严格对角占优矩阵：主对角元素模大于同行其他元素模的和.

$\Rightarrow Ax=b$ 有解

$\Rightarrow A$ 非奇异

$\boxed{\Rightarrow \text{Jacobi迭代, Gauss-Sediel迭代收敛}}$

行列式的计算：$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}^{(n-1)}$ （Gauss消去法）. Page.54

$\det A = l_{11} \cdots l_{nn}$ （Cout分解）.

Gauss-Jordan消去法计算逆矩阵（Page.56）× $\boxed{\text{不考}}$ Page.56

step. 列负行正…

step. $\left(\begin{array}{c|c} & \searrow \end{array} \right)$ 要在行变换之前 … *

范数：向量：$\|\cdot\|_p = (\Sigma|x_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}$，$\|\cdot\|_\infty = \max|a_i|$ Page.60

绝对值

矩阵：$\|\cdot\|_1$：列和最大值 *（不是列最大值和）.

$\|\cdot\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$，$A^T \cdot A$；$\|\cdot\|_F = (\Sigma|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\|\cdot\|_\infty$ = 行和最大值；$\|\cdot\|_M = n \cdot \max|a_{ij}|$

$\rho(A) = \max|\lambda_i|$.　$\rho(A) \leq \|\cdot\|_\alpha$.

$Cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$，$Cond(A)_2 = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = K(A)$

Gauss-Seidel迭代：$A = D(I-L) - DU$ Page.97

共轭斜量法：α, x, r, β, p. Page.108

step.1. $p_0 = -r_0 = -(Ax_0 - b)$

step.2. $\alpha_{k+1} = \cancel{-\frac{r_k p_k}{p_k^T A p_k}} \quad -\frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$

$\boxed{x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k}$ 即为解　The λ有m个相异，则m步一定有结果。（此时 $r = (0,0,0)^T$）

$r_{k+1} = Ax_{k+1} - b$

$\beta_{k+1} = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}$

$\boxed{p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k}$

Page. 129 均差：$f[x_0,\cdots x_k] = \dfrac{f[x_1,\cdots x_k] - f[x_0,\cdots x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.

Page. 130 Newton插值：$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\,\omega_1(x) + \cdots + f[x_0\cdots x_n]\,\omega_n(x)$.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x) \qquad \text{(同 Lagrange)}.$$

Page. 133. 有限差：$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ （总是大的在前）.

$$\delta f(x) = f(x+\tfrac{h}{2}) - f(x-\tfrac{h}{2})$$

$$* \quad f[x_0\cdots x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k}$$ ，h为步长.

Page. 157. 一致逼近：$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \varphi_i(x)$. s.t. $\lim_n \|f(x) - \varphi(x)\|_\infty = 0$

平方逼近：… s.t. $\lim_n \|f(x) - \varphi(x)\|_2 = 0$

其中：$\|f(x)\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$

$$\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Page. 170. * Chebyshev 多项式 $T_0(x)=1$; $T_1(x)=x$; $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$

ex. 在 $[-1,1]$ 上求最佳一致逼近.

$$\min_{p_n(x)\in\tilde{\Theta}_n} \max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| = \max_{x\in[-1,1]} |\tilde{T}_n(x)|$$

$$= \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)\right|$$

Page. 179. 近似最佳一致逼近：Chebyshev插值点：

$$x_j = \frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)} + a + b\right), \quad j = 0,1,\cdots n.$$

Page. 184. X Chebyshev级数：$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j T_j(x)$

$$a_j = \frac{(T_j, f)}{(T_j, T_j)} \qquad W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

梯型公式： $E_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$ Page.213.

Simpson 公式： $E_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$.

复合梯型： $E_n(f) = -\frac{n}{12} h^3 f''(\xi)$ $\quad h=\frac{b-a}{2m} \quad$ $n=2m$

复合Simpson： $E_m(f) = -\frac{m}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$ Page.219.

变长梯型： $T_{n+1,1} = \frac{1}{2}\left(T_{n,1} + \cancel{\frac{1}{h_n}} h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(\cdots)\right)$ * Page.217.

Romberg 积分法：

$$T_{m,m} = \frac{1}{4^{m-1}-1}\left(4^{m-1} T_{m,m-1} - T_{m-1,m-1}\right) \quad *$$ Page.225.

Picard迭代收敛判定： $g^{(j)}(p)=0$ ， $j=1 \sim m-1$ △ （不是 m ）

Jacobi 矩阵： ex. $f: R^n \longmapsto R$ ， $f'(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$ Page.283.

$$= (\mathrm{grad}\, f(x))^T$$

Euler 单步法 $O(h^2)$. $\quad y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$ Page.310

（改进） $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right)$

（中点） $y_{n+1} = y_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right)$

多步法： *相容： $\begin{cases} \rho(1) = 0 \\ 1 + \sum_{j=1}^{k-1} j\alpha_j - \sigma(1) = 0 \end{cases}$ ▲ Page.338.

在右边，若挪到左边就没有负号

$\rho(\lambda) = \lambda^k - \alpha_0 \lambda^{k-1} - \cdots - \alpha_{k-2}\lambda - \alpha_{k-1}$

$\sigma(\lambda) = \beta_{-1}\lambda^k + \beta_0 \lambda^{k-1} + \cdots + \beta_{k-2}\lambda + \beta_{k-1}$ ｜ k步法下

稳定： $\rho(\lambda)=0$ ， $|\lambda_i| \leq 1$. 且 $|\lambda_i| = 1$ 只可是单根

收敛 $\Leftrightarrow$ 稳定+相容.

Page 350.

* 差分法：~~f''(x)~~

$$y''(x_n) = \frac{1}{h^2}\left(y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1})\right)$$

$$y'(x_n) = \frac{1}{2h}\left(y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})\right)$$

(代入，列方程求解).

Page. 362.

* Householder变换. σ, α, u, b, H

step. $\sigma = \left(\sum_{i=k}^{m} (a_{ik})^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\alpha = -\operatorname{sgn}(a_{kk})\sigma$$

$$u = a_k - \alpha e_1^{(k)}$$

$$b = \alpha^2 - \alpha a_{kk}^{(k)}$$

$$\tilde{H}_k = I - b_k^{-1} u_k u_k^T \qquad H_k = \begin{bmatrix} I \cdots & \\ & \tilde{H} \end{bmatrix}.$$

极小最小二乘解（用Householder解出） $\begin{pmatrix} \cdot & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \to$ 解

Page. 396.

$$A_{m+1} = R_m Q_m$$

$$= Q_{m+1} R_{m+1}$$

则 $Q_m^T A Q_m = R_m Q_m = A_{m+1}$.

直交阵 Q：$\underline{Q^T = Q^{-1}}$.