§ 1.1. 随机.

def. 样本空间：$\Omega=\{\omega\}$，ω：样本点

↓ 子集 ← 约束：def. 随机变量

def. 随机事件：$A, B, C, \cdots$

关系 → 包含，相等，互不相容.

运算 → $\cup$，$\cap$，$A-B$，$\bar{A}$

$\cap$ → AB

↓ 算律

交换、结合、分配

对偶：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

def. 事件域：子集 & 运算的集合类：(1) $\Omega\in\mathcal{F}$；(2) $A\in\mathcal{F}$，则 $\bar{A}\in\mathcal{F}$

并与对立

(3) $A_n\in\mathcal{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{F}$（可 ∞ 推广）

$(\Omega,\mathcal{F})$ 可测空间

* 所有可能发生的事件的总合，与 ω 数有关

def. Borel 事件域（Page.10.）.

§ 1.2. 概率

公理. $(\Omega,\mathcal{F})$，对 $\forall A\in\mathcal{F}$. 实值函数 $P(A)$：

(1). $P(A)\geq 0$ （非负）

(2). $P(\Omega)=1$ （正则）

(3). $A_n, n=1,\cdots$ 互不相容，$P(\bigcup_n A_n)=\sum_n P(A_n)$ （可加）

$P(A)$ 为 A 的概率，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 概率空间

e.g. 排列组合

计数原理. (1.) 乘法原理.（k 步. $m_1\times m_2\times\cdots m_k$）

(2.) 加法原理.（k 种. $m_1+m_2+\cdots+m_k$）

排列：（次序）$P_n^r = n!/(n-r)!$

（重复）$P_n^r = n^r$

组合：（次序）$\binom{n}{r} = P_n^r / r!$

（重复）$\binom{n+r-1}{r}$

古典方法（概率）. $P(A) = \dfrac{P_A}{\Omega}$，要求ω等可能性.

e.g. 抽样　N，M不合格. 抽n个中r个不合格

$$p = \frac{\binom{M}{r}\binom{N-M}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

e.g. 放回抽样　$p = \dfrac{\binom{n}{r} M^r (N-M)^{n-r}}{N^n} = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$

几何方法. …

§1.3. 概率性质.

The. 1.3.1.　$P(\emptyset) = 0$

The. 1.3.2.　$P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$　* A_n 互不相容

The. 1.3.3.　$P(A) = 1 - P(\bar{A})$

The. 1.3.4.　$A \supset B$，$P(A-B) = P(A) - P(B)$

$\rightarrow$　$A \supset B$，$P(A) \geqslant P(B)$

The. 1.3.5　$P(A-B) = P(A) - P(AB)$

e.g. Page. 34.

The.1.3.6 (加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$\rightarrow \quad P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$

def. $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, $\lim_{n\to\infty}F_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}F$, $F_1\subset F_2\subset F_3\subset\cdots\subset F_n\subset\cdots$

def. $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$, $\lim_{n\to\infty}E_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}E$, $E_1\supset E_2\supset E_3\cdots\supset E_n\supset\cdots$

The. 1.3.7. (概率连续) $(\Omega,\mathcal{F},P)$, P既下连续,又上连续

$P(\bigcup_n F_n)=\lim_{n\to\infty}P(F_n)$ * 下连续

$P(\bigcap_n E_n)=\lim_{n\to\infty}P(E_n)$ * 上连续

The.1.3.8. P(A)可列可加 $\Leftrightarrow$ (1). P(A)有限可加 (2) P(A)下连续

§1.4. 条件概率(*)

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

(1). 乘法公式: $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$

$\rightarrow \quad P(A_1\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$

e.g.(罐子模型) Page. 43.

(2). 全概率公式: $B_1\cdots B_n$为Ω的分割. 则$\forall A$:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

n=2时: $P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

e.g. 彩票, 敏感性问题调查. Page 46.

(3). 贝叶斯公式 $B_1\cdots B_n$为Ω的分割. 则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$$

§1.5 独立性.

A, B 独立: $P(AB)=P(A)P(B)$ 则 $\bar{A}$, $\bar{B}$, 与 A, B 也互不关联

A_n 相互独立: $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$

* "两两独立" ≠ "相互独立"

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$

$$\vdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$