$\boxed{\text{定理 2.3}}$ 参数曲线网是渐近曲线网 $\Leftrightarrow L=N=0$

证：u-曲线上每点的切方向 $(1,0)$，v-曲线上每一点的切方向 $(0,1)$

参数 u-曲线，v-曲线为渐近曲线网 $\Leftrightarrow \begin{cases} L(1)^2+2M\cdot1\cdot0+N\cdot0^2=0 \\ L\cdot(0)^2+2M\cdot0\cdot1+N(1)^2=0 \end{cases}$

□

$\Leftrightarrow L=N=0$

$\boxed{\text{定理 2.4}}$ 曲面上一条曲线曲率处处不为0，曲线是渐近线

$\Leftrightarrow$ 它的密切平面恰好是~~法平面~~曲面的切平面.

证. 曲线是渐近线 $\Leftrightarrow k_n = k(\vec{\beta}\cdot\vec{n})=0 \Leftrightarrow \vec{\beta}\cdot\vec{n}=0$

$\Longleftrightarrow$ 密切平面为切平面.

$+\vec{\alpha}\cdot\vec{n}=0$

魏因加尔吞

16次课　　4.3 Weingarten 映射、主曲率与主方向

1. Weingarten 映射. Gauss 映射

$$
\begin{tikzcd}
(u,v) \arrow[r, shift left, "\vec{r}(u,v)"] \arrow[d, "\sigma=1"'] & S_p \arrow[l, shift left, "\vec{r}^{-1}"] \arrow[d, "g"] \\
(u,v) \arrow[r, "\vec{n}(u,v)"'] & \Sigma
\end{tikzcd}
$$
（单位球面 S^2 上曲面）

称

$g:\ \vec{n}\circ\sigma\circ\vec{r}_1^{\,-1} = \vec{n}\circ\vec{r}_1^{\,-1}$ 为 Gauss 映射.

$g:\ S_p \longrightarrow \Sigma.$

$\therefore$

$g(\vec{r}(u,v)) = \vec{n}\circ\sigma\circ\vec{r}_1^{\,-1}\circ\vec{r} = \vec{n}(u,v).$

注：$\vec{n}(u,v)$ 不一定正则

⑥. Gauss映射

诱导的切映射 σ_{*p}? 课本用 g_{*p} $(g=\sigma)$

$g_{*p}:\sigma_{*p}: T_pS \to T_{\sigma(p)}\Sigma$ 是

$$d\vec{r} \to d\vec{n}\circ\sigma = d\vec{n}$$

$\therefore \sigma_{*p}(d\vec{r}) = d\vec{n}$

$\therefore \sigma_{*p}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u}du + \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}dv$

$\sigma_{*p}(\vec{r_u}) = \vec{n_u} \quad \sigma_{*p}(\vec{r_v}) = \vec{n_v}$

$\boxed{\text{定义}}$ Weingarten映射 W:

?

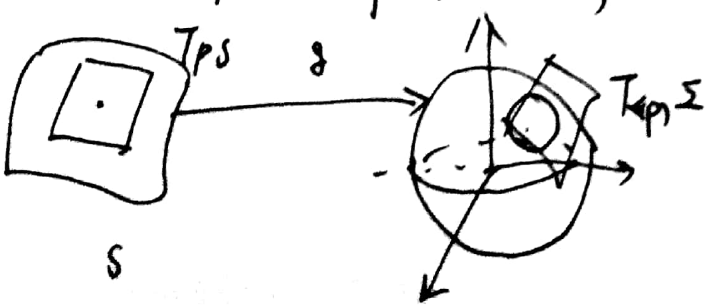
$$W = -g_* = -\sigma_{*p}: T_pS \to T_{\sigma(p)}\Sigma \subset T_pS$$

$$d\vec{r} \to -d\vec{n}$$

注: $T_{\sigma(p)}\Sigma \overset{\text{形式}}{=} \mathrm{span}\{\vec{n_u}, \vec{n_v}\} \subset \mathrm{span}\{\vec{r_u}, \vec{r_v}\} = T_pS$.

$\vec{n_u}\cdot\vec{n} = 0$, $\vec{n_v}\cdot\vec{n} = 0$, $\therefore \vec{n_u}, \vec{n_v} \in T_pS$.

这里由于 $\vec{n}(u,v)$ 并不一定是正则参数曲面，则 $\vec{n_u}\times\vec{n_v}$ 有可能为 $=\vec{0}$，因此 $T_{\sigma(p)}\Sigma$ ~~和span~~ 只是形式上的切空间. 即 $T_{\sigma(p)}\Sigma = \mathrm{span}\{\vec{n_u}, \vec{n_v}\}$，形式上取上一章切映射和切空间 $\sigma = I$.



2. Weingarten 映射的性质

$$W: \quad T_pS \to T_pS \qquad W^*(d\vec{r}) = -d\vec{n}$$

$$d\vec{r} \to -d\vec{n} \qquad W^*(\vec{r}_u\,du + \vec{r}_v\,dv) = -(\vec{n}_u\,du + \vec{n}_v\,dv)$$

$\boxed{\text{定理 3.1}}$ $\mathrm{II} = W(d\vec{r})\cdot d\vec{r} = d\vec{r}\cdot W(d\vec{r})$.

显然、

$\boxed{\text{定理 3.2}}$ $W(d\vec{r})\cdot \delta\vec{r} = d\vec{r}\cdot W(\delta\vec{r})$ $\boxed{W\text{ 自共轭线性变换}}$

$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ 泛函 Hilbert 空间.

证: $W(d\vec{r})\cdot\delta\vec{r} = -d\vec{n}\cdot\delta\vec{r}$

$$= (du, dv)\begin{bmatrix}-\vec{n}_u\\ -\vec{n}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{r}_u & \vec{r}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix}$$

$$= (du\ \ dv)\begin{bmatrix}L & M\\ M & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix}$$

$$= (\delta u\ \ \delta v)\begin{bmatrix}L & M\\ M & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix}$$

$$= -(\delta u\ \ \delta v)\begin{bmatrix}\vec{n}_u\\ \vec{n}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{r}_u & \vec{r}_v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}du\\ dv\end{bmatrix}$$

$$= W(\delta\vec{r})\cdot d\vec{r} = d\vec{r}\cdot W(\delta\vec{r}) \qquad \square.$$

3、Weigarten 映射的特征值特征向量

$W \doteq -g_* : T_pS \to T_pS$

$d\vec{r} \to -d\vec{n}$

$T_pS = \mathrm{span}\{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\}$

取 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ 为标准正交基 且 $\mathrm{span}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = T_pS$.

则存在矩阵 $A = (a_{ij})$ ∋

$$W(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$. 即

$$\begin{cases} W(\vec{e_1}) = a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} \\ W(\vec{e_2}) = a_{12}\vec{e_1} + a_{22}\vec{e_2}. \end{cases}$$

$\forall X = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in T_pS.$

$$W(X) = \vec{W}\left((\vec{e_1}\ \vec{e_2})\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}\right) = (\vec{W}\vec{e_1}, W\vec{e_2})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overset{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}{\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}}$$

定义 若 $\exists \lambda$，以及非零切向量 $d\vec{r}$ ∋ $W(d\vec{r}) = \lambda d\vec{r}$，

则称 λ 为 Weingarten 变换 W 的特征值，$d\vec{r}$ 称为对应于特征值为 λ 的特征向量，$d\vec{r}$ 方向称为特征方向.

$\boxed{\text{结论1}}$ $A^T = A$，且 λ 是 W 的特征值 $\Leftrightarrow$ λ 是 A 的特征值.

证：$a_{21} = W\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \vec{e_1} \cdot W\vec{e_2} = a_{12}$.

若 $W(d\vec{r}) = \lambda\, d\vec{r}$，$d\vec{r} = r_1\vec{e_1} + r_2\vec{e_2}$

$$W(d\vec{r}) = W(\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \lambda(\vec{e_1}, \vec{e_2})\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}.$$

□

$\boxed{\text{结论2}}$ Weingarten 映射 W 有两个实特征值 k_1, k_2，其中 $k_1 \geq k_2$，若 $k_1 > k_2$ 则 k_1 和 k_2 对应的特征向量彼此正交，若 $k_1 = k_2$ 则 $\forall$ 切方向都是特征方向.

证：由结论1知 W 有两个实特征值 $k_1 \geq k_2$.

~~设 k_1~~ 若 $k_1 \neq k_2$，设 k_i 对应的特征向量分别为 $d\vec{r_i}$ 则

$$\langle W(d\vec{r_1}), d\vec{r_2}\rangle = k_1\, d\vec{r_1} \cdot d\vec{r_2} = d\vec{r_1} \cdot W(d\vec{r_2}) = k_2\, d\vec{r_1} \cdot d\vec{r_2}$$

$\therefore d\vec{r_1} \cdot d\vec{r_2} = 0$.

若 $k_1 = k_2$，~~$|A| = 0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$~~ 即方程 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2 = 0$ 有两个重根.

$\therefore a_{11} = a_{22}$，$a_{12} = 0$，$k_1 = k_2 = a_{11} = a_{22}$

$\therefore \forall d\vec{r} \in T_pS$ 都是特征方向

4. 主曲率 主方向

主曲率 主方向：

$\boxed{\text{定义24}}$. 正则参数曲面上任一固定点处，其法曲率取最大值和最小值的方向称为主方向，相应的法曲率称之为主曲率。

~~由~~由上一小节可知

$\boxed{\text{定理33}}$. 正则参数曲面在每一点 p 处 Weingarten 映射的特征值恰好是这一点的主曲率，对应的特征方向恰好是主方向。

证：由讨论2.知 ~~存在单位向量 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 彼此正交，且 $\vec{e_i}$ 对应的特征值分别为 k_i~~. Weingarten 映射 W 存在特征值 $k_1 \geq k_2$，且存在对应的单位特征向量 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$，彼此正交。~~固定空间中点 p~~ 在切平面上取右手直角坐标系 $\{\vec{r}(u,v), \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$，切平面上向量 $\vec{e_1}$ 逆时针旋转到 $\vec{e_2}$ 的方向。

~~单位切方向~~ 切 $\forall$ ~~切方向~~ 起点置在 $\vec{r}(u,v)$ 则终点坐标必为

$\forall$ 单位切向量 $\vec{e}$

$(\cos\theta, \sin\theta)$ 则 $\vec{e} = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$ 其中 θ 为 $\vec{e_1}$ 转到 $\vec{e}$ 有向角，$0 \leq \theta < 2\pi$

$$k_n(\theta) = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{(W\vec{e})\cdot\vec{e}}{\vec{e}\cdot\vec{e}} = (k_1\cos\theta\,\vec{e_1} + k_2\sin\theta\,\vec{e_2})(\cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2})$$

$= k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = k_1 - (k_1-k_2)\sin^2\theta$

$= \cancel{k_1 - k_2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)} = k_2 + (k_1-k_2)\cos^2\theta$

$\therefore$ $\theta = 0, \pi$ 时 $k_n(\theta)$ 取最大为 k_1，对应的主方向为 $\vec{e_1}$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 时，$k_n(\theta)$ 取最小为 k_2，对应的方向向为 $\vec{e_2}$. □.

把定理3.3中的 $k_n(\theta)$ 表示式重述。

$\boxed{\text{定理 3.4}}$ Euler公式：设 $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ 是曲面 S 在 P 点彼此正交的主方向，对应的主曲率分别为 k_1 和 k_2，则曲面 S 在任一切方向 $\vec{e} = \cos\theta\,\vec{e_1} + \sin\theta\,\vec{e_2}$ 的法曲率为

$$k_n(\theta) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

$\boxed{\text{定义}}$ 脐点：若在曲面上一点 P 处 $k_1 = k_2$，则对 $\forall\theta$，$k_n(\theta) = k_1 = k_2$，那么称 P 为曲面的脐点。

$\boxed{\text{结论}}$ 点 P 是脐点 $\Leftrightarrow$ $\left.\frac{L}{E}\right|_p = \left.\frac{M}{F}\right|_p = \left.\frac{N}{G}\right|_p$.

证：$\Leftarrow$ P 是脐点，

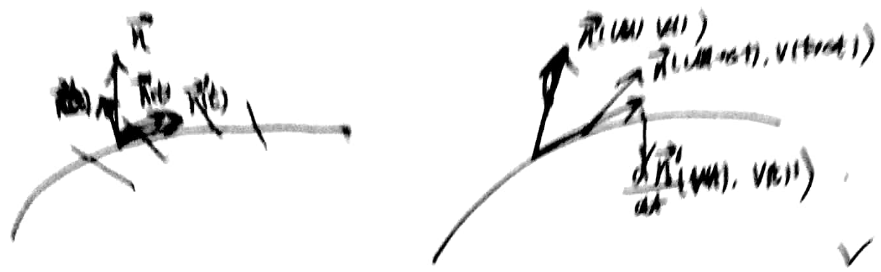
$$k_n = \frac{L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2} \text{ 是} = k_n\text{（常数）对} \forall du:dv$$

$$\therefore (L-Ek_n)(du)^2 + 2(M-Fk_n)\,du\,dv + (N-k_nG)(dv)^2 = 0 \text{ 对} \forall du:dv$$

$$\therefore \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = k_n \qquad \square$$

切平面与曲线C相切. P.

$$\frac{d\vec{n}(u(t),v(t))}{dt} \parallel \frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}$$



§4.4 主方向和主曲率的计算

主方向是使得法曲率 k_n 取得最大值和最小值的切方向，主曲率显然是法曲率 k_n 的最大值和最小值.（由定义知）

→ 了解曲面弯曲程度

↓ ?

如何计算 → 转化成 Weingarten 映射的特征值和特征向量

$$W=-g_*: T_pS \to T_pS$$

$$d\vec{r} \to -d\vec{n}$$

$$\begin{tikzcd} (u,v) \arrow[r, "\vec{r}(u,v)"] \arrow[d, "\mathrm{I}"'] & S \arrow[d] \\ (u,v) \arrow[r, "\vec{n}(u,v)"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

1. 计算主方向和主曲率

① ~~方法~~（先计算主曲率再计算主方向）

设 $\delta\vec{r}$ 为曲面 S 在 p 点主方向，~~$\delta\vec{r}=(\delta u,\delta v)$~~ $\delta\vec{r}=\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v\neq\vec{0}$，

$$W(\delta\vec{r})=\lambda\delta\vec{r}$$

$$\therefore -(\vec{n}_u\delta u+\vec{n}_v\delta v)=\lambda(\vec{r}_u\delta u+\vec{r}_v\delta v)$$

$$-(\vec{n}_u, \vec{n}_v)\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix} = \lambda(\vec{r}_u, \vec{r}_v)\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix}$$

两边内积 $\begin{bmatrix}\vec{r}_u\\ \vec{r}_v\end{bmatrix}$ 可得.

$$\begin{bmatrix}L & M\\ M & N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}E & F\\ F & G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta u\\ \delta v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \quad (*)$$

$$\therefore \begin{vmatrix}L-\lambda E & M-\lambda F\\ M-\lambda F & N-\lambda G\end{vmatrix} = 0$$

$$LN-(LG+EN)\lambda+EG\lambda^2-M^2\cancel{+2\lambda MF}+2\lambda MF-\lambda^2F^2=0$$

$$\therefore (EG-F^2)\lambda^2-(LG-2MF+EN)\lambda+LN-M^2=0 \quad (**)$$

$(**)$ 必有两个根 $k_1 \geq k_2$ （上一节已证）

$\begin{matrix}E & F & L & M\\ F & G & M & N\end{matrix}$

$$k_1+k_2=2H=\frac{LG-2MF+EN}{EG-F^2} \quad \checkmark$$

$$k_1k_2=K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2} \quad \checkmark$$

$\boxed{\text{定义}}$ $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 叫做曲面平均曲率. $K=k_1k_2$ 叫做曲面 Gauss 曲率或总曲率.

定义 若 $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=0$ 则称P点为平点.

若 $\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=k_n \neq 0$ 则称P为圆点.

结论 正则参数曲面S是平面一部分 当且仅当 S上点都是平点.

.... S是球面 .... 当且仅当 S上点都是圆点.

5 曲率线 和 Rodrigues 定理(罗德里格斯定理)

回忆 ~~参考~~ 渐近线 : 曲线C 在每一点的切线方向都是曲面S在

该点的渐近方向

定义

曲率线 : 曲线 C 在每一点的切方向都是曲面S在该点

的主方向

设 C : $u=u(t), v=v(t)$ 是曲率线 则由定义可知 $\exists \lambda(t) \Rightarrow$

$$W\left(\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}\right)=\lambda(t)\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}$$

$$\text{即} \quad -\frac{d\vec{n}(u(t),v(t))}{dt}=\lambda(t)\frac{d\vec{r}(u(t),v(t))}{dt}.$$

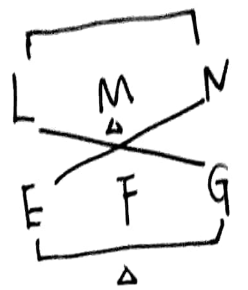
可得 Rodrigues 判别准则:

曲 定理3.5 Rodrigues 定理. (罗德里格斯定理).

曲面 S : $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 上 一条曲线 C : $u=u(t). v=v(t)$ 是

曲率线 $\Leftrightarrow$ 曲面S沿曲线C的法向量场沿曲线C的

导数 ~~切向量~~ 与曲线C相切. 即.



如何记忆：不要求记住，但是我自己应当掌握

$$H=\frac{1}{2}\cdot\frac{LG-2MF+EN}{EG-F^2}\qquad K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

主曲率方程

$$\lambda^2-2H\lambda+K=0$$

$\therefore k_1=H+\sqrt{H^2-K}$，$k_2=H-\sqrt{H^2-K}$

如何求主方向

① 若 $k_1\neq k_2$

将 k_1 和 k_2 代入(*)可得

k_i 主方向

$$\frac{\delta u}{\delta v}=-\frac{M-k_iF_1}{L-k_iE}=-\frac{N-k_iG}{M-k_iF}，i=1,2$$

② $k_1=k_2$ 则将 k_1 和 k_2 代入(*)

$$\cancel{L-k_i}\begin{bmatrix}L-k_iE & M-k_iF\\ M-k_iF & N-k_iG\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{L}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=k_1=k_2\right)$$

此时 $\forall\,\delta u:\delta v$ 都是主方向。

~~求主曲~~

$\boxed{\text{结论}}$ 平均曲率 H，~~相~~Gauss曲率 K，主曲率 k_1 和 k_2

与保持定向容许参数变换无关，与刚体运动无关

证：① 与刚体运动无关 P141 课后题5，第一、二基本量 刚体运动后

不变，显然 H、K、k_1、k_2 不变。

② 与保持定向容许参数变换无关。

$$\begin{cases}u=u(\tilde u,\tilde v)\\ v=v(\tilde u,\tilde v)\end{cases}\quad 且\ \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde u,\tilde v)}=|J|\neq 0$$

$$W(\cancel{\delta\vec r})=\cancel{\lambda\,\delta\vec r}$$

$$W(d\vec r)=\lambda\,d\vec r$$

$$d\vec{r} = \cancel{\vec{r}_u du}\ d\vec{r} = (\vec{r}_u \ \ \vec{r}_v)\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = (\vec{r}_u \ \ \vec{r}_v)\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix}$$

记为 J

当容许参数变换保持定向，则 $\vec{n}(u,v) = \vec{n}(\tilde{u},\tilde{v}) = \vec{n}(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v}))$

$$\therefore d\vec{n} = d\vec{n} = (\vec{n}_u \ \ \vec{n}_v)\begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = (\vec{n}_u \ \ \vec{n}_v)\, J \begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix}.$$

$$W(d\vec{r}) = -d\vec{n} = (\vec{n}_u \ \ \vec{n}_v)\, J\begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix} = \lambda(\vec{r}_u \ \ \vec{r}_v)\, J\begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} J \begin{bmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ N-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix} \cancel{J} = 0$$

$$\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix} = 0 \qquad \square$$

17 次课

$\boxed{\text{定理 5.1}}$ 正则参数曲面的主曲率 K_1 K_2 是定义在曲面上连续函数，

特别在每一个非脐点邻域内，主曲率 K_1 和 K_2 连续可微。

证明：正则参数曲面至少 3 次连续可微，$\therefore \underbrace{L, M, N}_{C^1}$.

$\underbrace{E, F, G}_{C^2}$ 且 $EG-F^2>0$ $\therefore H, K \in C^1$,

[illegible]

由：$\because k_1$ 和 $k_2 \in C^0$

又在脐点外内 $k_1 \neq k_2$. $\therefore H^2 - K > 0$

$\therefore k_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$，$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \in C^1$. □.

2. 直接求主方向，得曲率线方程.

$$L\delta u + M\delta v = \lambda(E\delta u + F\delta v) \quad (*')$$

$$M\delta u + N\delta v = \lambda(F\delta u + G\delta v).$$

$$\frac{L\delta u + M\delta v}{M\delta u + N\delta v} = \frac{E\delta u + F\delta v}{F\delta u + G\delta v}$$

$$(\delta u)^2(LF - EM) + \delta u\delta v(\cancel{MF} + LG - EN - \cancel{MF}) + (\delta v)^2(MG - NF) = 0 \quad (*'')$$

$$\begin{vmatrix} (\delta v)^2 & -\delta u\delta v & (\delta u)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0$$

① $L:M:N \neq E:F:G$. 非脐点.

则 $(*'')$ 有两个解 $\delta u:\delta v$ 代入 $(*')$ 可得主曲率.

② $L:M:N = E:F:G$ 脐点.，即 $\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$.

$\forall \delta u:\delta v$ 都是主方向 主曲率 $\lambda = \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$.

$\vec{r}_u$

曲率线方程是满足

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 \quad (R)$$

$\boxed{\text{定理4.2}}$ 正则参数曲面 $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 的曲面上任意固定点 (u,v) 处参数曲线的方向(是)是彼此正交的主方向 $\Leftrightarrow F=M=0$. 且此时 u-曲线方向对应的主曲率为 $\frac{L}{E}$, v-曲线方向对应的主曲率为 $\frac{N}{G}$.

证：$\Rightarrow$ $\vec{r}_u$ 与 $\vec{r}_v$ 正交 $\therefore F=0$

~~$\vec{r}_u$ 主方向，(1,0) 满足方程~~

~~又 du:dv 主方向~~ 又 $du:dv$ 是主方向 $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} (dv)^2 & -dudv & (du)^2 \\ L & M & N \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0 \quad ① \end{array}$$

$\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 是主方向 $\therefore du:dv=1:0$ 或 $0:1$ 满足 ①

$LF-EM=0=MG \quad \therefore M=0$

$\Leftarrow F=0 \quad \therefore \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$

又 $F=M=0$，① 可得 $(LG-EN)\,dudv=0$

$LG\neq EN$, 则 $du:dv=1:0$ 或 $0:1$

$LG=EN$ 则 $\forall\, du:dv$ 都满足上式

$\therefore \vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 是彼此正交的主方向

它对应的主曲率为

$$k_1 = \frac{L\cdot 1+M\cdot 0}{E\cdot 1+F\cdot 0} = \frac{L}{E} = \frac{M\cdot 1+N\cdot 0}{F\cdot 1+G\cdot 0} = \frac{M}{F}$$

它对应主曲率为

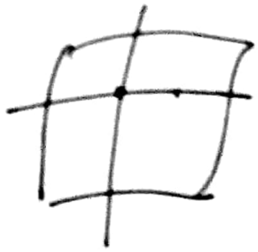
$$k_2 = \frac{L\cdot 0+M\cdot 1}{E\cdot 0+F\cdot 1} = \frac{M\cdot 0+N\cdot 1}{F\cdot 0+G\cdot 1} = \frac{N}{G} = \frac{M}{F}$$ 口

⇓直

$\boxed{\text{定理4.3}}$ 正则参数曲面S上，参数曲线网是彼此正交的曲率线网

⇔ $F=M\equiv 0$. 此时曲面的第一和第二基本形式为

$$\mathrm{I} = E(du)^2+G(dv)^2$$



$$\mathrm{II} = E k_1 (du)^2 + G k_2 (dv)^2$$

其中 k_1 和 k_2 是主曲率

定理4.3中~~曲率线网~~的情况是否可能发生，即是否有参数曲线网是彼此正交的曲率线网呢？非脐点附近肯定存在.

$\boxed{\text{定理4.4}}$ 正则参曲面S上每一个非脐点邻域内存在参数系 $(\tilde u,\tilde v)$ 使得在新参数系 $(\tilde u,\tilde v)$ 下参数曲线网是彼此正交的曲率线网.

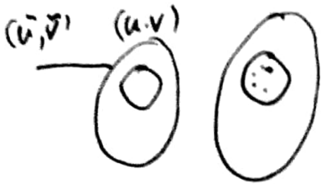
证：有向量场 ~~$\vec r(u,v)$~~. P是非脐点，P点附近可以由正则参数曲面表示 $\vec r=\vec r(u,v)$，定义连续可微切~~向量场~~向量场分别

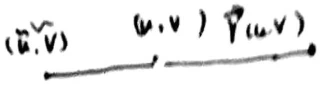
$\vec{a}(u,v)$ $k_1 = H+\sqrt{H^2-K}$

$\vec{b}(u,v)$ $k_2 = H-\sqrt{H^2-K}$ 对应 ~~单位~~ 主方向向量场

则 $\underbrace{\text{存在}}_{\text{在}P\text{点邻域}}$ 参数系 $\tilde{u}, \tilde{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{r}_{\tilde{u}} \parallel \vec{a}(u,v)$ $\vec{r}_{\tilde{v}} \parallel \vec{b}(u,v)$

$(\tilde{u},\tilde{v})$ 与 (u,v) 对换 $\vec{a}$





$\square$

注：

P 脐点，总有在 $\vec{a}(u,v), \vec{b}(u,v) \in C^1$ ~~使得~~ 其中 $\vec{a}_0 = \vec{a}$，$\vec{b}_0 = \vec{b}$ 是 P 点处的 ~~彼此~~

正交主方向 ∴ $\underbrace{\exists}_{P\text{点邻域}}$ 新参数系 $(\tilde{u},\tilde{v})$ $\Rightarrow$ $\vec{r}_{\tilde{u}} \parallel \vec{a}_0$，$\vec{r}_{\tilde{v}} \parallel \vec{b}_0$

错 P 脐点处

3. Weingarten 映射在自然基底 $\{\vec{r}_u, \vec{r}_v\}$ 下矩阵．Gauss 曲率

意义，第三基本形式

① Weingarten 映射在自然基底下矩阵

设 $W(\vec{r}_u) = -\vec{n}_u = a_{11}\vec{r}_u + a_{12}\vec{r}_v$

$W(\vec{r}_v) = -\vec{n}_v = a_{21}\vec{r}_u + a_{22}\vec{r}_v$

$$(W(\vec{r}_u), W(\vec{r}_v)) = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$?

习惯，课本写成列向量

$= (-\vec{n}_u, \vec{n}_v)$

两边 $\cdot \begin{bmatrix} \vec{r}_u \\ \vec{r}_v \end{bmatrix}$，$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} \cancel{GM-FN}\ GL-FM & GM-FN \\ EM-FL & EN-FM \end{bmatrix}}$$

$$\cancel{W(\vec{r}_u)}\ W$$

$$W(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = (\vec{r}_u\ \vec{r}_v)\underbrace{\left(\frac{1}{EG-F^2}\begin{bmatrix} GL-FM & GM-FN \\ EM-FL & EN-FN \end{bmatrix}\right)}_{B}$$

回忆在标准正交基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ 下矩阵为实对称矩阵 A. 这两个矩阵有什么关系呢？

$$(\vec{r}_u\ \vec{r}_v) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\text{记 } T}$$

$$\therefore W(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = W((\vec{e}_1\ \vec{e}_2)T) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)A\cdot T = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)T^{-1}AT$$

$$\therefore B = T^{-1}AT$$

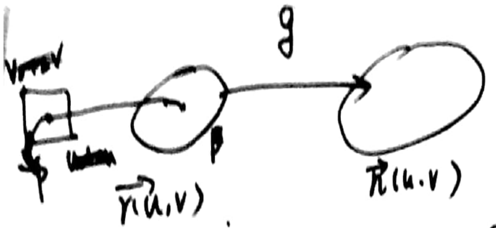
$$\therefore |B| = |A|$$

$\underline{\text{Trace } A = \text{Trace } B}$. 查高代

$$|\lambda I - B| = |\lambda T^{-1}IT - T^{-1}AT| = |\lambda I - A| = 0 \quad \text{特征多项相同}$$

② Gauss曲率意义.

Gauss映射



D包含p小邻域

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv \xrightarrow{\text{Gauss映射后面积为}} \iint_D |\vec{n}_u \times \vec{n}_v| \, du dv$$

$$= \iint_D |K| \, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv.$$

$$\lim_{D \to p} \frac{\iint_D |K| \, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv}{\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv} = |K(p)| \; ?$$

积分中值定理或 Rudin 实分析与复分析.

D收缩到p.

简证:

$$\frac{\iint_D |K(u,v)| \, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv - \iint_D |K(p)| \, |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv}{\int_\Omega |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv} \le \frac{\iint_D \varepsilon \cdot |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv}{\int_\Omega |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du dv} \le \varepsilon.$$

由K(u,v)连续性 对∀ε>0 ∃δ ...

③ 曲面S 第三基本形式

$$\begin{array}{ccc} (u,v) & \xrightarrow{\vec{r}(u,v)} & S \\ \downarrow 1 & & \uparrow \\ (u,v) & \xrightarrow{\vec{n}(u,v)} & \Sigma \end{array}$$

g^*: Σ上二次微分形式 → S上二次微分形式

$$A(du)^2 + B\,du dv + C(dv)^2 \to \dot{A}(du)^2 + \dot{B}\,du dv + \dot{C}(dv)^2$$

[redacted]

$$\mathrm{III} = g^* \mathrm{I}_\Sigma \; d\vec{n} \cdot d\vec{n} = \vec{n}_u^2 (du)^2 + 2\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v \, du dv + \vec{n}_v^2 (dv)^2$$

Σ第一基本形式

$$= e(du)^2 + 2f\,du dv + g(dv)^2$$

事实上，第四基本形式并不会带来曲面更多地刻画，因为它们满足关系式

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0 .$$

定理 曲面 S 上三个基本形式满足

$$\mathrm{III} - 2H\,\mathrm{II} + K\,\mathrm{I} = 0$$

其中 H 为平均曲率，K 为 Gauss 曲率（总曲率）。

~~证：曲面 S 上任一点 P 处总存在邻域使得在此邻域内 S 有新参数系 $(\bar{u},\bar{v})$ 使得在 P 点处 $\vec{r}_{\bar{u}}$ 和 $\vec{r}_{\bar{v}}$ 是彼此正交的主方向~~

~~$\vec{r}_{\bar{u}} \parallel \vec{a}_0$，$\vec{r}_{\bar{v}} \parallel \vec{b}_0$ 其中 $\vec{a}_0$ 和 $\vec{b}_0$ 为 P 点彼此正交主方向~~

~~则在 P 点 $F = M = 0$.~~

证：设 S 在 P 点附近正则参数曲面表示为

$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$，点 P 对应的参数为 (u_0,v_0)，假定在 $P(u_0,v_0)$ 两个彼此正交的主方向单位向量

$$\vec{e}_1 = a_{11}\vec{r}_u\big|_p + a_{12}\vec{r}_v\big|_p,\quad \vec{e}_2 = a_{21}\vec{r}_u\big|_p + a_{22}\vec{r}_v\big|_p$$

$$(\vec{e}_1\ \vec{e}_2) = (\vec{r}_u\ \vec{r}_v)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$（总可以做到，否则让 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 换一下顺序即可），$\vec{e}_i$ 对应主曲率为 k_i，$i=1,2$ (*) 引入新的参数系

$$u = a_{11}\tilde{u} + a_{21}\tilde{v},\quad v = a_{12}\tilde{u} + a_{22}\tilde{v} \quad 则$$

$$(\vec{r}_{\tilde{u}}\ \vec{r}_{\tilde{v}}) = (\vec{r}_u\ \vec{r}_v)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_{\tilde u}\Big|_p = a_{11}\vec{r}_u\Big|_p + a_{12}\vec{r}_v\Big|_p = \vec{e}_1$$

$$\vec{r}_{\tilde v}\Big|_p = a_{21}\vec{r}_u\Big|_p + a_{22}\vec{r}_v\Big|_p = \vec{e}_2$$

在新参数系 $(\tilde u, \tilde v)$ 下　在p点附近 Ⅰ. Ⅱ. Ⅲ 不变.

在p点处

且 $\mathrm{I} = E(d\tilde u)^2 + G(d\tilde v)^2$

$\mathrm{II} = E k_1 (d\tilde u)^2 + G k_2 (d\tilde v)^2$

又 $-\vec{n}_{\tilde u} = k_1 \vec{r}_{\tilde u}$, $-\vec{n}_{\tilde v} = k_2 \vec{r}_{\tilde v}$　（原来漏了 ω. 课上说一下）

$\mathrm{III} = k_1^2 E(d\tilde u)^2 + k_2^2 G(d\tilde v)^2$

代入即得等式成立.　$\square$

注：保持定向的容许参数变化. Weingarten 映射不变

$$W(\vec{r}_u\ \vec{r}_v) = -(\vec{n}_u\ \vec{n}_v), \quad \tilde W(\vec{r}_{\tilde u}\ \vec{r}_{\tilde v}) = -(\vec{n}_{\tilde u}\ \vec{n}_{\tilde v})$$

由于 $(\vec{r}_{\tilde u}\ \vec{r}_{\tilde v}) = (\vec{r}_u\ \vec{r}_v) J$　其中 $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \tilde u} & \frac{\partial u}{\partial \tilde v} \\ \frac{\partial v}{\partial \tilde u} & \frac{\partial v}{\partial \tilde v} \end{pmatrix}$.

则 $W(\vec{r}_{\tilde u}\ \vec{r}_{\tilde v}) = W(\vec{r}_u\ \vec{r}_v) J = \underline{-(\vec{n}_u\ \vec{n}_v)} J$

$= -(\vec{n}_{\tilde u}\ \vec{n}_{\tilde v})$.

容许参数变换.