Chapter 1. liner programing

i 决策变量
ii 目标函数
iii 约束条件

} 标准形式：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i=1,2,m. \quad 且 b_i \geqslant 0 \\ x_j \geqslant 0, & j=1,2,\cdots n. \end{cases}$$

化标准形式问题：① $\min \rightarrow \max$: $z' = -z$ 直接写出结果

② $\geqslant, \leqslant \rightarrow =$: 松弛变量

③ $b \geqslant 0$

④ $x_i \geqslant 0$: $x_j \leqslant 0 \rightarrow x_j' = -x_j \geqslant 0$，不定值 $x = x' - x''$

可行解，最优解，基，基解，基可行解，可行基

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$$\underset{\downarrow\ 基}{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (\underset{\downarrow\ 基向量}{P_1}, \cdots, P_m)$$

（B是$A_{m\times n}$的满秩子矩阵）

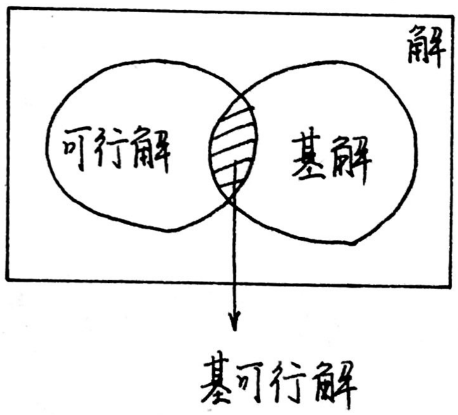
$$\Longrightarrow X_B = (x_1, \cdots, x_m)^T \longrightarrow X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots 0)^T \longrightarrow 基解$$

解的情况：i. 唯一最优解

ii. ∞个最优解

iii. 无可行解~~(无界解)~~

iv. 无界解.



线性规划问题：图解法（2个变量）

单纯形法.

§1.3. 单纯形法相关证明（略）

单纯形法： i. 化成标准问题

ii. 找到一个初始基可行解 (单位矩阵基) $X=(b_1 \cdots b_m\ 0 \cdots 0)$

ii.5 列出单纯形表

iii 最优性检验

iv 转换基可行解，重复 ii.5 → iii.

c_j			$c_1 \cdots$	$c_m \cdots$	$c_j \cdots$	c_n
C_B	基	b	$x_1 \cdots$	$x_m \cdots$	$x_j \cdots$	x_n
c_1	x_1	b_1	$1 \cdots$	$0 \cdots$	$a_{1j} \cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$[a_{lk}]$ $\vdots$
c_m	x_m	b_m	$0 \cdots$	$1 \cdots$	$a_{mj} \cdots$	a_{mn}
$c_j - z_j$			$0 \cdots$	$0 \cdots$	$c_j - \sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}$	

主元素

$\frac{b_l}{a_{lk}}$

检验数

C_m不作变化

$-a_{lk}/a_{lk}$

$\vdots$

$-a_{mk}/a_{lk}$

$\sigma_k = \max_j \{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$

$a>0$

$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\} = \frac{b_l}{a_{lk}} \Rightarrow x_l$ 换出

$\theta = \min\left\{\frac{b}{a} \mid a>0\right\}$

(即通过线性变换将 k 列变为 $\begin{matrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{matrix}$)

为实现 ii，常常用到人工变量法.

$-Mx_k - Mx_{k+1}$

解的判别. ① 唯一最优：基变量 $\sigma=0$，非基 $\sigma<0$.

② ∞多解： $\forall \sigma_j \le 0$ 且存在一个非基 $\sigma=0$，$\theta>0$

③ 无界解： $\exists \sigma_k > 0$ 且 $P_k \le 0$.

④ 无可行解： $\forall \sigma_j \le 0$ 但 $x_k \ne 0$

人工变量

Chapter 2. 对偶理论.

对偶问题:

$$\max z = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \qquad \Longrightarrow \qquad \min w = b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_j \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geqslant c_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geqslant c_n \\ y_i \geqslant 0 \end{cases}$$

i. 化标准问题

ii. 转换成对偶问题

iii. ~~合~~ 整理变量.

性质: 弱对偶性, 最优性, 无界性, 对偶定理, 互补松弛性,

弱对偶性: $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

最优性: if (最优解) $\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

无界性: 无界解 ⟶ 无可行解

对偶定理: 最优解同时存在

互补松弛性: 可行解 x^* 与 y^*, 是最优解

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y^{*T}(Ax^* - b) = 0 \\ (A^T y^* - c)^T \cdot x^* = 0. \end{cases}$$

		原问题 可行	原问题 不可行
对偶问题	可行	最优解	$z > z_{max}$
对偶问题	不可行	$z < z_{max}$	—

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} b_i y_i}_{\text{影子价格}}$$

对偶单纯形法 $\xrightarrow{\text{用于}}$ 灵敏度分析.

- c_j 的变化: 最终单纯形表中直接改数
- b_i 的变化: i. 计算 Δb^*: $\Delta b^* = B^{-1}\Delta b$
  直接加上去.
  ii 检查原问题是否可行解.

Chapter 3. 运输问题.

产销平衡表 & 单位运价表 ⟶ 表上作业法
- 最小元素法
- Vogel 法

↓

最优性检验 & 调整

(闭回路法 & 位势法)

↓ 检验数

↓ 位势图.

Chapter 4. 整数规划 & 分配问题

分配问题：匈牙利法 （定理*2）.

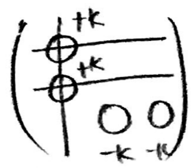
step 1. 每行减最小值.

step 2. 每列减最小值

step 3. 找出m个不同行不同列的~~问题~~0元素.

找不到 → step 4.
- i. 未划去数字找最小值 k
- ii. 行未划去：记 $u_i=k$
- iii. 列已划去：记 $v_j=-k$
- iv. $a_{ij}-u_i-v_j$.

in truth:
- 只划一条线的不变
- 无划线的(-k)
- 有划2条线的 +k.



试指派
- ~~i. 行打直线~~
- ~~ii. 列打直线~~
- ~~iii. (闭回路情况)~~

只要最终有m条线就可以了

☆ step. 1. 从行开始 有单个0 划竖线 △

step. 2. 从列开始 有单个0 划横线 △

Other. 工作 > 人数 （假想人数）

人数 > 工作 （假想工作）

其他情况：
1. 极大化问题
2. 人数、任务不相等问题
3. 人可以做多个事问题
4. 某任务不能由人做.

Vogel 法： step.1. 行列最小2元素差

step.2. 差值最大的行/列中确定供应关系

(该行/列最小值)

位势法调整： step.1. 列新表(元素为运价)

step.2. 求位势

step.3. 用运价表减去位势表 ⟶ 检验数表

step.3. 最大负数闭回路法调整. 直到检验数全大于等于0.

分枝定界法： step.1. 辅助规划问题

step.2. 找到整数规划上下界：$\bar{z}=z^*$, $\underline{z}=0$

step.3. 分枝.

不为整的分量：$x_r \le \lfloor b_r \rfloor$ & $x_r \ge \lfloor b_r \rfloor + 1$ (两个新约束条件).

得到子问题

(L_1) & (L_2).

step.4. 定界.

上界：L_1, L_2 中较大的函数值.

下界：符合整数约束的最大目标函数值. 否则为0.

step.5. 剪枝.

子问题目标值小于下界的枝剪去.

直到得到最优解/判定无解.

Chapter. 4.

隐枚举法： step.1. 目标函数极小，约束条件 $\geq$.

且使变量系数为正： $x_j' = 1 - x_j$

(目标函数中). → 系数从小到大排列

step.2. 全部代入0，检验是否成立.

step.3. 依次令变量取1，0，进行分枝. 直到找出可行解.

~~step.4. 情况1.~~ 保留所有可行解中 z' 最小的分枝.

边界值劣于保留下的即可剪掉.

无可行解剪枝.

step.4. 直到除保留枝外全部剪掉

Chapter 5. 目标规划

$\begin{cases} d^+ \text{ 正偏差变量} \\ d^- \text{ 负偏差变量} \end{cases}$

不低于：$\min\{d^-\}$　不高于：$\min\{d^+\}$.

充分利用：$\min\{d^- + d^+\}$

$P_1 \cdots$ 优先因子

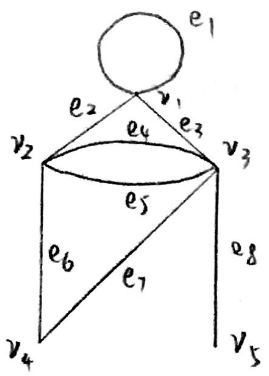
目标规划：图解分析法（2个变量）　i. 绘图　ii. 缩减范围　iii. 比较在各点值.

单纯形法

Chapter 6. Graph & Network.

加权

$G = \{V, E\}$



端点、关联边、相邻、环、多重、简单图

次(度)、奇点、偶点、孤立点、链、圈

完全图、偶图(二分图)、子图、部分图.

树: $T(V, E)$.

最小生成树问题: $\begin{cases} \text{避圈法} \\ \text{破圈法.} \end{cases}$

最短路问题: Dijkstra 算法

中国邮路问题 X-----X

网络最大流: $D(V, A)$

$v_i \xrightarrow[c_{ij}(f_{ij})]{} v_j$

$\begin{cases} c_{ij}: \text{容量} \\ f_{ij}: \text{负载量} \end{cases}$

割 & 流量: 最大流最小割定理 → 与最大流相等的割

└→ 标号算法

$\forall$可行流 $\leq$ $\forall$割

增广链: $\begin{cases} \mu^+ \text{(向前弧)流未饱合} \\ \mu^- \text{(向后弧)流非零} \end{cases}$