数值分析　　数值分析

学时：80 理论 + 24 上机

答疑：H205（下午 2:00 - 4:00）

闭卷 + 上机 + (作业 + 出勤)

70　　20　　10

Office hour：金曜日（木曜日）

实验课 $\boxed{\text{2楼机房}}$

作业难度（不考 ⊗ 题）

实验上机报告（流程图）

作业，预备知识

---

P16.　input A, b , [n, s] = size(A)

for k=1 ; n-1

　for i=k+1 ; n　　if

　　$m_{ik} = \cancel{a_{ik}^{(k-1)}} / \cancel{a_{kk}^{(k-1)}}$　　易"下溢"

　　$a_{ik}$

　　for j=k+1 ; n+1

　　　$\cancel{a_{ij}^{(k)}} = \cancel{a_{ij}^{(k-1)}} - m_{ik} \cancel{a_{ij}^{(k-1)}}$

　　　　　　$a_{ik}$

　　end

　end

end

if $a_{kk}==0$

stop. 'error'

// 消元部分

$a_{n,n+1}$　$x_n = a_{n,n+1} / a_{n,n}$　　$a_{j,n+1}$

for k = n-1 ; 1

　$a_{k,n+1}$　$x_k = a_{k,n+1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j / a_{k,k}$

end

△ 该函数存储量 $n \times (n+1)$

（优化存储）

output (print the result of x)

P33. LU分解（三角分解）

$A=LU$

- Doolittle 分解：L 单位下三角
- Court 分解：U 单位上三角

Page 34 ~ 40

LDR分解：L R：上、下三角矩阵，D是一个对角阵

$A=LDR$

直接三角形分解法.

↳ $A=LU$，$Ax=b \Rightarrow LUx=b$ 记 $Ux=y$，有 $\begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$

\# Court 法
- 紧凑的Court法
- 按列选主元的 Court 方法.

\# Cholesky 分解：系数矩阵是实对称正定的

$A=L\cdot L^T$（非奇异） P43. 解析（P44 算法）

也叫"平方根法"

也叫"改进的平方根法"

定理 2.2.3. $A_{n\times n}$正定 $\Leftrightarrow$ 非奇异下三角L：$A=LL^T$

实对称

证明：$\Leftarrow$ $A=LL^T$，L非奇异，则 $x_{n\times 1}$ 非零

有 $Lx\neq 0$，则 $x^TAx=x^TLL^Tx$

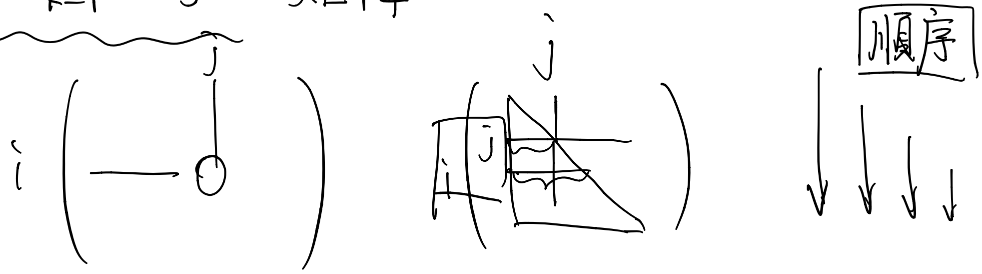
$=(Lx)^TLx>0$

$\Rightarrow$ 由LDR分解：$A=L_1DR$，$A^T=A$

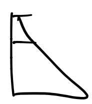
即 $A=L_1DR=R^TDL_1^T \Rightarrow L_1=R^T$；$L_1^T=R$

就有 $A=L_1DL_1^T=L_1D^{\frac{1}{2}}D^{\frac{1}{2}}L_1^T$

$a_{ij}=\sum_{k=1}^{j} l_{ik}l_{jk}$ 矩阵




$l_{21}l_{11}=a_{21}$ √



$\Rightarrow a_{21}$ (get)

$l_{31}=\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ √ ……

$\cancel{l_{22}}$ $a_{22}=l_{21}\cdot l_{21}+l_{22}^2$ √

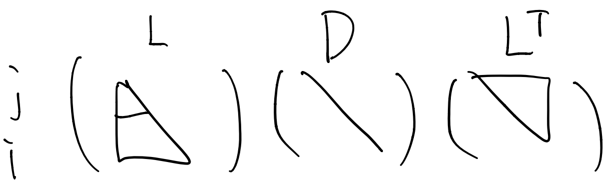
# $LDL^T$ 分解法.（为减少 $LL^T$ 分解中的开方计算）

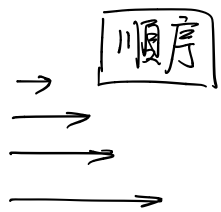
(from 2.2.2) $A = LDR \Rightarrow \underline{A = LDL^T}$ (A对称性与分解唯一).

$$\begin{cases} a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} d_k \\ a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik} l_{ik} d_k \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} l_{ij} &= \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_k l_{jk} \right) / d_j \\ d_i &= \left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{ik} d_k \right) \end{aligned}$$

减少开方，增加乘除 P46.

$$\boxed{a_{ij}} = \overset{d_{11}}{l_{i1} l_{j1}} + \overset{d_{22}}{l_{i2} l_{j2}} + \cdots + \overset{d_{i-1}}{l_{i\,i-1} l_{j\,i-1}}$$




$a_{11} = l_{11}^2 \underline{d_{11} = 4}$

$a_{21} = l_{21} d_1 \qquad a_{22} = \underset{\sim}{\overset{l_{21} d_{11}}{g_{21}}} l_{21} + \underline{\overset{d_{22}}{g_{22}}}$

$a_{31} = l_{31} d_1$

# 三对角算法（追赶法）

$$Ax=b\ ,\quad A=\begin{pmatrix} d_1 & c_1 & & \\ a_2 & d_2 & c_2 & \\ & a_3 & d_3 & c_3 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}_{n\times n},\quad b=(b_1,b_2,\cdots b_n)^T \quad x=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$$

↳ 用LU分解 $A=\begin{pmatrix} p_1 & & \\ a_2 & p_2 & \\ & a_3 & p_3 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q_1 & & \\ & 1 & q_2 & \\ & & 1 & q_3 \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$

* 若出现 $p_i=0$，则此处LU分解无法继续 ⇒ $p$、$q$ 解得（get）

定理 2.2.4. $\begin{cases} |d_1|>|c_1|>0 \\ |d_k|\geqslant|a_k|+|c_k| \text{ 且 } a_kc_k\neq0 \\ |d_n|>|a_n|>0 \end{cases} \Rightarrow p_1,p_2\cdots p_n\neq0.$

（实现LU分解后） $Ly=b\ ,\quad Ux=y$

$$\begin{pmatrix} a_{11}=p_1 & a_{12}=q_1p_1 & \\ a_{21}=a_2 & a_{22}=a_2q_1+p_2 & a_{23}=p_2q_2 \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

→ $\boxed{\text{顺序}}$ $P_{53}$ 算法.

证明范数理论

① $\|x\|_A>0$

$\lambda\in R/C$.

# 向量与矩阵的范数

② $\|\lambda x\|_A = |\lambda|\,\|x\|$

③ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\|x\| \leftarrow$ $R^n$ 中的一种向量范数.

$d(x,y) = \|x-y\|$ （距离）

p 范数： $f_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$

↳ 1-范数 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

2-范数 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

∞-范数 $\|x\|_\infty = \boxed{\lim_{p\to\infty}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

* 性质： $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

Prove. 记 $(x_i)_{max} = x_j$. 除

内积定义

Define. (Euclid 空间)： $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$(x,x) = \|x\|_2$ 又称 Euclid 长度

酉空间（复 Eucid 空间）

$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i = y^H x \quad \left( y^H = [\bar{y}_1, \cdots \bar{y}_n]^T \right)$

ex. (P6.1). $\|x_1\| = 6$

$\|x_2\| = (1+4+9)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$

$\|x_3\| = \max(x_i) = 3$

$\|0\|=0$ , $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leq \|x-y\|$ , (性质1, 2)

$\|x\| = \|x+y-y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$

$\Rightarrow \quad \|x-y\| \geq \|x\|-\|y\|.$

$\|y\| = \|x+y-x\| \leq \|x\|+\|y-x\|$

$\Rightarrow \quad \|x-y\| \geq \|y\|-\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|y\|-\|x\| \geq -\|x-y\|$

性质3. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, $\|y-x\|_2<\delta$ 有 $\big|\|y\|_\alpha - \|x\|_\alpha\big|<\varepsilon.$

① 分解 $x$. 和向量 (P62)

② ……

性质4：范数等价性 P63：$\forall \|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$,

$\exists c_1 c_2 \in R$, s.t. $c_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq c_2\|x\|_\beta \quad \forall x \in R^n.$

# 矩阵范数.

$A \in R^{n\times n}$, $\underbrace{\|A\|}_{\text{称为范数/模}}$ :

① $\|A\| > 0$ , $A \neq 0$

② $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

③ $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

④ $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ → (相容性条件)

相容:

# 极限的性质：

$$\forall A_k \in C^{n\times n},\quad A \in C^{n\times n}$$

1. $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A \Leftrightarrow$ $\forall$范数：$\lim\limits_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0$

2. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$ （谱半径）

3. $\exists \|\cdot\|,\ \|A\| < 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$，[且若 $\rho(A) < 1$：$(I-A)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$]

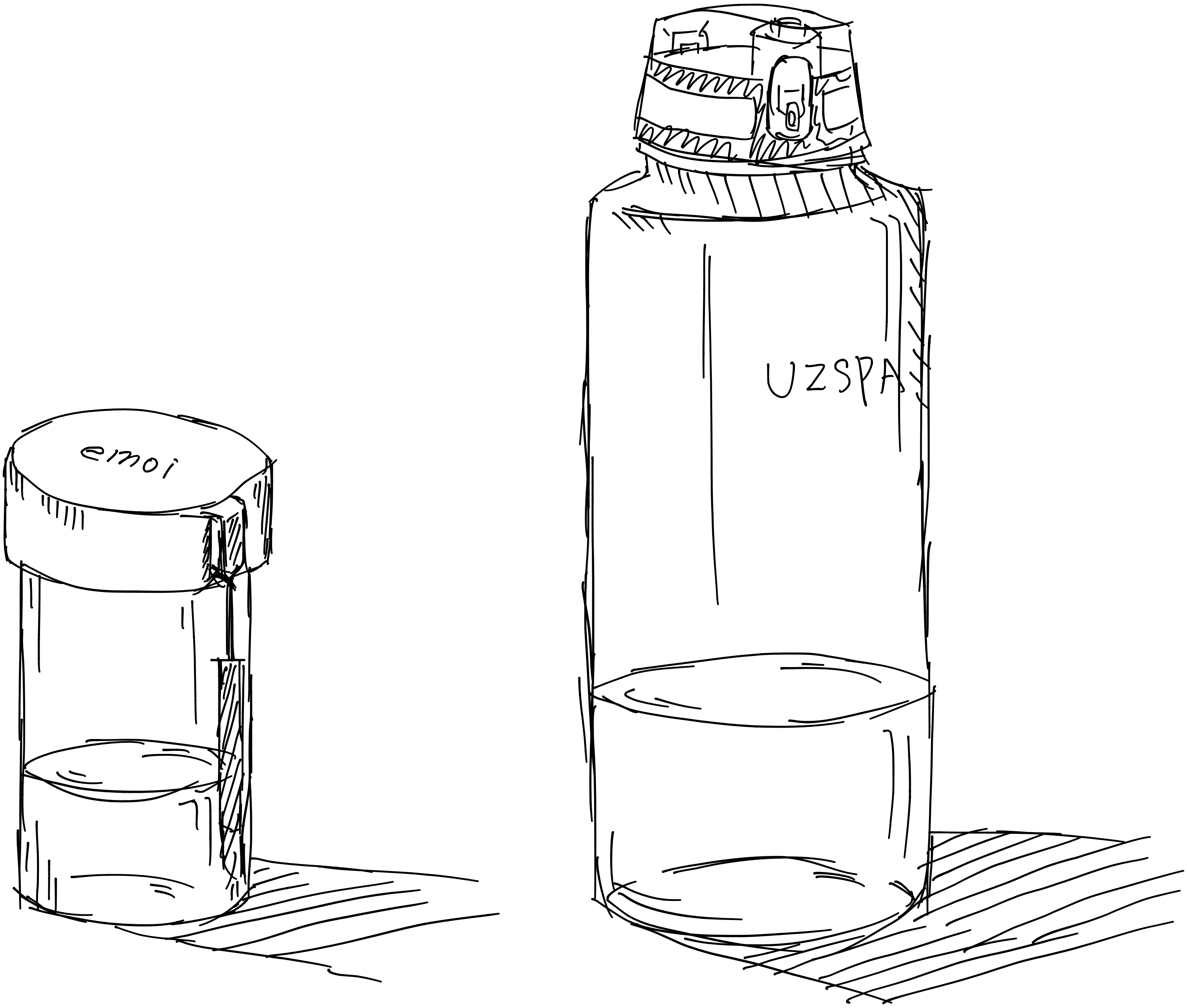
5. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$

6. 对 $\|\cdot\|$ 有 $\|A\| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$

   且对 $\forall k \in Z^+$ 有 $\|(I-A)^{-1} - (I + A + A^2 + \cdots + A^k)\| \leqslant \dfrac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|}$

7. 在酉变换下，谱范数 $\|A\|_2$ 保持不变，即 $Q \in C^{n\times n}$

   $Q^H Q = I$，则有 $\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2$


emoi
UZSPA