§1.1. Def. 简单函数在 E 上的积分：

$$\int_E \varphi(x)\,dm = \sum_{k=1}^{n} y_k\, me_k.$$

具有线性、可加性.

Def. $f(x)$ 在 E 上积分. $\int_E f(x)\,dm = \sup_{0\le\varphi\le f} \int_E \varphi(x)\,dm$. | 这里取 $f(x)>0$.

$\varphi(x) \in [0, f(x)]$，是简单函数.

有限 $\to$ 可积 ； $\infty \to$ 有积分，不可积.

$\int_E f(x)\,dm = \int_E f_+(x)\,dm - \int_E f_-(x)\,dm.$

* 有界可测必可积

可积必处处有限.

The. f 与 $|f|$ 可积性相同.

§2. The. 积分有有限可加性.

$E=\bigcup_{k=1}^{n} E_k$，E_k 互不相交. $\int_E f(x)\,dm = \int_{E_1} f(x)\,dm + \cdots + \int_{E_n} f\,dm.$

The. 积分绝对连续性.

f 在有界可测 E 上可积，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta$. $me<\delta$ 时 $\left|\int_e f\,dm\right|<\varepsilon$.

* 可以加强为 $\int_e |f|\,dm < \varepsilon$.

The. σ可加性（完全可加性）.

f 在有界 E 上可积. $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$（互不相交）.

则 $\int_E f\,dm = \int_{E_1} f\,dm + \cdots$

The.（基本引理.）

简单函数列.

f 于有界可测 E 上非负可积. $\{f_n\}$ 单增且 $f_n \to f$ $(n\to\infty)$.

则 $\int_E f\,dm = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,dm$. （极限号互换）.

$\int_E \lim f_n\,dm = \lim \int_E f_n\,dm.$

* 非负可积可弱化为非负积分存在.

The. $f, g \in L(E)$，则 $f+g \in L(E)$ 且 $\int_E (f+g)dm = \int_E f dm + \int_E g dm$.

The. $f, g \in L(E)$，$f \le g$，则 $\int_E f dm \le \int_E g dm$.

积分的线性

The.（唯一性定理）.

$f \in L(E)$，则 $\int_E |f| dm = 0 \Leftrightarrow f \sim 0$.

↳. $f \sim g$. 则 f, g 可积性相同且积分值相同.

The 2.8（可积函数被连续函数逼近）.　类似章三讨论.

① f 被 $\varphi(x)$ 逼近

② $\varphi(x)$ 可被连续函数逼近 g

$\Rightarrow$ f 被 g 逼近

$f \in L[a,b]$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists g \in C[a,b]$：$\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)| dm < \varepsilon$.

* 类似. $E(|f(x) - g(x)| > \eta) < \varepsilon$.

§3. 积分序列的极限.

The.（Levi 引理）.　~~有限~~ 不计　不要求简单.

可测E
非负可测 f u_n
和函数

f，u_n 在可测集 E 上非负可测，且 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

则 $\int_E f(x) dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n(x) dm$.　（求和与积分号互换）.

The.（Levi 引理 2）.　可测函数列

可测E
非负单增可测 f_n
有极限

$\{f_n\} \in L(E)$ ~~有限~~ 且 $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$；$f_n(x) \to f(x)$.

则 $\int_E f(x) dx = \lim \int_E f_n(x) dm$　（极限号与积分号互换）.

The.（Fatou 定理）　（下极限号积分号互换）.

可测E
非负可测 f_n

f_n 在可测 E 上非负可测. 则 $\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n dm \le \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n dm$.

无极限

* 若 f_n 极限与 $\int_E f_n\, dm$ 极限存在，则下极限可改为极限.

Fatou → Levi （？几个引理互推）.

Th.（勒贝格控制收敛定理）

可测 E
可测 f_n
有极限

可测 E 上可测 $\{f_n\}$： $f_n \to f$ 且有 $g \in L(E)$.

$|f_n| \le g \quad (x \in E,\ n \in N)$.

则 $\int_E f\, dm = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm$.

（有界控制收敛. $g = M$ 常数）.

Th（有界收敛定理）.

可测 E（$mE < \infty$），可测 $\{f_n\}$，且有 M

$|f_n| \le M \quad (x \in E,\ n \in N)$.

则 $\int_E f\, dm = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm$.

* Levi 到勒贝格控制收敛定理中. 假设条件几乎处处成立亦可.

Def.（等度的绝对连续积分）.

可积？

E 可测（$mE<\infty$），$f_\alpha\ (\alpha \in I)$ 可测，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

使 $me < \delta$ 时 $\left|\int_e f_\alpha\, dm\right| < \varepsilon$ 关于 α 一致成立.

则称 f_α 具有等度的绝对连续积分.

“等度”理解为“一致”

Thm.（勒贝格一维它利定理）.

有限可测 E
可积 f_n
测度收敛

$mE < \infty$. $f_n \xrightarrow{m} f$ 且 f_n 可积 且 f_n 有等度连续积分

则 f 可积

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|\, dm = 0$.

f_n 可积 $\quad f_n \to f$，f 可积？

Th. (勒贝格控制收敛定理) *注意与上一个控制收敛定理对比

有限可测E
可测 f_n
测度收敛

$mE<\infty$, f_n 可测, $\exists g\in L(E)$.

a.e. $|f_n|\le g$ $(x\in E, n\in N)$. 且 $f_n \xrightarrow{m} f$

则 f 可积且 $\int_E f\,dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$.

§4. 比较 R 与 L. (课本还没好好读).

但保持定号仍可.

Th. R可积 $\Rightarrow$ L可积 $\leftarrow$ (对广义积分不成立. ex $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$).

Th. R可积 $\Leftrightarrow$ f a.e.连续

Th. R下 $\int$ 与 lim 互换: 一致收敛.

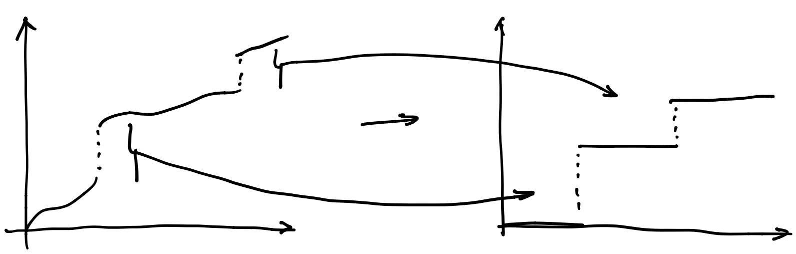
L下 $\int$ 与 lim 互换: 基本引理、Levi引理2、控制收敛定理

§6. 积分与微分.

Def. (跳跃函数).

f 在 $[a,b]$ 有限增, (不连续点至多可列, 记为 $\{\xi_k\}$).

$$s(x)=\begin{cases} f(a+0)-f(a)+\sum\limits_{0<\xi_k<x}\{f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)\}+f(x)-f(x-0) \\ 0, \quad x=a. \end{cases}$$



*$\{\xi_k\}$有限个. 则 $s(x)$ 是简单函数.

Th. $f(x)$ 在 $[a,b]\uparrow$. 则 $f(x)$ 分解为 $s(x)+g(x)$ $\leftarrow$ 连续.

*导数是连续 $\to 0$.

列导数分列 $\to 0$.

Def. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有限，若 $\exists h_n \to 0$ ($h_n \neq 0$).

$\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{-1}\left(f(x_0+h_n)-f(x_0)\right)=\lambda$ $\quad\lambda$ 为列导数(广义).

记 $\lambda = Df(x_0)$.

* 显然 $Df(x_0)$ 与 h_n 有关. 若 $\forall$ 列导数相等. 就是 x_0 点可微

Def. ($\mathcal{M}$ 维它利意义下覆盖 E)

E 实轴子集. $\mathcal{M}=\{d\}$ (长度为正闭区间集)

对 $\forall x \in E$, 有 d_n: $x\in d_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} m d_n = 0$.

The (维它利引理)

无界亦成立

E 有界. $\mathcal{M}$ 维它利意义下覆盖 E, 则至多可列 $\{d_k\} \subsetneq E$ 互不相交.

有 $m(E-\bigcup\limits_k d_k)=0$,

↳. ~ . 选出互不相交的 $d_1\, d_2 \cdots d_n$. 有 $m(E-\bigcup\limits_{k=1}^{n} d_k)<\varepsilon$.

The (维它利覆盖 > 测度覆盖).

E 有界. $\mathcal{M}=\{d\}$ $\quad\bigcup\limits_k d_k$ 包含 E. 且 $\sup md<\infty$.

则至多可列个互不交 d_k 有 $\underline{\sum\limits_k m d_k \geq \frac{1}{5} m^* E}$

The. f 在 $[a,b]$ 单调. 则 a.e. 有限可导.

The. 导函数可积且 $\int_{[a,b]} f' dm \leq f(b)-f(a)$.

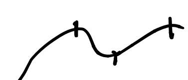
Def. (全变差、有界变差.)

都是极点.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有限. 划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$.

理解为所有变化部分和

则 $\sup\limits_{所有划分} \sum\limits_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$ 称为全变差.



$\bigvee_a^b(f)$，若 $\bigvee_a^b(f)<\infty$. 则称有界变差.

并记 $\pi(x)=\bigvee_a^x(f)$，$a<x\leq b$.　（线性、有限可加）.

The（Jordan 分解）

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界变差 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 表示为2个单调函数的差.

性质：有界变差 f：不连续点至多可列.

a.e. 可导，导数可积

（P197 开始拓展）.

Def.（绝对连续函数）

$[a_1,b_1]\cdots[a_n,b_n]\subseteq[a,b]$，互不相叠，当 $m(\bigcup_k[a_k,b_k])\to 0$

有 $\sum_k(f(b_k)-f(a_k))\to 0$.　（端点差）

则称 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 绝对连续.

绝对连续 $\Rightarrow$ 有界变差 $\Rightarrow$ 导数 a.e. 存在. 且可积.

连续有界变差 $\not\Rightarrow$ 绝对连续

The. 绝对连续 + $f'(x)$ a.e. $=0$. $\Rightarrow$ $f(x)=C$

The. $f(x)=C+\int_{[a,x]}g\,dm$ 绝对连续

$\Rightarrow$ 有界变差 $\Rightarrow$ $f'(x)\sim g(x)$.

* The. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 绝对连续 $\Leftrightarrow$ $\exists g$（可积），$f(x)=f(a)+\int_{[a,x]}g\,dm$ 成立.

$P_{208}\sim$ 是拓展

基本引理.

$mE<\infty$. $\{\varphi_n\}$ 简单, $\uparrow$. $\lim \to f$.

则 $\lim \int$ 互换

勒维

① $\cancel{mE<\infty}$. u_n 可测 (非负).

$\int \Sigma = \Sigma \int$

② $\cancel{mE<\infty}$. f_n 可测 $\nearrow$ $f_n \to f$

$\int \lim = \lim \int$

Fatou. E, 非负 f_n

则 $\int \underline{\lim} \le \underline{\lim} \int$

控制收敛.

E. f_n. $f_n \to f$

若 $\exists$ $g(x)$ ~~可积~~ 非负可测 且 $|f_n| \le g$

则 f 可积 且

$\int \lim = \lim \int$ ✓

	基本	勒维1	勒维2	法杜	勒贝格控制
$m<\infty$	✓	✓	✓		
f 可测 $\nearrow$	✓	Σ形式	✓		
f 可积	…				
$f_n \to f$	…		✓		✓
非负	(简单)	✓	✓	✓	g

一致绝对连续：

$mE<\infty$. $\{f_\alpha\}$ $\alpha\in I$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$. 当 $me<\delta$ 时

$\int_e |f_\alpha| dm<\varepsilon$ 对 $\forall\alpha\in I$ 成立

绝对连续.

f_n 可积, E. $\forall\varepsilon>0$. $\exists$ 一

один成立

列导数.

f_n 有限 $[a,b]$

$x_0\in[a,b]$, $h_n\to0$ 且 $h_n\neq0$

$\lim\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$ 存在, 记,

f 于 $[a,b]$ 有定义.

$\forall$ 分划 Δ $x_0 - x_n - b$

$\sigma_\Delta = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})|$.

$<\infty$ 则为有界变差函数

$\sup \sigma_\Delta$

绝对连续函数 $\neq$ 绝对连续积分

f. $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta$. $[a_i, b_i]$ 互不相交

$\sum(\ )<\delta$. $\sum |f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$

$$a\cdot b\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\qquad \frac1p+\frac1q=1$$

$p,q>1$

$$\int_E fg\,dm\le\left(\int_E|f|^p dm\right)^{\frac1p}\cdot\left(\int_E|g|^q dm\right)^{\frac1q}$$

$\le \|f\|_p\cdot\|g\|_q$

p范 q范

$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$