泛函分析

第一章 度量空间

§ 1 度量空间

1.1 度量空间的定义及例

定义 设 $X \neq \varnothing$, $\rho : X \times X \ni (x, y) \mapsto \rho(x, y) \in \mathbb{R}^1$, 如果

1. 正定性: $\rho(x, y) \geq 0$ 且 $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. 对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. 三角不等式: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

则称 $\rho(x, y)$ 为 x 与 y 间的距离, 称 (X, ρ) 为度量空间或距离空间.

称 $B(x, \delta) = \{y \,|\, \rho(x, y) < \delta\}$ 为以 x 为中心 δ 为半径的 x 的开球形邻域.

记 $\overline{B}(x, \delta) = \{y \,|\, \rho(x, y) \leq \delta\}$ 称为闭球.

设 $\varnothing \neq A \subset X$, 则 (A, ρ) 是距离空间, 称为 X 的子空间.

例 对 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, 规定 (范数) $\|x\| = (\sum_{i=1}^k |x_i|^2)^{1/2}$;

$\rho(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^2)^{1/2}$,

则 $(\mathbb{R}^k, \rho)$ 是度量空间, 称为 Euclid 空间. 简记为 $\mathbb{R}^k$.

在 $\mathbb{R}^k$ 上, 对 $1 \leq p < \infty$, 规定

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^k |x_i|^p)^{1/p}$; $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = (\sum_{i=1}^k |x_i - y_i|^p)^{1/p}$,

$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$; $\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq k} |x_i - y_i|$,

则 $(\mathbb{R}^k, \rho_p)$ 也是度量空间.

例 对 $x \in C[a, b] \triangleq \{\, x \,|\, x \text{ 是在 } [a, b] \text{ 上的连续函数}\}$, 规定

$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$; $\rho(x, y) = \|x - y\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$,

则 $(C[a, b], \rho)$ 是度量空间. 简记为 $C[a, b]$.

证 1. 对 $x, y \in C[a, b]$, 有 $\rho(x, y) \geq 0$ 且

$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| = \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv y(t)$.

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3. 设 $x, y, z \in C[a, b]$, 对任意 $t \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \\ &\leq \max |x(t) - z(t)| + \max |z(t) - y(t)| = \|x - z\| + \|z - y\|. \end{aligned}$$

因此 $\|x - y\| = \max |x(t) - y(t)| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$.

即 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

例 $L^p[a, b] \triangleq \{\, x \,|\, \|x\|_p \triangleq (\int_a^b |x(t)|^p dt)^{1/p} < +\infty\}$ $(1 \leq p < \infty)$,

规定 $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = (\int_a^b |x(t) - y(t)|^p dt)^{1/p}$,

则 $(L^p[a, b], \rho_p)$ 是度量空间.

例 $l^p \triangleq \{\, x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \,|\, \|x\|_p \triangleq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} < +\infty\}$

$(1 \leq p < \infty)$, 规定 $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p = (\sum_{i=1}^\infty |x_i - y_i|^p)^{1/p}$,

则 (l^p, ρ_p) 是度量空间.

引理 设 $a > 0$, $b > 0$, 则 $ab \leq a^p/p + b^q/q$.

其中 $p > 1$, $q > 1$ 且 $1/p + 1/q = 1$. 称 p 与 q 为互为对偶数.

证 设 $y = \varphi(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续的严格单调递增且 $\varphi(0) = 0$, 则

$ab \leq \int_0^a \varphi(x) dx + \int_0^b \varphi^{-1}(y) dy$.

特别取 $\varphi(x) = x^{p-1}$, 则 $\varphi^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{q-1}$. 故

$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = a^p/p + b^q/q$.

定理 (O. Hölder 不等式) 设 $x \in l^p$, $y \in l^q$, 则 $\sum_{i=1}^\infty |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$.

证 不妨设 $\|x\|, \|y\| \neq 0$, 令 $a = |x_i|/\|x\|$, $b = |y_i|/\|y\|$, 则

$\frac{|x_i y_i|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{|x_i|^p}{p\|x\|^p} + \frac{|y_i|^q}{q\|y\|^q}$. 两边作和

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^\infty |x_i y_i|}{\|x\|\|y\|} = \sum_{i=1}^\infty \frac{|x_i y_i|}{\|x\|\|y\|} &\leq \sum_{i=1}^\infty \frac{|x_i|^p}{p\|x\|^p} + \sum_{i=1}^\infty \frac{|y_i|^q}{q\|y\|^q} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p}{p\|x\|^p} + \frac{\sum_{i=1}^\infty |y_i|^q}{q\|y\|^q} = 1/p + 1/q = 1. \end{aligned}$$

因此 $\sum_{i=1}^\infty |x_i y_i| \leq \|x\| \|y\|$.

定理 (H. Minkowski 不等式) 设 $x, y \in l^p$, 则 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

证 $\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^\infty (|x_i| + |y_i|) |x_i + y_i|^{p-1}$

$\leq [(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p)^{1/p}] (\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^{(p-1)q})^{1/q}$

$= [(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p)^{1/p}] (\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p)^{1/q}$.

因此 $(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^p)^{1/p}$.

例 $l^\infty \triangleq \{\, x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \,|\, \|x\|_\infty \triangleq \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i| < +\infty\}$, 规定

$\rho_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \sup_{1 \leq i < \infty} |x_i - y_i|$,

则 (l^∞, ρ) 是度量空间.

例 设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 是可测集,

$L^\infty(E)\triangleq\{\,x\,|\,x$ 是可测函数, 存在零集 e, 使得 $x(t)$ 在 $E-e$ 上有界$\}$.

规定范数 $\|x\|_\infty=\inf_{me=0}\sup_{E-e}|x(t)|$; $\rho_\infty(x,y)=\|x-y\|_\infty$,

则 $(L^\infty(E),\rho_\infty)$ 是度量空间.

引理 设 $x\in L^\infty(E)$, 则存在零集 $e_0\subset E$, 使得 $\|x\|_\infty=\sup_{E-e_0}|x(t)|$.

证　对任意 $\varepsilon=1/k>0$, 存在零集 e_k, 使得

$\|x\|_\infty\le\sup_{E-e_k}|x(t)|<\|x\|_\infty+1/k$.

记 $e_0=\bigcup_{k=1}^\infty e_k$, 则 $me_0=0$.

$\|x\|_\infty\le\sup_{E-e_0}|x(t)|\le\sup_{E-e_k}|x(t)|<\|x\|_\infty+1/k$.

因此 $\|x\|_\infty=\sup_{E-e_0}|x(t)|$.

设 $x,y,z\in L^\infty(E)$, 由引理存在零集 e_i, 使得

$\|x-z\|_\infty=\sup_{E-e_1}|x(t)-z(t)|$; $\|z-y\|_\infty=\sup_{E-e_2}|z(t)-y(t)|$.

$$\begin{aligned}\|x-y\|_\infty&\le\sup_{E-e_1\bigcup e_2}|x(t)-y(t)|\\&\le\sup_{E-e_1\bigcup e_2}|x(t)-z(t)|+\sup_{E-e_1\bigcup e_2}|z(t)-y(t)|\\&\le\sup_{E-e_1}|x(t)-z(t)|+\sup_{E-e_2}|z(t)-y(t)|\\&=\|x-z\|_\infty+\|z-y\|_\infty.\end{aligned}$$

注　对 $x\in C[a,b]\subset L^\infty[a,b]$, 有 $\|x\|_\infty=\max_{a\le t\le b}|x(t)|$.

因此 $C[a,b]$ 是 $L^\infty[a,b]$ 的子空间.

例 设 $E\subset\mathbb{R}^k$ 是可测集, $mE<\infty$, $S(E)\triangleq\{x\,|\,x(t)$ 是可测函数$\}$.

规定 $\rho(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt$.

$\rho(x,y)\ge0$ 且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x(t)=y(t)$ *a.e.* 于 E.

记 $f(t)=\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调递增.

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}\,dt\le\int_E\frac{|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}{1+|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}\,dt\\&=\int_E\frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}\,dt+\int_E\frac{|z(t)-y(t)|}{1+|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|}\,dt\\&\le\int_E\frac{|x(t)-z(t)|}{1+|x(t)-z(t)|}\,dt+\int_E\frac{|z(t)-y(t)|}{1+|z(t)-y(t)|}\,dt=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

因此 $(S(E),\rho)$ 是度量空间.

例 在数列空间 $s=\{\,x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_i\in\mathbb{R}\}$ 上, 规定距离

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$, 则 (s,ρ) 是度量空间.

1.2 度量空间的点列收敛

定义 设 (X,ρ) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 上的序列, $x\in X$, 若

$\lim_n\rho(x_n,x)=0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 记为 $x_n\to x$ 或 $x=\lim_n x_n$.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

定理 度量空间中的收敛点列的极限是唯一的.

证　设 $x_n\to x$ 又 $x_n\to y$, 则 $0\le\rho(x,y)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)$.

令 $n\to+\infty$ 得 $\rho(x,y)=0$. 因此 $x=y$.

定理 度量空间中的收敛点列的子列收敛.

定理 设 $x_n\to x$, $y_n\to y$, 则 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.

证　$\rho(x_n,y_n)\le\rho(x_n,x)+\rho(x,y_n)\le\rho(x_n,x)+\rho(x,y)+\rho(y_n,y)$.

因此 $|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\le\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)$.

故 $\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$.

推论 设 $x_n\to x$, $y_n\to y$, 则 $\{\rho(x_n,y_n)\}$ 是有界.

例 $\mathbb{R}^k$ 中点列 $x_n=(x_1^{(n)},\cdots,x_k^{(n)})$ 收敛于 $a=(a_1,\cdots,a_k)$

$\Leftrightarrow$ 对每个 $1\le i\le k$, 有 $\lim_n x_i^{(n)}=a_i$.

证　由 $|x_i^{(n)}-a_i|\le(\sum_{i=1}^k|x_i^{(n)}-a_i|^2)^{1/2}=\rho(x_n,a)$ 得证.

例 $C[a,b]$ 中点列 x_n 收敛于 $x\Leftrightarrow x_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

例 $C[a,b]$ 中规定 $\|x\|_p=(\int_a^b|x(t)|^pdt)^{1/p}$, $\rho_p(x,y)=\|x-y\|_p$,

则 $(C[a,b],\rho_p)$ 是 $L^p[a,b]$ 的子空间.

$(C[0,1],\rho_1)$ 中点列 $x_n(t)=t^n$, $\rho_1(x_n,0)=\int_0^1t^ndt=\frac{1}{n+1}\to0$,

因此 $x_n(t)=t^n$ 按距离 ρ_1 收敛于 0. 但

$\rho(x_n,0)=\max_{0\le t\le1}|t^n|=1\not\to0$. 因此 $x_n(t)$ 并非一致收敛于 0.

例 设 $x_n,x\in S(E)$, 则 $x_n\to x\Leftrightarrow x_n(t)$ 在 E 上依测度收敛于 $x(t)$.

证　$\Rightarrow$ 对任意 $\sigma>0$,

$$\begin{aligned}\frac{\sigma}{1+\sigma}mE(|x_n-x|\ge\sigma)&\le\int_{E(|x_n-x|\ge\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\,dt\\&\le\int_E\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\,dt=\rho(x_n,x)\to0.\end{aligned}$$

故 $mE(|x_n-x|\ge\sigma)\to0$. 故 $x_n(t)$ 在 E 上依测度收敛于 $x(t)$.

$\Leftarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$ 及 $\sigma=\frac{\varepsilon}{2mE+1}$, 由于 $\lim_n mE(|x_n-x|\ge\sigma)=0$,

故存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $mE(|x_n-x|\geq\sigma)<\varepsilon/2$.

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x)&=\int_E \frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\,dt\\&=\int_{E(|x_n-x|\geq\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\,dt+\int_{E(|x_n-x|<\sigma)}\frac{|x_n(t)-x(t)|}{1+|x_n(t)-x(t)|}\,dt\\&\leq mE(|x_n-x|\geq\sigma)+\sigma mE<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

§ 2 度量空间中的点集及其上的映射

2.1 度量空间的点集

定义 设 (X,ρ) 是度量空间, $A\subset X$, $x\in X$,

1. 如果存在 $B(x,\delta)$, 使得 $B(x,\delta)\subset A$, 则称 x 为 A 的内点,
   A 的内点全体称为 A 的开核, 记为 A^{O};
2. 如果存在 $B(x,\delta)$, 使得 $B(x,\delta)\subset A^C$, 则称 x 为 A 的外点;
3. 如果对任意 $B(x,\delta)$, 有 $B(x,\delta)\bigcap A\neq\varnothing$, $B(x,\delta)\bigcap A^C\neq\varnothing$,
   则称 x 为 A 的边界点, A 的边界点全体称为 A 的边界, 记为 ∂A;
4. 如果存在 $B(x,\delta)$, 使得 $B(x,\delta)\bigcap A=\{x\}$, 则称 x 为 A 的孤立点;
5. 如果对任意 $B(x,\delta)$, 有 $B(x,\delta)\bigcap(A-\{x\})\neq\varnothing$,
   则称 x 为 A 的聚点, A 的聚点全体称为 A 的导集, 记为 A';
6. 如果 $A'\subset A$, 则称 A 为闭集;
7. 记 $\overline{A}=A\bigcup A'$, 称为 A 的闭包;
8. 如果 A 的每一点都是 A 的内点, 则称 A 为开集;
9. 如果存在 $B(x_0,M)$, 使得 $A\subset B(x_0,M)$, 则称 A 为有界集.

例 设 $A=(0,1]\bigcup\{2\}\subset\mathbb{R}^1$, 则 $A'=[0,1]$, $\overline{A}=[0,1]\bigcup\{2\}$, $A^{\mathrm{O}}=(0,1)$.

例 设 X 是非空集合, $\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$ 称为 X 上的离散距离.

设 $A\subset X$, 则每个 $x\in A$ 是 A 的内点, $A^{\mathrm{O}}=A$; $A'=\varnothing$. X 是有界集.

例 设 $X=(0,1]\bigcup\{2\}\subset\mathbb{R}^1$, 则 $(0,1]$ 及 $\{2\}$ 都是 X 的既开又闭的集合.

定理 (开集公理) 设 (X,ρ) 是度量空间, 则

1. X, $\varnothing$ 是开集;
2. 一族开集的并是开集;
3. 有限个开集的交是开集.

证　3. 设 G_i 为开集, 对任意 $x\in G_1\bigcap G_2$, 有 $x\in G_1$ 且 $x\in G_2$.
故存在 $B(x,\delta_i)$, 使得 $B(x,\delta_i)\subset G_i$.
取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$, 则 $B(x,\delta)\subset G_1\bigcap G_2$. 因此 $G_1\bigcap G_2$ 是开集.

定理 (闭包公理) 设 (X,ρ) 是度量空间, $A,B\subset X$, 则

1. $\overline{\varnothing}=\varnothing$;
2. $A\subset\overline{A}$;
3. $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$.

证　3. 由于 $A,B\subset A\bigcup B$, 故 $\overline{A},\overline{B}\subset\overline{A\bigcup B}$. 因此 $\overline{A}\bigcup\overline{B}\subset\overline{A\bigcup B}$.
对任意 $x\notin\overline{A}\bigcup\overline{B}$, 有 $x\notin\overline{A}$ 且 $x\notin\overline{B}$.
因此存在 $B(x,\delta_i)$, 使得 $B(x,\delta_1)\bigcap A=\varnothing$ 且 $B(x,\delta_2)\bigcap B=\varnothing$.
取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $B(x,\delta)\bigcap(A\bigcup B)=\varnothing$. 故 $x\notin\overline{A\bigcup B}$.
因此 $\overline{A\bigcup B}\subset\overline{A}\bigcup\overline{B}$.

定理 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 则 A 为开集 $\Leftrightarrow$ A^C 是闭集.

证　$\Rightarrow$ 由于 A 是开集, 对任意 $x\in A$, 存在 x 的邻域 $B(x,\delta)\subset A$.
故 $B(x,\delta)\bigcap A^C=\varnothing$. 故 $x\notin(A^C)'$.
故 $(A^C)'\subset A^C$. 即 A^C 是闭集.
$\Leftarrow$ 对每个 $x\in A$, 有 $x\notin A^C$. 由于 A^C 是闭集, 故 $x\notin(A^C)'$.
因此存在 $B(x,\delta)$, 使得 $B(x,\delta)\bigcap(A^C-\{x\})=\varnothing$. 故 $B(x,\delta)\bigcap A^C=\varnothing$.
因此 $B(x,\delta)\subset A$. 即 x 为 A 的内点. 因此 A 为开集.

定理 (闭集公理) 设 (X,ρ) 是度量空间, 则

1. 空集和 X 是闭集;
2. 一族闭集 F_α 的交 $\bigcap_\alpha F_\alpha$ 是闭集;
3. 有限个闭集 F_i 的并 $\bigcup_{i=1}^k F_i$ 是闭集;

证　3. 由于 F_i 是闭集, 故 F_i^C 是开集.
因此 $(\bigcup_{i=1}^k F_i)^C=\bigcap_{i=1}^k F_i^C$ 是开集. 因此 $\bigcup_{i=1}^k F_i$ 是闭集.

定理 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 则

1. $x\in A'\Leftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\}\in(A-\{x\})$, 使得 $\lim_{n\to\infty}x_n=x$;

2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \in A$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

证 1. $\Rightarrow$ 由于 $x \in A'$, 故 $B(x,1/n)\bigcap(A-\{x\}) \neq \varnothing$.

取 $x_n \in B(x,1/n)\bigcap(A-\{x\}) \neq \varnothing$, 则 $x_n \to x$.

2.2 稠密性与可分性

定义 设 X 是度量空间, $A, B \subset X$, 若 $\overline{B} \supset A$, 则称 B 在 A 中稠密;

若存在可数集 D 在 X 中稠密, 则称 X 为可分空间.

例 由于 $\mathbb{Q}^k \subset \mathbb{R}^k$ 是在 $\mathbb{R}^k$ 中稠密的可数集, 因此 $\mathbb{R}^k$ 是可分空间.

例 由于有理系数多项式全体是在 $C[a,b]$ 上稠密的可数集,

故 $C[a,b]$ 可分空间.

例 由于有理系数多项式全体是在 $L^p[a,b]$ 上稠密的可数集,

故 $L^p[a,b]$ 可分空间.

例 $L^\infty[a,b]$ 不是可分空间.

例 l^∞ 不是可分空间.

证 记 $T = \{t = (t_1, \cdots, t_n, \cdots) \,|\, t_i = 0 \text{或} 1\} \subset l^\infty$,

作 $f: T \ni t \mapsto 0.t_1t_2\cdots t_n \cdots \in B_2 = \{$二进制小数全体$\}$,

则 f 是满射. 因此 $\overline{\overline{T}} \geq \overline{\overline{B}}_2 = \overline{\overline{(0,1]}} = \aleph$.

对任意 $t, s \in T$, $t \neq s$, 有 $\rho(t,s) = 1$.

因此 $\mathscr{B} = \{B(t,1/3) \,|\, t \in T\}$ 是互不相交的球族. 且 $\overline{\overline{\mathscr{B}}} = \overline{\overline{T}} \geq \aleph$.

若 $M \subset l^\infty$ 在 l^∞ 中稠密, 则对每个 $B(t,1/3) \in \mathscr{B}$, 有

$B(t,1/3)\bigcap M \neq \varnothing$. 因此 $\overline{\overline{M}} \geq \overline{\overline{\mathscr{B}}} = \aleph$.

因此 l^∞ 不是可分空间.

2.3 映射

定义 设 X, Y 是非空集合, $F: X \ni x \mapsto y = F(x) \in Y$ 是映射,

$A \subset X$, 称 $F(A) = \{F(x) \,|\, x \in A\}$ 为 A 的象;

$B \subset Y$, 称 $F^{-1}(B) = \{x \,|\, F(x) \in B\}$ 为 B 的原象.

定理 设 $F: X \mapsto Y$, $A_\gamma \subset X\,(\gamma \in \Gamma)$, 则

1. $F(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F(A_\gamma)$;
2. $F(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) \subset \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F(A_\gamma)$.

定理 设 $F: X \mapsto Y$, $B_1, B_2 \subset Y$, $B_\gamma \subset Y(\gamma \in \Gamma)$, 则

1. $F^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F^{-1}(B_\gamma)$;
2. $F^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} B_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F^{-1}(B_\gamma)$;
3. $F^{-1}(B_2 - B_1) = F^{-1}(B_2) - F^{-1}(B_1)$.

定义 设 X, Y 是度量空间, $f: X \mapsto Y$, $x \in X$, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\rho(x,y) < \delta$ 时, 有 $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$, 则称 f 在 x 处连续.

$\Leftrightarrow$ 对任意 $B(f(x),\varepsilon)$, 存在 $B(x,\delta)$, 使得 $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

若 f 在 X 中的每一点 x 处连续, 则称 f 为 X 到 Y 的连续映射.

定理 设 X, Y 是度量空间, $f: X \mapsto Y$, 则 f 在 $x \in X$ 处连续

$\Leftrightarrow$ 对任意收敛于 x 点列 $\{x_n\} \subset X$, 有点列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$.

证 $\Rightarrow$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 f 是 $x \in X$ 处连续,

存在 $\delta > 0$, 当 $\rho(x,y) < \delta$ 时, 有 $\rho(f(y), f(x)) < \varepsilon$.

由于 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 故存在 N, 当 $n > N$ 时, 有 $\rho(x_n, x) < \delta$.

因此 $\rho(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$. 即 $f(x_n)$ 收敛于 $f(x)$.

$\Leftarrow$ 反证法: 假设 f 在 x 处不连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意的 $\delta = 1/n$,

存在 $x_n \in B(x, 1/n)$, 使得 $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0$.

显然 $x_n \to x$, 但 $f(x_n) \not\to f(x)$. 矛盾.

例 设 X 是度量空间, $A \subset X$, 作 $f(x) = \rho(x, A) = \inf_{z\in A} \rho(x,z)$, 则

1. f 是连续;
2. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow f(x) = 0$.

证 1. 对任意 $x, y \in X$ 及任意 $z \in A$, 有

$f(x) \leq \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

因此 $f(x) \leq \rho(x,y) + \inf_{z\in A} \rho(y,z) = \rho(x,y) + f(y)$.

因此 $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$. 故 $f(x)$ 在 X 上 (一致) 连续.

2. $\Rightarrow$ 设 $x \in \overline{A}$, 则存在 $z_n \in A$, 使得 $z_n \to x$.

由于 f 是连续, 故 $f(x) = \lim_n f(z_n) = 0$.

$\Leftarrow$ 若 $f(x) = \inf_{z\in A} \rho(x,z) = 0$, 则对任意 $\varepsilon = 1/n$, 存在 $z_n \in A$, 使得 $0 \leq \rho(x, z_n) \leq f(x) + 1/n = 1/n$. 故 $z_n \to x$. 因此 $x \in \overline{A}$.

定理 设 X, Y 是度量空间, $f: X \mapsto Y$, 则 f 是 X 上的连续映射

$\Leftrightarrow Y$ 中的每个开集 G 的原象 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

证 $\Rightarrow$ 设 f 在 X 上连续, G 是 Y 的开集. 若 $f^{-1}(G) = \varnothing$ 是开集.

否则, 对任意 $x \in f^{-1}(G)$, 有 $f(x) \in G$.

由于 G 是开集, 故存在 $B(f(x), \varepsilon) \subset G$.

由于 f 在 x 处连续, 故存在 $B(x, \delta)$, 使得 $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

因此 $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G)$. 即 $f^{-1}(G)$ 是开集.

$\Leftarrow$ 对每一个 $x \in X$ 及任意 $B(f(x), \varepsilon)$, $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ 是开集.

由于 $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 故存在 $B(x, \delta)$, 使 $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$.

即 $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$. 故 f 在 x 处连续.

因此 f 在 X 上连续.

定义 设 X, Y 是度量空间, 如果 $f: X \mapsto Y$ 是连续的一一对应,

且 f^{-1} 也是连续, 则称 f 是 X 到 Y 的一个同胚映射.

如果存在一个同胚映射 $f: X \mapsto Y$, 则称 X 与 Y 同胚, 记为 $X \simeq Y$,

读作 X 同胚于 Y.

例 $f(x) = \tan(\frac{\pi}{2}x)$ 是 $(-1, 1)$ 到 $\mathbb{R}^1$ 的同胚映射.

因此 $(-1, 1)$ 与 $\mathbb{R}^1$ 同胚. 类似地, $(-1, 1)$ 与 (a, b) 同胚.

这和数列不一样, 数列 $\in R^1$ (完备)

§ 3 完备性 • 度量空间的完备化

3.1 完备的度量空间

所以 柯西列 $\Leftrightarrow$ 数列收敛

定义 设 (X, ρ) 是度量空间, $\{x_n\}$ 是 X 上的点列,

若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n, m > N$ 时, 有 $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$,

则称点列 $\{x_n\}$ 为基本点列.

若度量空间 X 中的每个基本列都收敛, 则称 X 为完备度量空间.

定理 度量空间中的收敛点列是基本列.

定理 设 X 是完备的度量空间, 则 $Y \subset X$ 是完备的度量空间的充分必要条件是 Y 为闭集.

证 $\Rightarrow$ 对任意 $x \in \overline{Y}$, 存在 $y_n \in Y$, 使得 $y_n \to x$. 故 $\{y_n\}$ 是基本列.

由于 Y 是完备的, 故存在 $y \in Y$, 使得 $y_n \to y$. 故 $x = y \in Y$.

因此 Y 是闭集.

$\rightarrow$ 这也就说明 点列收敛 $\Longrightarrow$ 点列是柯西列

$\cancel{\Longleftarrow}$

这也就说明在度量空间中存在 满足柯西列但不收敛的例子 $\rho(x, \ )$

$\Leftarrow$ 设 $y_n \in Y \subset X$ 是基本列, 由于 X 是完备的, 故存在 $x \in X$,

使得 $y_n \to x$, 由于 Y 是闭集, 故 $x \in Y$. 因此 Y 是完备的.

例 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的点列, 则 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \{x_n\}$ 是基本点列.

因此 $\mathbb{R}^k$ 是完备度量空间.

例 $C[a, b]$ 是完备的度量空间.

证 设 $\{x_n\}$ 为 $C[a, b]$ 上的基本点列, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$,

当 $n, m > N$ 时, 有 $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. $= \sup\limits_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_m(t)|$

因此对任意的 $t \in [a, b]$, 有 $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon$. $\shortparallel$

因此 $\{x_n(t)\}$ 为基本数列. 故收敛. 记极限为 $x(t)$. $\rho(x_n, x_m)$

令 $m \to \infty$ 得: 对任意的 $t \in [a, b]$, 有 $|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$.

因此 $x(t)$ 是连续函数列 $\{x_n(t)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛极限.

故 $x \in C[a, b]$ 且

$\|x_n - x\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon$.

即 $x = \lim_n x_n$. 故 $C[a, b]$ 是完备的度量空间.

例 $L^p[a, b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ 是完备的度量空间. (也是可分的)

例 l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ 是完备的度量空间.

例 $c_0 \triangleq \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots,) \mid x_i \in \mathbb{R}, \lim_n x_n = 0\} \subset l^\infty$ 是闭子空间.

因此 c_0 是完备的度量空间.

定理 设 X 是完备的度量空间, $K_n = \overline{B}(x_n, r_n)$ 是 X 中的闭球套列:

$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ 且 $\lim_n r_n = 0$,

则存在唯一的 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty K_n$.

证 由于 $K_{n+1} \subset K_n$, 故当 $m > n$ 时, 有 $x_m \in K_n$.

因此 $\rho(x_m, x_n) \leq r_n$. 因此 $\{x_n\}$ 是基本列.

由于 X 是完备度量空间, 故存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_n \to x_0$.

对每个 n, 当 $m > n$ 时, $x_m \in K_n$. 令 $m \to \infty$, 得 $x_0 \in \overline{K}_n = K_n$.

因此 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty K_n$.

设 $y_0 \in \bigcap_{n=1}^\infty K_n$, 则 $\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) \leq 2r_n \to 0$.

故 $\rho(x_0, y_0) = 0$. 因此 $x_0 = y_0$.

注 当 $r_n \not\to 0$ 时, 可能 $\bigcap_n^\infty K_n = \varnothing$.

所以证明完备性

只需用基本列 $\Rightarrow$ 收敛. 我们说明

定理 设 X 是度量空间, 若任意闭球套列都有非空的交,
则 X 是完备的度量空间.

3.2 第一纲集及第二纲集

定义 设 X 是度量空间, $A \subset X$, 若 A 在任意非空的开集中不稠密,
则称 A 为无处稠密集或疏郎集.

定理 设 X 是度量空间, $A \subset X$, 则下列命题等价

1. A 是疏郎集;
2. $(\overline{A})^\circ = \varnothing$;
3. 对每个 $B(x,r)$, 存在 $B(y,\delta) \subset B(x,r)$, 使得 $\overline{B}(y,\delta) \bigcap \overline{A} = \varnothing$.
   因此 $\overline{B}(y,\delta) \bigcap A = \varnothing$.

证　1. $\Leftrightarrow$ 2. $(\overline{A})^\circ = \varnothing$, $\Leftrightarrow$ 对任意非空开集 G, 有 $G \not\subset \overline{A}$.
2. $\Rightarrow$ 3. 对 $B(x,r)$, 有 $\overline{A} \not\supset B(x,r)$. 取 $y \in B(x,r) - \overline{A}$.
由于 $B(x,r) - \overline{A} = B(x,r) \bigcap (\overline{A})^C$ 是开集, 故
存在 $B(y,2\delta) \subset B(x,r) - \overline{A}$. 故 $\overline{B}(y,\delta) \bigcap \overline{A} = \varnothing$.
3. $\Rightarrow$ 1. 对任意非空开集 G, 存在 $B(x,\varepsilon) \subset G$.
存在 $B(y,\delta) \subset B(x,\varepsilon) \subset G$, 使得 $\overline{A} \not\supset B(y,\delta)$. 故 $\overline{A} \not\supset G$.
因此 A 在 G 中不稠密. 因此 A 是疏朗集.

定义 设 $A \subset X$, 若存在疏郎集列 E_n, 使得 $A = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$,
则称 A 为第一纲集, 否则称 A 为第二纲集.

例 离散度量空间 (X, d_0) 中, 任意非空 $A \subset X$ 都不是疏郎集:
取 $x \in A$, 则 $B(x,1/2) \subset A \subset \overline{A}$. 故 A 在开集 $B(x,1/2)$ 上稠密.
因此 A 是第二纲集.
在 $\mathbb{R}^n$ 中, 有限集 A 是疏郎集: $\overline{A} = A \Rightarrow (\overline{A})^\circ = \varnothing$.
因此可数集是第一纲集. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ 是第一纲集.

定理 设 X 是完备的度量空间, V_n 是稠密的开集列,
则 $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ 是稠密的 $G_\delta-$ 型集.

证　对任意 $W \triangleq B(x,r)$, 下证明 $W \bigcap (\bigcap_{n=1}^\infty V_n) \neq \varnothing$.
由于 V_1 是在 X 中稠密的开集, 故开集 $W \bigcap V_1 \neq \varnothing$.
故存在 $\overline{B}(x_1,r_1) \subset W \bigcap V_1$, $r_1 < 1/1$.
由于 V_2 是在 X 中稠密的开集, 故开集 $B(x_1,r_1) \bigcap V_2 \neq \varnothing$.
故存在 $\overline{B}(x_2,r_2) \subset B(x_1,r_1) \bigcap V_2$, $r_2 < 1/2$. $\cdots$.
一般 V_n 是在 X 中稠密的开集, 故开集 $B(x_{n-1},r_{n-1}) \bigcap V_n \neq \varnothing$.
存在 $\overline{B}(x_n,r_n) \subset B(x_{n-1},r_{n-1}) \bigcap V_n$, $r_n < 1/n$. $\cdots$.
由闭球套定理存在 $x \in \bigcap_{n=1}^\infty \overline{B}(x_n,r_n) \subset W \bigcap (\bigcap_{n=1}^\infty V_n)$.
因此 $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ 是稠密集.

推论 设 X 是完备的度量空间, $E_n \subset X$ 是稠密的 $G_\delta-$ 型集,
则 $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$ 还是稠密的 $G_\delta-$ 型集.

证　由于 E_n 是 $G_\delta-$ 型集, 故存在一列开集 V_k^n, 使得 $E_n = \bigcap_{k=1}^\infty V_k^n$.
由于稠密集 $E_n \subset V_k^n$, 故 $\{V_k^n \,|\, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ 是稠密的可列个开集族.
因此 $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{k=1}^\infty V_k^n$ 是稠密的 $G_\delta-$ 型集.

定理 设 X 是完备的度量空间, 则 X 是第二纲集.

证　设 E 是疏朗集, 则 $(\overline{E})^\circ = \varnothing$. 故对任意 $B(x,\varepsilon)$, $B(x,\varepsilon) \not\subset \overline{E}$.
因此 $B(x,\varepsilon) \bigcap (\overline{E})^C \neq \varnothing$. 即 $\overline{E}^C$ 是稠密的开集.
假设 X 是第一纲集, 则存在疏朗集列 E_n, 使得
$X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset \bigcup_{n=1}^\infty \overline{E}_n \subset X$.
因此 $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{E}_n^C = \varnothing$. 这与 $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{E}_n^C$ 是稠密的 $G_\delta-$ 型集矛盾.

3.3 度量空间的完备化

设 $(X,\rho_X), (Y,\rho_Y)$ 是两个度量空间, 若存在 $T: X \mapsto Y$ 是满射且
$\rho_Y(Tx_1,Tx_2) = \rho_X(x_1,x_2)$, 则称 T 为等距映射.
若 X 与 Y 之间存在等距映射, 则称 X 与 Y 是等距.
显然等距映射是同胚映射.

定理 对每个度量空间 X, 存在完备的度量空间 X_0, 使得 X 与 X_0 的某
个稠密子空间等距. 等距意义下 X_0 是唯一的.
称 X_0 为 X 的完备化空间.

例 实数全体 $\mathbb{R}$ 是完备的度量空间, 有理数全体 $\mathbb{Q}$ 是不完备的度量空间,
$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 故 $\mathbb{R}$ 是度量空间 $\mathbb{Q}$ 的完备化空间.
多项式全体 $P[a,b]$ 是 $C[a,b]$ 的稠密子空间, 而 $C[a,b]$ 是完备的,

故 $C[a,b]$ 是度量空间 $(P[a,b],\rho)$ 的完备化空间.

$L^1[a,b]$ 是完备的度量空间, $(C[a,b],\rho_1)$ 是 $L^1[a,b]$ 的稠密子空间,

故 $L^1[a,b]$ 是度量空间 $(C[a,b],\rho_1)$ 的完备化空间.

例 $c_{00} \triangleq \{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_i\in\mathbb{R}, 有限个\ x_i\neq 0\}$,

对 $1\le p<\infty$, 按距离 $\rho_p(x,y)=(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|^p)^{1/p}$ 完备化空间是 l^p.

按距离 $\rho_\infty(x,y)=\sup_{1\le i<\infty}|x_i-y_i|$ 完备化空间是 c_0. 而不是 l^∞.

§ 4 序列紧与紧集

4.1 序列紧与紧集

$\mathbb{R}^1$ 的子集 A 是紧集 $\Leftrightarrow$ A 是有界闭集.

定义 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 如果

1. A 中的任何点列 $\{x_n\}$ 都有子列收敛于某个 $x_0\in X$,
   则称 A 为准序列紧集 (准紧集);
2. A 中的任何点列 $\{x_n\}$ 有子列收敛于某个 $x_0\in A$,
   则称 A 为序列紧集;
3. X 是序列紧集, 则称 X 为序列紧空间.

定理 设 X 是度量空间, 则

1. 任意有限集是序列紧集;
2. 任意准序列紧集的子集是准序列紧集;
3. 任意序列紧集的闭子集是序列紧集.

定理 度量空间中的序列紧集 $A\subset X$ 是完备的度量空间.

特别, 若 X 是序列紧空间, 则 X 是完备度量空间.

证　设 $\{x_n\}\subset A$ 是基本列.

由于 A 是序列紧, 故存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于某个 $x_0\in A$.

由于 $\rho(x_n,x_0)\le\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_0)$, 故 $x_n\to x_0$.

因此 A 是完备的空间.

定义 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 如果 A 的每个开覆盖, 都有有限子覆盖,

则称 A 为紧集; 特别, 若 X 是紧集, 则称 X 为紧空间. (或紧致空间).

例 度量空间中的有限子集是紧子集; $\mathbb{R}^1$ 的有界闭集是紧子集.

例 设 X 是无限集, d_0 是离散距离, 则 X 是有界闭集. 但不是紧集.

注　度量空间中有界闭集不一定是紧集.

定理 序列紧的度量空间是紧空间.

证　设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖. 对 $x\in X$, 记

$\rho(x)=\sup\{d\,|\,\exists U\in\mathscr{A}, B(x,d)\subset U\}>0$; $\rho_0=\inf_{x\in X}\rho(x)$.

对 $\varepsilon=1/n$, 存在 $x_n\in X$, 使得 $\rho_0\le\rho(x_n)<\rho_0+1/n$.

令 $n\to\infty$ 得 $\lim\rho(x_n)=\rho_0$.

由于 X 是序列紧空间, 故存在子列 x_{n_k} 收敛. 设收敛于 $z\in X$.

存在 $U\in\mathscr{A}$, 使得 $z\in U$. 因此存在 $B(z,\delta)\subset U$.

由于 $x_{n_k}\to z$, 故存在 $K>0$, 当 $k>K$ 时, 有 $x_{n_k}\in B(z,\delta/2)$.

故 $B(x_{n_k},\delta/2)\subset B(z,\delta)\subset U$. 故 $\rho(x_{n_k})\ge\delta/2$. 故 $\rho_0\ge\delta/2>0$.

称 ρ_0 为开覆盖 $\mathscr{A}$ 的 Lebesgue 数. 它具有性质:

设 $0<\lambda<\rho_0$, 则对每个 $x\in X$, 有 $0<\lambda<\rho_0\le\rho(x)$.

故存在 $U_x\in\mathscr{A}$, 使得 $B(x,\lambda)\subset U_x$.

显然 $\mathscr{B}=\{B(x,\lambda)\,|\,x\in X\}$ 是 X 的开覆盖. 下证 $\mathscr{B}$ 有有限子覆盖.

假设 $\mathscr{B}$ 没有有限子覆盖, 取 $x_1\in X$; 存在 $x_2\notin B(x_1,\lambda)$;

存在 $x_3\notin\bigcup_{i=1}^{2}B(x_i,\lambda)$; $\cdots$; 存在 $x_{n+1}\notin\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\lambda)$; $\cdots$.

因此 $\rho(x_n,x_m)>\lambda$, 即 $\{x_n\}$ 没有收敛子列. 这与 X 是序列紧矛盾.

因此必存在有限个 $x_i\in X$, 使得 $X=\bigcup_{i=1}^{m}B(x_i,\lambda)$.

取 $U_i\in\mathscr{A}$, 使得 $B(x_i,\lambda)\subset U_i$, 则 $X=\bigcup_{i=1}^{m}U_i$. 即 X 是紧空间.

定理 紧的度量空间 X 是序列紧空间.

证　设 X 是紧的度量空间, 假设 X 不是序列紧,

则存在点列 $\{x_n\}\subset X$, 没有收敛子列.

因此每个 $y\in X$ 都不是某子列的极限.

因此存在 $B(y,\delta_y)$, 使得 $B(y,\delta_y)$ 只包含 $\{x_n\}$ 的有限个项.

显然 $\{B(y,\delta_y)\,|\,y\in X\}$ 是 X 的开覆盖.

故存在有限个 $y_i\in X$, 使得 $\{x_n\}\subset X\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(y_i,\delta_{y_i})$.

这与 $\bigcup_{i=1}^{k}B(y_i,\delta_{y_i})$ 只包含 $\{x_n\}$ 的有限个项矛盾.

定义 设 $\mathscr{A}\subset 2^X$, 如果 $\mathscr{A}$ 中的每个有限子族都有非空的交:

对任意有限个 $A_i\in\mathscr{A}$, 有 $\bigcap_{i=1}^n A_i\neq\varnothing$,
则称 $\mathscr{A}$ 具有有限交性质.

例 $\mathscr{A}_1=\{[0,1/n]\,|\,n\in\mathbb{N}\}$, $\mathscr{A}_2=\{(0,1/n)\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ 具有有限交性质.
显然 $\bigcap_{I\in\mathscr{A}_1} I=\{0\}$; $\bigcap_{I\in\mathscr{A}_2} I=\varnothing$.

定理 设 X 是度量空间, 则 X 为紧空间 $\Leftrightarrow$ 具有有限交性质的闭集族都有非空的交.

证 $\Rightarrow$ 设 X 是紧空间, $\mathscr{F}$ 是具有有限交性质的闭集族. (反证法)
假设 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F=\varnothing$, 则 $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} F^C=X$. 由于 X 是紧空间,
故存在有限个 $F_i\in\mathscr{F}$, 使得 $\bigcup_{i=1}^n F_i^C=X$. 故 $\bigcap_{i=1}^n F_i=\varnothing$. 矛盾.

$\Leftarrow$ 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖, 则 $\bigcup_{U\in\mathscr{A}} U=X$. 因此 $\bigcap_{U\in\mathscr{A}} U^C=\varnothing$.
因此 $\{U^C\,|\,U\in\mathscr{A}\}$ 是不具有有限交性质的闭集族.
因此存在有限个 $U_i\in\mathscr{A}$, 使得 $\bigcap_{i=1}^n U_i^C=\varnothing$.
即 $\bigcup_{i=1}^n U_i=X$. 因此 X 是紧空间.

注 1. 定理中的闭集不能去掉.
2. 用开集刻画的概念或结论可用闭集刻画.

4.2 紧集上的连续映射

定理 设 X,Y 是度量空间, $f:X\mapsto Y$ 是连续映射, $A\subset X$ 是紧子集, 则 $f(A)$ 是紧子集.

证 设 $\mathscr{C}$ 是 $f(A)$ 的 Y 中的开覆盖: $f(A)\subset\bigcup_{C\in\mathscr{C}} C$.
由于 f 连续, 故 $\{f^{-1}(C)\,|\,C\in\mathscr{C}\}$ 是 A 的开覆盖.
由于 A 是紧集, 故存在有限个 C_i, 使得
$A\subset\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(C_i)=f^{-1}(\bigcup_{i=1}^n C_i)$. 因此 $f(A)\subset\bigcup_{i=1}^n C_i$.
因此 $f(A)$ 是紧子集.

推论 设 A 是 X 的紧集, $f:A\mapsto\mathbb{R}$ 是连续函数, 则存在 $x_1,x_2\in A$,
对任意 $x\in A$, 有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.

证 $f(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的紧集, 故 $f(A)$ 是有界闭集. 因此 f 在 A 上有界.
记 $m=\inf f(t)$; $M=\sup f(t)$.
存在 $y_n\in f(A)$, 使得 $m\le y_n<m+1/n$. 故 $m=\lim_n y_n$.
由于 $f(A)$ 是闭集, 故 $m\in f(A)$. 故存在点 $x_1\in A$, 使得 $f(x_1)=m$.
同理存在 $x_2\in A$, 使得 $f(x_2)=M$.
因此对任意 $x\in A$, 有 $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.

4.3 完全有界集

定义 设 X 是度量空间, $A,B\subset X$, $\varepsilon>0$, 若

1. 存在 $B(x,R)$, 使得 $A\subset B(x,R)$, 则称 A 为有界集;
2. $A\subset\bigcup_{y\in B} B(y,\varepsilon)$, 则称 B 为 A 的 $\varepsilon-$ 网;
3. 对任意 $\varepsilon>0$, A 总存在有限的 $\varepsilon-$ 网, 则称 A 为完全有界集.

定理 设 X 是度量空间, 则

1. 有限集是完全有界集;
2. 完全有界集的子集是完全有界集;
3. A 为完全有界 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\varepsilon>0$, 总存在有限集 $B\subset A$,
   使得 B 是 A 的 $\varepsilon-$ 网;
4. 完全有界集是有界集;
5. 完全有界集是可分的.

证 3. $\Rightarrow$ 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 A 的 $\varepsilon/2-$ 网.
取 $y_k\in B(x_k,\varepsilon/2)\bigcap A$, 则 $B=\{y_1,\cdots,y_n\}\subset A$ 是 A 的 $\varepsilon-$ 网.
4. 设 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 A 的 $1-$网, 对任意 $x\in A$, 存在 x_k, 使得 $\rho(x,x_k)<1$.
因此 $\rho(x,x_1)\le\rho(x,x_k)+\rho(x_k,x_1)\le 1+\sup_{1<i\le n}\rho(x_i,x_1)<+\infty$.
故 A 是有界集.
5. 设 $B_n\subset A$ 是 A 的有限 $1/n-$ 网, 记 $B=\bigcup_{n=1}^\infty B_n\subset A$ 是可数集.
对任意 $x\in A$ 及 $B(x,\varepsilon)$, 存在 n, 使得 $1/n<\varepsilon$.
存在 $x_n\in B_n\subset B$, 使得 $\rho(x,x_n)<1/n<\varepsilon$.
故 B 在 A 中稠密. 因此 A 是可分集.

定理 设 X 是度量空间, $A\subset X$, 若

1. A 是准序列紧集, 则 A 是完全有界集;
2. X 是完备的, A 是完全有界集, 则 A 是准序列紧集;
3. X 是完备的, 则完全有界性与准序列紧性等价.

证 1. 假设 A 不是完全有界, 则存在 $\varepsilon_0>0$, A 没有有限 ε_0- 网.
取 $x_1\in A$, $\{x_1\}$ 不是 A 的 ε_0- 网.
取 $x_2\in A-B(x_1,\varepsilon_0)$, $\{x_1,x_2\}$ 不是 A 的 ε_0- 网.
一般取 $x_n\in A-\bigcup_{k=1}^{n-1}B(x_k,\varepsilon_0)$, $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 不是 A 的 ε_0- 网. $\cdots$.
因此 $\rho(x_n,x_m)\ge\varepsilon_0$, 故点列 $x_n\in A$ 没有收敛子列. 矛盾.
2. 设 $\{x_n\}$ 是 A 中的点列, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限集 B 是 A 的 $\varepsilon-$ 网.
因此存在 $y\in B$, 使得 $B(y,\varepsilon)$ 包含 $\{x_n\}$ 的无穷多个项.
对 $\varepsilon=1$, 存在有限集 B_1 是 A 的 $1-$ 网, 存在 $y_1\in B_1$, 使得
$B(y_1,1)$ 包含 $\{x_n\}$ 的无穷多个项;
对 $\varepsilon=1/2$, 存在有限集 B_2 是 A 的 $1/2-$ 网, 存在 $y_2\in B_2$, 使得
$B(y_2,1/2)\bigcap B(y_1,1)$ 包含 $\{x_n\}$ 的无穷多个项;
一般, 对 $\varepsilon=1/k$, 存在有限集 B_k 是 A 的 $1/k-$ 网, 存在 $y_k\in B_k$, 使得
$B(y_k,1/k)\bigcap(\bigcap_{i=1}^{k-1}B(y_i,1/i))$ 包含 $\{x_n\}$ 的无穷多个项.
由于 $\bigcap_{i=1}^{k+p}B(y_i,1/i))\ne\varnothing$, 故 $\rho(y_k,y_{k+p})<2/k$. 因此 $\{y_k\}$ 是基本列.
由于 X 是完备的, 设 $y_k\to x_0$. 取 $x_{n_k}\in B(y_k,1/k)$, 使得 $n_k<n_{k+1}$, 则
$\rho(x_{n_k},x_0)\le\rho(x_{n_k},y_k)+\rho(y_k,x_0)<1/k+\rho(y_k,x_0)\to 0$.
故 A 是准序列紧.

§ 5 $C[a,b]$ 上的紧集

定理 $A\subset C[a,b]$ 是完全有界集 $\Leftrightarrow$

1. A 是有界集;
2. A 是等度连续: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|t'-t|<\delta$ 时,
   对一切的 $x\in A$, 有 $|x(t')-x(t)|<\varepsilon$.

证 $\Rightarrow$ 显然 A 是有界集. 对任意 $\varepsilon>0$, 由于 A 是完全有界集,
故存在有限集 $B=\{x_1,\cdots,x_k\}\subset A$, 使得 B 是 A 的 $\varepsilon-$ 网.
由于 x_i 是 $[a,b]$ 上连续, 故一致连续.
因此存在 $\delta_i>0$, 当 $|t'-t''|<\delta_i$ 时, 有 $|x_i(t')-x_i(t'')|<\varepsilon$.
取 $\delta=\min_{1\le i\le k}\delta_i$, 对任意 $x\in A$, 存在 $x_i\in B$, 使得 $\|x-x_i\|<\varepsilon$.
当 $|t'-t''|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}|x(t')-x(t'')|&\le|x(t')-x_i(t')|+|x_i(t')-x_i(t'')|+|x_i(t'')-x(t'')|\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 A 是等度连续.
$\Leftarrow$ 由于 A 是等度连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $|t'-t|<\delta$ 时,
对一切的 $x\in A$, 有 $|x(t')-x(t)|<\varepsilon$.
取 n 使得 $\frac{b-a}{n}<\delta$. 将 $[a,b]$ 分成 n 等分, 记 $t_i=a+i(b-a)/n$.
由于 A 是有界集, 故 $\hat{A}=\{\hat{x}=(x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n))\,|\,x\in A\}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$
中的有界集. 即 $\hat{A}$ 是完全有界集. 因此存在有限个 $x_j\in A$, 使得
$\hat{B}=\{\hat{x}_j=(x_j(t_0),x_j(t_1),\cdots,x_j(t_n))\,|\,j=1,\cdots,k\}$
是 $\hat{A}$ 的 $\varepsilon-$ 网.
对任意 $x\in A$, 存在 $x_j\in A$, 使得
$\|\hat{x}-\hat{x}_j\|=(\sum_{i=0}^{n}|x(t_i)-x_j(t_i)|^2)^{1/2}<\varepsilon$.
对任意 $t\in[a,b]$, 存在 i , 使得 $t\in[t_{i-1},t_i]$. 故

$$\begin{aligned}|x(t)-x_j(t)|&\le|x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_j(t_i)|+|x_j(t_i)-x_j(t)|\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $B=\{x_1,\cdots,x_k\}\subset A$ 是 A 的 $3\varepsilon-$ 网. 故 A 是完全有界集.

§ 6 不动点定理

定义 设 $T:X\mapsto X$, $x\in X$, 若 $Tx=x$, 则称 x 为映射 T 的不动点.
定义 设 X 是度量空间, $T:X\mapsto X$, 若存在 $0\le\theta<1$, 对任意 $x,y\in X$,
有 $\rho(Tx,Ty)\le\theta\rho(x,y)$, 则称 T 为压缩映射.
定理 设 X 是完备度量空间, T 是 X 上的压缩映射, 则 T 有唯一不动点.
证 取定 $x_0\in X$, 令 $x_1=Tx_0$; $x_2=Tx_1$; $\cdots$; $x_{n+1}=Tx_n,\cdots$, 则
$\rho(x_1,x_2)=\rho(Tx_0,Tx_1)\le\theta\rho(x_0,x_1)$;
$\rho(x_2,x_3)=\rho(Tx_1,Tx_2)\le\theta\rho(x_1,x_2)\le\theta^2\rho(x_0,x_1)$;
$\rho(x_n,x_{n+1})\le\theta^n\rho(x_0,x_1)$.
$\rho(x_n,x_{n+p})\le\rho(x_n,x_{n+1})+\rho(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p})$
$\le(\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p})\rho(x_1,x_0)\le\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_0)\to 0,(n\to\infty)$.
故 $\{x_n\}$ 是基本列. 由于 X 是完备的, 故 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的某一点 x.
显然 T 是连续映射. 对 $x_{n+1}=Tx_n$, 令 $n\to\infty$, 得 $x=Tx$.

设 y 也是 T 的不动点, 则 $\rho(x,y)=\rho(Tx,Ty)\le\theta\rho(x,y)$.

因此 $\rho(x,y)=0$. 即 $x=y$.

对 $\rho(x_n,x_{n+p})\le\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_0)$, 令 $p\to\infty$, 得 $\rho(x_n,x)\le\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_1,x_0)$.

定理 设 $f(x,y)$ 是平面上的连续函数且存在 $K>0$, 使得

$|f(x,y)-f(x,y')|\le K|y-y'|$, 则微分方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y|_{x=x_0}=y_0\end{cases},$$

在 $\mathbb{R}$ 上存在唯一的解.

证　微分方程等价于积分方程 $y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))dt$.

取 $0<\delta<1/K$. 先证明微分方程在 x_0 的邻域 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上存在唯一的解. 作

$T:C[x_0-\delta,x_0+\delta]\ni y\mapsto y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))dt\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

对 $y_1,y_2\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$,

$$\begin{aligned}\rho(Ty_1,Ty_2)&=\max_{|x-x_0|\le\delta}|\int_{x_0}^x[f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))]dt|\\&\le\max_{|x-x_0|\le\delta}|\int_{x_0}^x K|y_1(t)-y_2(t)|dt\\&\le K\delta\max_{|x-x_0|\le\delta}|y_1(t)-y_2(t)|\triangleq\theta\rho(y_1,y_2).\end{aligned}$$

因此 T 是完备度量空间 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的压缩映射.

故存在 $y\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$, 使得 $y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))dt$.

即微分方程满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的, 在 x_0 的邻域 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上存在唯一的解.

同理微分方程满足初值条件 $y|_{x=x_0+\delta}=y(x_0+\delta)$ 的, 在 $x_0+\delta$ 的邻域 $[x_0,x_0+2\delta]$ 上存在唯一的解. 这样延拓下去得到 $\mathbb{R}$ 上的解.

定理 设 X 是完备的度量空间, $T:X\mapsto X$, 若存在 $0\le\theta<1$ 及 n_0, 对任意 $x,y\in X$, 有 $\rho(T^{n_0}x,T^{n_0}y)\le\theta\rho(x,y)$, 则 T 有唯一的不动点.

证　由于 T^{n_0} 是压缩映射, 故存在唯一的不动点 x.

由于 $T^{n_0}Tx=T(T^{n_0}x)=Tx$, 故 Tx 也是 T^{n_0} 的不动点.

由于 T^{n_0} 的不动点是唯一的, 故 $Tx=x$.

因此 x 是 T 的不动点.

若 y 也是 T 的不动点, 则 y 是 T^{n_0} 的不动点. 因此 $x=y$.

第二章　Banach 空间与 Hilbert 空间

§ 1　Banach 空间

1.1 线性空间

定义 设 X 是数域 $\mathbb{K}$(= 复数域 $\mathbb{C}$ 或实数域 $\mathbb{R}$) 上线性空间, $L,M,Y\subset X$,

1. 若对任意有限个 $x_i\in M$, $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是线性无关组,
   则称 M 为线性无关族;
   又若对每个 $x\in X$, 存在有限个 $x_i\in M$, $\alpha_i\in\mathbb{K}$, 使得 $x=\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i$,
   则称 M 为 X 的线性基底;
   又若 $M=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是有限集, 则称 X 是 n 维空间 (有限维空间),
   否则称 X 为无限维空间.
2. 若对 $x,y\in Y$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 有 $\alpha x+\beta y\in Y$, 则称 Y 为 X 的线性子空间;
3. 记 $\operatorname{span}L=\{\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i\,|\,x_i\in L,\alpha_i\in\mathbb{K},n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的线性子空间,
   称为 L 张成的线性空间.

例 $X=\mathbb{C}$ 是数域 $\mathbb{C}$ 上的一维线性空间; $X=\mathbb{C}$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的二维空间; $\mathbb{R}^2$ 是数域 $\mathbb{R}$ 上的二维空间, 不能是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

例 对 $[a,b]$ 上的函数 x,y 及数 α 规定线性运算:

$(x+y)(t)=x(t)+y(t)$;　$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)$.

$[a,b]$ 上的实连续函数全体 $C[a,b]$ 是实线性空间, 不是复线性空间.

$[a,b]$ 上的复连续函数全体记为 $C[a,b]$ 是复线性空间, 也是实线性空间.

$C[a,b]$ 是无限维空间. $L=\{1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots\}$ 是线性无关组,

但不是线性基底. $\operatorname{span}L=P[a,b]$.

$C[a,b]$ 是 $L^1[a,b]$ 的线性子空间.

例 对数列 $x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$, $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)$ 及数 α, 规定线性运算:

$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n,\cdots)$;　$\alpha x=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n,\cdots)$.

记 $c_0=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,\lim_n x_n=0\}$;

　$c=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,\lim_n x_n\text{存在}\}$.

显然 l^p,c_0,c,l^∞ 等都是线性空间; $l^p\subset c_0\subset c\subset l^\infty$.

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $A,B\subset X$, $x\in X$, $\alpha\in\mathbb{K}$, 记

$x+A=\{x+y\,|\,y\in A\}$; $A+B=\{x+y\,|\,x\in A, y\in B\}$;

$\alpha\cdot A=\{\alpha x\,|\,x\in A\}$.　　一般 $A+A\supsetneqq 2A$.

定义 设 X,Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T: X\mapsto Y$,

1. 若 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$, $(x,y\in X,\ \alpha,\beta\in\mathbb{K})$, 则称 T 为线性映射;
2. 若 T 又是一一对应, 则称 T 为 X 到 Y 线性同构映射;
3. 若存在 X 到 Y 线性同构映射, 则称 X 与 Y 线性同构;
4. X 到数域 $\mathbb{K}$ 线性映射 f 称为 X 上的线性泛函.

定理 设 $T: X\mapsto Y$ 是线性映射, $A\subset X$, $B\subset Y$,

1. 若 A 是线性子空间, 则 $T(A)$ 是 Y 的线性子空间;
2. 若 B 是线性子空间, 则 $T^{-1}(B)$ 是 X 的线性子空间;
3. 记 $\mathscr{N}(T)=\{x\,|\,T(x)=0\}=T^{-1}(\{0\})$, $\mathscr{N}(T)$ 是线性空间, 称为 T 的零空间.

1.2 赋范线性空间

定义 设 X 是线性空间, $\|\cdot\|: X\ni x\mapsto\|x\|\in\mathbb{R}$, 若

1. 正定性: $\|x\|\geq 0$, $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;
2. 齐次性: $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;
3. 三角不等式: $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$,

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数, $(X,\|\cdot\|)$ 为赋范空间.

规定 $\rho(x,y)=\|x-y\|$, 则 (X,ρ) 是距离空间.

若 (X,ρ) 是完备度量空间, 则称 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间.

以 x 为中心, r 为半径的球: $B_r(x)\triangleq B(x,r)=\{y\,|\,\|y-x\|<r\}$.

例 $\mathbb{R}^n$ 以范数 $\|x\|=(\sum_{i=1}^n|x_i|^2)^{1/2}$ 是 Banach 空间.

对 $(p\geq 1)$, $\mathbb{R}^n$ 按范数 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{1/p}$, 也是 Banach 空间.

l^p $(p\geq 1)$ 按 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^\infty|x_i|^p)^{1/p}$ 是 Banach 空间.

例 $C[a,b]$ 按 $\|x\|=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)|$ 是 Banach 空间.

$L^p[a,b]$ $(p\geq 1)$ 按 $\|x\|_p=(\int_a^b|x(t)|^p dt)^{1/p}$ 是 Banach 空间.

$(C[a,b],\|\cdot\|_p)$ 是 $L^p[a,b]$ 的 (稠密的 $1\leq p<\infty$) 线性子空间.

例 在数列空间 $s=\{\,x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_i\in\mathbb{R}\}$ 上, 规定距离 $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{2^i}\frac{|x_i-y_i|}{1+|x_i-y_i|}$, 则 (s,ρ) 是度量空间. 但不是赋范空间.

例 设 $E\subset\mathbb{R}^k$ 是可测集, $mE<\infty$, $S(E)=\{x\,|\,x(t)\text{是可测函数}\}$. 规定 $\rho(x,y)=\int_E\frac{|x(t)-y(t)|}{1+|x(t)-y(t)|}dt$, 则 $S(E)$ 不是赋范空间.

若 ρ 是由范数导出的距离, 则距离 ρ 满足

$$\rho(x,y)=\rho(x-y,0);\quad \rho(\alpha x,0)=|\alpha|\rho(x,0). \tag{1}$$

反之, 若度量空间 (X,ρ) 的度量 ρ 满足 (1), 则 $\|x\|\triangleq\rho(x,0)$ 是 X 上的范数且它导出的距离恰好是 ρ.

定理 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则

1. $\|\cdot\|$ 是连续函数: 对任意 $x_n,x\in X$, 当 $x_n\to x$ 时, 有 $\|x_n\|\to\|x\|$;
2. 加法运算是连续: 对任意 $x_n,x,y_n,y\in X$, 当 $x_n\to x, y_n\to y$ 时, 有 $x_n+y_n\to x+y$;
3. 数乘运算是连续: 对任意 $x_n,x\in X$, $\alpha_n,\alpha\in\mathbb{K}$, 当 $x_n\to x,\alpha_n\to\alpha$ 时, 有 $\alpha_n x_n\to\alpha x$.

证　1. $|\,\|x_n\|-\|x\|\,|\leq\|x_n-x\|$.

2. $\|(x_n+y_n)-(x+y)\|\leq\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0$.

3. $$\begin{aligned}\|\alpha_n x_n-\alpha x\|&\leq\|\alpha_n(x_n-x)\|+\|(\alpha_n-\alpha)x\|\\&\leq|\alpha_n|\,\|(x_n-x)\|+|(\alpha_n-\alpha)|\,\|x\|\to 0.\end{aligned}$$

§ 2　具有基底的 Banach 空间

2.1 具有基底的 Banach 空间

定义 设 X 是无限维 Banach 空间, $\{e_n\}\subset X$, 若对每个 $x\in X$, 存在唯一的数列 $x_n\in\mathbb{K}$, 使得 $x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n x_ie_i\triangleq\sum_{n=1}^\infty x_ne_n$, 则称 $\{e_n\}$ 为 X 的一个 Schauder 基.

例 $\{e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\}$ 是 l^p $(1\leq p<\infty)$ 的 Schauder 基.

证　对每个 $x=(x_1,x_2,\cdots)\in l^p$, 有

$\|x-\sum_{i=1}^n x_ie_i\|=\|(0,\cdots,0,x_{n+1},\cdots)\|=(\sum_{i=n+1}^\infty|x_i|^p)^{1/p}\to 0$.

因此 $x=\sum_{i=1}^\infty x_ie_i$.

设又有 $x=\sum_{i=1}^{\infty}x_i'e_i$, 则

$(\sum_{i=1}^{n}|x_i'-x_i|^p)^{1/p}=\|\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)e_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}x_i'e_i-\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|$
$\le\|\sum_{i=1}^{n}x_i'e_i-x\|+\|x-\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|\to 0.$

故 $x_i'=x_i$, $i=1,2,\cdots$. 因此 $\{e_i\}$ 是 l^p 的 Schauder 基.

同理 $\{e_n\}$ 是 c_0 的 Schauder 基.

但对 $x'=(1,1,\cdots)\in l^\infty$ 及任意 $a_i\in\mathbb{K}$, 有

$\|x'-\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\|=\|(1-a_1,\cdots,1-a_n,1,\cdots)\|\ge 1\not\to 0.$

因此 $\{e_i\}$ 不是 l^∞ 的 Schauder 基.

定理 设 X 是 Banach 空间, $\{e_n\}$ 是 Schauder 基, 则

1. $\{e_n\}$ 是线性无关族;
2. X 是可分空间.

证 1. $\sum_{i=1}^{n}a_ie_i=0=\sum_{i=1}^{n}0e_i$, 故 $a_i=0,\ i=1,\cdots,n.$

2. $M=\{\sum_{i=1}^{n}r_ie_i\,|\,r_i\in\mathbb{Q},1\le i\le n,n\in\mathbb{N}\}$ 是可数集.

对任意 $x\in X$, 存在数列 $x_n\in\mathbb{K}$, 使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$.

对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得 $\|x-\sum_{n=1}^{N}x_ne_n\|<\varepsilon/2$.

取 $r_i\in\mathbb{Q}$, 使得 $|x_i-r_i|<\frac{\varepsilon}{2N\|e_i\|}$, 则

$$\|x-\sum_{n=1}^{N}r_ne_n\|\le\|x-\sum_{n=1}^{N}x_ne_n\|+\|\sum_{n=1}^{N}x_ne_n-\sum_{n=1}^{N}r_ne_n\| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

因此 M 在 X 中稠密. 因此 X 是可分空间.

例 由于 l^∞ ($L^\infty([a,b])$ 是不可分空间,

因此 l^∞ ($L^\infty([a,b])$ 没有 Schauder 基.

注 可分的 Banach 空间不一定具有 Schauder 基.

2.2 有限维赋范空间的特征

$\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 以范数 $\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{1/2}$ 是赋范空间;

以范数 $\|x\|_p=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}\quad(p\ge 1)$ 也是赋范空间.

定义 设 X,Y 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $T:X\mapsto Y$ 为线性映射,

1. 若对每个 $x\in X$, 有 $\|T(x)\|=\|x\|$,
   则称 T 为 X 到 Y 的保距映射;
2. 若 T 是保距的满射, 则称 T 为保距同构映射;
3. 若存在 X 到 Y 的保距同构映射, 则称 X 与 Y 是等距同构;
4. 若 T 是线性同构且 T,T^{-1} 都连续, 则称 T 为拓扑同构映射;
5. 若存在 X 到 Y 的拓扑同构映射, 则称 X 与 Y 是拓扑同构.

设 X 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维赋范空间, 问:

X 与 $\mathbb{R}^n$ 能否等距同构? X 与 $\mathbb{R}^n$ 能否拓扑同构?

定理

1. 设 X 是 n 维实赋范线性空间, 则 $\mathbb{R}^n$ 与 X 拓扑同构;
2. 设 X 是 n 维复赋范线性空间, 则 $\mathbb{C}^n$ 与 X 拓扑同构;
3. 任意两个 n 维同为实 (复) 赋范空间必拓扑同构.

因此 $\mathbb{C}^n$ 是 (拓扑同构意义下) 唯一的 n 维复赋范线性空间.

证 1. 设 $\{e_k'\}$ 是 X 的线性基底. 作线性算子

$T:\mathbb{R}^n\ni x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\sum_{i=1}^{n}x_ie_i'\in X$

由于 e_i' 是线性无关, 故 T 是单射. T 又是满射:

对任意 $z=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i'\in X$, 存在 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$,

使得 $Ta=z$. 因此 T 是同构.

对 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\|T(x)\|=\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i'\|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i'\| \le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^{n}\|e_i'\|^2)^{1/2}=M\|x\|.$$

其中 $M=(\sum_{i=1}^{n}\|e_i'\|^2)^{1/2}$. 因此对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

$\|Tx-Ty\|=\|T(x-y)\|\le M\|x-y\|$.

故 T 是连续.

对 $x\in\mathbb{R}^n$, 作 $f(x)=\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i'\|=\|T(x)\|$,

则 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 (两个连续映射的复合).

记 $S^{n-1}=\{y\in\mathbb{R}^n|\,\|y\|=1\}$ 是有界闭集. 因此 S^{n-1} 是紧集.

故 f 在 S^{n-1} 上达到最小值 m. 即存在 $y_0=(y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})\in S$, $y_0\ne 0$,

使得 $m=f(y_0)=\|\sum_{i=1}^{n}y_i^{(0)}e_i'\|>0$.

对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $y=\frac{x}{\|x\|}\in S^{n-1}$, 故 $\|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_ie_i'}{\|x\|}\|=\|T(y)\|=f(y)\ge m$.

因此 $\|\sum_{i=1}^{n}x_ie_i'\|\ge m\|x\|$.

即对任意 $z, z' \in X$, 有 $\|T^{-1}(z-z')\| \le \frac{1}{m}\|z-z'\|$.

故 T^{-1} 是连续. 因此 T 是同胚.

注　X 中有界集 B 的原象 $T^{-1}(B)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界集.

推论 有限维赋范线性空间是 Banach 空间. 任意赋范线性空间的有限维子空间是 Banach 空间. 因此是闭子空间.

引理 设 X_0 是 X 的真闭线性子空间, 则对任意 ε: $0<\varepsilon<1$, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $\|x_0\|=1$ 且 $\rho(x_0, X_0) \ge 1-\varepsilon$.

证　取 $x_1 \in X - X_0$. 由于 X_0 是闭集, 故 $x_1 \notin \overline{X}_0$. 因此

$\rho(x_1, X_0) = \inf_{y\in X_0} \rho(x_1, y) = \inf_{y \in X_0} \|x_1 - y\| = d > 0$.

由于 $\frac{d}{1-\varepsilon} > d$, 故存在 $y_1 \in X_0$, 使得 $\|x_1 - y_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$.

令 $x_0 = \frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}$, 则 $\|x_0\|=1$ 且对任意 $y \in X_0$, 有

$\|y-x_0\| = \|y - \frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}\| = \frac{1}{\|x_1-y_1\|}\|(\|x_1-y_1\|y+y_1)-x_1\|$.

由于 X_0 是线性子空间, 故 $(\|x_1-y_1\|y+y_1) \in X_0$. 因此

$\|(\|x_1-y_1\|y+y_1)-x_1\| \ge d$.

因此 $\|y-x_0\| \ge \frac{d}{\|x_1-y_1\|} > 1-\varepsilon$. 因此 $\rho(x_0, X_0) \ge 1-\varepsilon$.

定理 赋范线性空间 X 是有限维空间 $\Leftrightarrow$ X 的有界闭集是紧集.

证　$\Rightarrow$ 设 $T: \mathbb{R}^n \mapsto X$ 是拓扑同构映射, B 是 X 的有界闭集,

则 $T^{-1}(B)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界闭集. 故 $T^{-1}(B)$ 是紧集.

因此 $B = T(T^{-1}(B))$ 是紧集.

$\Leftarrow$ (反证法) 假设 X 不是有限维空间, 则取 $x_1 \in X$, $\|x_1\|=1$.

由于 $X_1 = \operatorname{span}\{x_1\}$ 是 X 的真闭子空间, 故存在 $x_2 \in X$, 使得

$\|x_2\|=1$ 且 $\rho(x_2, X_1) > 1/2$.

由于 $X_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ 是 X 的真闭子空间, 故存在 $x_3 \in X$, 使得

$\|x_3\|=1$ 且 $\rho(x_3, X_2) > 1/2$. $\cdots$ 一般

由于 $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 X 的真闭子空间, 故存在 $x_{n+1} \in X$, 使得

$\|x_{n+1}\|=1$ 且 $\rho(x_{n+1}, X_n) > 1/2$. $\cdots$.

显然 $\{x_n\} \subset \overline{B}(0,1)$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$ $(n \ne m)$.

故有界闭集 $\overline{B}(0,1)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列.

故有界闭集 $\overline{B}(0,1)$ 不是紧集. 矛盾.

§ 3　Hilbert 空间

3.1 内积空间的定义

在 $\mathbb{R}^3$ 上, 对向量 $x, y \in \mathbb{R}^3$, 规定 $(x,y) = \|x\|\cdot\|y\|\cos\varphi$

为 x 与 y 的内积, 其中 φ 与向量 x 与 y 的夹角, 则

$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

因此在 $\mathbb{C}^n$ 上规定内积: $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y}_i$. 满足

1. $(x,x) \ge 0$, 且 $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$; (正定性)
2. $(x,y) = \overline{(y,x)}$; (共轭对称性)
3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$. (第一变量线性)

定义 设 X 是线性空间, (x,y) 是 $X \times X$ 上的二元函数, 若

1. 正定性: $(x,x) \geqslant 0$ 且 $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$;
2. 共轭对称性: $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (实空间时,$(x,y)=(y,x)$);
3. 第一变量线性: $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x,z)+\beta(y,z)$,

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积, 称 $(X,(\cdot,\cdot)) = X$ 为内积空间.

利用 2,3 得 (第二变量共轭线性)

$$
\begin{aligned}
(x, \alpha y + \beta z) &= \overline{(\alpha y + \beta z, x)} = \overline{\alpha(y,x)+\beta(z,x)} \\
&= \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z).
\end{aligned}
$$

规定 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, 则

1. $\|x\| \geqslant 0, \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$.
2. $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(x,x)} =\mid \alpha \mid \cdot \|x\|$.

下面证明 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

引理 (Schwarz) 设 X 是内积空间, $x, y \in X$, 则 $|(x,y)| \le \|x\|\,\|y\|$.

等号当且仅当 x 与 y 线性相关时成立.

证　对任意数 λ, 有

$$
\begin{aligned}
0 \le (x-\lambda y, x-\lambda y) &= (x,x) - \lambda(y,x) - \overline{\lambda}(x,y) - \lambda(-\overline{\lambda})(y,y) \\
&= (x,x) - \lambda(y,x) - \overline{\lambda}[(x,y) - \lambda(y,y)].
\end{aligned}
$$

取 $\lambda = (x,y)/\|y\|^2$, 则最后括号里项等于零.

因此 $(x,x) - (x,y)\cdot(y,x)/\|y\|^2 \ge 0$.

即 $|(x,y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

等号当且仅当 $x - \lambda y = 0$ 即 x 与 y 线性相关时成立.

下面证明 $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) &= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \\ &\le (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

所以 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

因此 $\|x\|$ 是范数. 称为由内积导出的范数.

若 $(X, \|\cdot\|)$ 是完备的, 则称 $(X, (\cdot,\cdot)) = X$ 为 Hilbert 空间.

1. 内积是二元连续函数: 当 $x_n \to x$, $y_n \to y$ 时, 有 $(x_n, y_n) \to (x, y)$:

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n) - (x,y)| &\le |(x_n,y_n) - (x,y_n)| + |(x,y_n) - (x,y)| \\ &= |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\ &\le \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0.\end{aligned}$$

2. 内积可用范数表示: X 为实空间时, $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$;

X 为复空间时, $(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$.

称为极化恒等式. 证明直接将范数展开成内积就可以.

例 $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{C}, i = 1, \cdots, n\}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维空间.

$(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$ 是内积. $\mathbb{C}^n$ 是 Hilbert 空间.

$\mathbb{R}^n$ 上规定 $(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 是内积. $\mathbb{R}^n$ 是实 Hilbert 空间.

$l^2 = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \,|\, x_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < +\infty\}$ 上,

对 $x, y \in l^2$, 有 $\sum_{i=1}^\infty |x_n \overline{y}_n| \le (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2)^{1/2} (\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2)^{1/2}$.

因此 $\sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y}_n$ 绝对收敛.

规定 $(x,y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y}_n$ 是内积, 则 $\|x\| = (x,x)^{1/2} = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2)^{1/2}$.

由于 $(l^2, \|\cdot\|)$ 是完备的, 因此 l^2 是 Hilbert 空间.

$L^2[a,b]$ 上规定内积 $(x,y) = \int_a^b x(t)\overline{y}(t)dt$, 则 $L^2[a,b]$ 是 Hilbert 空间.

定理 设 X 是内积空间, $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ 是内积导出的范数,

则对任意 $x, y \in X$, 有 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

称为平行四边形公式: 平行四边形中对角线的长度平方和等于各边的平方和.

证 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

$$\begin{aligned}&= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x,y) - (y,x) + \|y\|^2 \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).\end{aligned}$$

例 $C[0,1]$ 不是内积空间.

取 $x(t) = t$, $y(t) = 1$, 则 $\|x\| = 1 = \|y\|$.

$\|x+y\| = \max_{0 \le t \le 1}(t+1) = 2$.

$\|x-y\| = \max_{0 \le t \le 1} |t-1| = 1$.

因此 $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4 + 1 = 5 \ne 4 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

例 l^p 不是内积空间 $(p \ne 2)$.

取 $x = (1, 0 \cdots), y = (0, 1, 0 \cdots)$, 则 $\|x\| = 1 = \|y\|$.

$\|x+y\| = 2^{1/p} = \|x-y\|$.

$(2^{1/p})^2 + (2^{1/p})^2 = 2 \cdot 2^{2/p} \ne 2 \cdot (1^2 + 1^2) = 4$.

当且仅当 $p = 2$ 时上面等式成立.

定理 设 $(X, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 若 $\|\cdot\|$ 满足平行四边形公式, 则规定

实空间时, $(x,y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)/4$;

复空间时, $(x,y) = (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)/4$

是内积, 内积导出的范数恰是 $\|\cdot\|$.

§4 Hilbert 空间中的正交系

4.1 正交与正交分解

定义 设 X 是内积空间, $x, y \in X$, $N, M \subset X$, 若

1. 若 $(x,y) = 0$, 则称 x 与 y 正交, 记为 $x \perp y$;
2. 若每个 $y \in M$, 有 $x \perp y$, 则称 x 与 M 正交, 记为 $x \perp M$;
3. 若每个 $x \in N$, 有 $x \perp M$, 则称 N 与 M 正交, 记为 $N \perp M$;
4. 记 $M^\perp = \{y \,|\, y \perp M\}$ 称为 M 的正交补.

定理 设 X 是内积空间, $M \subset X$, 则 $M^\perp$ 是 X 闭子空间.

证 设 $x, y \in M^\perp$, $\alpha \in \mathbb{K}$. 对任意 $z \in M$, 有

$(\alpha x + y, z) = \alpha(x,z) + (y,z) = 0$.

故 $\alpha x+y\in M^{\perp}$. 因此 $M^{\perp}$ 是线性空间.

设 $x\in\overline{M^{\perp}}$, 则存在 $x_n\in M^{\perp}$, 使得 $x=\lim_n x_n$.

对任意 $z\in M$, $(x,z)=\lim_n(x_n,z)=0$.

故 $x\perp M$. 故 $x\in M^{\perp}$. 即 $M^{\perp}$ 是闭集.

定义 设 X 是赋范空间, $M\subset X$, $x\in X$, 若存在 $y\in M$, 使得

$\|x-y\|=\rho(x,M)=\inf_{z\in M}\rho(x,z)$,

则称 y 为 x 在 M 中的最佳逼近.

定义 设 X 是线性空间, $E\subset X$, 若对任意 $x,y\in E$, 及 $0\le t\le 1$, 有 $tx+(1-t)y\in E$, 则称 E 为凸集.

定理 设 X 是内积空间, $E\subset X$ 是凸的完备集,

则对每个 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in E$, 使得 $\|x-y\|=\rho(x,E)$.

证　记 $\alpha=\rho(x,E)$, 则存在 $y_n\in E$, 使得 $\|x-y_n\|\to\alpha$.

由于 E 是凸集, 故 $(y_n+y_m)/2\in E$. 因此

$$\begin{aligned}\|y_n-y_m\|^2&=2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-\|2x-(y_n+y_m)\|^2\\&\le 2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\|x-(y_n+y_m)/2\|^2\\&\le 2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-4\alpha^2\to 0.\end{aligned}$$

因此 $\{y_n\}$ 是基本列. 由于 E 是完备的, 故存在 $y\in E$, 使得

$\lim_n y_n=y$. 因此 $\|x-y\|=\lim_n\|x-y_n\|=\alpha$.

设又有 $y'\in E$, 使得 $\|x-y'\|=\alpha$, 则

$$\begin{aligned}\|y-y'\|^2&=2(\|y-x\|^2+\|x-y'\|^2)-\|2x-(y+y')\|^2\\&\le 2(\alpha^2+\alpha^2)-4\alpha^2=0.\end{aligned}$$

因此 $y=y'$.

定理 设 X 是 Hilbert 空间, $Y\subset X$ 是闭子空间, 则对每个 $x\in X$,

存在唯一的 $y\in Y$ 及 $z\in Y^{\perp}$, 使得 $x=y+z$. 即 $X=Y\bigoplus Y^{\perp}$.

证　由于 Y 是 Hilbert 空间 X 的闭子空间, 故 Y 是完备的凸集.

故存在 $y\in Y$, 使得 $\|x-y\|=\rho(x,Y)$. 记 $z=x-y$. 只需证明 $z\perp Y$.

对任意 $u\in Y$ 及 $\lambda\in\mathbb{K}$, 有 $y+\lambda u\in Y$.

$$\begin{aligned}\alpha^2\le\|x-(y+\lambda u)\|^2&=(z-\lambda u,z-\lambda u)\\&=\|z\|^2-\lambda(u,z)-\overline{\lambda}[(z,u)-\lambda\|u\|^2].\end{aligned}$$

取 $\lambda=(z,u)/\|u\|^2$, 得 $\alpha^2\le\alpha^2-|(z,u)|^2/\|u\|^2$.

因此 $(z,u)=0$, 故 $z\in Y^{\perp}$.

设又存在 $y'\in Y$ 及 $z'\in Y^{\perp}$, 使得 $x=y'+z'$, 则 $x=y+z=y'+z'$.

因此 $y-y'=z-z'\in Y\bigcap Y^{\perp}$. 故 $(y-y',y-y')=0$.

故 $y=y'$, $z=z'$.

4.2 内积空间中的标准正交系

定义 设 X 是内积空间, $M\subset X$, $0\notin M$, 若

1. 任意不同的 $x,y\in M$, 有 $x\perp y$, 则称 M 为正交系;
2. 又对每个 $x\in M$, 有 $\|x\|=1$, 则称 M 为标准正交系.

定理 设 X 是内积空间, $M\subset X$ 为正交系, 则

1. 任意 $x_i\in M$, 有 $\|x_1+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$;
2. M 是线性无关族.

证　1. $\|x_1+\cdots+x_n\|^2=(x_1+\cdots+x_n,x_1+\cdots+x_n)$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(x_i,x_j)\qquad=\|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$$

2. 对任意 $x_i\in M$, 若 $\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i=0$, 两边对 x_j 作内积得

$\alpha_j\|x_j\|^2=\alpha_j(x_j,x_j)=(\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i,x_j)=(0,x_j)=0$.

由于 $x_j\ne 0$, 因此 $\alpha_j=0$. 故 M 是线性无关组.

定义 设 X 是内积空间, $M\subset X$ 是标准正交系,

1. 称 $\{(x,e)\,|\,e\in M\}$ 为 x 关于 M 的 Fourier − 系数集;
2. 称 (x,e) 为 x 关于 $e\in M$ 的 Fourier − 系数;
3. 称 $\sum_{e\in M}(x,e)e$ 为 x 关于 M 的 Fourier − 级数.

定理 (Bessel 不等式) 设 X 是内积空间, $M\subset X$ 是标准正交系, 则

$\sum_{e\in M}|(x,e)|^2\le\|x\|^2$.

证　记 $M_0=\{e\in M\,|\,(x,e)\ne 0\}$, $M_k=\{e\in M\,|\,|(x,e)|\ge 1/k\}$.

对有限个 $e_i\in M$, 记 $c_i=(x,e_i)$, 则

$$\begin{aligned}\|x-\textstyle\sum_{i=1}^n c_ie_i\|^2&=(x-\textstyle\sum_{i=1}^n c_ie_i,x-\sum_{i=1}^n c_ie_i)\\&=\|x\|^2-\textstyle\sum_{i=1}^n c_i(e_i,x)-\sum_{i=1}^n\overline{c}_i(x,e_i)+\sum_{i=1}^n|c_i|^2\\&=\|x\|^2-\textstyle\sum_{i=1}^n|c_i|^2.\end{aligned}$$

因此, $\sum_{i=1}^n |(x,e_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \le \|x\|^2$.   (*)

当每个 $e_i \in M_k$ 时, $n/k^2 \le \sum_{i=1}^n |c_i|^2 \le \|x\|^2$. 故 M_k 是有限集.

因此 $M_0 = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$ 是可数集. 不妨设 $M_0 = \{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$.

对 (*) 式, 令 $n\to\infty$ 得

$\sum_{e\in M} |(x,e)|^2 = \sum_{i=1}^\infty |(x,e_i)|^2 = \sum_{i=1}^\infty |c_i|^2 \le \|x\|^2$.

定理 设 X 是 Hilbert 空间, $M = \{e_1,\cdots,e_n,\cdots\} \subset X$ 是标准正交系, $c = (c_1,\cdots,c_n,\cdots) \in l^2$, 则存在唯一的 $x\in X$, 使得 c_n 是 x 关于 e_n 的 Fourier − 系数且 $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |c_n|^2$.

证 令 $x_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$. 当 $m > n$ 时,

$\|x_m - x_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^m c_k e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |c_k|^2 \to 0.\ (n\to\infty)$

故 $\{x_n\}$ 是基本列. 由于 X 是完备的, 故存在 $x\in X$, 使得

$x = \lim_n x_n = \sum_{k=1}^\infty c_k e_k$.

因此 $\|x\|^2 = \lim_n \|x_n\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2$.

定义 设 X 是内积空间, $M\subset X$ 是标准正交系,

1. 若每个 $x\in X$, 有 $\|x\|^2 = \sum_{e\in M} |(x,e)|^2$, 则称 M 为完备系;
2. 若 $M^\perp = \{0\}$, 则称 M 为完全系.

定理 设 X 是 Hilbert 空间, M 是标准正交系, 则下列命题等价:

1. M 为完备系;
2. 对每个 $x\in X$, 有 $x = \sum_{e\in M}(x,e)e$;
3. 对任意 $x,y\in X$, 有 $(x,y) = \sum_{e\in M}(x,e)\overline{(y,e)}$;
4. M 为完全系.

证 设 $M_0 = \{\, e\in M \mid (x,e)\ne 0$ 或 $(y,e)\ne 0\} = \{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$.

$1\Rightarrow 2$. $\|x - \sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x,e_k)|^2 \to 0$. 故

$x = \lim_n \sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k = \sum_{e\in M}(x,e)e$.

$2\Rightarrow 3$. 由于 $x = \lim_n \sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k = \sum_{e\in M}(x,e)e$,

$y = \lim_n \sum_{k=1}^n (y,e_k)e_k = \sum_{e\in M}(y,e)e$. 故

$$\begin{aligned}(x,y) &= (\lim_n \textstyle\sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k, \lim_n \sum_{k=1}^n (y,e_k)e_k)\\ &= \lim_n(\textstyle\sum_{k=1}^n (x,e_k)e_k, \sum_{k=1}^n (y,e_k)e_k)\\ &= \lim_n \textstyle\sum_{k=1}^n (x,e_k)\overline{(y,e_k)} = \sum_{e\in M}(x,e)\overline{(y,e)}.\end{aligned}$$

$3\Rightarrow 4$. 设 $x\in M^\perp$, 则对每个 $e\in M$, 有 $(x,e)=0$.

因此 $(x,x) = \sum_{e\in M}(x,e)\overline{(x,e)} = 0$. 故 $x=0$. 因此 $M^\perp = \{0\}$.

$4\Rightarrow 1$. 设 $x\in X$. 记 $c_i = (x,e_i)$, 则由 Bessel 不等式,

$c = (c_1,\cdots,c_n,\cdots)\in l^2$.

由于 X 是完备空间, 故存在 $y\in X$, 使得 $y = \sum_{i=1}^\infty (x,e_i)e_i$.

显然 $x-y\perp M$. 故 $x-y\in M^\perp = \{0\}$. 即 $x-y=0$. 因此

$\|x\|^2 = \|y\|^2 = \sum_{i=1}^\infty |(x,e_i)|^2 = \sum_{e\in M}|(x,e)|^2$.

因此 M 是完备的.

例 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 上, 规定内积 $(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x(t)y(t)dt$,

则 $L^2[-\pi,\pi]$ 是 Hilbert 空间.

$M = \{\frac{1}{\sqrt2}, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots\}$ 是完备的 (证略) 标准正交系.

因此对任意 $x\in L^2[-\pi,\pi]$, 记 $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x(t)\frac{1}{\sqrt2}dt$;

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x(t)\cos nt\,dt$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi x(t)\sin nt\,dt$, 则

$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt2} + \sum_{k=1}^\infty (a_n\cos nt + b_n \sin nt)$.

定理 设 X 是内积空间, $M = \{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是完备的标准正交系, 则 X 是可分空间.

证 不妨设 X 是实空间. 记 $H = \{\sum_{i=1}^n r_i e_i \mid r_i\in\mathbb{Q}, n\in\mathbb{N}\}$ 是可列集.

对任意 $x\in X$, 由于 $x = \sum_{i=1}^\infty (x,e_i)e_i$,

故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 使得 $\|x - \sum_{i=1}^N (x,e_i)e_i\| < \varepsilon/2$.

取有理数 $r_i\in\mathbb{Q}$, 使得 $|(x,e_i) - r_i| < \frac{\varepsilon}{2N}$, 则

$\|x - \sum_{i=1}^N r_i e_i\| \le \|x - \sum_{i=1}^N (x,e_i)e_i\| + \|\sum_{i=1}^N [(x,e_i) - r_i]e_i\| < \varepsilon$.

因此 H 在 X 上稠密. 即 X 是可分空间.

4.3 施密特正交化

定理 设 X 是内积空间, $\{x_1,\cdots,x_n,\cdots,\}\subset X$ 是线性无关组,

则存在标准正交系 $\{e_1,\cdots,e_n,\cdots\}$, 使得对每个 n, 有

$\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\} = \operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$.

证 取 $e_1 = x_1/\|x_1\|$.

取 $v_2 = x_2 - (x_2,e_1)e_1$, 则 $v_2\perp e_1$, 单位化 $e_2 = v_2/\|v_2\|$.

取 $v_3 = x_3 - (x_3,e_1)e_1 - (x_3,e_2)e_2$, 则 $v_2\perp e_1$, $v_2\perp e_2$,

单位化 $e_3 = v_3/\|v_3\|$. $\cdots$.

一般取 $v_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1}(x_n, e_i)e_i$, 则 $v_n \perp e_i$, $i = 1, \cdots, n-1$,

单位化 $e_n = v_n/\|v_n\|$. $\cdots$.

显然 $\{e_1, \cdots, e_n, \cdots\}$ 是标准正交系且

$\operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\} = \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_n\}$.

定义 设 X, Y 是内积空间, 如果 $T : X \mapsto Y$ 是线性同构且

$(Tx, Ty) = (x, y)$, 则称 T 是 X 到 Y 的一个同构映射.

如果存在一个同构映射 $T : X \mapsto Y$, 则称 X 与 Y 同构, 记为 $X \simeq Y$,

读作 X 同构于 Y.

定理 任意可分的 Hilbert 空间 X 与 $\mathbb{R}^k$ 或 $\mathbb{C}^k$ 或 l^2 同构.

证　不妨设 X 是无限维空间. 下面证明 X 同构于 l^2.

由于 X 是可分空间, 故存在可列集 $H = \{z_1, \cdots, z_n, \cdots\}$ 在 X 上稠密.

H 中取第一个不为 0 的, 记为 x_1. H 中取第一个不能用 $\{x_1\}$ 线性表出的, 记为 x_2. H 中取第一个不能用 $\{x_1, x_2\}$ 线性表出的, 记为 x_3.

一般设在 H 中已取线性无关的 $\{x_1, \cdots, x_n\}$.

H 中取第一个不能用 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 线性表出的, 记为 x_{n+1}. $\cdots$.

这样取下去得线性无关组 $M = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$.

显然 $H \subset \operatorname{span} M$. 因此 $X = \overline{H} = \overline{\operatorname{span} M} = \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$.

因此对任意 $x \in X$, 存在 $x_k \in \operatorname{span}\{e_n\}$, 使得 $x = \lim_k x_k$ 且

$x_k = \sum_{n=1}^{\infty}(x_k, e_n)e_n$.

$$\begin{aligned}\|x - \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n\| &\le \|x - x_k\| + \|\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_k - x, e_n)e_n\| \\ &= \|x - x_k\| + (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|(x_k - x, e_n)|^2)^{1/2} \le 2\|x - x_k\|.\end{aligned}$$

因此 $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$. 因此 $\{e_n\}$ 是 X 的完备正交系.

作 $T : X \ni x \mapsto ((x, e_1), \cdots, (x, e_n), \cdots) \in l^2$, 则 T 是同构映射.(证略)

三章　Banach 空间上的有界线性算子

§ 1　有界线性算子

1.1　基本概念及性质

定义 设 X 与 Y 是线性空间, $D \subset X$ 是线性子空间, $T : D \to Y$,

若对于任意 $x, y \in D$ 及数 α, 有

1. $T(x + y) = Tx + Ty$; (称为可加的)
2. $T(\alpha x) = \alpha Tx$, (称为齐次的)

则称 T 为 D 到 Y 的线性算子.

$\mathscr{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}$ 是 D 的线性子空间称为 T 的零空间.

例 $I : X \ni x \mapsto x \in X$ 称为恒等算子或单位算子.

$\alpha I : X \ni x \mapsto \alpha x \in X$ 称为相似算子都是线性算子.

特别 $\alpha = 0$ 时, αI 是零算子, 记为 O.

定理 设 X, Y 是赋范线性空间, $T : X \supset D \mapsto Y$ 是线性算子, 则

T 为连续 $\Leftrightarrow$ T 在某一点 $x_0 \in D$ 处连续.

证　$\Rightarrow$ 显然.

$\Leftarrow$ 对任意 $x \in X$ 及 $x_n \subset X$, 当 $x_n \to x$ 时, 有 $x_n - x + x_0 \to x_0$.

由于 T 在 x_0 处连续, 故 $Tx_n - Tx = T(x_n - x + x_0) - Tx_0 \to 0$.

故 T 在 x 处连续. 因此 T 是连续算子.

定义 设 X 与 Y 是赋范线性空间, $T : X \supset D \mapsto Y$ 是线性算子,

若存在 $M \ge 0$, 使得对一切 $x \in D$, 有 $\|Tx\| \le M\|x\|$,

则称 T 为 D 到 Y 的线性有界算子, 否则称 T 为无界算子.

定理 设 X, Y 是赋范空间 $T : X \supset D \mapsto Y$ 线性算子, 则

T 为连续 $\Leftrightarrow$ T 为有界算子.

证　$\Leftarrow$ 设 T 为有界算子, 则存在 $M > 0$, 对任意 $x \in D$, 有

$\|Tx\| \le M\|x\|$. 因此对任意 $x_n, x \in D$, 当 $x_n \to x$ 时. 有

$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\| \to 0$,

故 T 是连续算子.

$\Rightarrow$ 反证法. 假设 T 是无界算子, 则对任意 $M = n$, 存在 $x_n \in D$,

使得 $\|Tx_n\| > M\|x_n\|$. 记 $y_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$.

则 $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, 故 $y_n \to 0$, 但 $\|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|} > 1$,

故 $Ty_n \nrightarrow 0$. 因此 T 在 $x = 0$ 处不连续, 这与 T 是连续算子矛盾.

定义 设 X, Y 是赋范空间, $T : X \supset D \mapsto Y$ 有界线性算子,

对任意 $x \in D$, 使 $\|Tx\| \le M\|x\|$ 成立的 M 的下确界 $\Leftrightarrow$

$\sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \mid x\in D, x\neq 0\}$

称为 T 的范数, 记为 $\|T\|$.

显然对一切 $x\in D$, 有 $\|Tx\|\le\|T\|\cdot\|x\|$.

定理 设 X,Y 是赋范空间, $T: X\supset D\mapsto Y$ 有界线性算子, 则

$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|$. $(x\in D)$

证　对 $x,y\in D$,

$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \le \sup_{\|y\|=1}\|Ty\|$

$\le \sup_{\|y\|\le 1}\|Ty\| \le \sup_{\|y\|\le 1}\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \le \sup_{x\neq 0}\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$.

例 设 $T:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ 的线性算子. 记

$e_j = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^m$; $e'_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$.

设 $T:\mathbb{R}^m\ni e_j\mapsto\sum_{i=1}^n a_{ij}e'_i\in\mathbb{R}^n$, 则 T 对应矩阵 (a_{ij}).

$y = Tx = T(\sum_{j=1}^m x_j e_j) = \sum_{j=1}^m x_j\cdot Te_j$

$= \sum_{j=1}^m x_j\sum_{i=1}^n a_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j)e'_i$.

故 $y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j$.

$\|Tx\| = (\sum_{i=1}^n y_i^2)^{(1/2)} = (\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j)^2)^{1/2}$

$\le (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2\cdot\sum_{j=1}^m |x_j|^2)^{1/2}$

$= (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2)^{1/2}\cdot\|x\|$.

故 $\|T\|\le(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m|a_{ij}|^2)^{1/2}$.

故 T 是有界. 因此 T 是连续算子.

例 设 $K(t,s)$ 是 $D=\{(t,s)|a\le t\le b, a\le s\le b\}$ 上的连续实函数, 作

$T: C[a,b]\ni x\mapsto\int_a^b K(t,s)x(s)ds\in C[a,b]$,

则 $\|T\| = \max_{a\le t\le b}\int_a^b|K(t,s)|ds\triangleq\alpha$.

证　由数学分析知 $\int_a^b K(t,s)x(s)ds\in C[a,b]$ 且 T 是线性.

对任意 $x\in C[a,b]$, 有

$\|Tx\| = \max_{a\le t\le b}|\int_a^b K(t,s)x(s)ds|$

$\le \max_{a\le t\le b}\int_a^b|K(t,s)|\cdot\|x\|ds = \alpha\cdot\|x\|$.

因此 $\|T\|\le\alpha$.

由于 $\int_a^b|K(t,s)|ds$ 是 $[a,b]$ 上的 (变量 t) 连续实函数,

故存在 $t_0\in[a,b]$, 使得 $\alpha=\int_a^b|K(t_0,s)|ds$.

记 $e_0=\{s\,|\,K(t_0,s)\ge 0\}$ 是闭集.

作函数 $\varphi_n(t)=\frac{1-n\rho(t,e_0)}{1+n\rho(t,e_0)}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.

当 $t\in e_0$ 时, $\varphi_n(t)=1$.

当 $t\notin e_0$ 时, 由于 e_0 是闭集, 故 $\rho(t,e_0)>0$. 故 $\varphi_n(t)\to -1$.

因此由 Lebesgue 控制收敛定理

$(T\varphi_n)(t_0) = \int_a^b K(t_0,s)\varphi_n(s)ds\to\int_a^b|K(t_0,s)|ds$;

$\alpha = \int_a^b|K(t_0,s)|ds = \lim_n T\varphi_n(t_0)\le\underline{\lim}_n\|T\varphi_n\|$

$\le\|T\|\cdot\underline{\lim}_n\|\varphi_n\| = \|T\|$.

因此 $\|T\| = \max_{a\le t\le b}\int_a^b|K(t,s)|ds$.

例 设 $K(t,s)$ 是 $D=\{(t,s)|a\le t\le b, a\le s\le b\}$ 上的连续实函数,

对 $t_0\in[a,b]$, 作 $f: C[a,b]\ni x\mapsto\int_a^b K(t_0,s)x(s)ds\in\mathbb{K}$,

则 $\|f\| = \int_a^b|K(t_0,s)|ds$.

注　要证明 $\|T\|=\alpha$. 只须证

1. 对任意 $x\in X$, 有 $\|Tx\|\le\alpha\|x\|\Rightarrow\|T\|\le\alpha$;
2. 找一列 $x_n\in X$, $\|x_n\|\le 1$, 使得 $\|Tx_n\|\to\alpha$. $\Rightarrow$

   $\alpha = \lim_n\|Tx_n\|\le\underline{\lim}_n\|T\|\|x_n\| = \|T\|$

   特别, 若存在 $x_0\in X$, $\|x_0\|=1$, 使得 $\|Tx_0\|=\alpha$,

   则 $\alpha=\|Tx_0\|\le\|T\|\|x_0\|=\|T\|$.

例 $C^1[a,b]=\{x\,|\,x'(t)\in C[a,b]\}$ 是 $C[a,b]$ 的子空间.

$D: C^1[0,1]\ni x(t)\mapsto x'(t)\in C[0,1]$ 是线性算子.

对 $x_n(t)=t^n$, 有 $\|x_n\|=1$, 但 $\|Dx_n\|=\|nt^{n-1}\|=n\to+\infty$.

因此 D 是 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 的无界算子.

1.2 线性算子空间

定义 设 $X\neq\varnothing$, Y 是线性空间, 对 $T,S\in Y^X=\{T\mid T: X\mapsto Y\}$, $\alpha\in\mathbb{K}$, 规定线性运算: $(T+S)(x)=T(x)+S(x)$; $(\alpha T)(x)=\alpha T(x)$, 则 Y^X 是线性空间.

当 X 也是线性空间时, 记 $L(X,Y)=\{T\,|\,T: X\mapsto Y$ 线性算子$\}$ 是 Y^X 的线性子空间.

当 X,Y 都是赋范线性空间时, 记

$\mathscr{B}(X,Y)=\{T\,|\,T:X\mapsto Y$ 有界线性算子 $\}$

称为 X 到 Y 的有界线性算子空间. 是 $L(X,Y)$ 的子空间.

特别, 记 $X^*=\mathscr{B}(X,\mathbb{K})=\{f\,|\,f:X\to\mathbb{K}$ 的线性连续泛函 $\}$

称为 X 的共轭空间.

定理 设 X,Y 是赋范线性空间, 则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是线性赋范空间.

证　对 $T,S\in\mathscr{B}(X,Y)$ 及数 α,

1. $\|T\|\geq 0$, $\|T\|=0\Leftrightarrow$ 对任意 $x\in X$, 有 $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=0$, 故 $\|Tx\|=0$,

因此 $Tx=0$, 即 $T=O$.

2. $\|\alpha T\|=\sup_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\ \|T\|$.

故 $\alpha T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

3. $\|T+S\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx+Sx\|$

$$\leq\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|+\sup_{\|x\|=1}\|Sx\|=\|T\|+\|S\|,$$

故 $T+S\in\mathscr{B}(X,Y)$.

因此 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是线性空间且按照范数 $\|T\|$ 是赋范空间.

特别, X 的共轭空间 X^* 是赋范空间.

定理 设 X 是赋范空间, Y 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是 Banach 空间.

证　设 $\{T_n\}$ 是 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的基本列,

则任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n,m>N$ 时, 有 $\|T_n-T_m\|<\varepsilon$.

故对每个 $x\in X$, 有 $\|T_nx-T_mx\|<\varepsilon\|x\|$.　　(1)

因此 $\{T_nx\}$ 是 Y 中的基本列. 故存在 $y\in Y$, 使得 $y=\lim_n T_nx$.

记 $y\triangleq Tx$. 由于每个 T_n 是线性, 极限运算是线性, 故 T 是线性算子.

对 (1) 式, 令 $m\to+\infty$ 得 $\|T_nx-Tx\|\leq\varepsilon\|x\|$. 因此

$\|T_n-T\|\leq\varepsilon$　　(2)

因此 $T_n-T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 因此 $T=T_n-(T_n-T)\in\mathscr{B}(X,Y)$.

由 (2) 式得 $T=\lim T_n$. 即 $\mathscr{B}(X,Y)$ 是完备的.

推论 设 X 是赋范空间, 则共轭空间 X^* 是 Banach 空间.

1.3 算子的乘法

设 $T_1\in\mathscr{B}(X,Y)$, $T_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$, 规定

$T_2\cdot T_1:X\ni x\mapsto T_2(T_1(x))\in Z$ 是线性算子.

且对每个 $x\in X$, 有

$\|T_2\cdot T_1x\|=\|T_2(T_1(x))\|\leq\|T_2\|\cdot\|T_1x\|\leq\|T_2\|\cdot\|T_1\|\cdot\|x\|$.

因此 $T_2T_1\in\mathscr{B}(X,Z)$ 且 $\|T_2\cdot T_1\|\leq\|T_2\|\|T_1\|$.

定理 设 $T_1,S_1\in\mathscr{B}(X,Y)$, $T_2,S_2\in\mathscr{B}(Y,Z)$, $T_3\in\mathscr{B}(Z,H)$, 则

1. 结合律: $(T_3T_2)T_1=T_3(T_2T_1)$;
2. 对数乘交换律: $(\alpha T_2)T_1=\alpha(T_2T_1)=T_2(\alpha T_1)$;
3. 对加法分配律: $T_2\cdot(T_1+S_1)=T_2\cdot T_1+T_2\cdot S_1$,

$$(T_2+S_2)\cdot T_1=T_2\cdot T_1+S_2\cdot T_1.$$

一般 $T_1\cdot T_2$ 没有意义.

记 $\mathscr{B}(X)=\mathscr{B}(X,X)=\{T\mid T:X\mapsto X$ 线性有界算子 $\}$,

则对 $T_1,T_2\in\mathscr{B}(X)$, T_1T_2,T_2T_1 都有意义但一般不相等.

例 $T_1:C[0,1]\ni x\mapsto\int_0^t x(s)ds\in C[0,1]$;

$T_2:C[0,1]\ni x\mapsto tx(t)\in C[0,1]$,

则 $T_2T_1(x)=t\int_0^t x(s)ds\neq\int_0^t sx(s)ds=T_1T_2(x)$.

$\mathscr{B}(X)$ 是线性空间, 还有乘法运算且 $\|T_1T_2\|\leqslant\|T_1\|\|T_2\|$,

称 $\mathscr{B}(X)$ 为由 X 上的线性有界算子组成的算子代数.

定义 设 X 是赋范空间且 X 中有乘法运算满足

1. 结合律; 对数乘交换律; 对加法分配律; (称 X 为代数)
2. 对任意 $x,y\in X$, 有 $\|xy\|\leq\|x\|\|y\|$,

则称 X 为赋范代数. 若 X 又是完备的, 则称 X 为 Banach 代数.

定理 设 X 是 Banach 空间, 则 $\mathscr{B}(X)$ 是 Banach 代数.

§ 2　开映射定理 · 闭图象定理

2.1 开映射定理

设 X 是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, $x\in X$, $A,B\subset X$, $\alpha\in\mathbb{K}$, 记

$x+A=\{x+y\,|\,y\in A\}$; $A+B=\{x+y\,|\,x\in A,\ y\in B\}$;

$\alpha\cdot A=\{\alpha x\,|\,x\in A\}$;　　一般 $A+A\supsetneqq 2A$.

设 $T:X\mapsto Y$ 是线性映射, $x\in X$, $A,B\subset X$, $\alpha\in\mathbb{K}$,

$T(x+A)=Tx+T(A)$; $T(A+B)=T(A)+T(B)$; $T(\alpha A)=\alpha T(A)$.

设 X 是赋范空间, $x\in X$, $\delta,r>0$, 则

$B(x,r)=x+B(0,r)$; $\qquad B(0,r\delta)=rB(0,\delta)$;

$B(0,r)+B(0,r)=B(0,2r)$; $\qquad B(x,r)-B(x,r)=B(0,2r)$;

$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} nB(0,\delta)$.

设 X 是赋范空间, $x\in X$, $A,B\subset X$, $\alpha\in\mathbb{K}$,

$\overline{x+A}=x+\overline{A}$; $\qquad \overline{A}+\overline{B}\subset\overline{A+B}$; $\qquad \overline{\alpha A}=\alpha\overline{A}$.

定义 设 X,Y 是赋范空间, $T:X\mapsto Y$, 若对任意开集 $G\subset X$, $T(G)$ 是 Y 中的开集, 则称 T 为开映射.

定理 (开映射定理) 设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\mapsto Y$ 是有界线性算子, 若 $T(X)$ 是 Y 中的第二纲集, 则 T 是开映射且 $T(X)=Y$.

证　对任意 $V_0=B(0,r)=\{x\in X\,|\,\|x\|<r\}$, 记 $V_n=B(0,r/2^n)$.

先证明存在 δ: $0<\delta<r$, 使得 $U(0,\delta)\triangleq\{y\in Y\,|\,\|y\|<\delta\}\subset\overline{T(V_1)}$.

由于 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty} nV_2$, 故 $T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty} nT(V_2)$.

由于 $T(X)$ 是第二纲集, 故存在 n, 使得 $\overline{nT(V_2)}=n\overline{T(V_2)}$ 含非空开集.

因此存在 $y_0\in Y$ 及 $\delta<r$, 使得 $U(y_0,\delta)\subset\overline{T(V_2)}$. 因此

$$U(0,\delta)\subset U(y_0,\delta)-U(y_0,\delta)$$
$$\subset\overline{T(V_2)}-\overline{T(V_2)}\subset\overline{T(V_2)-T(V_2)}\subset\overline{T(V_2-V_2)}\subset\overline{T(V_1)}.$$

特别以 $r/2^{n-1}$ 代替 r 得: 存在 $\delta_n<r/2^{n-1}$, 使得 $W_n\triangleq U(0,\delta_n)\subset\overline{T(V_n)}$.

再证明 $\overline{T(V_1)}\subset T(V_0)$. 对任意 $y\triangleq y_1\in\overline{T(V_1)}$, 有

$(y_1-W_2)\bigcap T(V_1)\neq\varnothing$. 故存在 $x_1\in V_1$, 使得

$y_2\triangleq y_1-Tx_1\in W_2\subset\overline{T(V_2)}$.

故 $(y_2-W_3)\bigcap T(V_2)\neq\varnothing$. 故存在 $x_2\in V_2$, 使得

$y_3\triangleq y_2-Tx_2\in W_3\subset\overline{T(V_3)}$. $\cdots$,

一般 $(y_n-W_{n+1})\bigcap T(V_n)\neq\varnothing$. 故存在 $x_n\in V_n$, 使得

$y_{n+1}\triangleq y_n-Tx_n\in W_{n+1}\subset\overline{T(V_{n+1})}$. $\cdots$,

上式们两边作和得 $y_{n+1}=y-\sum_{k=1}^{n}Tx_k$. $\qquad (1)$

由于 $\{\sum_{k=1}^{n}x_k\}$ 是基本列, X 是完备的, 故存在 $x_0\in X$, 使得 $\sum_{k=1}^{n}x_k\to x_0$.

而 $\|x_0\|\le\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r}{2^k}=r$. 故 $x_0\in V_0$.

由于 $y_n\in W_n=U(0,\delta_n)$, 故 $y_n\to 0$. 由 (1) 式,

$y=\lim_n T(\sum_{k=1}^{n}x_k)+\lim_n y_{n+1}=\lim_n T(\sum_{k=1}^{n}x_k)$.

由于 T 是连续算子 (或闭算子), 故 $y=Tx_0\in T(V_0)$.

因此 $U(0,\delta)\subset\overline{T(V_1)}\subset T(V_0)=T(B(0,r))$.

下证明对开集 $G\subset X$, $T(G)$ 是 Y 中开集.

对任意 $y\in T(G)$, 存在 $x\in G$, 使得 $y=Tx$.

由于 G 是开集, 故 $G-x\in\mathscr{T}_X(0)$, 故存在 $B(0,r)\subset G-x$.

因此存在 $U(0,\delta)\subset T(B(0,r))\subset T(G)-Tx$.

故 $Tx+U(0,\delta)\subset T(G)$. 故 $T(G)$ 是开集.

由于 $0\in T(X)$ 是开集, 故存在 $U(0,\delta)\subset T(X)$, 而

$Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} nU(0,\delta)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} nT(X)=T(X)$.

故 $T(X)=Y$.

注　证明中没有用 Y 是的完备性. 其实作为结论可以推出 Y 的完备性.

推论 设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\mapsto Y$ 是有界线性满射, 则 T 是开映射.

定理 (逆算子定理) 设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\mapsto Y$ 是有界线性单射, 若 $T(X)$ 是 Y 中的第二纲集, 则 $T(X)=Y$ 且 T^{-1} 是线性连续算子.

证　T^{-1} 是线性: 对任意 $y_1,y_2\in Y$, 存在唯一的 $x_1,x_2\in X$, 有 $y_i=Tx_i$.

对数 α, 有

$$T^{-1}(y_1+\alpha y_2)=T^{-1}(Tx_1+\alpha Tx_2)=T^{-1}(T(x_1+\alpha x_2))$$
$$=x_1+\alpha x_2=T^{-1}(y_1)+\alpha T^{-1}(y_2).$$

由开映射定理, 对任意开集 $V\subset X$, $(T^{-1})^{-1}(V)=T(V)$ 是 Y 中开集.

因此 T^{-1} 是连续算子.

推论 (逆算子定理) 设 X,Y 是 Banach 空间, $T:X\mapsto Y$ 是有界线性一一对应, 则 T^{-1} 是连续线性算子.

定义 设 $(X,\|\cdot\|_i)$ 是两个 X 上的赋范空间, 若存在 $K_2,K_1>0$,

使得对一切 $x\in X$, 有 $K_1\|x\|_1\le\|x\|_2\le K_2\|x\|_1$,

则称范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

这时, $I:(X,\|\cdot\|_1)\ni x\mapsto x\in(X,\|\cdot\|_2)$ 是拓扑同构.

定理 设 $(X, \|\cdot\|_i)$ 都是 Banach 空间, 若存在 $K_2 > 0$, 使得 $\|x\|_2 \le K_2\|x\|_1$, 则 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证　作 $I : (X, \|\cdot\|_1) \ni x \mapsto x \in (X, \|\cdot\|_2)$,

则 $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \le K_2\|x\|_1$. 故 I 是有界线性双射.

故 $I^{-1} = I : (X, \|\cdot\|_2) \ni x \mapsto x \in (X, \|\cdot\|_1)$ 是有界.

即对任意 $x \in X$, 有 $\|x\|_1 = \|I^{-1}x\|_1 \le \|I^{-1}\|\,\|x\|_2$.

取 $K_1 = \frac{1}{\|I^{-1}\|}$, 则对一切 $x \in X$, 有 $K_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le K_2\|x\|_1$.

2.2 闭图象定理

设 $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ 是赋范空间. 在 $X \times Y$ 上规定线性运算:

$\alpha(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2)$.

则 $X \times Y$ 是线性空间.

规定: $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, 则 $X \times Y$ 是赋范空间.

如果 X, Y 都是 Banach 空间, 则 $X \times Y$ 也是 Banach 空间.

定理 设 X, Y 是赋范空间, 则 $X \times Y$ 中点列 $(x_n, y_n) \to (x, y)$ 当且仅当 $x_n \to x$, $y_n \to y$.

定义 设 $T : X \supset D \mapsto Y$, 若 T 的图像 $G(T) = \{(x, Tx) \,|\, x \in D\}$ 是 $X \times Y$ 中的闭集, 则称 T 为闭算子.

定理 设 $D \subset X$ 是子空间, $T : D \mapsto Y$, 则 T 是闭算子 $\Leftrightarrow$ 对任意 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 当 $(x_n, y_n) \to (x, y)$ 时, 有 $x \in D$, 且 $y = Tx$.

证　T 是闭算子 $\Leftrightarrow G(T)$ 是闭集 $\Leftrightarrow$ 当 $G(T) \ni (x_n, y_n) \to (x, y)$ 时, 有 $(x, y) \in G(T) \Leftrightarrow x \in D$, $y = Tx$.

定理 设 D 是 X 的闭子空间, $T : X \supset D \mapsto Y$ 是连续算子, 则 T 是闭算子.

证　对任意 $(x, y) \in \overline{G(T)}$, 存在 $(x_n, y_n) \in G(T)$,

使得 $(x, y) = \lim_n (x_n, y_n)$. 因此 $x = \lim_n x_n$; $y = \lim_n y_n$.

由于 $(x_n, y_n) \in G(T)$, 故 $x_n \in D$, $y_n = Tx_n$.

由于 D 是闭集, 故 $x \in D$.

由于 T 是连续, 故 $y = \lim_n y_n = \lim_n Tx_n = Tx$.

故 $(x, y) = (x, Tx) \in G(T)$ 是闭集. 因此 T 是闭算子.

设 $D \subset X$ 是线性子空间, $T : D \mapsto Y$ 的线性算子,

则 $G(T)$ 是 $X \times Y$ 的子空间: 对任意 $(x_i, Tx_i) \in G(T)$ 及数 α, 有

$$\begin{aligned}\alpha(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) &= (\alpha x_1 + x_2, \alpha Tx_1 + Tx_2)\\ &= (\alpha x_1 + x_2, T(\alpha x_1 + x_2)) \in G(T).\end{aligned}$$

故 $G(T)$ 是线性子空间.

定理 (闭图象定理) 设 X, Y 是 Banach 空间, $T : X \mapsto Y$ 是线性闭算子, 则 T 是连续算子.

证　由于 $X \times Y$ 是 Banach 空间, $G(T)$ 是闭子空间. 故 $G(T)$ 是 Banach 空间. 作 $P : G(T) \ni (x, Tx) \mapsto x \in X$ 是线性一一对应且

$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$.

故 P 是有界线性算子. 由逆算子定理,

$P^{-1} : X \ni x \mapsto (x, Tx) \in G(T)$ 也是有界算子. 故

$\|Tx\| \le \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|P^{-1}(x)\| \le \|P^{-1}\| \cdot \|x\|$.

故 $\|T\| \le \|P^{-1}\|$. 因此 T 是连续算子.

§ 3　共鸣定理及其应用

3.1 共鸣定理

定义 设 X 是线性空间, $p : X \mapsto \mathbb{R}$, 若

1. $p(x + y) \le p(x) + p(y)$; (称 p 为次可加的)
2. 对 $\alpha \ge 0$, 有 $p(\alpha x) = \alpha p(x)$; (称 p 为正齐次的)
3. $p(x) \ge 0$, (称 p 为非负的)

则称 p 为凸泛函.

定理 (共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范空间, $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(X, Y)$, 则存在在 X 中稠密的 $G_\delta-$ 型集 $E \subset X$, 使得对每个 $x \in E$, 有 $\sup_{T \in \mathscr{A}} \|Tx\| = +\infty$, 或存在 $M > 0$, 对一切 $T \in \mathscr{A}$, 有 $\|T\| \le M$.

证　记 $\varphi(x) = \sup_{T \in \mathscr{A}} \|Tx\|$; $V_n = X(\varphi > n)$.

由于 $g(x) \triangleq \|T(x)\|$ 是连续函数, 故 $\{x \,|\, \|T(x)\| > n\}$ 是开集.

因此 $V_n = X(\varphi > n) = \bigcup_{T \in \mathscr{A}} \{x \,|\, \|T(x)\| > n\}$ 是开集.

若每个 V_n 在 X 中稠密, 则 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ 是在 X 中稠密的 $G_\delta-$ 型集,

且对每个 $x\in E$, 有 $\sup_{T\in\mathscr{A}}\|Tx\|=\varphi(x)=+\infty$.

否则存在 $m>0$, 使 V_m 在 X 中不稠密.

故存在 $B(x_0,\delta)$, 使得 $V_m\bigcap\overline{B}(x_0,\delta)=\varnothing$.

因此当 $x\in\overline{B}(x_0,\delta)$ 时, 对一切 $T\in\mathscr{A}$, 有 $\|Tx\|\le m$.

对任意 $x\in\overline{B}(0,1)$, 有 $x_0+\delta x\in\overline{B}(x_0,\delta)$,

故 $\|T(\delta x)\|\le\|Tx_0\|+\|T(x_0+\delta x)\|\le 2m$.

因此对一切 $T\in\mathscr{A}$, 有 $\|T\|\le 2m/\delta\triangleq M$.

推论 (共鸣定理) 设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范空间, $\mathscr{A}\subset\mathscr{B}(X,Y)$,

若对每个 $x\in X$, 有 $\{Tx\,|\,T\in\mathscr{A}\}$ 是有界集: $\sup_{T\in\mathscr{A}}\|Tx\|<+\infty$,

则存在 $M>0$, 对一切 $T\in\mathscr{A}$, 有 $\|T\|\le M$

定理 (Steinhaus) 设 X,Y 是 Banach 空间, $T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$,

则存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 对每个 $x\in X$, 有 $Tx=\lim_n T_nx\ \Leftrightarrow$

1. $\{\|T_n\|\}$ 有界数集;
2. 存在 G 是 X 中的稠密子集, 使得对任意 $x\in G$, T_nx 是基本列.

证 $\Rightarrow$ 对每个 $x\in X$, 由于 T_nx 收敛, 故 T_nx 是有界. 由共鸣定理,

存在 $M>0$, 使得对一切 n, 有 $\|T_n\|\le M$. 结论 2 显然成立.

$\Leftarrow$ 由于 $\{\|T_n\|\}$ 是有界集, 故存在 $M>0$, 使得 $\|T_n\|\le M$.

设 $x\in X$. 对任意 $\varepsilon>0$, 由于 G 在 X 中稠密, 故存在 $x'\in G$,

使得 $\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{3M}$.

由于 T_nx' 基本列, 故存在 N, 当 $n>m>N$ 时, 有 $\|T_nx'-T_mx'\|<\frac{\varepsilon}{3}$.

因此

$$\begin{aligned}\|T_nx-T_mx\|&\le\|T_n(x-x')\|+\|T_nx'-T_mx'\|+\|T_m(x-x')\|\\&\le\|T_n\|\cdot\|x-x'\|+\tfrac{\varepsilon}{3}+\|T_m\|\cdot\|x'-x\|<\varepsilon.\end{aligned}$$

故 $\{T_nx\}$ 是 Y 中基本列. 由于 Y 是完备, 故 $\{T_nx\}$ 收敛.

记 $Tx=\lim_n T_nx$. 显然 T 是线性算子且

$\|Tx\|=\lim_n\|T_nx\|\le\liminf_n\|T_n\|\|x\|$.

故 $\|T\|\le\liminf_n\|T_n\|\le M$. 因此 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

注　充分性的证明没有用 X 的完备性. 必要性的证明没有用 Y 的完备性.

推论 设 X,Y 是 Banach 空间, $T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$, 若对每个 $x\in X$,

$\{T_nx\}$ 是 Y 中的基本列, 则存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 使得 $Tx=\lim_n T_nx$.

称 $\mathscr{B}(X,Y)$ 按强收敛拓扑是完备的.

3.2 共鸣定理的应用

记 $C_{2\pi}$ 为 $\mathbb{R}$ 上周期为 2π 的连续函数全体. 按范数

$\|x\|=\max_{-\infty<t<+\infty}|x(t)|=\max_{-\pi\le t\le\pi}|x(t)|$

是 Banach 空间.

对 $x\in C_{2\pi}$, 记 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)dt$;

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos nt\,dt;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin nt\,dt.$

x 的 $F-$ 级数的部分和函数列

$$\begin{aligned}S_n(x,t)&=\tfrac{a_0}{2}+\textstyle\sum_{k=1}^n(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\\&=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\tfrac12+\textstyle\sum_{k=1}^n(\cos ks\cos kt+\sin ks\sin kt)]x(s)\,ds\\&=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\frac{\sin[(n+1/2)(s-t)]}{2\sin[(s-t)/2]}\,ds\triangleq\int_{-\pi}^{\pi}x(s)D_n(s-t)\,ds.\end{aligned}$$

称 $D_n(s-t)$ 为 Dirichlet 核.

对每个 $t_0\in[-\pi,\pi]$, 记

$f_n(x)=s_n(x,t_0)=\int_{-\pi}^{\pi}x(s)\cdot D_n(s-t_0)ds\in\mathbb{R}$.

由于当 $0<t<\pi/2$ 时, $\sin t<t$. 故

$$\begin{aligned}\|f_n\|&=\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s-t_0)|ds=\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(s-0)|ds=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)s|}{2\pi|\sin(s/2)|}\,ds\\&=\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)s|}{\sin(s/2)}\,ds\ge\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1/2)s|}{s/2}\,ds\\&=\tfrac{2}{\pi}\int_0^{(n+1/2)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt\ge\tfrac{2}{\pi}\textstyle\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt\\&\ge\tfrac{2}{\pi}\textstyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|dt=\frac{4}{\pi\pi}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\to\infty.\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

由共鸣定理, 存在稠密的 $G_\delta-$ 型集 $E_{t_0}\subset C_{2\pi}$, 对每个 $x\in E_{t_0}$,

$\sup_n|f_n(x)|=\sup_n|s_n(x,t_0)|=+\infty$.

因此 x 的 $F-$ 级数在 t_0 处发散.

设 $[\pi,\pi]\bigcap\mathbb{Q}=\{r_1,\cdots,r_n,\cdots\}$, 存在稠密的 $G_\delta-$ 型集 $E_n\subset C_{2\pi}$,

对 $x\in E_n$, x 的 $F-$ 级数在 r_n 处发散.

$E\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$ 还是稠密的 $G_\delta-$ 型集.

对 $x\in E\subset C_{2\pi}$, x 的 $F-$ 级数在所有有理点 r_n 处都发散.

习题 证明在所有有理点上连续, 而无理点上不连续的函数是不存在的.

§ 4　有界线性泛函

4.0 半序集

定义 设 $X,Y\neq\varnothing$ 是集合,

1. $X\times Y=\{(x,y)\,|\,x\in X,y\in Y\}$, 称为 X 与 Y 的笛卡儿积;
2. 若 $R\subset X\times Y$, 则称 R 为 X 到 Y 的关系;
3. 若 $(x,y)\in R$, 则称 x 与 y 是 $R-$ 相关, 记作 xRy.

定义 设 $R\subset X\times X=X^2$, 若

1. 自反性: 对每个 $x\in X$, 有 xRx;
2. 当 xRy 且 yRx 时, 有 $x=y$;
3. 传递性: 当 xRy 且 yRz 时, 有 xRz,

则称 R 为 X 上的序关系, 记 R 为 $\prec$, 称 $(X,\prec)$ 为半序集;

设 $(X,\prec)$ 是半序集, 若对任意 $x,y\in X$, 有 $x\prec y$ 或 $y\prec x$,

则称 $(X,\prec)$ 是全序集.

例 $(\mathbb{R},\leq)$ 是全序集, 称为自然序集. $(\mathbb{R},\geq)$ 是全序集, 称为逆序集.

$(\mathbb{R},<)$ 不是半 (全) 序集.

例 设 X 是集合, $\mu\subset 2^X$, 对 $A,B\in\mu$, 规定: $A\prec B\Leftrightarrow A\subset B$,

则 $(\mu,\prec)$ 是半序集, 称为自然序集. 称 $(\mu,\supset)$ 为逆序集.

特别 $(2^X,\subset)$ 是半序集, 一般不是全序集.

定义 设 $(X,\prec)$ 为半序集, $x\in X$, $A\subset X$,

1. 若对每个 $y\in A$, 有 $y\prec x$, 则称 x 为集合 A 的一个上界;
2. 若对每个 $y\in X$, 有 $y\prec x$, 则称 x 为 X 中的最大元;
3. 若对每个 $y\in X$, 当 $x\prec y$ 时, 有 $x=y$, 则称 x 为一个极大元;
4. 若 $(A,\prec)$ 是全序集, 则称 A 为 X 的全序子集;
5. 若 A 是全序子集, 对全序子集 B, 当 $A\subset B$ 时, 有 $A=B$,
   则称 A 为 X 的极大全序子集.

例 设 $X\neq\varnothing$, μ 是 X 的非空子集全体, $(\mu,\subset)$ 是半序集,

对每个 $\mathscr{A}\subset\mu$, X 是 $\mathscr{A}$ 的上界. $\mathscr{A}$ 不一定有下界.

X 是极大元, 也是最大元.

每个单点集是极小元. 当 X 不是单点集时, μ 中没有最小元.

下面四个定理是等价的. 证明见附录.

Zorn **引理** 设 $(X,\prec)$ 为半序集, 如果每个全序子集都有上界,

则 X 必有极大元.

Hausdorff **引理** 设 $(X,\prec)$ 为半序集, 则 X 必有极大全序子集.

Zermelo **选择公理** 设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的互不相交非空的集合组成的集族,

则存在集合 $E\subset X$, 使得对每个 $\gamma\in\Gamma$, $E\bigcap A_\gamma$ 是单点集.

定理 (选择公理) 设 $X\neq\varnothing$, $\mu=2^X-\{\varnothing\}$, 则存在映射

$f:\mu\ni E\mapsto f(E)\in E\subset X$. 称 f 为 X 的选择函数.

4.1 有界线性泛函的延拓

定义 设 $T_i:\mathscr{D}(T_i)\mapsto Y$, 若 $\mathscr{D}(T_1)\subset\mathscr{D}(T_2)$ 且对 $x\in\mathscr{D}(T_1)$, 有

$T_2(x)=T_1(x)$, 则称 T_2 为 T_1 的延拓; 称 T_1 为 T_2 的限制.

定义 设 X 是线性空间, $p:X\mapsto\mathbb{R}$, 若

1. $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$, 则称 p 为次可加的;
2. 对 $\alpha\geq 0$, 有 $p(\alpha x)=\alpha p(x)$, 则称 p 为正齐次的;
3. 对 $\alpha\in\mathbb{K}$, 有 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$ 且 p 是次可加, 则称 p 为半范数.

定理 设 G 是实线性空间 X 的子空间, f 是 G 上的实线性泛函, p 是 X 上的次可加正齐次泛函, 对 $x\in G$, 有 $f(x)\leq p(x)$, 则存在 X 上的实线性泛函 F_0, 使得 F_0 是 f 的延拓且对 $x\in X$, 有 $F_0(x)\leq p(x)$.

证　不妨设 $G\neq X$, 任取 $x_0\in X-G$, 令

$G_1=\operatorname{span}(G\bigcup\{x_0\})=\{x+tx_0\,|\,x\in G,-\infty<t<\infty\}$.

作 $F:G_1\mapsto R$, $F(x+tx_0)=f(x)+tc$.

其中 c 是待定常数. 显然 F 是 f 的线性延拓. 选取 c 使得

$f(x)+tc=F(x+tx_0)\leq p(x+tx_0)$.

当 $t>0$ 时, $c\leq\frac{1}{t}(p(x+tx_0)-f(x))=p(x/t+x_0)-f(x/t)$

(记 $x' = x/t \in G$) $\qquad = p(x' + x_0) - f(x')$.

当 $t < 0$ 时, $c \geq \frac{1}{t}(p(x + tx_0) - f(x)) = -p(-x/t - x_0) + f(-x/t)$

(记 $x'' = -x/t \in G$) $\qquad = -p(x'' - x_0) + f(x'')$.

因此只需 $-p(x'' - x_0) + f(x'') \leq p(x' + x_0) - f(x')$ 就可以.

$$f(x'') + f(x') = f(x'' + x') \leq p(x'' + x') = p(x'' - x_0 + x' + x_0) \leq p(x'' - x_0) + p(x' + x_0).$$

因此 $-p(x'' - x_0) + f(x'') \leq p(x' + x_0) - f(x')$. 故

$\sup_{x'' \in G}(-p(x'' - x_0) + f(x'')) \leq \inf_{x' \in G}(p(x' + x_0) - f(x'))$.

取 c 使得

$\sup_{x'' \in G}(-p(x'' - x_0) + f(x'')) \leq c \leq \inf_{x' \in G}(p(x' + x_0) - f(x'))$,

则 F 是 f 的线性延拓且对 $x \in G_1$, 有 $F(x) \leq p(x)$.

记 $\mathscr{F} = \{F \,|\, F$ 是 f 的线性延拓且对 $x \in \mathscr{D}(F)$, 有 $F(x) \leq p(x)\}$

对 $F_i \in \mathscr{F}$, 规定序关系 $F_1 \prec F_2$ 当且仅当 F_2 为 F_1 的延拓,

则 $\mathscr{F}$ 是半序集. 由 Hausdorff 极大引理, 存在极大全序子集 $\mathscr{H}$.

记 $\mathscr{D} = \bigcup_{F \in \mathscr{H}} \mathscr{D}(F)$. 作 $F_0 : \mathscr{D} \mapsto \mathbb{R}$:

对 $x \in \mathscr{D}$, 存在 $F \in \mathscr{H}$, 使得 $x \in \mathscr{D}(F)$, 规定 $F_0(x) = F(x)$, 则 $F_0 \in \mathscr{F}$.

下证明 $\mathscr{D} = X$ 就可以.

否则由前面的证明得存在 F_0 的真延拓 $F_1 \in \mathscr{F}$.

$\mathscr{H} \bigcup \{F_1\} \neq \mathscr{H}$ 是 $\mathscr{F}$ 的全序子集. 这与 $\mathscr{H}$ 是极大全序子集矛盾.

4.2 哈恩 - 巴拿赫定理

引理 设 f 是复赋范空间 X 上的有界泛函, 令 $\varphi(x) = Ref(x)$, 则 φ 是 X 上的有界实线性泛函且 $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, $\|\varphi\| \leq \|f\|$.

证　设 $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$, 这里 $\varphi(x), \psi(x)$ 分别是 $f(x)$ 的实部与虚部.

显然 φ, ψ 是实线性泛函.

$\varphi(ix) + i\psi(ix) = f(ix) = if(x) = i\varphi(x) - \psi(x)$.

故 $\varphi(ix) = -\psi(x)$. 因此 $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$.

$|\varphi(x)| = |Ref(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\|\|x\|$. 故 $\|\varphi\| \leq \|f\|$.

定理 设 M 是线性空间 X 的子空间, f 是 M 上的线性泛函, p 是 X 上的半范数, 对 $x \in M$, 有 $|f(x)| \leq p(x)$, 则 f 可以延拓为 X 上的线性泛函 F 且对任意 $x \in X$, 有 $|F(x)| \leq p(x)$.

证　若标量域 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, 由于 p 是次可加正齐次泛函, 故存在 F 是 X 上的线性泛函, 是 f 的延拓, 则

$-p(x) = -p(-x) \leq -F(-x) = F(x) \leq p(x)$. 故 $|F(x)| \leq p(x)$.

若标量域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, 令 $\varphi_0 = Ref$ 是 M 上的实线性泛函且

$|\varphi_0(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$.

故存在 φ_0 在 X 上的延拓 φ, 使得 $\varphi(x) \leq p(x)$.

作 $F(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, 则 F 是 f 在 X 上的延拓且复线性泛函:

$F(ix) = \varphi(ix) - i\varphi(-x) = iF(x)$.

由于存在单位复数 β, 使得 $|F(x)| = \beta F(x)$. 故

$|F(x)| = \beta F(x) = F(\beta x) = \varphi(\beta x) \leq p(\beta x) = |\beta| p(x) = p(x)$.

定理 设 G 是赋范空间 X 的线性子空间, f 是 G 上的有界线性泛函, 则存在 X 上的线性泛函 F 是 f 延拓且 $\|F\| = \|f\|$.

证　记 $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ 是 X 上的半范数且 $|f(x)| \leq p(x)$. 故存在 X 上的线性泛函 F 是 f 延拓, 使得 $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$. 故 $\|F\| \leq \|f\|$.

显然 $\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{G \ni x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|$.

故 $\|F\| = \|f\|$.

定理 设 G 是赋范空间 X 的线性子空间, $x_0 \in X$, $d \triangleq \inf_{y \in G} \|x_0 - y\| > 0$, 则存在 $f \in X^*$, 使得对 $x \in G$, 有 $f(x) = 0$; $f(x_0) = d$; $\|f\| = 1$.

证　显然 $x_0 \notin G$. 记 $G_1 = \{\alpha x_0 + x \,|\, x \in G, \alpha \in \mathbb{K}\}$ 是线性子空间.

作 $g : G_1 \ni \alpha x_0 + x \mapsto \alpha d \in \mathbb{K}$ 是线性泛函.

对 $x \in G$, 有 $g(x) = 0$; $g(x_0) = d$;

$|g(\alpha x_0 + x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \cdot \|x_0 - (-x)/\alpha\| = \|\alpha x_0 + x\|$, 故 $\|g\| \leq 1$.

$d = g(x_0) = g(x_0 - x) \leq \|g\|\|x_0 - x\|$. 故

$d \leq \|g\| \inf_{x \in G} \|x_0 - x\| = \|g\| d$. 故 $1 \leq \|g\|$.

因此 $\|g\| = 1$.

存在 g 的延拓 $f \in X^*$, 使得 $\|f\| = \|g\| = 1$.

推论 设 X 是赋范线性空间, $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$,

则存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x_0) = \|x_0\|$ 且 $\|f\| = 1$.

证 取 $G = \{0\}$ 就可以.

推论 设 X 是赋范线性空间, $x \in X$, 则 $\|x\| = \sup_{f\in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

证 由于 $|f(x)| \le \|f\|\|x\|$, 故 $\|x\| \ge \sup_{f\in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$, 故 $\|x\| \le \sup_{f\in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

§ 5 对偶空间 · 共轭算子

5.1 对偶空间

定义 设 X 是赋范空间, $X^* = \{f \,|\, f$ 是 X 上的有界线性泛函 $\}$

称为 X 的共轭空间. X^* 是 Banach 空间.

$X^{**} = (X^*)^*$ 称为 X 的二次共轭空间. $\cdots$.

定理 设 X 是赋范空间,

1. $x \in X$, 作 $x^{**} : X^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{K}$,
   则 x^{**} 是 X^* 上的线性泛函且 $\|x^{**}\| = \|x\|$;
2. 作 $** = T : X \ni x \mapsto x^{**} \in X^{**}$ 是线性保范算子.

证 1. 对任意 $f, g \in X^*$ 及数 α, 有

$x^{**}(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(x) = f(x) + \alpha g(x) = x^{**}(f) + \alpha x^{**}(g)$.

对任意 $f \in X^*$, 有 $|x^{**}(f)| = |f(x)| \le \|f\|\|x\|$. 故 $\|x^{**}\| \le \|x\|$.

由延拓定理存在 $f \in X^*$, 使得 $f(x) = \|x\|$, $\|f\| = 1$. 故

$\|x\| = f(x) = x^{**}(f) \le \|x^{**}\|\|f\| = \|x^{**}\|$.

故 $\|x^{**}\| = \|x\|$

2. 对任意 $x, y \in X$ 及数 α, 对每个 $f \in X^*$, 有

$T(x + \alpha y)(f) = (x + \alpha y)^{**}(f) = f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$

$= x^{**}(f) + \alpha y^{**}(f) = (x^{**} + \alpha y^{**})(f) = (T(x) + \alpha T(y))(f)$.

故 $T(x + \alpha y) = T(x) + \alpha T(y)$.

由 1. 得 T 是保范的.

因此 X 同构于 $T(X) \subset X^{**}$. 因此 X 可看成 X^{**} 的子空间.

定义 设 X 是赋范空间, 称 $T : X \ni x \mapsto x^{**} \in X^{**}$ 为 X 上的典范算子;

若 T 是满射, 则称 X 为自反空间.

例 $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$.

证 记 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

对 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$, 记 $y_i = f(e_i)$, 则 $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

对每个 $x \in \mathbb{R}^n$, 有 $f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

作 $T : (\mathbb{R}^n)^* \ni f \mapsto y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. 下证 T 是同构映射.

对任意 $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ 及数 α,

$$\begin{aligned}T(f + \alpha g) &= ((f + \alpha g)(e_1), \cdots, (f + \alpha g)(e_n)) \\ &= (f(e_1), \cdots, f(e_n)) + \alpha(g(e_1), \cdots, g(e_n)) = T(f) + \alpha T(g),\end{aligned}$$

故 T 是线性.

$$\begin{aligned}|f(x)| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| &\le \sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \\ &\le (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^n |y_i|^2)^{1/2} = \|y\|\|x\|.\end{aligned}$$

故 $\|f\| \le \|y\| = \|T(f)\|$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \sum_{i=1}^n |y_i| sgn(y_i) f(e_i) &= f(\sum_{i=1}^n |y_i| sgn(y_i) e_i) \\ &\le \|f\|\|\sum_{i=1}^n |y_i| sgn(y_i) e_i\| = \|f\|\|y\|,\end{aligned}$$

故 $\|T(f)\| = \|y\| \le \|f\|$. 因此 $\|f\| = \|T(f)\|$.

对 $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, 作 $f_b : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i b_i \in \mathbb{K}$ 是线性泛函.

且 $\|f_b\| = \|b\|$. $T(f_b) = (f_b(e_1), \cdots, f_b(e_n)) = (b_1, \cdots, b_n) = b$.

故 T 是满射. 因此 T 是同构映射.

例 $(l^p)^* \cong l^q$. $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$.

证 记 $e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots) \in l^p$. 对 $f \in (l^p)^*$, 记 $y_i = f(e_i)$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |y_i|^q &= \sum_{i=1}^n |y_i|^{q-1} sgn(y_i) f(e_i) \\ &= f(\sum_{i=1}^n |y_i|^{q-1} sgn(y_i) e_i) \le \|f\| \cdot \|\sum_{i=1}^n |y_i|^{q-1} sgn(y_i) e_i\| \\ &= \|f\|(\sum_{i=1}^n |y_i|^{(q-1)p})^{1/p} = \|f\|(\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{1/p}.\end{aligned}$$

故 $(\sum_{i=1}^n |y_i|^q)^{1/q} \le \|f\|$. 令 $n \to \infty$ 得 $(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^q)^{1/q} \le \|f\|$.

因此 $y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in l^q$.

作 $T : (l^p)^* \ni f \mapsto y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in l^q$ 是线性算子.

且 $\|Tf\| = (\sum_{i=1}^\infty |y_i|^q)^{1/q} \le \|f\|$.

对每个 $x \in l^p$, 有

$\|x - \sum_{i=1}^n x_i e_i\| = (\sum_{i=n+1}^\infty |x_i|^p)^{1/p} \to 0$. 因此 $x = \lim_n \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

由于 f 是连续泛函, 故

$f(x)=f(\lim_n \sum_{i=1}^n x_ie_i)=\lim_n \sum_{i=1}^n x_if(e_i)=\sum_{i=1}^\infty x_iy_i$.

$|f(x)|=|\sum_{i=1}^\infty x_iy_i|\le \sum_{i=1}^\infty |x_i||y_i|$

$\qquad\le (\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p)^{1/p}(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^q)^{1/q}=\|y\|\|x\|$.

故 $\|f\|\le\|y\|=\|Tf\|$. 因此 $\|Tf\|=\|f\|$.

对 $b=(b_1,\cdots,b_n,\cdots)\in l^q$, 作 $f_b: l^p\ni x\mapsto \sum_{i=1}^\infty x_ib_i\in\mathbb{K}$ 是线性泛函.

且 $\|f_b\|=\|b\|$. $T(f_b)=(f_b(e_1),\cdots,f_b(e_n),\cdots)=(b_1,\cdots,b_n,\cdots)=b$.

故 T 是满射. 因此 T 是同构映射.

例 $(l^1)^*\cong l^\infty$, $(l^\infty)^*\ncong l^1$, $(c_0)^*\cong l^1$.

例 $(L^p[a,b])^*\cong L^q[a,b]$. $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$.

例 $(L^1[a,b])^*\cong L^\infty[a,b]$. 但 $(L^\infty[a,b])^*\ncong L^1[a,b]$.

注　设 $T:(L^p[a,b])^*\ni f\mapsto y=Tf\in L^q[a,b]$ 是同构映射,

则对每个 $x\in L^p[a,b]$, 有 $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt$. 且 $\|f\|=\|y\|$.

例 $(C[a,b])^*\cong \bigvee_0[a,b]=\{f\,|\,f(a)=0, f$ 是 $(a,b]$ 上右连续的有界变差函数 $\}$. 依范数 $\|f\|=\bigvee_a^b(f)$ 是 Banach 空间.

例 当 $1<p<+\infty$ 时, $(l^p)^{**}\cong l^p$, 故 l^p 是自反空间.

同理 $L^p[a,b]$ 也是自反空间.

但 c_0, l^1, l^∞ 不是自反空间; $C[a,b]$, $L^1[a,b]$, $L^\infty[a,b]$ 不是自反空间.

5.2 共轭算子

定理 设 X,Y,Z 是赋范空间, $T\in\mathscr{B}(X,Y)$,

1. 则存在唯一的 $T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$, 使得对每个 $x\in X$, $g\in Y^*$,
   有 $T^*(g)(x)=g(T(x))$ 且 $\|T^*\|=\|T\|$. 称 T^* 为 T 的共轭算子;
2. $*:\mathscr{B}(X,Y)\ni T\mapsto T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$ 是线性保范算子;
3. $S\in\mathscr{B}(Y,Z)$, 则 $(ST)^*=T^*S^*$;
4. 若在典范映射下 X 看成 X^{**} 的子空间, Y 看成 Y^{**} 的子空间,
   则 T^{**} 是 T 的延拓.

证　1. 设 $g\in Y^*$, 定义 $f:X\ni x\mapsto g(T(x))\in\mathbb{K}$ 是线性泛函.

$|f(x)|=|g(T(x))|\le\|g\|\|T(x)\|\le\|g\|\|T\|\|x\|$.

故 $\|f\|\le\|g\|\|T\|$. 因此 $f\in X^*$.

作 $T^*:Y^*\ni g\mapsto f\in X^*$, 则 $T^*(g)(x)=g(T(x))$.

对 $g_i\in Y^*$ 及数 α, 对 $x\in X$, 有

$T^*(g_1+\alpha g_2)(x)=(g_1+\alpha g_2)(T(x))=g_1(T(x))+\alpha g_2(T(x))$

$=T^*(g_1)(x)+\alpha T^*(g_2)(x)=(T^*(g_1)+\alpha T^*(g_2))(x)$.

故 $T^*(g_1+\alpha g_2)=T^*(g_1)+\alpha T^*(g_2)$.

因此 T^* 是线性算子.

$\|T^*(g)\|=\|f\|\le\|T\|\|g\|$, 故 $\|T^*\|\le\|T\|$, 因此 $T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$.

对每个 $x\in X$, 由延拓定理, 对 $T(x)$, 存在 $g\in Y^*$, 使得

$g(T(x))=\|T(x)\|$ 且 $\|g\|=1$. 因此

$\|T(x)\|=g(T(x))=T^*(g)(x)\le\|T^*(g)\|\|x\|\le\|T^*\|\|g\|\|x\|=\|T^*\|\|x\|$.

故 $\|T\|\le\|T^*\|$. 因此 $\|T\|=\|T^*\|$.

4. $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, $T^*\in\mathscr{B}(Y^*,X^*)$, $T^{**}\in\mathscr{B}(X^{**},Y^{**})$.

对 $x\in X$, $g\in Y^*$, 有

$(T(x))^{**}(g)=g(T(x))=T^*(g)(x)=x^{**}(T^*(g))=T^{**}(x^{**})(g)$.

因此 $T(x)=(T(x))^{**}=T^{**}(x^{**})=T^{**}(x)$.

因此 T^{**} 是 T 的延拓.

例 设 $T:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}^n$ 的线性算子. 记

$e_j=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^m$; $e_i'=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$.

设 $T:\mathbb{R}^m\ni e_j\mapsto\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i'\in\mathbb{R}^n$, T 对应的矩阵为 (a_{ij}).

$y=Tx=T(\sum_{j=1}^m x_je_j)=\sum_{j=1}^m x_j\cdot Te_j$

$\qquad=\sum_{j=1}^m x_j\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i'=\sum_{i=1}^n(\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j)e_i'$.

故 $y_i=\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j$.

对 $g=(g_1,\cdots,g_n)\in(\mathbb{R}^n)^*=\mathbb{R}^n$, 有

$g(T(x))=\sum_{i=1}^n y_ig_i=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_{ij}x_jg_i$

$\qquad=\sum_{j=1}^m(\sum_{i=1}^n a_{ij}g_i)x_j=T^*(g)(x)=f(x)$.

故 $f=(f_1,\cdots,f_m)=T^*(g)=\sum_{i=1}^n a_{ij}g_i$.

因此 T^* 对应的矩阵为 $(a_{ij})^T$.

5.3 强弱收敛性

定义 设 X 是赋范空间, $x_n,x\in X$, 若

1. $\|x_n-x\|\to0$, 则称 $\{x_n\}$ 强收敛于 x;

2. 对每个 $f\in X^*$, 有 $|f(x_n)-f(x)|\to 0$, 则称 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x.

定义 设 X,Y 是赋范空间, $T_n,T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 若

1. $\|T_n-T\|\to 0$, 则称 $\{T_n\}$ 一致收敛于 T;
2. 对每个 $x\in X$, 有 $\|T_nx-Tx\|\to 0$, 则称 $\{T_n\}$ 强收敛于 T;
3. 对每个 $x\in X$ 及 $g\in Y^*$, 有 $|g(T_nx)-g(Tx)|\to 0$,
   则称 $\{T_n\}$ 弱收敛于 T.

定义 设 X 是赋范空间, $f_n,f\in X^*$, 若

1. $\|f_n-f\|\to 0$, 则称 f_n 强收敛于 f;
2. 对每个 $x\in X$, 有 $|f_n(x)-f(x)|\to 0$, 则称 f_n 弱 * 收敛于 f;
3. 对每个 $F\in X^{**}$, 有 $|F(f_n)-F(f)|\to 0$, 则称 f_n 弱收敛于 f.

定理 设 X,Y 是赋范空间, $T_n,T\in\mathscr{B}(X,Y)$, 则
$\{T_n\}$ 一致收敛于 $T\Rightarrow\{T_n\}$ 强收敛于 $T\Rightarrow\{T_n\}$ 弱收敛于 T.

证　设 $x\in X$, $x\neq 0$. 由于 T_n 一致收敛于 T,
故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $\|T_n-T\|\le\varepsilon/\|x\|$.
故 $\|T_nx-Tx\|\le\|T_n-T\|\,\|x\|\le\varepsilon$.
因此 T_n 强收敛于 T.

定理 设 X 是赋范空间, $f_n,f\in X^*$, 则
$\{f_n\}$ 强收敛于 $f\Rightarrow\{f_n\}$ 弱收敛于 $f\Rightarrow\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f.

例 在 l^p 中定义 $T:l^p\ni x\to(x_2,x_3,\cdots)\in l^p$ 称为左移算子.
记 $T_n=T^n:l^p\ni x\mapsto(x_{n+1},x_{n+2},\cdots)\in l^p$ 是有界线性算子列:
对每个 $x\in X$, 由 $\|T_nx\|=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}\le\|x\|$, 得 $\|T_n\|\le 1$.
由 $\|T_n(e_{n+1})\|=\|e_1\|=1$, 得 $1\le\|T_n\|$. 因此 $\|T_n\|=1$.
因此 T_n 不一致收敛于零算子 O.
对每个 $x\in X$, 有 $\|T_nx-O(x)\|=(\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^p)^{1/p}\mapsto 0$.
因此 T_n 强收敛于零算子.

例 在 l^p 中定义 $T:l^p\ni x\to(0,x_1,x_2,\cdots)\in l^p$ 称为右移算子.
记 $T_n=T^n:l^p\ni x\mapsto(0,\cdots,0,x_1,x_2,\cdots)\in l^p$ 是有界线性算子列.
1. 对每个 $x\in X$, $\|T_nx\|=\|x\|$. 故 $\|T_n\|=1$.
因此 T_n 不强收敛于零算子 O.
2. 当 $1<p<\infty$ 时, 对任意 $y\in(l^p)^*\cong l^q$, 有
$|y(T_n(x))|=\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_{n+i}|\le\|x\|_p(\sum_{i=1}^{\infty}|y_{n+i}|^p)^{1/p}\to 0$.
故 T_n 弱收敛于零算子.
对 $x\in l^p$ $(1<p<\infty)$, $x\neq 0$, 则点列 l^p 中点列 $T_n(x)$ 不强收敛于 0.
但弱收敛于 0.

定理 设 X 是可分的赋范空间, $f_n\in X^*$ 是有界集, 则存在子列 f_{n_k} 及 $f\in X^*$, 对每个 $x\in X$, 有 $|f_{n_k}(x)-f(x)|\to 0$. 即 f_{n_k} 弱 * 收敛.
因此 X^* 中的有界集是弱 * 序列紧集.

证　由于 $f_n\in X^*$ 是有界集, 故存在 $M>0$, 使得 $\|f_n\|\le M$.
设 $G=\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}\subset X$ 在 X 上稠密. 由于 $|f_n(x)|\le M\|x\|$,
故 $f_n(x_1)$ 是有界数列. 故存在 f_n 的子列 $f_n^{(1)}$, 使得
$f_1^{(1)}(x_1),f_2^{(1)}(x_1),\cdots,f_n^{(1)}(x_1),\cdots$ 收敛.
$f_n^{(1)}(x_2)$ 是有界数列. 故存在 $f_n^{(1)}$ 的子列 $f_n^{(2)}$, 使得
$f_1^{(2)}(x_2),f_2^{(2)}(x_2),\cdots,f_n^{(2)}(x_2),\cdots$ 收敛. $\cdots$
一般 $f_n^{(k-1)}(x_k)$ 是有界数列. 因此存在 $f_n^{(k-1)}$ 的子列 $f_n^{(k)}$, 使得
$f_1^{(k)}(x_k),f_2^{(k)}(x_k),\cdots,f_n^{(k)}(x_k),\cdots$ 收敛. $\cdots$.
取 $f_{n_k}=f_k^{(k)}$. 对每个 x_k,
$f_1^{(1)}(x_k),f_2^{(2)}(x_k),\cdots,f_k^{(k)}(x_k),\cdots$ 收敛.
由于 f_{n_k} 有界, 而 G 在 X 中稠密, 由 Steinhaus 定理 f_{n_k} 弱 * 收敛.

第四章　Hilbert 空间上的有界线性算子

§ 1　对偶空间 • 共轭算子

1.1 对偶空间

定理 设 X 是赋范空间, f 是 X 上的线性泛函,
则 f 是有界 $\Leftrightarrow f$ 的零空间 $\mathscr{N}(f)$ 为闭集.

证　$\Rightarrow$ 对 $x\in\overline{\mathscr{N}(f)}$, 存在 $x_n\in\mathscr{N}(f)$, 使得 $x_n\to x$.
由于 f 连续, 故 $f(x)=\lim_n f(x_n)=0$.
故 $x\in\mathscr{N}(f)$. 因此 $\mathscr{N}(f)$ 是闭集.

$\Leftarrow$ 假设 f 不是有界, 则对任意 $M=n$, 存在 $x_n\in X$, 使得

$|f(x_n)|>n\|x_n\|$.

记 $y_n=x_n/f(x_n)$, 则 $\|y_n\|\le 1/n\to 0$ 且 $z_n\triangleq y_n-y_1\in\mathscr{N}(f)$.

但 $z_n\to -y_1\notin\mathscr{N}(f)$. 这与 $\mathscr{N}(f)$ 是闭集矛盾. 因此 f 是有界.

定理 (Riesz) 设 X 是 Hilbert 空间, $f\in X^*$, 则存在唯一的 $z\in X$,

使得对每个 $x\in X$, 有 $f(x)=(x,z)$ 且 $\|f\|=\|z\|$.

反之对任意 $z\in X$, 作 $f_z(x)=(x,z)$, 则 $f_z\in X^*$ 且 $\|f_z\|=\|z\|$.

证　若 $f=0$, 则取 $z=0$ 就可以.

不妨设 $f\ne 0$. 由于 f 是连续, 故 $\mathscr{N}(f)$ 是 X 的真闭子空间.

取 $x_0\notin\mathscr{N}(f)$, 由投影定理, 存在 $y_0\in\mathscr{N}(f)$, $z_0\in\mathscr{N}(f)^\perp$, 使得

$x_0=y_0+z_0$. 故 $f(z_0)\ne 0$.

对任意 $x\in X$, $f(x)z_0-f(z_0)x\in\mathscr{N}(f)$. 故 $(f(x)z_0-f(z_0)x,z_0)=0$.

因此 $f(x)=f(z_0)(x,z_0)/\|z_0\|^2=(x,\frac{\overline{f(z_0)}z_0}{\|z_0\|^2})$.

记 $z=\frac{\overline{f(z_0)}z_0}{\|z_0\|^2}$, 则 $f(x)=(x,z)$.

$|f(x)|=|(x,z)|\le\|x\|\|z\|$. 故 $\|f\|\le\|z\|$.

$\|z\|^2=f(z)\le\|f\|\|z\|$, 故 $\|z\|\le\|f\|$. 因此 $\|f\|=\|z\|$.

唯一性: 设又有 $z_1\in X$, 使得 $f(x)=(x,z_1)$, 则 $(x,z-z_1)=0$.

特取 $x=z-z_1$, 得 $\|z-z_1\|^2=0$. 因此 $z=z_1$.

定理 设 X 是 Hilbert 空间, 作 $T:X\ni z\mapsto f_z\in X^*$,

其中 $f_z(x)=(x,z)$, 则 T 是共轭线性保范的满射.

证　由 Riesz 定理, T 是保范的满射. 下证 T 是共轭线性.

对任意 $z_i\in X$ 及数 α, 有

$f_{z_1+\alpha z_2}(x)=(x,z_1+\alpha z_2)=(x,z_1)+\overline{\alpha}(x,z_2)=f_{z_1}(x)+\overline{\alpha}f_{z_2}(x)$.

故 $T(z_1+\alpha z_2)=T(z_1)+\overline{\alpha}T(z_2)$.

称 T 是 X 到 X^* 的共轭线性同构.

因此共轭线性同构意义下 $X^*\simeq X$.

1.2 共轭线性算子

定理 设 X,Y,Z 是 Hilbert 空间, $A\in\mathscr{B}(X,Y)$,

1. 则存在唯一的 $A^*\in\mathscr{B}(Y,X)$, 使得对每个 $x\in X$, $y\in Y$, 有
   $(Ax,y)=(x,A^*y)$ 且 $\|A^*\|=\|A\|$.
   称 A^* 为 A 的共轭算子;
2. $*:\mathscr{B}(X,Y)\ni A\mapsto A^*\in\mathscr{B}(Y,X)$ 是共轭线性保范算子;
3. $S\in\mathscr{B}(Y,Z)$, 则 $(ST)^*=T^*S^*$;
4. 则 $A^{**}=A$.

证　1. 设 $y\in Y$, 定义 $f:X\ni x\mapsto(Ax,y)\in\mathbb{K}$ 是线性泛函.

$|f(x)|=|(Ax,y)|\le\|A(x)\|\|y\|\le\|A\|\|x\|\|y\|$.

故 $\|f\|\le\|A\|\|y\|$. 因此 $f\in X^*$.

由 Riesz 定理, 存在唯一的 $z\in X$, 使得 $f(x)=(x,z)$.

作 $A^*:Y\ni y\mapsto z\in X$, 则 $(x,A^*y)=(x,z)=f(x)=(Ax,y)$.

对 $y_i\in Y$ 及数 α, 对 $x\in X$, 有

$$\begin{aligned}(x,A^*(y_1+\alpha y_2))&=(A(x),y_1+\alpha y_2)=(A(x),y_1)+\overline{\alpha}(A(x),y_2)\\&=(x,A^*(y_1))+\overline{\alpha}(x,A^*(y_2))=(x,A^*(y_1)+\alpha A^*(y_2)).\end{aligned}$$

故 $A^*(y_1+\alpha y_2)=A^*(y_1)+\alpha A^*(y_2)$.

因此 A^* 是线性算子.

$$\begin{aligned}\|A^*(y)\|^2=(A^*(y),A^*(y))&=(A(A^*(y)),y)\\&\le\|A(A^*(y))\|\|y\|\le\|A\|\|A^*(y)\|\|y\|.\end{aligned}$$

因此 $\|A^*(y)\|\le\|A\|\|y\|$. 因此 $\|A^*\|\le\|A\|$. 即 $A^*\in\mathscr{B}(Y,X)$.

$$\begin{aligned}\|A(x)\|^2=(A(x),A(x))&=(x,A^*(A(x)))\\&\le\|x\|\|A^*(A(x))\|\le\|x\|\|A^*\|\|A(x)\|.\end{aligned}$$

$\|A(x)\|\le\|A^*\|\|x\|$. 故 $\|A\|\le\|A^*\|$. 因此 $\|A\|=\|A^*\|$.

2. 设 $A,B\in\mathscr{B}(X,Y)$, α 是数, 对任意 $x\in X$, $y\in Y$, 有

$$\begin{aligned}(x,(A+\alpha B)^*y)&=((A+\alpha B)(x),y)\\&=(A(x)+\alpha B(x),y)=(A(x),y)+\alpha(B(x),y)\\&=(x,A^*(y)+\overline{\alpha}B^*(y)).\end{aligned}$$

因此 $(A+\alpha B)^*=A^*+\overline{\alpha}B^*$.

4. $(Ax,y)=(x,A^*y)=\overline{(A^*y,x)}=\overline{(y,A^{**}x)}=(A^{**}x,y)$.

因此 $A^{**}x=Ax$. 因此 $A^{**}=A$.