Q.1 求截断误差

A.1. 差分形式用Taylor展开，与微分方程作差 $L_h u_i - [Lu]_i$

一阶Taylor展开：$u(x_{m+1}) = u(x_m) + u'(x_m)\cdot h + u''(x_m)\cdot\frac{1}{2}\cdot h^2 + u'''(x_m)\cdot\frac{1}{6}\cdot h^3$

$$+\cdots+ u^{(n)}(x_m)\cdot\frac{1}{n!}\cdot h^n + O(h^{n+1})$$

二阶Taylor展开 $u(x_{j+1}, y_{k+1}) = u(x_j, y_k) + \frac{\partial}{\partial x}u(x_j, y_k)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}u(x_j, y_k)\,\tau$

(只在x，或只在y上展开时除用偏导表示外与一阶无异)

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j, y_k)\cdot h^2 + \left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u(x_j, y_k)\,h\cdot\tau\right)\times 2$$

$$+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x_j, y_k)\cdot\tau^2 + O(h^2+\tau^2)$$

△ 注意 $i+1$ 与 $i+\frac{1}{2}$：h 与 $\frac{h}{2}$ 的区别

△ 善用对h的奇偶性 eg $[p]^j_{i+\frac{1}{2}}\left([u]^j_{i+1} - [u]^j_i\right) - [p]^j_{i-\frac{1}{2}}\left([u]^j_i - [u]^j_{i-1}\right)$ 的展开

△ 二阶形式需要用网比r代入 ⟶ 不一定需要，但代入网比可以更加便于计算

△ 做籍神Note Page.10的练习.

△ 展开点的选择，选用尽少展开的即可，并无其他要求.

△ 关于差分形式换为精确解的解释：在 (x_j, t_k) 处本应是微分解，而现用差分形式逼近微分形式

(而不是单指对应点值逼近)

△ Remember. $u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = [u'']_i\cdot\frac{1}{2}h^2 + [u^{(4)}]_i\cdot\frac{1}{4!}h^4 + [u^{(6)}]_i\frac{1}{6!}h^6 + O(h^8)$

△ 很多时候，将取值写在中括号外边能很大减少书写量：e.g. $[u]_i + [u']_i + [u'']_i$

$$\rightarrow [u+u'+u'']_i$$

Q2. 稳定性分析

A.2. step.1 利用网比整理原方程为 $u_j^{k+1}=f(u_j^k,u_j^{k-1})$ 形式

step.2. 补全为 $\begin{bmatrix}u_j^{k+1}\\u_j^k\end{bmatrix}=f\left(\underline{\begin{bmatrix}u_j^k\\u_j^{k-1}\end{bmatrix}},\cdots\right)$ 形式 令 $W_j^{k+1}=\begin{bmatrix}u_j^{k+1}\\u_j^k\end{bmatrix}=V_n^k e^{ij\pi h}$

→ 都是 W_j^k 的形式

都不超 $k+1$

e.g. $u_j^{k+1}=a(u_{j+1}^k+u_{j-1}^k)+b\,u_j^{k-1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}u_j^{k+1}\\u_j^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j+1}^k\\u_{j+1}^{k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{j-1}^k\\u_{j-1}^{k-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&b\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_j^{k}\\u_j^{k-1}\end{bmatrix}$$

step.3 得出 $V_n^{k+1}=G(\sigma,\tau)V_n^k$ → 推出特征方程，其解模小于1 ⇔ Von Neumann条件

△ $\lambda^2-b\lambda-c=0$ 根的模 ≤ 1 ⇔ $|b|\le 1-c\le 2$

△ $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}a&-b\\-c&d\end{bmatrix}\dfrac{1}{ad-bc}$?

↑锋神做法

△善用 $r=\dfrac{a\tau}{h}$ 简化计算

矩阵法： step.1. 整理原方程，将 u^{k+1} 整理到一边.

step.2. 针对 $AU^{k+1}=BU^k$ 形式导出 $C=A^{-1}B$.

step.3. 利用 S 特征值：$\lambda_j^S=2\cos j\pi h$ 写出 C 特征值 λ_j^C

step.4. 利用稳定性估计充分条件：$\rho(C)\le 1$ & C正规矩阵 判别是否稳定.

使用矩阵法的C一般都是对称的，对称必正规。

e.g. step.2. $u_j^{k+1}-r\theta\underline{(u_{j+1}^{k+1}+u_{j-1}^{k+1})}=r u_j^k(1-2(1-\theta))+r(1-\theta)\cdot\sim$ (k)

$$\Rightarrow (1-r\theta\cdot S)U^{k+1}=[r(1-2(1-\theta))+r(1-\theta)S]\,U^k$$

$$C=(1-r\theta S)^{-1}[r(1-2(1-\theta))+r(1-\theta)S]$$

e.g. step.3. $\lambda_j^C=(1-r\theta\,2\cos j\pi h)^{-1}\left(r(1-2(1-\theta))+r(1-\theta)\cdot 2\cos j\pi h\right)$

Q.2 稳定性分析

A.2 Fourier 法　step.1. 整理原方程，将 u^{k+1} 移到一侧

step.2. 将 $u_j^k \to v^k e^{ij\alpha h}$　$(\alpha = \frac{2p\pi}{l})$　$ph = x_p$

$u_j^{k+1} \to v^{k+1} e^{ij\alpha h}$

step.3. 消去 $e^{i\alpha hj}$ 等 得到 $v^{k+1} = G(ph, \tau) v^k$ 形式

即得到 $G(ph,\tau)$ 增长矩阵

step.4. 利用稳定 $\Leftrightarrow$ 满足 Von neumann 条件　$|G(ph,\tau)| \le 1 + O(\tau)$

此过程中可能用到 Eular 公式

e.g. step.2. $[e^{ij\alpha h} - r\theta(e^{i(j+1)\alpha h} - e^{i(j-1)\alpha h})] v^{k+1}$

$= [r(1-2(1-\theta)) e^{ij\alpha h} + r(1-\theta)(e^{i(j+1)\alpha h} - e^{i(j-1)\alpha h})] v^k$

Eular 公式: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$　　半角公式: $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\sin x = \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$

△ 多维情况下: $G^k(x_p,\tau)$ 一致有界 $\Leftrightarrow$ 每个特征值绝对值小于等于1

多阶.

写出 G^k 的时候先移项 $(\ )v^{k+1} = (\ )v^k$，再写矩阵

$e^{i\alpha h} + e^{-i\alpha h} = 2\cos\alpha h$

△ 需要会把三层差分格式展开为方程组

Q.3. 有限体积法

A.3. 一维情况下: step.1. 微分方程左右积分，积分区间依情况取定，一般 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$

step.2. 将 u 从积分号中提出，一般取差分值 u_i

step.3 将余下部分配上系数，得到微分方程中原函数的逼近

e.g. step.2: $\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} qu\,dx \approx u_i \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q\,dx = u_i \frac{h_i+h_{i+1}}{2} \cdot \left(\underbrace{\frac{2}{h_i+h_{i+1}} \cdot \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q\,dx}_{\text{s.t.} \approx q} \right)$

(此处不是等距划分)

二维情况下（Green公式）:

step.1. 微分方程左右积分，积分区间记为 G_{ij}

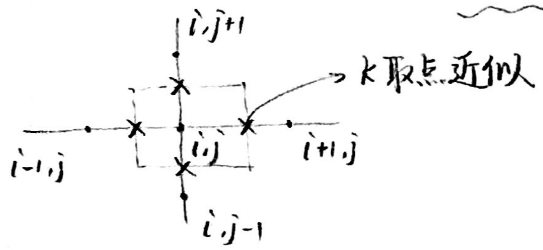
step.2. 利用Green公式，化面积分为边界法向量积分

$$\iint_{G_{ij}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dx\,dy = \oint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

法向量

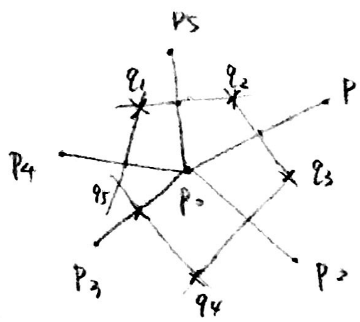
step.3. 写出计算值(式)即可

e.g.3 $$\int_{\partial G_{ij}} k \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = k_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{u_{i,j-1}-u_{i,j}}{h_2} h_1 + k_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h_2} h_1 + k_{i-\frac{1}{2},j} \frac{u_{i-\frac{1}{2},j}-u_{ij}}{h_1} h_2 + k_{i+\frac{1}{2},j} \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}-u_{i,j}}{h_1} h_2$$



补充: Green公式 $\int_G \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx\,dt = \int_{\partial G} (f\,dt - u\,dx)$

本质为"沿法向函数增量比乘以长度"



$\frac{u(P_1)-u(P_0)}{\overline{P_0P_1}} \cdot \overline{q_2 q_3}$

(数分内容)

Q.4. Chapter.1. 写出等价问题并证明等价性.

A.4. 课后题 1.2.3. △ 最小位能原理要求 $u(a)=0$, $u'(b)=0$

原方程组

$$\begin{cases} Lu=f \\ u(a)=\alpha,\ u'(b)=\beta \end{cases} \quad (1)$$

则 step. 1. 构造 $v=u-w$, s.t. $v(a)=0$, $v'(b)=0$

(其中 w 是一个固定的函数) ☆

得到新方程组:
$$\begin{cases} Lv=Lu-Lw=f-Lw \\ v(a)=0,\ v'(b)=0 \end{cases} \quad (2)$$

最小位能原理

分析 目前有: u^* 是(1)最优解 $\Leftrightarrow$ $v^*=u^*-w$ 是(2)最优解 $\Leftrightarrow$ $J_1(v)$ 极小值

目标: $J(u^*)$ 是极小值

则只要 $J_1(v)=J(u^*)$ 即可

step.2.
$$J_1(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-(f-Lw,v)$$
$$=\cdots=J(u^*)=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u)-p(b)\beta u(b)$$

过程中涉及内积展开、a 的定义 & w 固定函数的应用

课后题: 1.2.4. 建立虚功原理: 即找到一个 $a(u,v)=$ ___?___ (1)

使得 u 满足(1) $\Leftrightarrow$ u 是原方程组解

step. 1. $(Lu,v)=(f,v)$ $\forall v\in H_E^1$

运用内积化简后就是要找的 $a(u,v)=$ ___?___ $=\int_a^b (p\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+quv)dx$

必然相等

step. 2. $\Rightarrow$ 显然成立

$\Leftarrow$ $a(u,v)=$ ___?___

展开后必然会得到 $Lu=f$

✓

Q.5 Chapter.6. 用特征来解双曲型方程组

A.5 step.1. 将方程组写成矩阵形式 $\frac{\partial u}{\partial t}-A\frac{\partial u}{\partial x}=0$

step.2. 求出A的特征值，并算出特征

$|\lambda I-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2\cdots$　　$x+\lambda_1 t=C_1$，$x+\lambda_2 t=C_2\cdots$

step.3. 将上述特征代入原方程组消去一个未知数

变为常微分方程组　$x=-\lambda_1 t+C_1 \longrightarrow$ 消去 x

step.4. 通过 写出 Riemann 不变量 $r_1, r_2\cdots$ (与u相关)

step.5 化为不变量形式：每个方程中只含一个 Riemann 不变量

e.g. $\frac{\partial r_1}{\partial t}+a\frac{\partial r_1}{\partial x}=0.\quad\cdots$

step. 6. Riemann 不变量沿相应特征方程等于常数：

e.g. $r_1=f(x-at)$，$r_2=g(x+at)\cdots$

则将其代入即可写出原方程组解.

✓

Q.6 极值定理&比较定理相关.

A.6 类型一 证明极值定理: u_{ij} 是 $\overline{G_h}$ 上任意网函数, $L_h u_{ij} \le 0$ ($L_h u_{ij} \ge 0$)

对 $\forall (x_i, y_j) \in G_h$, 则 u_{ij} 不可能在内点取正的极大(负的极小值).

(除非 u_{ij} 为常数)

Proof. 反证 假设 u_{ij} 在 G_h 内某点取极大值 由于 G_h 连通, 设 (x_{i_0}, y_{j_0}), s.t. $u_{i_0,j_0} = M > 0$

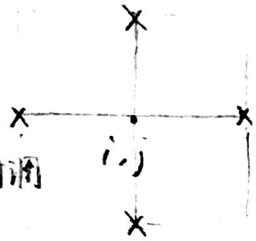
则至少有一个相邻网点, 不妨记为 (x_{i_0-1}, y_{j_0}), 有 $u_{i_0-1,j} < M$ 则

$L_h u_{i_0,j_0} \underline{\underline{>}}\ \underline{(a_{i_0,j_0}} - a_{i_0-1,j_0} - a_{i_0+1,j_0} - a_{i_0,j_0+1} - a_{i_0,j_0-1})M \ge 0$

矛盾.

理解为自带均值

若 $u_{i_0-1,j} = 0$ 则 $\ge$ $>$ 对调



另一方面: 假设 ~ 极小值 ~ ($u_{i_0-1,j} > M$ 则

$L_h u_{i_0,j_0} < (a_{i_0,j_0} - a_{i-1,j} - a_{i,j-1} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1}) \le 0$

比较定理: $|L_h u_{ij}| \le L_h U_{ij}$ G_h上, $|u_{ij}| \le U_{ij}$ Γ_h上 $\Big\}$ $|u_{ij}| \le U_{ij}$ G_h上

应用: 构造满足比较定理的函数(多用绝对值).

✓

Q.7. 变分原理(极小位能原理)证明

A.7. $f\in C(I)$, $u_*\in C^2$ 是 $\begin{cases} Lu=-\frac{d}{dx}(p\frac{du}{dx})+qu=f \\ u(a)=0, \quad u'(b)=0 \end{cases}$ 的解

$H^1(I)=\{f \mid f\in L^2(I), f'\in L^2(I)\}$

则 u^* 使 $J(u)=\frac{1}{2}a(u,u)-(f,u)$ 达到极小值.

反之,若 $u_*\in C^2\cap H_E^1$ 使 $J(u)$ 达到极小值, u_* 是上述方程的解

Proof. $\Rightarrow$ $u_*\in C^2\cap H_E^1$, $v\in H_E^1$:

$a(u_*,v)-(f,v)$ △构造

Step. 1 Create

$= \int_a^b (pu_*'v'+qu_*v)\,dx - \int_a^b fv\,dx$ 对 v 分部积分

$= pu_*'v\Big|_a^b + \int_a^b -\left[\frac{d}{dx}(p\frac{du_*}{dx})+qu_*-f\right]v\,dx$

$= \int_a^b (Lu_*-f)v\,dx + p(b)u_*'(b)v(b)-p(a)u_*'(a)\underline{\underline{v(a)}}_{=0}$

step. 2 解出 Lu_*-f 来

若 u_* 为解: $a(u_*,v)-(f,v)=0$, $\forall v\in H_E^1$

u_* 是解 $\lambda\neq 0, v\neq 0$ 时

△ $\underline{\underline{\varphi(\lambda)}} = J(u_*+\lambda v) = J(u_*)+\lambda[a(u_*,v)-(f,v)]+\frac{\lambda^2}{2}a(v,v)$

$= J(u_*)+\frac{\lambda^2}{2}a(v,v) > J(u_*)$.

Step. 3 用 $\varphi(\lambda)$ 说明 $J(u_*)$ 极小

$\Leftarrow$ u_* s.t. $J(u_*)$ 极小,有

$\varphi'(0)=a(u_*,v)-(f,v)=0$ 对 $\forall v\in H_E^1$

step. 1 用 $\varphi'(0)=0$ 表示是极小值

即 $\int_a^b (Lu_*-f)v\,dx + p(b)u_*'(b)v(b)=0$

△ $\forall\ v\in C_0^\infty(I)$ 则 $\int_a^b Lu_*-f\,dx=0$.

step. 2 利用上面的展开说明是解

变分法基本引理有 $Lu_*-f=0$

且此时 $p(b)u_*'(b)v(b)=0 \Rightarrow u_*'(b)=0$

Pay Attention: 要说明 $u_*'(b)=0$

是解 ✓