§1.

Ai不相容: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$P(A-B) = P(A) - P(AB)$.

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 组合

$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$ 排列

$P(A|B) = P(AB) / P(B)$.

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i | B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i|B)$.

$\begin{cases} \bar{A}\cap\bar{B} = \overline{A\cup B} \\ \bar{A}\cup\bar{B} = \overline{A\cap B} \end{cases}$

全概率公式: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$. $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$.

贝叶斯公式: $\cancel{P(B_i) =}$ $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$.

$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B})$

§2.

分布函数: $F(x) = P(X \leq x)$. 右回.(单调,有界,右连续)

分布 $\begin{cases} \text{离散: 分布列}. \ P(x_i) = P(X = x_i). & F(x) = \sum_{x_i < x} P(x_i). \\ \text{连续: 密度函数}. \ p(t). & F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt. \end{cases}$

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

期望 $\begin{cases} \text{离散: } \cancel{E(X) =} \ E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x_i) \\ \text{连续: } \ E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, P(x)\,dx \end{cases}$

$\rightarrow E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p(x_i). \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, p(x)\, dx. \end{cases}$ (线性).

方差: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$\rightarrow Var(aX+b) = a^2 Var(X)$.

Chebychev不等式. $P(|X - EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

§2. 常見离散分布

1. 二項: $X \sim b(n,p)$

n较大
p较小

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$EX=np\ ,\ \boxed{Var(X)=np(1-p)}$$

2. 泊松: $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k)=\boxed{\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}}$$

$$EX=Var(X)=\lambda.$$

3. 超几何: ~~P(X=k)=~~ $X \sim h(n,N,M)$.

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\ ,k=0,1,\cdots r.$$

$$E(X)=n\cdot\frac{M}{N}\ ,\ Var(X)=\cdots$$ P102.

4. 几何分布: $X \sim Ge(p)$.

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p.$$

$$EX=\frac{1}{p}\ ,\ Var(X)=\frac{1}{p^2}(1-p).$$

§2.

常見连续分布.

1. 正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

☆ 正态变量标准化

$EX = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\boxed{P(X \le c) = \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma}) \quad P(a < X \le b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{c-\mu}{\sigma})}$

2. 均匀分布：$X \sim U(a, b)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

$E(X) = \frac{b+a}{2}$, $Var(X) = \boxed{\frac{1}{12}(b-a)^2}$

3. 指数分布：$X \sim Exp(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda} , \quad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}}$

4. 伽玛分布：$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$ $kX \sim Ga(\alpha, \frac{\lambda}{k})$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

☆ other. 重要方法

if $F_X(x)$ 严格单增且 [illegible]

则 $Y = F_X(x) \sim U(0,1)$?

5. 贝塔分布：$X \sim Be(a, b)$.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

* 连续随机变量函数的分布. $\boxed{\text{求分布}}$

X, $p_X(x)$, $Y = g(X)$ 为另一个随机变量. 若 $\boxed{y = g(x)\text{ 严格单调}}$ (即反函数 $h(y)$ 有连续导)

则 $$p_Y(x) = \begin{cases} p_X[h(y)] \cdot |h'(y)|, & y \in (a,b) \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

(a,b) 是 $g(x)$ 的值域.

其他特征数.

1. k阶矩: $\mu_k = E(X^k)$ (原点矩)

$\nu_k = E(X-E(X))^k$ (中心矩).

2. 变异系数: $C_v(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$. * 去度量随机变量取值.

3. 分位数: $F(x_p) = \int_{-\infty}^{x_p} p(x)dx = p$, x_p称为p分位数.

↓ * 即 $x < x_p$的部分概率和为p.

4. 中位数: $F(x_{0.5}) = \int_{-\infty}^{x_{0.5}} p(x)dx = 0.5$

5. 偏度系数: $\beta_s = \frac{\nu_3}{(\nu_2)^{\frac{3}{2}}}$, $\beta_s > 0$: 正偏; $\beta_s < 0$: 负偏.

6. 峰度系数: $\beta_k = \frac{\nu_4}{\nu_2^2} - 3$. * 相对于正态分布的超出量.

} 形状

§3.

多维随机变量与联合分布. $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)\,du\,dv.$

$$p(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y).$$

$\rightarrow$ $F(x_1,\cdots x_n)=P(X_1\le x_1,\cdots X_n\le x_n).$

多项分布 (P145).

$p(x,y)\rightarrow p_X(x)=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy}$

多维超几何分布 (P146).

多维均匀分布: $p(x_1\cdots x_n)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x_1\cdots x_n)\in D\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$ S_D为度量量(面积等).

边际分布: ✓ $F_X(x)=F(x,\infty)$, $F_Y(y)=F(\infty,y)$. $p(x,y)=p_X(x)\cdot p_Y(y)$

独立性: $F(x_1\cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i)$, $P(X_1=x_1\cdots X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i).$

卷积公式: ✓ $Z=X+Y$: $\begin{cases}P(Z=k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i)\cdot P(Y=k-i)\\ p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)\cdot p_Y(z-x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(z-y)\cdot p_Y(y)\,dy.\end{cases}$

变量变换法: $p(u,v)=p(x(u,v),y(u,v))\cdot|J|.$

多维特征数: 1. 期望: $Z=g(X,Y)$: $E(Z)=\begin{cases}\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)\cdot p(x_i,y_j).\\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,p(x,y)\,dx\,dy.\end{cases}$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$ $\leftarrow$ (即 $Z=X+Y$)

$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$, X,Y独立时.

$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)$, X,Y独立时

2. 协方差: $Cov(X,Y)=E\big((X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\big)$, $\boxed{Cov(X,X)=Var(X)}$

$=\boxed{E(XY)-E(X)E(Y)}$

$Cov(X,Y)$

$=cov(\sum X_i,\sum Y_i)\overset{\text{若}X_i,Y_j\text{独立}\ i\ne j}{=}\sum Cov(X_i,Y_i)$ $\triangleleft$ $\begin{cases}Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)\\ Cov(aX,bY)=ab\,Cov(X,Y).\\ Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z).\end{cases}$

3. 相关系数: $Corr(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$

条件分布: $P(X=x_i \mid Y=y_j) = \dfrac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$. 离散.

$P(X \leq x \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{x} \dfrac{p(u,y)}{p_Y(y)} du$. 连续.

重期望公式: $E(X) = E\big(E(X|Y)\big)$.

$p(x,y)$. x,y 非矩形区域 . 则 X,Y 不独立

$p(x,y)$ 若为可分离变量: $p(x,y) = f(x) \cdot g(x)$. 且区域为矩形. 则 X,Y 独立

Q. Page 189. (4)

§4.

依概率收敛：$\{X_n\}$. $\forall \varepsilon>0$: $P(|X_n-X|\geq\varepsilon)\to 0\ (n\to\infty)$

则 $X_n \xrightarrow{P} X$，依概率收敛到 X.

按分布收敛：$X_1\cdots$ 分布函数为 $F_1\cdots$，若 $\forall x\in\mathcal{D}(F)$ * $\boxed{C}$

$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

$X_n\xrightarrow{P}X \Rightarrow X_n\xrightarrow{L}X$

则 $\{F_n\}$ 弱收敛于 F：$F_n\xrightarrow{W}F$

$\{X_n\}$ 按分布收敛于 X：$X_n\xrightarrow{L}X$.

大数定律. (伯努力) $\forall\varepsilon>0$: $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$. (频数) S_n 为 n 次伯努力实验中 A 次数

→ 一般形式：$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right)=1$. ⇒ 服从大数定律

(切比雪夫)：(X_i 两两不相关) $Var(X_i)\leq C \Rightarrow \{X_n\}$ 服从大数定律.

(马尔可夫)：$\frac{1}{n^2}Var\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)\to 0 \Rightarrow \{X_n\}$ 服从……

(辛钦)：$\{X_n\}$ 独立同分布，X_i 期望存在. ⇒ $\{X_n\}$ 服从……

判定条件 ☆

中心极限定理.

① $n,y\to\beta$ ② $n,\beta\to y$ ③ $y,\beta\to n$

(林德伯格). $\{X_n\}$ 独立同分布. $E(X_i)=\mu$，$Var(X_i)=\sigma^2$

$$Y_n^*=\frac{\sum X_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(Y_n^*\leq y)=\Phi(y)$.

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(拉普拉斯). n 重伯努力试验.

$\boxed{\triangle\ Y_n^*=\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}}$，$(q=1-p)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}P(Y_n^*\leq y)=\Phi(y)$.

§5.

总体，个体，样本，样品

P255

联合分布函数 $F(x_1 \cdots x_n)=\prod_{i=1}^{n} F(x_i)$. • 独立

有序样本：$x_{(1)} \cdots x_{(n)}$. P257

→ 经验分布函数： $F_n(x)=\begin{cases} 0, & x< x_{(1)}. \\ k/n, & x\in[x_{(k)}, x_{(k+1)}]. \\ 1, & x \geqslant x_{(n)}. \end{cases}$

统计量：$T=T(x_1 \cdots x_n)$ 不含任何未知量． （是函数）.

P262

→ T的分布：抽样分布.

样本均值：$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

偏差：数据与$\bar{x}$之差. （$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$）.

渐近分布：$\bar{x}\sim N(\mu, \sigma^2/n)$. e.g. 取样量较大时$\bar{x}$接近正态分布.

样本方差：$\boxed{S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$S_n$为标准差. P267

无偏方差：$S_n^2 \simeq \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，n不大时.

偏差平方和

→ $\sum(x_i-\bar{x})^2=\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}=\sum x_i^2-n\bar{x}^2$.

The. X具有二阶矩：$E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$，则 $E(\bar{x})=\mu$，$Var(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$，$E(S^2)=\sigma^2$ P268.

* 样本均值与期望与总体相同. 方差乘$\frac{1}{n}$.

样本矩： $a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$ （原点矩，k阶） 同前面

$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^k$ （中心矩，k阶）.

样本偏度：$\hat{\beta}_s=b_3/b_2^{(\frac{3}{2})}$. 次序统计量？ P271.

样本峰度：$\hat{\beta}_k=\frac{b_4}{b_2^2}-3$.

次序统计量. (0) $X_{(k)}$ 密度函数为:

$$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}p(x).$$

特别的. $x\sim U(0,1)$.

$$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k},\quad x\in(0,1)$$

§5

三大抽样分布. P283.

$x_1\cdots x_n$, 与 $y_1\cdots y_m$ 均来自标准正态分布

1. ~~X~~ χ^2分布: $X_1\cdots X_n$ 独立同分布于 $N(0,1)$ △条件

~~X~~ ~~X~~ $\underline{\chi^2=X_1^2+\cdots+X_n^2}$ 分布称为自由度为 n 的 χ^2分布.

$X\sim N(0,1)$ 记 $\underline{\chi^2\sim\chi^2(n)}$.

$\Downarrow$

$X^2\sim Ga(1/2,1/2)$

$$p(y)=\frac{(1/2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}\,y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}},\quad y>0.$$

$$\boxed{E\chi^2=n;\quad Var(\chi^2)=2n.}$$

The. $\{x_i\}\in N(\mu,\sigma^2)$. 则 ~~$\bar{x}=\frac{1}{n}$~~ (1) $\bar{x}$ 与 S^2 独立.

(2). $\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$.

(3) $\boxed{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).}$

自由度

是 χ^2分布中的 X_i 不同平方

2. F分布: $X_1\sim\chi^2(m)$, $X_2\sim\chi^2(n)$, 相互独立. 则 $F=\frac{X_1/m}{X_2/n}$ 为 m,n 的F分布.

记 $F\sim F(m,n)$. m 为分子自由度, n 为分母自由度.

$\boxed{X\sim F(n,n)\Rightarrow\frac{1}{X}\sim F(n,n)}$

$$P_F(y)=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})\cdot(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\cdot\Gamma(\frac{n}{2})}\,y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}}.$$

3. t分布: $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim\chi^2(n)$. 相互独立, 则 ~~F~~ $t=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 分布为自由度为 n 的t分布

记 $t\sim t(n)$.

$$P_t(y)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\quad y\in(-\infty,\infty).$$

$\{x_n\}\sim N(\mu,\sigma^2)$.

则 $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

样本方差

§5

充分统计量：$\{x_n\}$为样本，总体分布函数 $F(x;\theta)$.

统计量 $T=T(x_1\cdots x_n)$为θ的充分统计量：T确定后，x_n分布与θ无关.

概率函数：X，$f(x)$：$f(x)$表示X的~~随机~~概率密度函数.

The. T为充分统计量 $\Leftrightarrow$ $\exists\, g(t,\theta)$，$h(x_1,\cdots x_n)$，s.t. $\forall\theta$与任一组$x_1\cdots x_n$：

$$f(x_1,\cdots x_n;\theta)=g(T(x_1\cdots x_n),\theta)\,h(x_1\cdots x_n).$$

其中$g(t,\theta)$只通过统计量T的取值依赖样本.

联合分布函数 ① 离散：$P(X=x\ \&\ Y=y)=P(Y=y|X=x)\cdot P(X=x)$

$=P(X=x|Y=y)\cdot P(Y=y)$

若X，Y独立：$P(X=x\ \&\ Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$

§6. 参数估计.

点估计: $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1\cdots x_n)$
- 无偏估计: $E_\theta(\hat{\theta})=\theta$ $(\forall\theta\in\Theta)$.
- 有偏估计: ⋯.

$E(\hat{\theta})=\sim=\theta$

$\hat{\theta}$是θ的无偏估计

有效性: $Var(\hat{\theta}_1)\leq Var(\hat{\theta}_2)$ 则称 θ_1比θ_2有效.

替换原理: 样本矩→总体矩; 样本矩函数→总体矩函数;

点估计性质. 相合估计: $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|\geq\varepsilon)=0$. ($n$是样本容量)

→ The. if $\lim\limits_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta$, $\lim\limits_{n\to\infty}Var(\hat{\theta}_n)=0$, 则$\hat{\theta}_n$相合于$\theta$.

→ The. if $\hat{\theta}_{n1}\cdots\hat{\theta}_{nk}$ 均为相合估计. 且又 $\eta=g(\theta_1\cdots\theta_k)$ 回.

then. $\hat{\eta}_k=g(\hat{\theta}_{n1}\cdots\hat{\theta}_{nk})$为$\eta$的相合估计.

最大似然估计: step.1. $x_1\cdots x_n\to L(\theta)=P(X_1=\cancel{\theta}^{x_1}\cdots X_n=\cancel{\theta_n}^{x_n};\theta)$ *似然函数.

step.2. 找θ. ~~s.t.~~ $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1\cdots x_n)$, s.t. $L(\theta)$最大(即发生概率)

Define. Page.314

(最大似然估计具有不变性)

~~EM算法:~~ $\cancel{L(\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}}$

step1. 写出 $L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}P(x_i;\theta)$

☆注意题中对x_i, θ, 的未

step2. 找出最 $\hat{\theta}$, 使$L(\theta)$值最大, 则$\hat{\theta}$为θ的MLE

对数: step3. 求 $\ln L(\theta)$

step4. $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0\Rightarrow\theta$.

6.4 ~ 6.5 略

§6.

统计量

区间估计. $P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) \ge 1-\alpha$.

$\forall \theta \in \Theta$, $\hat{\theta}_L$与$\hat{\theta}_U$为置信下、上限.

枢轴量法: P342. step1 找$G(x_1 \cdots x_n, \theta)$, 与$\boxed{\theta\text{无关分布}}$. ?

对样本函数

step2. $P(c \le G \le d) \ge 1-\alpha$.

step3. $c \le G \le d \Rightarrow \hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$.

$\frac{x_{(n)}}{\theta}$ 密度也求

$p(y;\theta) = n \cdot y^{n-1}$

ex. $U(0,\theta)$对θ的$1-\alpha$置信区间: $[\frac{x_{(n)}}{d}, \frac{x_{(n)}}{c}]$.

$\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

常用

$N(\mu, \sigma^2)$:

① σ已知, 求μ的~.

$[\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + u_{1-\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}]$

$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

② σ未知, 求μ的~

$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{s} \sim t(n-1)$

样本方差

$\bar{x} \pm t_{1-\alpha/2}(n-1)s/\sqrt{n}$.

③ 求σ^2的~. (μ一般未知).

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$[(n-1)s^2/\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), (n-1)s^2/\chi^2_{\alpha/2}(n-1)]$

大样本时(P346). 两点分布$b(1,p)$. $\bar{x} \mathrel{\dot\sim} N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

S与σ?

样本的 总体的

化为标准正态分布: $u = \frac{\bar{x}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \mathrel{\dot\sim} N(0,1)$.

置信区间半径

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\rightarrow \bar{x} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n}}$.

2个正态总体下: ① σ_1^2, σ_2^2已知 求~~μ的~~ $\mu_1-\mu_2$的~

$\bar{x}-\bar{y} \pm u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}$.

同种处理

② $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$未知, 求$\mu_1-\mu_2$的~.

$\bar{x}-\bar{y} \pm \sqrt{\frac{m+n}{mn}} s_w t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$

③ $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = c$时. (t分布) .. Page.350.

§6.~§7.

2个正态总体下的 σ_1^2/σ_2^2 ~.

$$\left.\frac{\dfrac{(m-1)S_x^2}{\sigma_1^2}\sim\chi^2(m-1)}{\dfrac{(n-1)S_y^2}{\sigma_2^2}\sim\chi^2(n-1)}\right\}\Rightarrow F=\frac{S_x^2/\sigma_1^2}{S_y^2/\sigma_2^2}\sim F(m-1,n-1).$$

$$\Rightarrow \left[\frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}},\ \frac{S_x^2}{S_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}}\right].$$

what is θ

§7. 假设检验

$\underline{H_0: \theta\in\Theta_0}$ vs $H_1: \theta\in\Theta_1$

零假设

$\Downarrow$

$(x_1,\cdots x_n)\in \underline{W}$, 拒绝$H_0$

拒绝域

$\triangle\ \alpha = P_\theta\{X\in W\}$

接受域

$$\left\{\begin{array}{l}\text{type I error. } \theta\in\Theta_1,\ (x_1\cdots x_n)\in\overline{W}\\ \text{type II error. } \theta\in\Theta_0,\ (x_1\cdots x_n)\in W\end{array}\right.$$

$\triangle\ \beta = P_\theta\{X\in\overline{W}\}$

反了

势函数: $g(\theta)=P_\theta(X\in W)$. (落在拒绝域的概率)

$g(\theta)\le\alpha$:(水平为α的检验)

正态总体参数假设检验:

① σ已知: 检验统计量 $u=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

u的检验

☆
$$\left\{\begin{array}{ll}W_I=\{u\ge u_{1-\alpha}\} & P_I = 1-\Phi(u_0)\\ W_{II}=\{u\le u_{1-\alpha}\} & P_{II}=\Phi(u_0)\\ W_{III}=\{|u|\ge u_{1-\alpha/2}\} & P_{III}=2(1-\Phi(|u_0|))\end{array}\right.$$

观测值

P364

② σ未知: $t=\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{s}$, $\boxed{\mu=\mu_0\text{时 } t\sim t(n-1)}$

t检验

$W_I=\{t\ge t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $P_I = P(t\ge t_0)$

$W_{II}=\{t\le t_{1-\alpha}(n-1)\}$ $P_{II}=P(t\le t_0)$

$W_{III}=\{|t|\ge t_{1-\alpha/2}(n-1)\}$ $P_{III}=P(|t_0|\ge t_0)$.

2个正态总体的均值的假设检验. Page. 372.

other. 成对数据可利用 $d=x_1-x_2$ 化为一个正态总体的均值

正态总体方差检验.

① 单个: χ^2 检验 $\chi^2=(n-1)S^2/\sigma_0^2$ Page. 378

② 多2个: F 检验. $F=S_x^2/S_y^2$. Page 378