§4.1. 随机变量序列的2种收敛性

$\begin{cases} \text{依概率收敛（大数定律）} \\ \text{按分布收敛（中心极限定理）} \end{cases}$

e.g. 依概率收敛

$\forall \varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$

则称 $X_n \xrightarrow{P} X$.

性质：$X_n \pm Y_n \xrightarrow{P} a \pm b$

$X_n \times Y_n \xrightarrow{P} a \cdot b$

$X_n \div Y_n \xrightarrow{P} a \div b$.

e.g. 按分布收敛

$X \quad X_1 \quad \cdots$ 对应随机变量

一列分布函数：$F(x), F_1(x) \cdots$，对 $\forall x$ 是 $F(x)$ 连续点，

$\lim\limits_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$.

则 $\{F_n(x)\}$ 弱收敛于 $F(x)$ $\qquad F_n(x) \xrightarrow{W} F(x)$

其 $F_n(x)$ 分别对应的 X_n： $\qquad X_n \xrightarrow{L} X \quad$ （X_n 按分布收敛于 X）.

The. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L} X$

The. $X_n \xrightarrow{P} c \Leftrightarrow X_n \xrightarrow{L} c$ （极限为常数时则等价）

§4.2. 特征函数.

$X,\ p(x)$: $\boxed{\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx.}$

$(\varphi(t)=E(e^{itX}))$

def. 复随机变量: $Z(\omega)=X(\omega)+iY(\omega)$.

$\overline{Z}(\omega)=X(\omega)-iY(\omega)$.

$|Z|=\sqrt{X^2+Y^2}=|\overline{Z}|$

$E(Z)=E(X)+iE(Y)$

由 Euler公式: $(e^{iX}=\cos X+i\sin X)$: $E(e^{iX})=E(\cos X)+iE(\sin X)$.

$|e^{iX}|=1$

def. X的特征函数. $\varphi(t)=E(e^{itX})$, $t\in(-\infty,\infty)$. 依赖于X的分布.

离散时: $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{\infty} e^{itx_i}\cdot p_i$

连续时: $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)\,dx$.

e.g. ① 单点分布 $P(X=a)=1$, $\varphi(t)=e^{ita}$

② 0-1分布 $P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x}$, $x=0,1.$, $\varphi(t)=e^{it}p+(1-p)$.

③ 泊松分布 $P(\lambda)$, $\varphi(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

...

性质 ①. $|\varphi(t)|\leq\varphi(0)=1$ $(\varphi(t)\in[-1,1])$

②. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$

③. $Y=aX+b$, $\varphi_Y(t)=e^{ibt}\varphi_X(at)$.

④. X, Y相互独立: $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$.

⑤. $E(X^k)$若存在, 则 $\varphi_X(t)$有k次导. 且 $\varphi^{(k)}(0)=i^kE(X^k)$.

⑤ 性质可用以求、期望与方差.