节点的收益π_D^D

对于这个 D 节点旁边的 D 节点来说，我们简化起见认为它旁边有一个原本关心的 D 节点，$(k-1)*q_{C|D}$个 C 节点，$(k-1)*q_{D|D}$个其他 D 节点。这k个相邻节点和自己都将组织公共品博弈。

对于自己（D 节点）组织的博弈来说，所获得的收益为

$$F_o = P_D\left((k-1)*q_{C|D}\right)$$

对于原本关心的 D 节点组织的博弈来说，所获得的收益为

$$F_X = P_D(k_C)$$

对于这个 D 节点旁边的 C 节点组织的博弈，我们认为它相邻$(k-1)*q_{C|C}$个 C 节点，还有自己也是 C 节点，因此博弈所获得的收益为

$$F_C = P_D\left(1+(k-1)*q_{C|C}\right)$$

对于这个 D 节点旁边的 D 节点组织的博弈，我们认为它相邻$(k-1)*q_{C|D}$个 C 节点，因此博弈所获得的收益为

$$F_D = P_D\left((k-1)*q_{C|D}\right)$$

综上，选定的 D 节点旁边的 D 节点$k+1$次公共品博弈的总收益为

$$\pi_D^D = F_o + F_X + (k-1)*q_{C|D}*F_C + (k-1)*q_{D|D}*F_D$$

代入得

$$\pi_D^D = \frac{b}{k+1}\left[(k-1)q_{C|D}\left[2+(k-1)q_{\mathrm{C|C}}\right] + k_C + (k-1)^2 * q_{D|D}q_{C|D}\right]$$

同理，当我们选定的节点是 C 节点时，也可以求出把 C 节点作为关注节点的自己的收益π_0^C、邻居 C 节点的收益π_C^C、邻居 D 节点的收

益π_D^C，如下：

$$\pi_0^C = \frac{b}{k+1}\Big[k_C + 1 + k_C \times \big(2 + (k-1)q_{C|C}\big) + k_D \times \big(1 + (k-1)q_{C|D}\big)\Big] - (k+1) * c$$

$$\pi_C^C = \frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|C} + 2 + 1 + k_C + (k-1)q_{C|C} * (2 + (k-1)q_{C|C}) + (k-1)q_{D|C}[1 + (k-1)q_{C|D}]\Big] - (k+1) * c$$

$$\pi_D^C = \frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|D} + 1 + 1 + k_C + (k-1)q_{C|D} * (1 + (k-1)q_{C|C}) + (k-1)q_{D|D}[(k-1)q_{C|D}]\Big]$$

3.3 状态更新的 IM 过程

我们利用 IM 更新过程来确定网络上状态演化的方式。IM 过程指每一个阶段随机选择一个节点进行一次可能的策略的变更，它会考虑自己的策略和自己邻居的策略，并把当前状态下自己和每个相邻节点适应度的比例作为权重在自己的策略和相邻节点的策略中随机选择一个策略进行变更。

仍然以最初选定的是 D 策略节点为例，假设选择的 D 个体有k_C个 C 邻居和k_D个 D 邻居，这种情况出现的可能性为

$$(k!/k_C!\,k_D!)q_{C|D}^{k_C}q_{D|D}^{k_D}$$

根据 IM 过程，我们可以推导出 D 节点在这次转化成 C 节点的概率为：

$$\frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0}$$

其中$f_0 = 1 - w + w\pi_0^{\mathrm{D}}$，$f_{\mathrm{C}} = 1 - w + w\pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}$，$f_{\mathrm{D}} = 1 - w + w\pi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}}$。

因此，可以推导出 C 节点占比的变化量为$1/N$的概率和 CC 边的变化量满足的概率如下：

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = \frac{1}{N}\right) = p_D \sum_{k_C + k_D = k} \frac{k!}{k_C!\, k_D!} q_{C|D}^{k_C} q_{D|D}^{k_D} \frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0}$$

$$\mathrm{Prob}\ (\Delta p_{CC} = \frac{2k_C}{kN}) = p_D \frac{k!}{k_C!\, k_D!} q_{C|D}^{k_C} q_{D|D}^{k_D} \frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0}$$

代入$f_0 = 1 - w + w\pi_0^{\mathrm{D}}$，$f_{\mathrm{C}} = 1 - w + w\pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}}, f_{\mathrm{D}} = 1 - w + w\pi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}}$, 由于$w << 1$，把转化的概率表达式在$w = 0$处泰勒展开得

$$\frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0} = \frac{\mathrm{k_C}}{\mathrm{k} + 1} + \left(\frac{\mathrm{k_C k_D}\left(\pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} - \pi_{\mathrm{D}}^{\mathrm{D}}\right)}{(\mathrm{k} + 1)^2} + \frac{\mathrm{k_C}\left(\pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{D}} - \pi_0^{\mathrm{D}}\right)}{(\mathrm{k} + 1)^2}\right)\mathrm{w} + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

其中

$$\begin{aligned}\pi_C^D - \pi_D^D = \frac{b}{k+1}\Big[&(k-1)q_{C|C}\left[3 + (k-1)q_{C|C}\right] + 1 \\ &+ (k-1)q_{D|C}[1 + (k-1)q_{C|D}] \\ &- (k-1)q_{C|D}\left[2 + (k-1)q_{C|C}\right] - (k-1)^2 * q_{D|D}q_{C|D}\Big] \\ &- (k+1) * c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_C^D - \pi_0^D = \frac{b}{k+1}\Big[&(k-1)q_{C|C}\left[3 + (k-1)q_{C|C}\right] + 1 \\ &+ (k-1)q_{D|C}[1 + (k-1)q_{C|D}] - k_C \times \left(1 + (k-1)q_{C|C}\right) \\ &- k_D \times \left((k-1)q_{C|D}\right)\Big] - (k+1) * c\end{aligned}$$

为了简化表达，令

$$\frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0} = \frac{\mathrm{k_C}}{\mathrm{k+1}} + (\mathrm{A_0 k_C} + A_1 k_C k_D + A_2 k_C k_C)\mathrm{w} + \mathrm{O(w^2)}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{A_0} = \Bigg(&\frac{b}{k+1}\Big((k-1)q_{C|C}\big[3+(k-1)q_{C|C}\big]+1 \\ &+(k-1)q_{D|C}[1+(k-1)q_{C|D}]\Big)-(k+1)*c\Bigg)/(k+1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_1 = \Bigg(&\frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|C}\big[3+(k-1)q_{C|C}\big]+1 \\ &+(k-1)q_{D|C}[1+(k-1)q_{C|D}] \\ &-(k-1)q_{C|D}\big[2+(k-1)q_{C|C}\big]-(k-1)^2 * q_{D|D}q_{C|D}\Big] \\ &-(k+1)*c\Bigg)/(k+1)^2 \\ &+\frac{b}{k+1}\Big(-\big((k-1)q_{C|D}\big)\Big)/(k+1)^2\end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{b}{k+1}\Big(-\big(1+(k-1)q_{C|C}\big)\Big)/(k+1)^2$$

同理，当选中的节点是 C 节点并转化为 D 节点时，可以推出

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = -\frac{1}{N}\right) = p_C \sum_{k_C+k_D=k} \frac{k!}{k_C!\,k_D!} q_{C|C}^{k_C} q_{D|C}^{k_D} \frac{k_D g_D}{k_C g_C + k_D g_D + g_0}$$

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_{CC} = -\frac{2k_C}{kN}\right) = p_C \frac{k!}{k_C!\,k_D!} q_{C|C}^{k_C} q_{D|C}^{k_D} \frac{k_D g_D}{k_C g_C + k_D g_D + g_0}$$

其中$g_0 = 1-w+w\pi_0^C$，$g_\mathrm{C} = 1-w+w\pi_\mathrm{C}^C$，$g_\mathrm{D} = 1-w+w\pi_\mathrm{D}^C$。

同样把它转化的概率在$w=0$处泰勒展开得

$$\frac{k_D g_D}{k_C g_C + k_D g_D + g_0} = \frac{k_D}{k+1} + (\frac{k_C k_D(\pi_D^C - \pi_C^C)}{(k+1)^2} + \frac{k_D(\pi_D^C - \pi_0^C)}{(k+1)^2})w + O(w^2)$$

其中

$$\pi_D^C - \pi_C^C = \frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|D} + (k-1)q_{C|D} * (1+(k-1)q_{C|C}) + (k-1)q_{D|D}[(k-1)q_{C|D}] - (k-1)q_{C|C} - 1 - (k-1)q_{C|C} * (2+(k-1)q_{C|C}) - (k-1)q_{D|C}[1+(k-1)q_{C|D}]\Big] + (k+1) * c$$

$$\pi_D^C - \pi_0^C = \frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|D} + 1 + (k-1)q_{C|D} * (1+(k-1)q_{C|C}) + (k-1)q_{D|D}[(k-1)q_{C|D}] - k_C \times \big(2+(k-1)q_{C|C}\big) - k_D \times \big(1+(k-1)q_{C|D}\big)\Big] + (k+1) * c$$

因此，令

$$\frac{k_D g_D}{k_C g_C + k_D g_D + g_0} = \frac{\mathrm{k_D}}{\mathrm{k}+1} + (\mathrm{B_0 k_D} + B_1 k_C k_D + B_2 k_D k_D)\mathrm{w} + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

其中

$$\mathrm{B}_0 = \left(\frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|D} + 1 + (k-1)q_{C|D} * \big(1+(k-1)q_{C|C}\big) + (k-1)q_{D|D}[(k-1)q_{C|D}]\Big] + (k+1) * c\right)/(1+k)^2$$

$$B_1 = \Big(\frac{b}{k+1}\Big[(k-1)q_{C|D} + (k-1)q_{C|D} * \big(1 + (k-1)q_{C|C}\big)$$
$$+ (k-1)q_{D|D}[(k-1)q_{C|D}] - (k-1)q_{C|C} - 1$$
$$- (k-1)q_{C|C} * \big(2 + (k-1)q_{C|C}\big)$$
$$- (k-1)q_{D|C}[1 + (k-1)q_{C|D}]\Big] + (k+1) * c\Big)/(1+k)^2$$
$$+ \frac{b}{k+1}\Big(-\big(2 + (k-1)q_{C|C}\big)\Big)/(k+1)^2$$

$$B_2 = \frac{b}{k+1}\Big(-\big(1 + (k-1)q_{C|D}\big)\Big)/(1+k)^2$$

我们认为单位时间执行一次更新，对于$w << 1$的情况，我们对网络结构列出如下微分方程：

$$\dot{p}_C \quad = \frac{1}{N} \cdot \mathrm{Prob}\,(\Delta p_C = \frac{1}{N}) + (-\frac{1}{N}) \cdot \mathrm{Prob}\,(\Delta p_C = -\frac{1}{N})$$

$$\dot{p}_{CC} \quad = \sum_{k_C=0}^{k} \frac{2k_C}{kN} \cdot \mathrm{Prob}\,(\Delta p_C = \frac{2k_C}{kN}) + \sum_{k_C=0}^{k} (-\frac{2k_C}{kN}) \cdot \mathrm{Prob}\,(\Delta p_C = -\frac{2k_C}{kN})$$

由

$$\mathrm{Prob}\Big(\Delta p_C = \frac{1}{N}\Big)$$
$$= p_D \sum_{k_C+k_D=k} \frac{k!}{k_C!\,k_D!} q_{C|D}^{k_C} q_{D|D}^{k_D} (\frac{\mathrm{k_C}}{\mathrm{k}+1}$$
$$+ (\mathrm{A_0 k_C} + A_1 k_C k_D + A_2 k_C k_C)\mathrm{w} + \mathrm{O(w^2)})$$

展开化简得

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = \frac{1}{N}\right)$$

$$= p_D * q_{C|D} * \frac{k}{k+1} + p_D * q_{C|D} * (A_0 + A_2)k + p_D * q_{C|D}$$

$$* q_{D|D} * A_1 k(k-1) + p_D * q_{C|D}^2 * A_2 k(k-1) + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

由

$$p_{CD} = p_D * q_{C|D}$$

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = \frac{1}{N}\right)$$

$$= p_{CD}\frac{k}{k+1} + p_{CD}(A_0 + A_2)kw + p_{CD} * q_{D|D}$$

$$* A_1 k(k-1)w + p_{CD} q_{C|D} A_2 k(k-1)w + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

同理

$$\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = -\frac{1}{N}\right)$$

$$= p_{CD}\frac{k}{k+1} + p_{CD}(B_0 + B_2)kw + p_{CD} * q_{C|C}$$

$$* B_1 k(k-1)w + p_{CD} q_{D|C} B_2 k(k-1)w + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

因此

$$\dot{p}_C = \frac{1}{N} * p_{CD}\Big((A_0 + A_2 - B_0 - B_2)k + \left(q_{D|D}A_1 - q_{C|C}B_1\right)k(k-1)$$

$$+ \left(q_{C|D}A_2 - q_{D|C}B_2\right)k(k-1)\Big)\mathrm{w} + \mathrm{O}(\mathrm{w}^2)$$

对于$\dot{p}_{CC}$，我们先计算它的第一项

$$\sum_{k_C=0}^{k} \frac{2k_C}{kN} \cdot \mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = \frac{2k_C}{kN}\right)$$

$$= \sum_{k_C=0}^{k} \frac{2k_C}{kN} \cdot p_D \frac{k!}{k_C!\,k_D!} q_{C|D}^{k_C} q_{D|D}^{k_D} \frac{k_C f_C}{k_C f_C + k_D f_D + f_0}$$

$$= \sum_{k_C=0}^{k} \frac{2k_C}{kN} \cdot p_D \frac{k!}{k_C!\,k_D!} q_{C|D}^{k_C} q_{D|D}^{k_D} \left(\frac{\mathrm{k_C}}{\mathrm{k}+1} + \mathrm{O(w)}\right)$$

$$= \frac{2p_D}{k(k+1)N}\left(q_{C|D}^2 k(k-1) + q_{C|D}k\right) + \mathrm{O(w)}$$

$$= \frac{2p_{CD}}{(k+1)N}\left(q_{C|D}(k-1)+1\right) + \mathrm{O(w)}$$

同理，它的第二项为

$$\sum_{k_\mathrm{C}=0}^{k} \left(-\frac{2k_\mathrm{C}}{kN}\right) \cdot \mathrm{Prob}\left(\Delta p_\mathrm{C} = -\frac{2k_\mathrm{C}}{kN}\right)$$

$$= -\frac{2p_{\mathrm{CD}}}{(k+1)N}\left(q_{\mathrm{C|C}}(\mathrm{k}-1)\right) + O(\mathrm{w})$$

因此

$$\dot{p}_{CC} = \frac{2p_{CD}}{(k+1)N}\left(\left(q_{C|D} - q_{C|C}\right) * (k-1) + 1\right) + \mathrm{O(w)}$$

$$\dot{q}_{\mathrm{C|C}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{p_{C\mathrm{C}}}{p_C}\right) = \frac{2p_{CD}}{(k+1)Np_C}\left(\left(q_{C|D} - q_{C|C}\right) * (k-1) + 1\right) + \mathrm{O(w)}$$

综上，根据网络状态参量之间的关系，整个网络的演化可以用如下微分方程来描述

$$\begin{aligned} \dot{p_C} &= w \cdot F_1(p_C, q_{C|C}) + O(w^2) \\ \dot{q}_{C|C} &= F_2(p_C, q_{C|C}) + O(w) \end{aligned}$$

由于我们认为$w << 1$，我们发现，$q_{C|C}$变化率是w的零阶项，而p_C的变化率是w的一阶项，所以$q_{C|C}$的变化更快，$q_{C|C}$也将更快的达到稳定。根据快慢流形的模型，我们假设$q_{C|C}$迅速稳定，再研究p_C随时间变化的过程。

由于$q_{C|C}$快速稳定，因此有约束$F_2(p_C, q_{C|C}) = 0$，即

$$q_{C|C} = p_C + \frac{1}{k-1}(1 - p_C)$$

我们也可以得到

$$\begin{aligned} q_{C|C} - q_{C|D} &= \frac{1}{k-1} \\ q_{D|D} - q_{D|C} &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

这个式子意味着 C 节点旁边的 C 节点多，D 节点旁边的 D 节点多，策略演化将出现“集聚”的现象。

将上述结论代回$\dot{p_C}$的表达式，可以求得在一个极短的Δt时间内Δp_C的均值为

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\Delta p_C] \simeq w \cdot \frac{1}{N} \\ * p_{CD} \Big((A_0 + A_2 - B_0 - B_2)k \\ + \big(q_{D|D} A_1 - q_{C|C} B_1\big) k(k-1) \\ + \big(q_{C|D} A_2 - q_{D|C} B_2\big) k(k-1) \Big) \Delta t (\equiv m(p_C) \Delta t) \end{aligned}$$

设

$$x = q_{C|C}(k-1)$$

$$y = q_{D|D}(k-1)$$

有$x + y = k$，$p_{CD} = p_c\left(1 - \frac{x}{k-1}\right)$，最后代入$x = (p_C + \frac{1}{k-1}(1 - p_C)) * (\mathrm{k} - 1)$，利用 python 化简上述表达式得

$$m(p_C) \simeq w \cdot \frac{k}{N} p_c(1 - p_c) * Q$$

其中

$$Q = -(-bk^3 - 3bk^2 + 8bk + 4b + ck^4 + 2ck^3 - 3ck^2 - 8ck - 4c) / (k^4 + 2k^3 - 2k - 1)$$

因式分解得

$$Q = -(k-2)\left(-2b + ck^3 + 2c + k^2(-b + 4c) + k(-5b + 5c)\right) / \left((k-1) * (k+1)^3\right)$$

观察 Q 的形式可知，公共品博弈需要的成本 c 越高，Q 将减小，C 节点策略将有减少的趋势;公共品博弈得到的收益 b 越大,Q 将增大，C 节点策略将有增加的趋势。当$k = 2$时，$Q = 0$，说明当度为 2 时网络上的公共品博弈对于合作和背叛策略没有结构带来的选择偏好。

同样的，可以求得Δp_C的方差（由于$w << 0$，认为均值约等于 0）

$$\mathrm{Var}[\Delta p_C] = \frac{1}{N^2}\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{N^2}\mathrm{Prob}\left(\Delta p_C = -\frac{1}{N}\right)$$

$$\mathrm{Var}\,[\Delta p_C] \simeq \frac{2}{N^2}\frac{(k-2)\mathrm{k}}{(k-1)(\mathrm{k}+1)} p_C(1 - p_C)\Delta t (\equiv v(p_C)\Delta t)$$

3.4 固定概率的求解

接下来我准备把上述 IM 过程连续化，利用随机微分方程的思想求得 C 策略的固定概率。我们构造 C 策略节点的占比满足的随机过程

p_C，由一小节的结论，我们认为p_C满足如下随机微分方程

$$dp_C = m(p_C)dt + \sqrt{v(p_C)}dW$$

其中，W代表标准布朗运动。

我们构造鞅$M = f(p_C)$, 由 Ito 引理得

$$\begin{aligned} dM &= \frac{\partial f}{\partial p_C}\left[m(p_C)dt + \sqrt{v(p_C)}dW\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p_C^2}[v(p_C)dt] \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial p_C}m(p_C) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p_C^2}v(p_C)\right]dt + \frac{\partial f}{\partial p_C}\sqrt{v(p_C)}dW \end{aligned}$$

要使M是鞅，那么则需令

$$\frac{\partial f}{\partial p_C}m(p_C) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial p_C^2}v(p_C) = 0$$

代入$m(p_C)$、$v(p_C)$的表达式，令$\alpha = \frac{NQ(k-1)(k+1)}{k-2}w$

可以解得

$$M = f(p_C) = C_1 e^{-\alpha p_C} + C_2$$

由边界条件$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，解得

$$C_1 = \frac{1}{e^{-\alpha} - 1}$$

$$C_2 = \frac{-1}{e^{-\alpha} - 1}$$

$$M = \frac{1 - e^{-\alpha p_C}}{1 - e^{-\alpha}} = p_C + \frac{1}{2}p_C(1 - p_C)\alpha$$

设合作策略的固定概率为ρ_C，由M= $f(p_C)$是鞅，得

$$\mathbb{E}[f(p_C) \mid \mathcal{F}_0] = f\left(p_{C_0}\right) = f\left(\frac{1}{N}\right)$$

在稳定状态时

$$\mathbb{E}[f(p_C) \mid \mathcal{F}_0] = \rho_C \cdot f(1) + (1 - \rho_C)f(0)$$

得到

$$\rho_C = \frac{f\left(\frac{1}{N}\right) - f(0)}{f(1) - f(0)} = f\left(\frac{1}{N}\right)$$

代入M的表达式

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \frac{N-1}{2N^2}\alpha$$

其中

$$\alpha = \frac{-Nw}{(k+1)^2}\left(-2b + ck^3 + 2c + k^2(-b+4c) + k(-5b+5c)\right)$$

此即为本文得出的固定概率表达式。

四． 规则网络下公共品博弈的固定概率的相关讨论

由 C 策略的固定概率ρ_C的表达式可知，要使$\rho_C > 1/N$，则等价于

$$-2b + ck^3 + 2c + k^2(-b+4c) + k(-5b+5c) < 0$$

$$-(k^2+5k+2)b + (k^3+4k^2+5k+2)c < 0$$

$$\frac{b}{c} > \frac{k^3+4k^2+5k+2}{k^2+5k+2} = g(k)$$

我们利用绘图软件画出$g(k)$的图形如下图红线所示, 蓝线为$b/\mathrm{c} = (k+1)$。

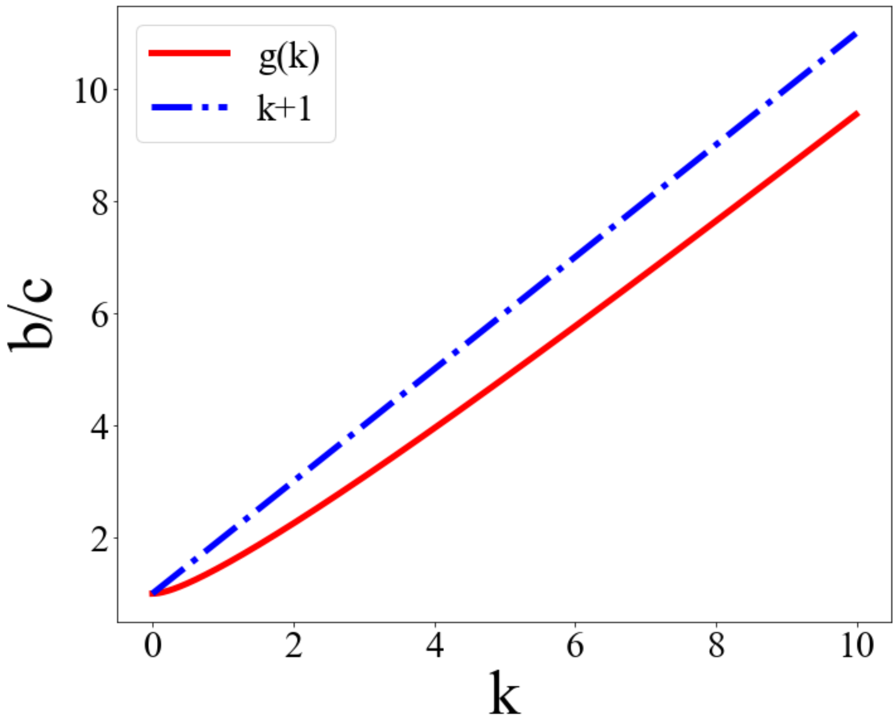

图 2 g(k)与 k+1 的函数图像(k>0)

我们知道，当公共品博弈不存在网络结构时，只有$b>(k+1)c$时，人们才会选取合作策略。而根据上图，在 IM 过程下规则网络的公共品博弈中，这个条件有所放松。在k趋于正无穷的条件下，只需达到$b>kc$的条件即可使合作策略的固定概率大于$1/N$。

同时，由$g(k)$在$k>0$单调上升可知，随着 k 的增加需要更加苛刻的条件才能促成公共品博弈的发生。这与现实中的情况是相符的，当参与博弈的人增加时，人们倾向于背叛，因为每次博弈在合作成本相同的情况下人们会觉得给自己分得的收益越来越少。

Ohtsuki, H.(2006)[2]论文中对规则网络上针对 IM 更新过程的两个体博弈进行了讨论。它在论文中的结论是，两两博弈中 C 策略固定概率大于 1/N 的条件等价于$b/c>k+2$。对比公共品博弈的结论可知，公共品博弈的 IM 过程偏好演化至合作策略的条件相比于两两博弈对收益成本比b/c的要求有所降低。

综上所述，本文通过对规则网络中 IM 更新过程下公共品博弈合作策略固定概率的推导，最终发现网络结构有助于使人们在公共品博弈中选择合作策略，但条件依然十分苛刻难以满足。

参考文献

[1] Nowak, M. A., Sasaki, A., Taylor, C., & Fudenberg, D. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. Nature 428, 646-650 (2004).

[2] Ohtsuki, H., Hauert, C., Lieberman, E., & Nowak, M. A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. Nature 441, 502-505 (2006).

[3] Allen, B., Lippner, G., Chen, Y.-T., Fotouhi, B., Momeni, N., Yau, S.-T., & Nowak, M.A. Evolutionary dynamics on any population structure. Nature 544, 227-230 (2017).

[4] Santos, M. D., Pinheiro, F. L., Santos, F. C., & Pacheco, J. M. Dynamics of N-person snowdrift games in structured populations. Journal of Theoretical Biology 315, 81-86 (2012).