Topology 定义.

拓扑 & 拓扑空间

X是集合，$\mathcal{T} \subset 2^X$，满足:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
2. 当 $G_\alpha \in \mathcal{T}\ (\alpha \in \Lambda)$ 时，$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \in \mathcal{T}$
3. 当 $G_i \in \mathcal{T}$ 时: $\bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$

则称 $\mathcal{T}$ 是X上的拓扑，$(X, \mathcal{T})$ 称为拓扑空间.

开集

$\mathcal{T}$ 中的元素称为开集

有限补拓扑

$\mathcal{T}_{\text{有限补}} = \{A \mid A^c \text{为有限集}\} \underline{\underline{\cup \{\emptyset\}}}$ 可度量化拓扑空间

可数补拓扑

$\mathcal{T}_{\text{可数补}} = \{A \mid A^c \text{为可数集}\} \cup \{\emptyset\}$

连续映射

X, Y 为拓扑空间，$f: X \mapsto Y$，若 Y 中开集 G 原象 $f^{-1}(G)$ 是 X 中开集，则称 f 是 X 到 Y 的连续映射.

同胚映射

$f: X \mapsto Y$ 是连续的一一映射，且 f^{-1} 也连续

则称 f 是从 X 到 Y 的一个同胚映射. 拓扑性质

邻域 & 邻域系

$(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间，$x \in X$，$U \subset X$，$\exists V \in \mathcal{T}$

s.t. $x \in V \subset U$，则称 U 为 x 的邻域

x 的全体域邻称为 x 邻域系 $\mathcal{U}_x$

若邻域系中全为开集，则称开邻域系 $\mathcal{T}_x$.

在x处连续

注意不能是开

$f: X \mapsto Y$，$x \in X$，若对 $\underline{\underline{\forall}}\, U \in \mathcal{U}_{f(x)}$，有 $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}_x$

则称 f 在 x 处连续.

内点 & 开核

必须是开邻域

$(X, \mathcal{T})$，$x \in X$，$A \subset X$，若 $\underline{\underline{\exists}}\, V \in \mathcal{T}_x$，s.t. $x \in V \subset A$

则称 x 为 A 内点，A 全体内点称为 A 的开核 A°.

极限点 & 导集

$(X, \mathcal{T})$，$x \in X$，$A \subset X$，若 $\underline{\forall}\, V \in \mathcal{T}_x$ 有 $V \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$

则称 x 为 A 极限点，A 全体极限点称为 A 的导集 A'

闭集全体 $\mathcal{F}$，闭包 $\bar{A}$

P.6

基

$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$，对$\forall U\in\mathcal{T}$，$\exists\,\mathcal{B}_U\subset\mathcal{B}$
s.t. $U=\bigcup_{V\in\mathcal{B}_U}V$，则称$\mathcal{B}$为拓扑空间的一个基.

子基

$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$，若$\mathcal{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n \mid S_i\in\mathcal{S},\ n\in N\}$
是X的一个基，则称$\mathcal{S}$是X的一个子基.

邻域基 & 开邻域基

X是拓扑空间，$x\in X$，$\mathcal{V}_x\subset\mathcal{U}_x$，对$\forall U\in\mathcal{U}_x$，$\exists V\in\mathcal{V}_x$ P.8
s.t. $V\subset U$，则称$\mathcal{V}_x$为x的一个邻域基.
若$\mathcal{V}_x$都是开集（$\mathcal{V}_x\subset\mathcal{T}_x$），则称$\mathcal{V}_x$为x的开邻域基.

邻域子基 & 开邻域子基

X是拓扑空间，$x\in X$，$\mathcal{W}_x\subset\mathcal{U}_x$，若$\{W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_n \mid W_i\in\mathcal{W}_x,\ n\in N\}$
是x的一个邻域基，则称$\mathcal{W}_x$是x的一个邻域子基
若$\mathcal{W}_x$都是开集（$\mathcal{W}_x\subset\mathcal{T}_x$），则称$\mathcal{W}_x$为x的开邻域子基.

收敛

$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，x_n是X上点列，$x\in X$，若对$\forall U\in\mathcal{U}_x$，$\exists N$
s.t. $\forall n>N$，$x_n\in U$，称点列x_n收敛于x，$x_n\to x$.
称x为x_n的一个极限，x_n的全体极限点为 $\lim x_n$（记为）

限制

$X\neq\emptyset$，$\mathcal{H}\subset 2^X$，$Y\subset X$，称$\{H\cap Y\mid H\in\mathcal{H}\}$为$\mathcal{H}$在Y上的限制$\mathcal{H}|_Y$

相对拓扑 & 子空间

$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$Y\subset X$，$\mathcal{T}_Y=\{U\cap Y\mid U\in\mathcal{T}\}$为$\mathcal{T}$在Y上的相对拓扑 P.9.
$(Y,\mathcal{T}_Y)$称为$(X,\mathcal{T})$的子空间.

拓扑的强弱

$\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2$是X上的两个拓扑，若$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$，则称$\mathcal{T}_1$比$\mathcal{T}_2$粗（弱）

积拓扑 & 积空间 △

$\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i=1}^n$是一族拓扑空间，在$\prod_{i=1}^n X_i$上有以$\mathcal{S}_n=\{p_i^{-1}(U_i)\mid U_i\in\mathcal{T}_i\}$
为基子基的拓扑，记$\mathcal{T}_\pi$为$\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^n$的~~基~~拓扑积 P.10
~~称~~ $(\prod_{i=1}^n X_i,\mathcal{T}_\pi)$为积空间，简记为$\prod_{i=1}^n X_i$

其中 $p_i^{-1}((a_i,b_i))=R^1\times\cdots\times R^1\times\underbrace{(a_i,b_i)}_{第i个.}\times R^1\times\cdots\times R^1$

开映射&闭映射	X, Y拓扑空间，$f: X \to Y$； 若 $\forall U \in \mathcal{T}_X$，$f(U) \in \mathcal{T}_Y$，则称$f$为开映射 若 $\forall F \subset X$ (X中闭集)，$f(F)$闭集，则称f为闭映射	P.10 笛卡尔积 & 盒拓扑
商拓扑&商空间	$f: X \to Y$ 满射，$\mathcal{T}_f = \{U \mid f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$ 称为Y上的商拓扑 $(Y, \mathcal{T}_f)$ 称为关于f的商空间.	P.11 自然投射
连通空间&连通子集	非空开集$A, B \in \mathcal{T}$，$X = A \cup B$，$A \cap B \neq \emptyset$ 是连通空间 否则是非连通空间. $Y \subset X$，$(Y, \mathcal{T}\|_Y)$是连通空间，称为X的连通子集.	P.12
连通分支	X拓扑空间，C是X连通子集，当另一个连通子集$D \supset C$时 $C = D$，称C为X的连通分支（C是X的一个极大连通子集）.	P.13
局部连通	X拓扑空间，$x \in X$，$\forall U \in \mathcal{U}_x$，$\exists$连通$V \in \mathcal{U}_x$，s.t. $V \subset U$ 则称x处局部连通. 若处处局部连通，则X为局部连通空间.	P.14
道路	$f: [0,1] \to X$ 是连续映射，称f为以$x = f(0)$为始点、 以$y = f(1)$为终点的道路. 又若 $x = y$，则称f为闭路，x为基点.	
道路连通空间.	$\forall x, y \in X$，均存在以x为起点，y为终点的道路， 则称X为道路连通空间.	
道路连通分支	C为X极大道路连通子集，称C是X道路连通分支.	P.15

局部道路连通	$x\in X$，$\forall U\in \mathcal{U}_x$，$\exists$道路连通$V\in\mathcal{U}_x$，s.t. $V\subset U$ 则称在x处局部道路连通. 若处处局部道路连通，则称X局部道路连通空间. 若$Y\subset X$，若$(Y,\mathcal{T}\|_Y)$局部道路连通空间，则称Y为局部~连通子集.	P.15
First countable space 第一可数空间	$\forall x\in X$，存在可数邻域基，则称X满足第一可数公理.	P.16
第二可数空间	存在可数的基，则称X满足第二可数公理.	
separable space 可分空间	X拓扑空间，$D\subset X$，若$\overline{D}\overset{=}{\subset}X$，则称$D$在$X$中稠密. 若存在可数集$D$在$X$中稠密，则称$X$为可分空间.	P.17
覆盖	$\mathscr{A}\subset 2^X$，$B\subset X$，若$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\supset B$，则称$\mathscr{A}$为$B$的覆盖.	

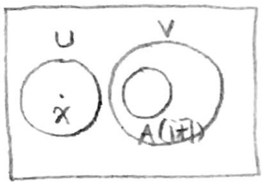
$\mathscr{A}$ $\longrightarrow$	覆盖
可数集族	可数覆盖
有限集族	有限覆盖
开集族	开覆盖
$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$	$\mathscr{A}_1$为子覆盖

component cover:
$\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$是$B$的覆盖
则$\mathscr{A}_1$是$\mathscr{A}$的子覆盖

Compact space. 紧空间 & Lindeloff空间	X的每个开覆盖： 1. 有有限子覆盖，则称X紧空间 2. 有可数子覆盖，则称X为Lindeloff空间. 指子覆盖	紧子集
T_0，T_1，T_2空间. Kolmogorov Fréchet Hausdorff	$(X,\mathcal{T})$是拓扑空间，$\forall x,y\in X$，$x\neq y$： 1. $\exists U\in\mathcal{T}$ ：$U\cap\{x,y\}$为单点集，则X为T_0空间 2. $\exists U,V\in\mathcal{T}$ ：$x\in U$，$y\in V$，$x\notin V$，$y\notin U$，则X为T_1空间 3. $\exists U,V\in\mathcal{T}$ ：$x\in U$，$y\in V$，$U\cap V=\varnothing$，则X为T_2空间 (亦称Hausdoff空间).	P.18

Regular space

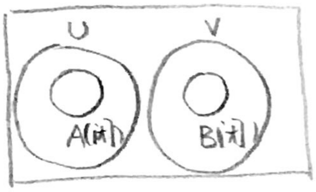
正则空间 $(X,\mathcal{T})$拓扑空间, $\forall x\in X$, $\forall$闭集$A、B\subset X$, p.19



当$x\notin A$时, $\exists U,V\in\mathcal{T}$, s.t. $x\in U$, $A\subset V$, $U\cap V=\emptyset$

则称A为正则空间.

正规空间 Normal space $(X,\mathcal{T})$拓扑空间, ~~$\forall x\in X$~~, $\forall$闭集$A、B\subset X$



当$A\cap B=\emptyset$时, $\exists U,V\in\mathcal{T}$, s.t. $A\subset U$, $B\subset V$, $U\cap V=\emptyset$

则称A为正规空间

T_3 & T_4空间
regular hausdoff
normal hausdoff

正则的T_1空间称为T_3空间
正规的T_1空间称为T_4空间.

有限交性质*

$X\neq\emptyset$, $\mathcal{A}\subset 2^X$, 若$\mathcal{A}$中每一个有限子族都有非空的交:
对$\forall$有限$A_i\in\mathcal{A}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i\neq\emptyset$, 则称$\mathcal{A}$有有限交性质.

可数紧空间 X的每个可数开覆盖都有有限覆盖 p.24

则称X为可数紧空间.

聚点紧空间 X的每个无限子集都有聚点

则称X为聚点紧空间.

序列紧空间 X的每个点列$\{x_n\}$都有收敛子列

则称X为序列紧空间.

$$\begin{tikzcd}
\text{紧空间} \arrow[dr, shift left] & & \text{序列紧空间} \arrow[ll, "\text{度量空间}"'] \arrow[dl, shift left] \\
& \text{可数紧空间} \arrow[ul, shift left, "\text{Lindeloff}"] \arrow[ur, shift left, "\text{第一可数}"'] \arrow[d, shift left] & \\
& \text{聚点紧空间} \arrow[u, shift left, "T_1"'] &
\end{tikzcd}$$

局部紧空间	每个 $x\in X$，存在紧子集 $D\in \mathcal{U}_x$，则称X局部紧空间.	P.25
直径 & Lebesgue 数	A是度量空间X非空子集，$\mathrm{diam}(A)=$记 $\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$. $\mathcal{A}$为度量空间X开覆盖，$\forall A\subset X$，若 $\mathrm{diam}(A)<\lambda$ $(\forall\lambda>0)$ 就有 ~~$A\in\mathcal{A}$~~ A包含于$\mathcal{A}$的一个开集中，λ称为$\mathcal{A}$的Lebesgue数.	
疏朗集	E在$\forall$非空的开集中不稠密 $\Leftrightarrow (\bar{E})^\circ=\varnothing$，则称E为疏朗集	
第一纲集 & 第二纲集	记$\exists$疏朗集列E_n. s.t. $H=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_n$，则称H为第一纲集 否则称为第二纲集.	