

# 关于“复杂网络上博弈策略的固定概率”主题的文献综述

陈泊帆 1900011030

本文主要通过按时间顺序概括和评析三篇网络博弈中的固定概率的主要论文，来向读者介绍本领域的研究方法和发展过程。本文将从模型概述、主要结论和亮点评价三方面分别对三篇论文进行介绍。最后，本文将把三篇论文串在一起，对这个领域的发展过程进行一个简要的概述和总结。

## 1. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations<sup>[1]</sup>

### 1.1 模型概述

#### 1.1.1 主要记号

$a/b/c/d$ : 博弈矩阵的参数

当自己选择策略 A，对手选择策略 A，自己的收益是  $a$ ;

当自己选择策略 A，对手选择策略 B，自己的收益是  $b$ ;

当自己选择策略 B，对手选择策略 A，自己的收益是  $c$ ;

当自己选择策略 B，对手选择策略 B，自己的收益是  $d$ ;

$N$ : 参与博弈的有限个体个数

$w$ : 博弈的收益对总适应度的影响因数

$f_i$ : 有  $i$  个个体使用 A 策略时，使用 A 策略的个体的适应度

$g_i$ : 有  $i$  个个体使用 A 策略时，使用 B 策略的个体的适应度

$P_{i,j}$ : 在演化中，从  $i$  个 A 个体变到  $j$  个 A 个体的一步转移概率

$x_i$ : 从  $i$  个 A 个体经过无穷多步后演化到  $N$  个 A 个体的概率

$\rho_A$ : A 策略的固定概率，有  $\rho_A = x_1$

#### 1.1.2 模型的推导过程和重要结论

考虑有限的  $N$  个个体在一起博弈时的情况，每个个体分别和其他  $N - 1$  个个体博弈，每个个体的收益是这  $N - 1$  次博弈收益的总和，可以推导出采取 AB 策略的个体的适应度分别为：

$$f_i = 1 - w + w[a(i - 1) + b(N - i)]/[N - 1]$$

$$g_i = 1 - w + w[ci + d(N - i - 1)]/[N - 1]$$

演化时考虑 Moran 过程 (BD 过程)，即每一步先按照适应度的概率随机选择一个个体繁殖，然后在剩下的群体中按均匀的概率随机消灭一个个体。可以推导出，演化对应的一步转移概率为：

$$P_{i,i+1} = \frac{if_i}{if_i + (N - i)g_i} \frac{N - i}{N}$$

$$P_{i,i-1} = \frac{(N - i)g_i}{if_i + (N - i)g_i} \frac{i}{N}$$

由  $x_i$  服从的等式

$$x_i = P_{i,i+1}x_{i+1} + P_{i,i}x_i + P_{i,i-1}x_{i-1}$$

可以推出

$$\rho_A = 1 / \left( 1 + \sum_{k=1}^{N-1} \prod_{i=1}^k \frac{g_i}{f_i} \right)$$

定义 ALLB 种群到 ALLA 种群的进化率  $r$ ，有

$$r = N\rho_A u$$

其中 $u$ 是 B 个体突变到 A 个体的概率，我们把它定义为 1。可以看出， $r$ 可以表示为 $w$ 的函数。当 $w \ll 1$ 时，我们把它在 $w = 0$ 处泰勒展开得

$$r = N\rho_A \approx 1/[1 - (\alpha N - \beta)(w/6)]$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha &= a + 2b - c - 2d \\ \beta &= 2a + b + c - 4d\end{aligned}$$

在中性情况下， $r = 1$ 。当 $r > 1$ 时

$$\alpha N > \beta$$

此时，有利于新策略入侵整个群体。

## 1.2 主要结论

作者主要把上述模型用到了 $N$ 个有限个体参与的 TFT 与 ALLD 的 $n$ 轮博弈中并定义了有限个体演化稳定的条件。

TFT 策略指博弈者第一次采取合作的策略，之后的策略模仿对手上一次采取的策略（以牙还牙）。ALLD 策略指博弈者始终采取不合作的策略。

此时，博弈的收益矩阵系数变为

$$a = Rn, b = S + P(n - 1), c = T + P(n - 1), d = Pn$$

其中 $R/S/T/P$ 为单轮博弈下的收益矩阵的系数。由于背景假设单轮博弈下存在囚徒困境的情况，因此博弈矩阵的系数满足

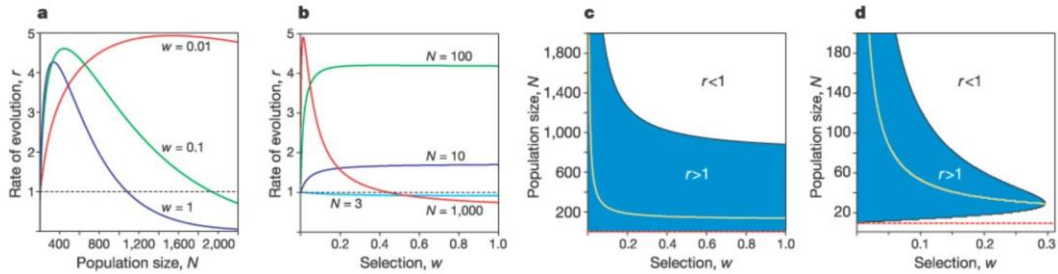
$$T > R > P > S$$

当 $n > (T - P)/(R - P)$ 时，我们将得到 $a > c > d > b$ 的结论，TFT 与 ALLD 策略都将满足严格纳什均衡和演化稳定（ESS）。

那么在有限的个体中，我们如何定义策略演化稳定的条件呢，ALLD 策略是否是有限演化稳定的呢？作者在本文中通过固定概率作为无限情况到有限情况的桥梁给出了他的定义。

在无限个体的情况下，当 TFT 策略和 ALLD 彼此竞争时，之前的研究表明存在一个临界值 $x^* = (d - b)/(a - b - c + d)$ ，当 TFT 策略的初始比例小于 $x^*$ 时，TFT 策略将会在竞争中被淘汰，反之将取代 ALLD 策略。

而在有限个体 $N$ 的种群中，由模型可以得到 TFT 策略只要存在，就都有可能完全入侵 ALLD 策略。根据模型，作者把中性情况 $r = 1$ 作为有限种群中是否演化稳定的分界，比较了不同 $w$ ，不同 $N$ 下 $r = N\rho_A$ 的值，发现结果如下图 1：



图表 1 不同 $w$ 和 $N$ 下的进化率 $r$ <sup>[1]</sup>

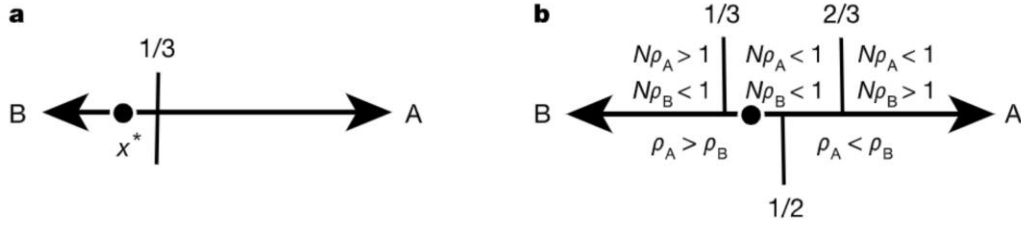
最终发现，在 $w$ 固定时， $N$ 的取值不能过大也不能过小才能使 $\rho_A > 1$ 。对此，作者给出了直观的解释：在数量非常小的种群中，选择 TFT 策略意味着帮助了对手，给自己造成了较大的劣势；而在数量非常大的种群中，单个 TFT 策略个体很难去影响如此庞大的群体。因此只有当 $N$ 在一个中间的区间时，单个 TFT 策略才会有较大的概率入侵整个群

体。

然而，当 $w$ 很小时， $N$ 的取值范围将不再是一个双边的区间（很可能变成单边的情况），作者根据模型推导出了单个 TFT 策略入侵时 $N$ 应当满足的条件：

$$a(N-2) + b(2N-1) > c(N+1) + d(2N-4)$$

可以发现，当 $N=2$ 时，要求 $b > c$ ，这是对于本场景是不可能满足的；当 $N$ 趋于无穷时，要求 $a+2b > c+2d$ ，这个条件等同于 $x^* < 1/3$ （图 2a）。在下图 2b 中，作者形象的列出了 $x^*$ 取不同值时 A、B 固定概率与  $1/N$  的取值关系。



图表 2  $x^*$ 取不同值时的固定概率<sup>[1]</sup>

在作者讨论的场景下， $x^* < 1/3$ 这个条件也可以理解为博弈轮数  $n$  与博弈人数  $N$  之间的约束关系：

$$n(R-P)(N-2) > T(N+1) - S(2N-1) + P(N-2)$$

当 $N$ 趋于无穷时，博弈轮数 $n$ 需要满足

$$n > (T + P - 2S)/(R - P).$$

最终，结合以上对固定概率的讨论，作者根据此模型定义了一种策略是有限演化稳定 ( $ESS_N$ ) 需要同时满足的两个条件：

- (1) 演化防止 A 入侵 B：单个 A 在 B 群体中的适应度相对于 B 较低，即

$$b(N-1) < c + d(N-2) \quad (w > 0)$$

- (2) 演化防止 A 取代 B： $\rho_A$  小于  $1/N$ ，即

$$a(N-2) + b(2N-1) < c(N+1) + d(2N-4) \quad (w \ll 1)$$

这个定义为原本无限种群  $ESS$  的情况做了有限情况下的扩展 ( $ESS_N$ )

对于 $N=2$ 的情况，两个条件都变为 $b < c$ ；对于 $N$ 趋于无穷的情况，条件 1 变为 $b < d$ ，条件 2 变为 $x^* > 1/3$ 。

接着，作者主要对进行博弈的 AB 两种策略为 $ESS_N$ 的情况做出了进一步的讨论，发现随着  $N$  的不同取值，有可能只有 A 是 $ESS_N$ ，有可能只有 B 是 $ESS_N$ ，也有可能两者都是 $ESS_N$ ，AB 固定概率的大小关系也会随之变化。对于  $N$  较小的情况， $ESS$ 是 $ESS_N$ 的既不充分也不必要条件；对于  $N$  较大的情况， $ESS$ 是 $ESS_N$ 的必要不充分条件。作者通过下图 3 的两个例子来证明这个观点：

<b>a</b>		A	B	A is an $ESS_N$ for $N > 12$
	A	20	0	B is an $ESS_N$ for $N < 53$
	B	17	1	$\rho_A > \rho_B$ for $N > 19$

<b>b</b>		A	B	A is an $ESS_N$ for $N < 22$
	A	1	28	B is an $ESS_N$ for $N > 17$
	B	2	30	$\rho_A > \rho_B$ for $N < 20$

图表 3  $ESS_N$ 和固定概率的例子<sup>[1]</sup>

作者还引入了风险占优策略来和 $ESS_N$ 策略进行比较。风险占优策略指此策略的固定概率大于对手其他策略的固定概率。最终的结论是，在 $N$ 趋于无穷的情况下，A 是风险占优策略要求 $x^* < 1/2$ ，而 B 是 $ESS_N$ 策略要求 $x^* > 1/3$ 。（如上图 2b）

作者最后讨论了其他演化过程下固定概率的情况，比如对比较过程、同时选择两个个体一个繁殖一个消失的过程、Wright-Fischer 过程，最终都和 BD 过程产生了同样的结论。因此作者对于 $ESS_N$ 的定义具有一定的普适性。

### 1.3 亮点评价

本文的主要贡献是作者在前人 $ESS$ 的基础上提出了有限个体博弈下的 $ESS_N$ ，为接下来的研究者在有限个体博弈体系下讨论演化稳定策略提供了一套标准。

我认为此文有以下几点值得我去学习：

- (1)  $ESS_N$ 标准建立的巧妙。作者迁移了 $ESS$ 的定义，通过固定概率的桥梁建立了 $ESS_N$ 策略的标准。
- (2) 把无限个体博弈情况下的 $x^*$ 引入，来简化有限模型的结论。
- (3) 对自己结论提供了直观的解释。作者在说明一个策略想要提高固定概率时 $N$ 的取值不宜过大也不宜过小时，为读者提供了直观的理解，这有利于证明模型本身的合理性。
- (4) 对 $ESS_N$ 的讨论的细致性。在作者定义完 $ESS_N$ 后，他把 $ESS$ 和 $ESS_N$ 的关系放到一起讨论比较，更是在不同演化过程下计算固定概率来验证 $ESS_N$ 的普适性。这一段讨论。

## 2.A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks<sup>[2]</sup>

### 2.1 模型概述

#### 2.1.1 主要记号

$a/b/c/d$ : 博弈矩阵的参数

当自己选择策略 A，对手选择策略 A，自己的收益是 $a$ ;

当自己选择策略 A，对手选择策略 B，自己的收益是 $b$ ;

当自己选择策略 B，对手选择策略 A，自己的收益是 $c$ ;

当自己选择策略 B，对手选择策略 B，自己的收益是 $d$ ;

$N$ : 图上参与博弈的个体数（节点数）

$k$ : 每个节点的度

$\rho_X$ : X 策略的固定概率

$p_X$ : 图中 X 策略占总策略的比例

$p_{XY}$ : 图中连接 X 到 Y 的有向边占总边数的比例 (总有向边数是总边数的两倍)

$q_{X|Y}$ : 给定一个 Y 节点, 在 Y 节点旁边找到 X 节点的概率

$w$ : 博弈的收益对总适应度的影响因数

$f_X$ : 使用 X 策略的个体的适应度

### 2.1.2 模型的推导过程和重要结论

考虑  $N$  个个体在一个所有节点的度都为  $k$  的网络上博弈, 每个个体分别与和其相邻的个体博弈, 每个个体的总收益是这些博弈之和。对于一个网络结构来说, 由于描述网络的各个变量之间存在如下关系, 因此我们可以仅仅通过  $p_A$  和  $q_{A|A}$  两个变量来描述整个网络的演化过程。

$$\begin{aligned} p_A + p_B &= 1 \\ q_{A|X} + q_{B|X} &= 1 \\ p_{XY} &= q_{X|Y} \cdot p_Y \\ p_{AB} &= p_{BA} \end{aligned}$$

接下来分别考虑 DB、IM、BD 这三种过程来计算个体 A 策略在网络上的固定概率。

#### (1) DB 过程

DB 过程指: 首先随机选择一个个体消失, 然后个体间在网络上进行博弈, 以网络上消失节点的相邻节点的适应度作为权重来在相邻节点中选择一个策略代替那个消失个体的策略。

当选择消失的是 B 策略个体时, 可以推导出每个相邻的选择 A 策略和 B 策略个体的适应度分别为:

$$\begin{aligned} f_A &= (1 - w) + w[(k - 1)q_{A|A} \cdot a + \{(k - 1)q_{B|A} + 1\} \cdot b] \\ f_B &= (1 - w) + w[(k - 1)q_{A|B} \cdot c + \{(k - 1)q_{B|B} + 1\} \cdot d] \end{aligned}$$

假设选择的 B 个体有  $k_A$  个 A 邻居和  $k_B$  个 B 邻居, 这种情况出现的可能性为

$$(k! / k_A! k_B!) q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B}$$

如果 A 策略个体替代了这个 B 策略个体, 其对应的概率为

$$\frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}$$

因此, 可以推导出 A 节点占比的变化量为  $1/N$  的概率和 AA 边的变化量满足的概率如下:

$$\text{Prob}\left(\Delta p_A = \frac{1}{N}\right) = p_B \sum_{k_A + k_B = k} \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}$$

$$\text{Prob}\left(\Delta p_{AA} = \frac{2k_A}{kN}\right) = p_B \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B} \frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B}$$

同理, 当发生 B 取代 A 的情况时, A 节点的占比和 AA 边的占比的变化量满足如下的概率:

$$\text{Prob}(\Delta p_A = -\frac{1}{N}) = p_A \sum_{k_A + k_B = k} \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B}$$

$$\text{Prob}(\Delta p_{AA} = -\frac{2k_A}{kN}) = p_A \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B} \frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B}$$

我们认为单位时间执行一次更新，对于 $w \ll 1$ 的情况，我们可以利用泰勒展开对网络结构列出如下微分方程：

$$\begin{aligned} \dot{p}_A &= \frac{1}{N} \cdot \text{Prob}(\Delta p_A = \frac{1}{N}) + (-\frac{1}{N}) \cdot \text{Prob}(\Delta p_A = -\frac{1}{N}) \\ &= w \cdot \frac{k-1}{N} p_{AB} (I_a a + I_b b - I_c c - I_d d) + O(w^2) \\ \dot{p}_{AA} &= \sum_{k_A=0}^k \frac{2k_A}{kN} \cdot \text{Prob}(\Delta p_A = \frac{2k_A}{kN}) + \sum_{k_A=0}^k (-\frac{2k_A}{kN}) \cdot \text{Prob}(\Delta p_A = -\frac{2k_A}{kN}) \\ &= \frac{2}{kN} p_{AB} [1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A})] + O(w) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I_a &= \frac{k-1}{k} q_{A|A} (q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k} q_{A|A}, \\ I_b &= \frac{k-1}{k} q_{B|A} (q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k} q_{B|B}, \\ I_c &= \frac{k-1}{k} q_{A|B} (q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k} q_{A|A}, \\ I_d &= \frac{k-1}{k} q_{B|B} (q_{A|A} + q_{B|B}) + \frac{1}{k} q_{B|B}. \end{aligned}$$

对于 $q_{A|A}$ ，有

$$\begin{aligned} \dot{q}_{A|A} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{p_{AA}}{p_A} \right) \\ &= \frac{2}{kN} \frac{p_{AB}}{p_A} [1 + (k-1)(q_{A|B} - q_{A|A})] + O(w) \end{aligned}$$

因此，整个网络的演化可以用如下微分方程来描述

$$\begin{aligned} \dot{p}_A &= w \cdot F_1(p_A, q_{A|A}) + O(w^2) \\ \dot{q}_{A|A} &= F_2(p_A, q_{A|A}) + O(w) \end{aligned}$$

由于我们认为 $w \ll 1$ ，我们发现， $q_{A|A}$ 变化率是 $w$ 的零阶项，而 $p_A$ 的变化率是 $w$ 的一阶项，所以 $q_{A|A}$ 的变化更快， $q_{A|A}$ 也将更快的达到稳定。根据快慢流形的模型，我们假设 $q_{A|A}$ 迅速稳定，再研究 $p_A$ 随时间变化的过程。

由于 $q_{A|A}$ 快速稳定，因此有约束 $F_2(p_A, q_{A|A}) = 0$ ，即

$$q_{A|A} = p_A + \frac{1}{k-1} (1 - p_A)$$

利用这个等式，我们可以得到

$$\begin{aligned} q_{A|A} - q_{A|B} &= \frac{1}{k-1} \\ q_{B|B} - q_{B|A} &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

这个式子意味着 A 节点旁边的 A 节点多，B 节点旁边的 B 节点多，策略演化将出现“集聚”的现象。

对于 $p_A$ 的演化，在一个极短的 $\Delta t$ 时间内， $p_A$ 的变化的均值和方差近似满足如下的关系：

$$E[\Delta p_A] \simeq w \cdot \frac{k-2}{k(k-1)N} p_A(1-p_A)(\alpha p_A + \beta) \Delta t (\equiv m(p_A) \Delta t)$$

$$\text{Var} [\Delta p_A] \simeq \frac{2}{N^2} \frac{k-2}{k-1} p_A(1-p_A) \Delta t (\equiv v(p_A) \Delta t)$$

此处

$$\alpha = (k+1)(k-2)(a-b-c+d)$$

$$\beta = (k+1)a + (k^2 - k - 1)b - c - (k^2 - 1)d$$

根据后向方程，A 的初始占比为  $y$  时最终演化到占比为 1 时的概率  $\phi_A(y)$  满足如下微分方程：

$$0 = m(y) \frac{d\phi_A(y)}{dy} + \frac{v(y)}{2} \frac{d^2\phi_A(y)}{dy^2}$$

利用  $w \ll 1$  的条件，我们可以解出：

$$\phi_A(y) = y + w \cdot \frac{N}{6k} y(1-y)[(\alpha + 3\beta) + \alpha y]$$

A 策略的固定概率  $\rho_A = \phi_A(1/N)$ ，当  $N$  趋于正无穷时， $\rho_A > 1/N$  等价于  $\alpha + 3\beta > 0$  即

$$(k^2 + 2k + 1)a + (2k^2 - 2k - 1)b > (k^2 - k + 1)c + (2k^2 + k - 1)d$$

可以发现，当  $k$  趋于正无穷时，上述情况与上一篇论文中所述的情况相同，也满足 1/3 定律，即  $a + 2b > c + 2d$ 。

同样的， $\rho_B > 1/N$  与下述不等式等价

$$(k^2 + 2k + 1)d + (2k^2 - 2k - 1)c > (k^2 - k + 1)b + (2k^2 + k - 1)a$$

我们也可以计算  $\rho_A$  与  $\rho_B$  的比值满足

$$\frac{\rho_A}{\rho_B} = 1 + w \cdot \frac{N-1}{2} \{(k+1)a + (k-1)b - (k-1)c - (k+1)d\}$$

## (2) IM 过程

IM 过程指：每一个阶段随机选择一个节点进行一次策略的变更，它会考虑自己的策略和自己邻居的策略，并把适应度的比例作为权重在自己的策略和相邻节点的策略中随机选择一个策略进行变更。

同样仿照之前讨论的 DB 过程，发现有一个点有所区别。因为被选中的节点不再是直接消失，在更新的过程中会有几率依然选择自己的策略。

因此，选中 B 策略节点后更新为 A 策略的概率为

$$\frac{k_A f_A}{k_A f_A + k_B f_B + f_0}, \text{ 其中 } f_0 = 1 - w + w(k_A c + k_B d)$$

选中 A 策略节点后更新为 B 策略的概率为

$$\frac{k_B g_B}{k_A g_A + k_B g_B + g_0}, \text{ 其中 } g_0 = 1 - w + w(k_A a + k_B b)$$

在这个概率上稍作修改之后，就可以仿照之前的方法，在  $w \ll 1$ ， $N$  趋于无穷的情况下，可以解得  $\rho_A > 1/N$  的条件为

$$(k^2 + 4k + 3)a + (2k^2 + 2k - 3)b > (k^2 + k + 3)c + (2k^2 + 5k - 3)d$$

同样的， $\rho_B > 1/N$  与下述不等式等价

$$(k^2 + 4k + 3)d + (2k^2 + 2k - 3)c > (k^2 + k + 3)b + (2k^2 + 5k - 3)a$$

## (3) BD 过程

与第一篇论文中介绍的类似，BD 过程指：每一步按照适应度作为权重随机选择一个个体繁殖，并等概率的替代掉一个被选中个体的邻居。

在此情形下，选中一个有 $k_A$ 个 A 邻居 $k_B$ 个 B 邻居的 A 策略节点的概率与下式呈正比：

$$[p_A \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|A}^{k_A} q_{B|A}^{k_B}] \cdot [1 - w + w(k_A a + k_B b)]$$

如果替代掉了一个 B 邻居，A 的节点数增加 1，AA 边增加了 $1 + (k - 1)q_{A|B}$ 。选中一个有 $k_A$ 个 A 邻居 $k_B$ 个 B 邻居的 B 策略节点的概率与下式呈正比：

$$[p_B \frac{k!}{k_A! k_B!} q_{A|B}^{k_A} q_{B|B}^{k_B}] \cdot [1 - w + w(k_A c + k_B d)]$$

如果替代掉了一个 A 邻居，A 的节点数减少 1，AA 边减少了 $(k - 1)q_{A|A}$ 。

依然仿照之前的讨论，在 $w \ll 1$ ， $N$ 趋于无穷的情况下，可以得出 $\rho_A > 1/N$ 的条件为

$$(k + 1)a + (2k - 1)b > (k + 1)c + (2k - 1)d$$

$\rho_B > 1/N$ 的条件为

$$(k + 1)d + (2k - 1)c > (k + 1)b + (2k - 1)a$$

## 2.2 主要结论

上述模型主要向读者解答了在一个参与个数为  $N$ ，度均为  $k$  的网络博弈中，采取 DB、IM、BD 这三种不同博弈过程的固定概率的表达式，并给出了要使固定概率大于中性情况，在 $w \ll 1$ ， $N$ 趋于无穷的情况下 $k$ 和博弈矩阵的参数应当满足的关系式。本论文的作者把上述模型用到了如下典型的博弈矩阵中：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} b - c & -c \\ b & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

把它代入模型中，可以得到如下结论：

对于 DB 过程， $\rho_C > 1/N$ 的条件是

$$b/c > k$$

对于 IM 过程， $\rho_C > 1/N$ 的条件是

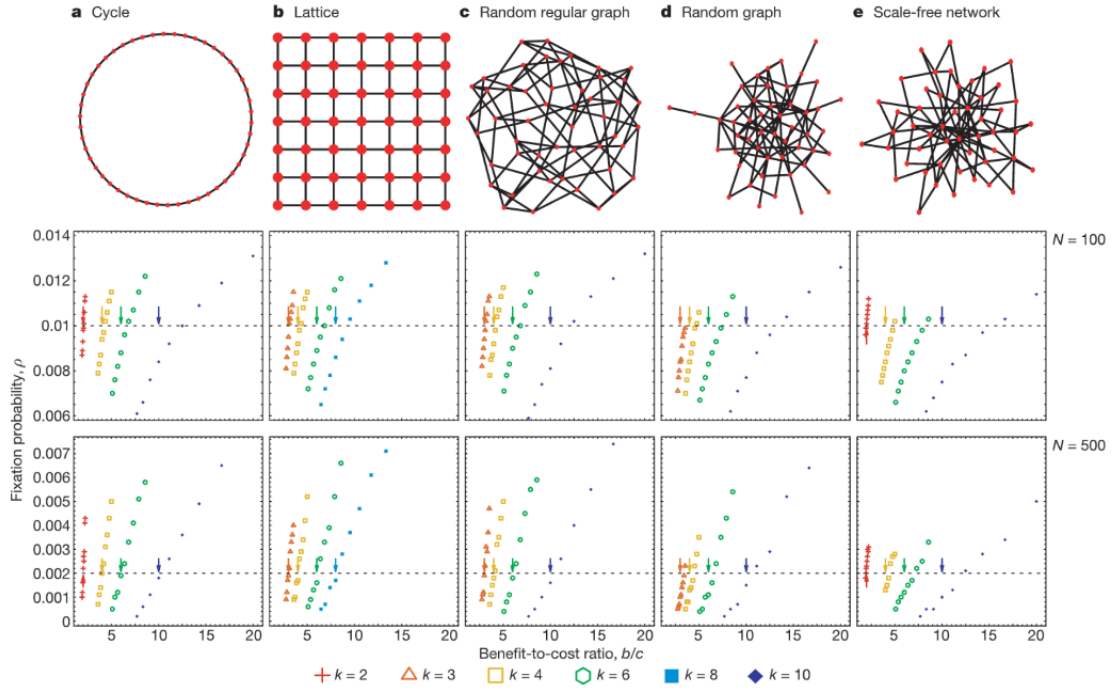
$$\frac{b}{c} > k + 2$$

对于 BD 过程， $\rho_C$ 在 $b > c > 0$ 的条件下不可能大于 $1/N$ 。

注意这些结论都是在 $w \ll 1$ ， $N$ 趋于无穷的情况下讨论的。

对于  $N$  没有足够大的情况和其他随机网络下，作者通过计算机做了 DB 过程的仿真，得到如下结论：





图表 4 不同类型网络下和不同 $k$ 、 $N$ 下 $b/c$ 的临界条件模拟<sup>[2]</sup>

(1) 在 $N$ 不是足够大的情况下，对于 DB 过程， $b/c > k$ 是 $\rho_c > 1/N$ 的必要条件，并且随着 $N$ 的增大（或是 $k$ 的减小）它的临界条件越来越接近 $b/c = k$

(2) 对于其他随机网络， $k$ 可以理解为每个节点的度的平均值，它们也近似的服从这个公式。

接下来作者对三种过程下给出的结论进行了一下直观的解释。

对于 DB 过程，想象 C 策略和 D 策略在竞争一个空节点，两者可能获得的收益为

$$P_C = bq_{C|C}(k-1) - ck$$

$$P_D = bq_{C|D}(k-1)$$

直观上看，选 C 策略的好处是选择后遇到旁边有 C 策略的可能性（即 $q_{C|C}$ ）会比 D 策略的大，选 D 的好处是不用为周围的 $k$ 个节点支付 $c$ 的成本。由于模型中提到 $(k-1)(q_{C|C} - q_{C|D}) = 1$ ，所以根据博弈的收益 $P_C - P_D = b - ck$ ，所以要想 C 在博弈中占优我们将得到 $b/c > k$ 的结论。

对于 IM 过程，因为在模仿过程中也会考虑到自己的适应度，所以 IM 过程其实可以看成在 DB 过程的图中增加了自己连接自己的边（相当于自己伸出的边增加了 2），于是可以依然利用 DB 过程的结论，得到 $b/c > k + 2$ 。

对于 BD 过程，作者认为 BD 过程中只考虑了 CD 策略区域边界上的节点的适应度（因为只有随机选取到这些点，才能给网络的结构造成较大的变化，否则基本上出现的都是同一种策略自己的迭代，并不影响网络结构），而 DB、IM 过程考虑到了边界点的邻居的适应度。对于 C 策略来说，在边界点上显然是竞争不过 D 策略的，因此 BD 过程无论如何也无法满足 C 策略的固定概率大于 $1/N$ 的条件。

### 2.3 亮点评价

此文的贡献主要在于提出了有限个体在网络上博弈的模型，并利用模型对一个典型的囚徒困境博弈矩阵推导出了网络上博弈时采取合作策略演化固定概率相对于中性情况占优的条件 $b/c > k$ 。

我认为此文有以下几点值得学习：

- (1) 巧妙利用  $w \ll 1$  的条件对结论进行化简。
- (2) 对模型的处理上只考虑了邻居构形的情况进行加总，对邻居的邻居的构形没有一一讨论，而是采用了期望值的方法直接代替简化计算。这么做的原因是，邻居的邻居的构形的讨论将只会影响  $w$  二次项的情况（最后也会被忽略掉），直接利用期望可以提取出  $w$  一次项的结论。
- (3) 把离散的过程连续化，并且利用后向方程解出固定概率的表达式。虽然连续化这一步我感觉有点生搬硬套，比起下一篇论文利用泊松过程来连续化稍有逊色，但是这样的处理可以简便计算并用上连续情形下一些现有的结论。
- (4) 对三种不同的过程一一进行讨论，并比较了三者间的联系和不同点。
- (5) 对其他类型的网络进行了计算机的模拟，来证明这个简洁的结论具有普适性

### 3. Evolutionary dynamics on any population structure<sup>[3]</sup>

#### 3.1 模型概述

##### 3.1.1 主要记号

$G$ : 一个带有边的权重的网络

$w_{ij}, i, j \in G$ : 连接  $i$  与  $j$  节点的边的权重

$w_i = \sum_{j \in G} w_{ij}$ : 节点  $i$  的权重

$W = \sum_{i, j \in G} w_{ij} = \sum_{i \in G} w_i$ : 整个网络的权重之和

$p_{ij} = w_{ij}/w_i$ : 节点  $i$  到节点  $j$  随机游走的一步概率，或者是  $i$  能影响  $j$  的程度

$\pi_i = w_i/W$ : 在图上经过无穷时间随机游走到节点  $i$  的概率

$p_{ij}^{(n)}$ : 从节点  $i$  经过  $n$  步到达  $j$  的  $n$  步概率

$g_i^{(n)} = \sum_{j \in G} p_{ij}^{(n)} g_j$ : 可以理解为所有距离节点  $i$  有  $n$  步的节点的某种状态  $g$  在  $i$  上的体现

$h^{(n)} = \sum_{i, j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} h_{ij}$ : 可以理解为整个图上所有边的某种状态  $h$  在全图的体现

$\mathbf{s} = (s_i)_{i \in G}$ : 网络上每一个节点的策略的状态向量

$f_i(\mathbf{s})$ : 状态  $\mathbf{s}$  下节点  $i$  的博弈收益

$F_i(\mathbf{s})$ : 状态  $\mathbf{s}$  下节点  $i$  的适应度

##### 3.1.2 模型的推导过程和重要结论

(1) 利用泊松过程的状态向量来表达 DB 过程网络的演变并推导出固定概率的表达式  
考虑有限的  $N$  个个体在一个有权重的网络上博弈的情形。我们利用向量  $\mathbf{s} = (s_i)_{i \in G}$  来表征网络上每一个节点的策略。 $s_i$  取 1 代表采用了 A 策略， $s_i$  取 0 代表采用了 B 策略，策略的博弈矩阵如下图。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \end{array}$$

我们可以写出每一个节点的收益为

$$f_i(\mathbf{s}) = as_i s_i^{(1)} + bs_i(1 - s_i^{(1)}) + c(1 - s_i)s_i^{(1)} + d(1 - s_i)(1 - s_i^{(1)})$$

$s_i^{(1)}$  代表  $i$  节点旁边 1 距离内的平均策略。

每个节点的适应度为

$$F_i(\mathbf{s}) = 1 + \delta f_i(\mathbf{s})$$

定义我们研究的 DB 过程在连续时间中是一种泊松过程， $i$  节点代替  $j$  节点的概率是状态  $s$  的函数，满足

$$\text{Rate}[i \rightarrow j](\mathbf{s}) = \frac{w_{ij} F_i(\mathbf{s})}{\sum_{k \in G} w_{kj} F_k(\mathbf{s})}$$

这样的定义也意味着平均每经过 1 的时间，每一个  $j$  节点都会进行一次被  $i$  节点替换的变化。

定义随机过程

$$\hat{S}(t) = \sum_{i \in G} \pi_i S_i(t)$$

它代表了整个图上节点采取的平均策略， $\hat{S}(t)$  的均值可以理解为  $t$  时刻 A 策略占领所有节点的概率。

在中性情况下，显然  $\hat{S}(t)$  是鞅，因此中性情况下它的均值不随时间变化，从这里可以很简便的推导出中性情况下  $\rho_A = 1/N$ 。在这里我们定义  $u$  对应着整个网络只存在一个 A 策略的初始情况。

对于非中性博弈的情况，我们有

$$\mathbb{E}_{s_0}[\hat{S}(T)] = \hat{s}_0 + \int_0^T \frac{d}{dt} E_{s_0}[\hat{S}(t)] dt$$

令  $T$  趋于无穷，则给定初始状态  $s_0$  后，最终达到整个网络全是 A 策略的固定概率是

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \int_0^\infty \frac{d}{dt} E_{s_0}[\hat{S}(t)] dt$$

而为了处理右边的式子，我们可以很自然的联系到我们定义的泊松过程，给出

$\frac{d}{dt} E_{s_0}[\hat{S}(t)]$  的具体表示方法，即

$$E[\hat{S}(t + \epsilon) - \hat{S}(t) | \hat{S}(t) = s] = D(s)\epsilon + o(\epsilon) \quad (\epsilon \rightarrow 0^+)$$

其中  $D(s)$  就可以理解为：在状态  $s$  的情况下平均每经历 1 时间（一个博弈）对  $S$  的改变量。

$$\rho_{s_0} = \hat{s}_0 + \int_0^\infty E_{s_0}[D(S(t))] dt$$

到这里，我们就成功的引入了加权网络下的博弈，并把离散的博弈过程进行了连续化的处理。接下来，我们需要通过我们的 DB 模型对  $D(S)$  进行数学上的表示。

在 DB 过程中，我们任选一个  $j$  被相邻的  $i$  按照适应度替换，对于每一个  $j$  被  $i$  替换，对  $S$  的改变量可以表示成  $\pi_j(s_i - s_j)$ ，对所有情况  $j$  节点被旁边某个  $i$  节点替换的情况求和可得：（最后为了化简表达式我们依然考虑弱选择的情况，即收益对适应度的影响因数  $\delta \ll 1$ ）

$$\begin{aligned}
D(\mathbf{s}) &= \sum_{j \in G} \pi_j \left( -s_j + \sum_{i \in G} s_i \frac{w_{ij} F_i(\mathbf{s})}{\sum_{k \in G} w_{kj} F_k(\mathbf{s})} \right) \\
&= \sum_{i \in G} s_i \left( -\pi_i + \sum_{j \in G} \pi_j \frac{w_{ij} F_i(\mathbf{s})}{\sum_{k \in G} w_{kj} F_k(\mathbf{s})} \right) \\
&= \delta \sum_{i \in G} s_i \left( \pi_i f_i(\mathbf{s}) - \pi_i \sum_{k \in G} p_{ik}^{(2)} f_k(\mathbf{s}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2) \\
&= \delta \sum_{i \in G} \pi_i s_i \left( f_i^{(0)}(\mathbf{s}) - f_i^{(2)}(\mathbf{s}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)
\end{aligned}$$

这里需要注意的是， $D(s)$ 需要与我们定义的泊松过程相契合，也就是说， $D(s)$ 代表着每个节点 $j$ 都被周围节点进行过一次替换后对 $E[\hat{S}(t)]$ 的改变量。由上式可以说明，当 $\delta = 0$ 时（中性情况）， $\hat{S}(t)$ 是鞅。同时，当 $\delta \ll 1$ 时

$$D'(\mathbf{s}) = \sum_{i \in G} \pi_i s_i \left( f_i^{(0)}(\mathbf{s}) - f_i^{(2)}(\mathbf{s}) \right)$$

接下来模型为了进一步简化计算，把博弈矩阵简化为了下图的形式：

$$\begin{array}{cc}
& \begin{array}{c} C \quad D \end{array} \\
\begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} b-c & -c \\ b & 0 \end{pmatrix}
\end{array}$$

并引入记号

$$\langle g \rangle_{\mathbf{s}_0}^\circ = \int_0^\infty \mathbb{E}_{\mathbf{s}_0}^\circ [g(\mathbf{S}(t))] dt$$

我认为这个记号可以理解为某个网络状态的函数 $g$ 对整个时间的平均。结合之前的讨论，C策略的固定概率可以表述为

$$\rho_C = \frac{1}{N} + \delta \sum_{i \in G} \pi_i \left( -c \left\langle s_i \left( s_i^{(0)} - s_i^{(2)} \right) \right\rangle_u^0 + b \left\langle s_i \left( s_i^{(1)} - s_i^{(3)} \right) \right\rangle_u^0 \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

从上式可以看出，对于节点 $i$ 的博弈情况，DB过程需要考虑到距离节点 $i$ 三步及以内的节点的平均策略。

接下来的问题就将转化为如何简化上面这个繁琐的表达式。作者为了求出上式涉及到的 $\mathbb{E}_{\mathbf{s}_0}^\circ [S_i(t) S_j(t)]$ 的值，引入了凝聚随机游走模型。

## (2) 引入凝聚随机游走模型中的凝聚时间来等价地表示固定概率表达式中的值

连续的凝聚随机游走指的是：两个随机游走过程 $(X(t), Y(t))$ 分别从 $i$ 节点和 $j$ 节点开始，平均每过1的时间进行一次节点的转移（泊松过程），当两者到达一个节点时，两者一起运动，他们相遇的凝聚时间记为 $T_{\text{coal}}$ ，这个背景下的概率和期望记为 $\mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[\cdot]$ 、

$\mathbb{E}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[\cdot]$ 。

离散的凝聚随机游走指的是：两个随机游走过程 $(X(t), Y(t))$ 分别从 $i$ 节点和 $j$ 节点开

始，每过 1 的时间，选择一个过程进行一次游走，交替进行（注意这边不是同步的），相应的概率和期望记为： $\mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[\cdot]$ 、 $\mathbb{E}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[\cdot]$ 。

本模型中记离散情况下相遇时间的均值为 $\tau_{ij} = \mathbb{E}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}}]$ ，由于连续情况两个过程是同时进行的，因此这个时间也可以表示为 $\tau_{ij} = 2\mathbb{E}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}}]$ 。

对于整个网络上以相差 $n$ 步的两个点为起点的凝聚时间的均值，我们可以表示为

$$t_n = \tau^{(n)} = \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} \tau_{ij}$$

此文认为，合并随机游走模型和我们考虑的中性情况（ $\delta = 0$ ）存在一定的对应关系。主要基于如下的式子：

$$\mathbb{P}_{\mathbf{s}_0}^{\circ}[s_i(t) = x, s_j(t) = y] = \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[(\mathbf{s}_0)_{X(t)} = x, (\mathbf{s}_0)_{Y(t)} = y]$$

我们简单的分析一下这个式子：左边的式子代表 $t$ 时刻 $i$ 节点状态为 $x$ ， $j$ 节点状态为 $y$ 的概率；右边的式子代表 0 时刻 $i$ 节点和 $j$ 节点平均凝聚随机游走了 $t$ 步到达的节点的状态分别为 $x$ 和 $y$ 。我们可以认为 $t$ 时刻的 $i$ 节点的状态和 $j$ 节点的状态是由 0 时刻某两个节点（或一个共同的祖先节点）的状态经过 $t$ 步传递过来的，我们右式的凝聚随机游走相当于回溯了这个过程。这大概是我理解的这个式子成立的理由。

如果这个式子成立，当初始只有编号为 $k$ 的节点的状态是 1 时，就可以推导出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbf{s}_0}^{\circ}[S_i(t)S_j(t)] &= \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[X(t) = Y(t) = k] \\ &= \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}} < t, X(t) = k] \end{aligned}$$

也就是说， $i$ 节点和 $j$ 节点在 $t$ 时刻的状态都是由同一个祖先  $k$  经过  $t$  步传导过来的。

对于初始情况 $u$ （只有一个随机的节点状态是 1），我们推导出

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_u^{\circ}[S_i(t)S_j(t)] &= \frac{1}{N} \sum_{k \in G} \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}} < t, X(t) = k] \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}} < t] \end{aligned}$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{N} - s_i s_j \right\rangle_u^{\circ} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{N} - \mathbb{E}_u^{\circ}[S_i(t)S_j(t)] \right) dt \\ &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} (1 - \mathbb{P}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}} < t]) dt \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(i,j)}^{\text{CRW}}[T_{\text{coal}}] \\ &= \frac{\tau_{ij}}{2N} \end{aligned}$$

$$\left\langle \sum_{i \in G} \pi_i s_i (s_i^{(n_1)} - s_i^{(n_2)}) \right\rangle_u^{\circ} = \frac{\tau^{(n_2)} - \tau^{(n_1)}}{2N}$$

虽然我们之前讨论的凝聚时间是和中性情况下的演化一一对应的，但我们认为对于弱选择的情况下的凝聚时间和中性情况相差不大，因此可以把 C 策略的固定概率表示成：

$$\rho_c = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \left( -c\tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

现在，经过引入凝聚随机游走，我们把之前 $\rho_c$ 的复杂表示式转换为用凝聚随机游走的平均凝聚时间来表示，接下来此文对如何求出这个平均凝聚时间展开了讨论。

### (3) 凝聚时间表达式的推导

我们可以通过迭代把从第 $i$ 个节点和第 $j$ 个节点出发的随机游走的平均时间 $\tau_{ij}$ 写成如下的递推形式

$$\tau_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \in G} (p_{ik}\tau_{jk} + p_{jk}\tau_{ik}) & i \neq j \end{cases}$$

对于这个等式，可以这么理解：到两个随机游走的出发点相同时，两者在初始时刻就合并了，因此 $\tau_{ij} = 0 (i = j)$ 。当两者分别从 $i$ 节点和 $j$ 节点出发时，他们合并的时间可以表示为先进行一步的用时（比如 $i$ 节点出发的随机游走到达到了 $k$ 节点，用时为 1），然后加上新的两个节点出发的随机游走的平均时间（比如当第一步 $i$ 节点的随机游走到 $k$ 节点时，新构成的随机合并游走的合并时间就是 $\tau_{jk}$ ）。因此，当按照上面的思路对所有情况按概率求期望就可以表示成上面的式子。（因为是弱选择的情况（接近中性），所以由泊松过程，可以理解为 C 策略每一步的用时为 1）

利用上式，我们可以求出：

$$\begin{aligned} \tau^{(n)} &= \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} \tau_{ij} \\ &= \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \in G} (p_{ik}\tau_{jk} + p_{jk}\tau_{ik}) \right) \\ &= \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \in G} (p_{ik}\tau_{jk} + p_{jk}\tau_{ik}) \right) - \sum_{i \in G} \pi_i p_{ii}^{(n)} \left( 1 + \sum_{k \in G} p_{ik}\tau_{ik} \right) \\ &= \sum_{i,j \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k \in G} \pi_j p_{ji}^{(n)} p_{ik}\tau_{jk} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k \in G} \pi_i p_{ij}^{(n)} p_{jk}\tau_{ik} - \sum_{i \in G} \pi_i p_{ii}^{(n)} \tau_{ii}^+ \\ &= \sum_{i \in G} \pi_i + \frac{1}{2} \sum_{j,k \in G} \pi_j p_{jk}^{(n+1)} \tau_{jk} + \frac{1}{2} \sum_{i,k \in G} \pi_i p_{ik}^{(n+1)} \tau_{ik} - \sum_{i \in G} \pi_i p_{ii}^{(n)} \tau_{ii}^+ \\ &= 1 + \tau^{(n+1)} - \sum_{i \in G} \pi_i p_{ii}^{(n)} \tau_{ii}^+ . \end{aligned}$$

其中 $\tau_{ii}^+$ 指两个节点从同一个 $i$ 节点出发重新相遇的平均时间。

令 $n$ 趋于无穷，可以推得其满足如下等式：

$$\sum_{i \in G} \pi_i^2 \tau_{ii}^+ = 1$$

### (4) 探究固定概率大于中性情况的条件

由上述讨论，我们得出

$$\rho_c = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \left( -c\tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

因此 $\rho_c > 1/N$ 等价于

$$-c\tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)}) > 0$$

即

$$-c \left( \sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ (1 + p_{ii}^{(1)}) - 2 \right) + b \left( \sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ (p_{ii}^{(1)} + p_{ii}^{(2)}) - 2 \right) > 0$$

对于无自己连接自己节点的网络  $p_{ii}^{(1)} = 0$

$$\left( \frac{b}{c} \right)^* = \frac{\sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ - 2}{\sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ p_i - 2} \quad (p_i = p_{ii}^{(2)})$$

可以得到 N 区域无穷时的条件为：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (b/c)^* = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/\bar{p}$$

其中

$$\bar{p} = \left( \sum_{i \in G_N} \pi_i \tau_{ii}^+ p_i \right) / \left( \sum_{i \in G_N} \pi_i \tau_{ii}^+ \right)$$

对于每个节点的结构都相同的对称网络 (weighted regular graph) 来说, 有  $\pi_i = 1/N, \tau_{ii}^+ = N$ , 所以

$$\rho_c = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \left( -c(N + Np^{(1)} - 2) + b(Np^{(1)} + Np^{(2)} - 2) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

其中

$$p^{(1)} = 0, p^{(2)} = 1/\kappa$$

其中  $\kappa = \left( \sum_{j \in G} p_{ij}^2 \right)^{-1}$ , 代表某种节点的度。

最终得到  $\rho_c > 1/N$  的临界条件是

$$\left( \frac{b}{c} \right)^* = \frac{N - 2}{N/\kappa - 2}$$

对于 N 趋于正无穷的情况, 可以看出

$$\left( \frac{b}{c} \right)^* = \kappa$$

这与前一篇论文的结论是对应的。

### (5) 两个策略固定概率大小的比较

$\rho_A > \rho_B$  时, 有结论  $\sigma a + b > c + \sigma d$

对于囚徒困境的情况, 作者推导出:

$$\sigma = \frac{(b/c)^* + 1}{(b/c)^* - 1}$$

带入表达式得到

$$\sigma = \frac{-\tau^{(1)} + \tau^{(2)} + \tau^{(3)}}{\tau^{(1)} + \tau^{(2)} - \tau^{(3)}}$$

根据合并随机游走的相关性质, 可以证明  $\sigma > 0$  并且  $(b/c)^* > 1$ 。

### 3.1.3 模型的延伸和扩展

作者以上述讨论的简单 DB 过程下的固定概率为基础, 又深入讨论了一下以下三种情况的固定概率和相比于中性情况下博弈的  $(b/c)^*$  的临界值。

#### (1) 每个节点的收益形式的改变

在之前的模型中, 对于囚徒困境的博弈, 每个节点博弈后的收益表达为:

$$f_i(\mathbf{s}) = -cs_i + bs_i^{(1)}$$

作者讨论了当每个节点的收益表达式不同的情况，比如每个节点的收益将与每个节点在图上的权重成正比，表达式如下：

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{s}) &= w_i(-cs_i + bs_i^{(1)}) \\ &= W\pi_i(-cs_i + bs_i^{(1)}) \end{aligned}$$

此时带入上述模型，固定概率和相应的 $b/c$ 的临界值为

$$\rho_c = \frac{1}{N} + \frac{\delta W}{2N} \left( -c \sum_{i,j \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} \tau_{ij} + b \sum_{i,j,k \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} p_{ik} (\tau_{jk} - \tau_{ik}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$(b/c)^* = \frac{\sum_{i,j \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} \tau_{ij}}{\sum_{i,j,k \in G} \pi_i^2 p_{ij}^{(2)} p_{ik} (\tau_{jk} - \tau_{ik})}$$

## (2) 考虑节点间替换的权重和博弈时的交互权重不同的情况

我们在节点不变的情况下构造两个网络。网络  $G$  的权重代表节点间的替代权重，网络  $I$  的权重代表节点间博弈时的交互权重。节点间的替代权重指一个节点消失时，周围节点根据适应度来接替它的权重，交互权重表示节点和周围节点博弈时获得的收益的权重。也就是说这个网络中有两种权重结构，我们需要修改 $p_{ij}$ 的定义来套用原来的结论。

我们用 $p_{ij}^{(n,m)}$ 来代替它。这个符号的上标我认为可以理解为节点 $i$ 旁边在网络  $G$  中距离 $n$ 步得到 $k$ 节点， $k$ 节点和 $i$ 节点进行替代网络上的交互，接着 $k$ 节点与在网络  $I$  中距离 $k$ 节点 $m$ 步的 $j$ 节点在博弈的网络上交互，得到 $k$ 节点的适应度。 $p_{ij}^{(n,m)}$ 表示经过 $k$ 节点的中介作用 $j$ 节点对 $i$ 节点的贡献，于是博弈的收益可以写为

$$f_i(\mathbf{s}) = -cs_i + b \sum_{j \in V} p_{ij}^{(0,1)} s_j$$

最终我们得到的结论是

$$\begin{aligned} \rho_c &= \frac{1}{N} + \frac{\delta}{2N} \left( -c\tau^{(2,0)} + b(\tau^{(2,1)} - \tau^{(0,1)}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2) \\ \left( \frac{b}{c} \right)^* &= \frac{\tau^{(2,0)}}{\tau^{(2,1)} - \tau^{(0,1)}} \end{aligned}$$

## (3) 考虑不同的过程——BD 过程

由 BD 过程的定义，我们认为每一步我们根据适应度选取节点 $i$ ，再随机的替代 $i$ 旁边的节点 $j$ 。 $i$ 替换 $j$ 的概率与 $F_i(\mathbf{s})p_{ij}$ 成正比，因此

$$\text{Rate}[i \rightarrow j](\mathbf{s}) = F_i(\mathbf{s})p_{ij}$$

注意到，此处定义的泊松过程因为没有归一化，所以不能认为每经过 1 时间进行了一步，但显然时间尺度上的变化对我们研究的  $T$  趋于无穷情况下的结论是没有影响的。（但是我认为论文中这部分的 $D(s)$ 的表达式应该乘一个系数）

作者采用 $1/w_i$ 作为新的权重（可以理解为繁衍的价值），令

$$\tilde{s} = \frac{1}{\tilde{W}} \sum_{i \in G} \frac{s_i}{w_i}, \quad \tilde{W} = \sum_{i \in G} \frac{1}{w_i}$$



最终得到的结论是

$$\rho_c = \frac{1}{N} + \frac{\delta}{\tilde{W}N} \left( -c \sum_{i,j \in G} \frac{w_{ij}}{w_i w_j} \tilde{\tau}_{ij} + b \sum_{i,j,k \in G} \frac{w_{ij}}{w_i w_j} p_{ik} (\tilde{\tau}_{jk} - \tilde{\tau}_{ik}) \right) + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$$\left( \frac{b}{\bar{c}} \right)^* = \frac{\sum_{i,j \in G} \frac{w_{ij}}{w_i w_j} \tilde{\tau}_{ij}}{\sum_{i,j,k \in G} \frac{w_{ij}}{w_i w_j} p_{ik} (\tilde{\tau}_{jk} - \tilde{\tau}_{ik})}$$

### 3.2 主要结论

正如模型所述, 作者的主要结论是在一个 $N$ 个有限个体参与的带权重的网络博弈中, 合作策略的固定概率大于 $1/N$ 的条件是

$$-c\tau^{(2)} + b(\tau^{(3)} - \tau^{(1)}) > 0$$

其中,  $\tau^{(n)}$ 代表在网络上相距 $n$ 的两个节点开始凝聚随机游走的加权平均时间。

作者对此公式给出了比较直观的解释, 作者把它改写为

$$-c(T - \tau^{(0)}) + b(T - \tau^{(1)}) > -c(T - \tau^{(2)}) + b(T - \tau^{(3)})$$

其中 $T$ 代表最后稳定的时间, 这边 $\tau^{(i)}$ 可以理解为相距为 $i$ 的两个节点从不同策略到采取

相同策略所需的时间,  $T - \tau^{(i)}$ 代表相距为 $i$ 的两个节点采取相同策略的时长。所以上式的左边可以理解为一个采取合作策略节点在全时长的平均收益, 上式右边可以理解为距离这个节点两步的随机策略节点在全时长的平均收益。所以上式直观上表明要使合作的固定概率大于 $1/N$ , 每个采取合作策略的节点需要比距离它两步的随机策略的节点有更高的收益。

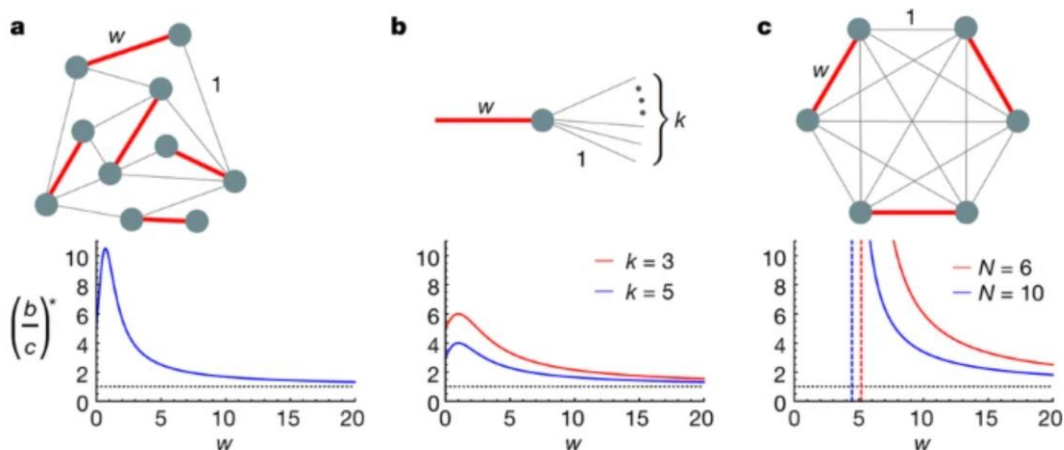
接着, 作者讨论了在拥有较强配对关系的网络中合作策略更容易被青睐。这是因为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (b/c)^* = \lim_{N \rightarrow \infty} 1/\bar{p}$$

其中

$$\bar{p} = \left( \sum_{i \in G_N} \pi_i \tau_{ii}^+ p_i \right) / \left( \sum_{i \in G_N} \pi_i \tau_{ii}^+ \right)$$

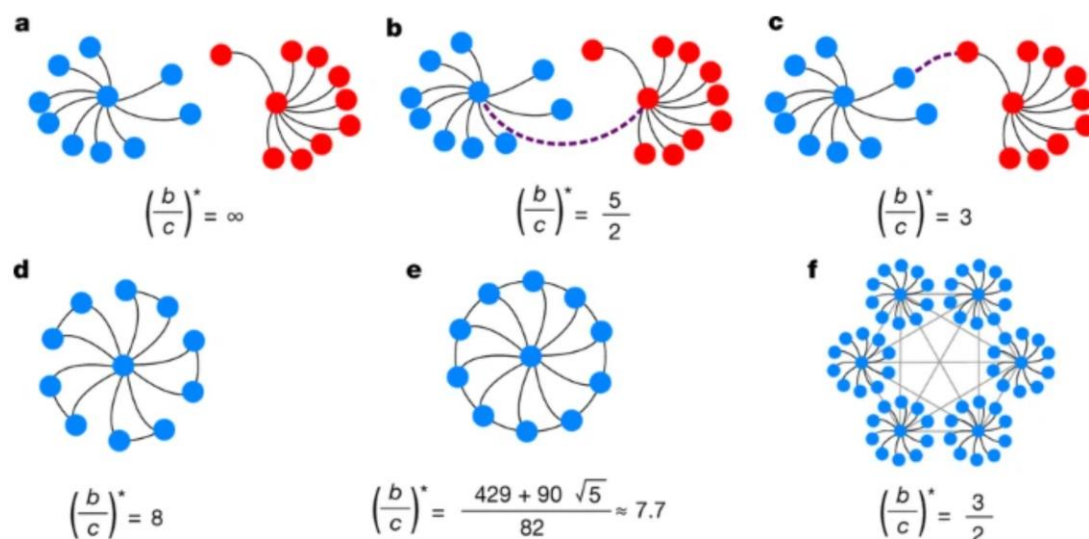
$\bar{p}$ 可以理解为网络中自己的节点先影响到邻居节点再影响回自己节点的概率 ( $p_i$ ) 某种平均值, 可以体现网络中配对关系的强弱。作者对于不同网络按配对关系的强弱进行了模拟, 如下图 ( $w$  越大代表配对关系越强):



图表 5 不同网络下随着配对关系 $w$ 的增强 $b/c$ 临界值的变化<sup>[3]</sup>

从图中可以直观地看出随着配对关系的增强，临界点的取值越低（趋于 1），合作策略会更受欢迎。

作者还讨论了一些特殊的网络结构，比如岛屿模型：把人群分成不同的岛屿，岛屿之内的人的互相的权重是 1，岛屿间的权重是 $m(m < 1)$ 。最终得到的结论如下图所示：

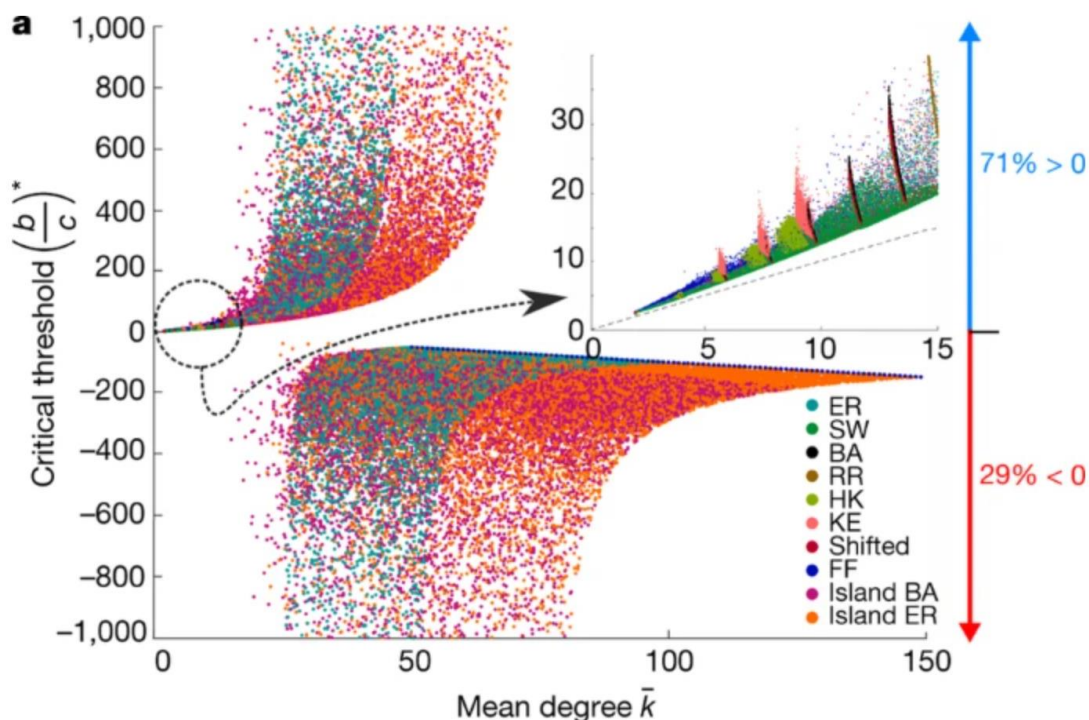


图表 6 不同网络结构下 $b/c$ 的临界值<sup>[3]</sup>

可以发现，人群的有枢纽的集聚现象也非常有利于合作策略的推广，这对改善社会结构具有一定的指导作用。

对于其他网络，作者利用了大量的网络样本进行模拟，最后得出如下结论：（如下图）

- (1) 随着每个节点的平均度数的增加，合作变得越来越困难
- (2) 就算平均度数相同， $b/c$  的值也具有较大的方差，度数的序列对 $b/c$ 的临界值不具有决定性的作用，还需要考虑网络结构的其他因素。



图表 7 具有不同平均度数的网络中  $b/c$  临界值的计算机模拟结果<sup>[3]</sup>

### 3.3 亮点评价

此文把前人对  $N$  个体在有限网络上的博弈推广到存在权重的各类网络的情况，并对固定概率给出了较为普适的公式。

我认为此文有以下几点值得学习：

- (1) 使用泊松过程连续化。对比之前几篇论文从离散到连续的解决方法（大多通过时间上的尺度压缩），我认为泊松过程的方法更加自然和严谨。
- (2) 联系到凝聚随机游走过程的凝聚时间来计算固定概率。作者敏锐地发现了凝聚随机过程和网络上博弈演化的一一对应关系，在简化计算的同时方便了我们去直观的理解推导出的公式的意义。
- (3) 联系和提出配对强度、岛屿模型等概念，对如何构造一个有利于合作的网络进行了比较全面的说明，并利用计算机仿真给出了直观的结果。

综上所述，这三篇论文展示了固定概率的研究在不同结构的博弈中的发展过程。第一篇论文<sup>[1]</sup>从前人对于无线个体的博弈的研究推导到有限个体  $N$  下的研究，并引入了有限演化稳定策略和固定概率。得到了在  $w \ll 1$  和  $N$  趋于无穷下 A 策略固定概率大于  $1/N$  情况的条件： $a + 2b > c + 2d$ ，即  $x^* < 1/3$ 。第二篇论文<sup>[2]</sup>在第一篇论文的基础上对有限  $N$  个体下度数为  $k$  的网络博弈推导出了在  $w \ll 1$  和  $N$  趋于无穷下 A 策略固定概率大于  $1/N$  情况的条件（DB 过程）： $(k^2 + 2k + 1)a + (2k^2 - 2k - 1)b > (k^2 - k + 1)c + (2k^2 + k - 1)d$ 。并且在  $k = N$  并都趋于无穷的情况下得到了与第一篇论文情况相同的结论。除此之外，对于囚徒困境对应的特殊博弈矩阵，第二篇文章还给出了在  $N$  趋于无穷和  $w \ll 1$  情况下合作策略固定概率大于  $1/N$  的非常简洁的条件： $b/c > k$ 。第三篇文章<sup>[3]</sup>推广了第二篇文章对于网络的限制，在第二篇文章的基础上引入了节点具有不同的度并带有不同权重的较为任意的网络结构，推导出了合作策略固定概率大于  $1/N$  的临界条件

$\left(\frac{b}{c}\right)^* = \frac{\sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ - 2}{\sum_{i \in G} \pi_i \tau_{ii}^+ p_i - 2}$ ，在  $N$  趋于无穷的情况下这个式子可以表示成  $\left(\frac{b}{c}\right)^* = \kappa$ ，其中  $\kappa =$

$(\sum_{j \in G} p_{ij}^2)^{-1}$ ，代表某种网络节点的度的均值。可以看出，第三篇文章的特殊情形也与第二篇所得出的条件  $b/c > k$  是对应的。所以到了第三篇文章之后，这个领域解决了任意网络下在弱选择条件下博弈的固定概率的求解问题。对于由于固定概率研究的是从单个个体到占领这个群体的概率，接下来我认为在这个领域还可以对在任意网络下从任意个体到占领整个群体的转移概率进行研究，这是到第三篇文章也还没能解决的问题。期待复杂网络博弈这个领域可以源源不断地产生新的研究成果对未来社会的发展做出贡献。

#### 参考文献：

- [1] Nowak, M. A., Sasaki, A., Taylor, C., & Fudenberg, D. Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite populations. *Nature* 428, 646-650 (2004).
- [2] Ohtsuki, H., Hauert, C., Lieberman, E., & Nowak, M. A. A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature* 441, 502-505 (2006).
- [3] Allen, B., Lippner, G., Chen, Y.-T., Fotouhi, B., Momeni, N., Yau, S.-T., & Nowak, M.A. Evolutionary dynamics on any population structure. *Nature* 544, 227-230 (2017).

#### 个人的一些优点：

- 1.全面地对论文的数学模型进行了分析和理解,格式上也不错。
- 2.文中对第三篇论文的某些复杂数学定义和公式介绍时给出了直观上的理解。
- 3.不限于简单的对三篇文章的内容进行介绍，更给出了为什么三篇文章的思路是这样的逻辑，并对每篇文章模型的亮点进行了介绍。
- 4.对作者推导过程中我不太明白的地方提出了疑问。
- 5.对领域的发展方向提出了自己的建议。