可测函数.

$E(f>\alpha)=\{x.\ \ x\in E,\ f(x)\in(\alpha,+\infty)\}$.

Def.1.1. f定义在E上的实函数，对$\forall\alpha$. $E(f>\alpha)$恒可测，则f于E上是勒贝格可测.

↳ $E(f>\alpha)\Leftrightarrow E(f\geq\alpha)\Leftrightarrow E(f<\alpha)$可测. $\Leftrightarrow E(f\leq\alpha)$可测.

$G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k)$ 且 $f^{-1}(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k,\beta_k))=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}f^{-1}((\alpha_k,\beta_k))$.

ex. f在E可测. 则$E(f=+\infty)$，$E(f=-\infty)$均可测.

ex. 狄利克雷函数可测.

ex. 简单函数. $f(x)$只取有限个实值：（简单函数必可测）.

特别的. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\cdot\chi_{e_k}(x)$. $E=\bigcup\limits_{k=1}^{n}e_k$，$e_k=E(f=c_k)$互不相交.

Def. 连续： $x\in E$，$\forall\{x_n\}_1^{\infty}\in E$，$x_n\to x\ (n\to\infty)$，$f(x_n)\to f(x)$. 则在$x$点连续.

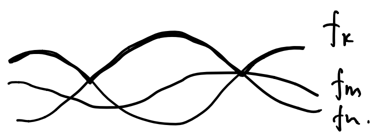
ex. E上连续函数必可测.

Def. 几乎处处. ：不成立点集测度为0.

$f\sim g$： f与g对等 ：$f\overset{a.e.}{=\!=}g$.

$f_n\to f$, a.e. ：$\{f_n\}$几乎处处收敛至f.

Theorem.1.1. $\{f_n(x)\}$是E上可测函数列. 则 $\sup\limits_n f_n(x)$ 与 $\inf\limits_n f_n(x)$ 均可测.



↳ 记 $f_+(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0\\ 0, & f(x)<0.\end{cases}$ $f_-(x)=\begin{cases}0, & f(x)\geq 0\\ f(x), & f(x)<0.\end{cases}$

$f(x)$可测. 则 $f_+(x)$, $f_-(x)$可测.

↳ $\{f_n(x)\}$ E上可测函数列. 则 $\overline{\lim\limits_n}f_n(x)$，$\underline{\lim\limits_n}f_n(x)$可测.

且若$\lim\limits_n f_n(x)$几乎处处存在，则它是E上可测函数.

Theorem 1.3. (可测函数可以用简单函数逼近).

f(x)在E上非负可测. 则∃非负单增简单函数列 $\varphi_n(x)$: $0\le\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)\le\cdots$

且有 $\lim\limits_{n}\varphi_n(x)=f(x)$ 在E处处成立.

↳ f(x)是可测函数 ⇔ f(x)可被表示为简单函数列的极限.

引理1.1. 简单函数的和差积商仍为简单函数.

Theorem 1.4 可测函数的和差积商都是可测的.

§2. Def. 上、下限集: $\{A_n\}_{n\in N}$

上限集: $\overline{\lim} A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$; 下限集: $\underline{\lim} A_n=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$.

不同之处 →

↳ $x\in\overline{\lim}A_n \leftrightarrow x\in A_n$ (无限多个)

$x\in\underline{\lim}A_n \leftrightarrow x\in A_n$ (n从某个k开始, 与x有关).

有界: $|f(x)|<G$

* 有限: 不存在$\pm\infty$的点

(Δ). 当 $\overline{\lim}A_n=\underline{\lim}A_n$ 时, 称$\{A_n\}$收敛. 记为 $\lim A_n$.

ex. 渐张列$\{A_n\}_{n\in N}$极限为$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. ; 渐缩列$\{A_n\}_{n\in N}$极限为$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$.

(Δ). 有限函数: $\forall x\in E$ 有$|f(x)|<\infty$

有界函数: $\exists M$, 对$\forall x\in E$有$|f(x)|<M$.

Theorem 2.1 (叶果洛夫定理)

↓ 详见文档

$mE<\infty$. $f_n(x)$与$f(x)$于E上几乎处处有限可测

$\{f_n(x)\}\xrightarrow{a.e.}f(x)$. 则对$\forall\delta>0$, $\exists E_\delta\subset E$

使$\{f_n(x)\}$于E_δ上一致收敛于$f(x)$. $m(E-E_\delta)<\delta$.

Def. f, f_n在E上a.e.有限. 若对$\forall\delta>0$. $\exists E_\delta$: $m(E-E_\delta)<\delta$

而在E_δ上$f_n(x)$一致收敛于f, 则称 $f_n(x)$在E上近一致收敛于$f(x)$ a.u.

Theorem 2.2. $f_n(x)$近一致收敛于$f(x)$. 则 $f_n(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$.

Def. $\forall \varepsilon>0$. $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n-f| \geq \varepsilon)=0$. 则称 f_n 测度收敛于 f

$$\begin{tikzcd}
 & f_n \xrightarrow{a.e.} f \arrow[dl, bend right, "mE<\infty"'] \\
f_n \xrightarrow{a.u} f \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & f_n \xrightarrow{m} f
\end{tikzcd}$$

X

Theorem. 2.4. (黎斯定理). $mE<\infty$. $f_n(x) \xrightarrow{m} f(x) \Leftrightarrow \{f_n(x)\}$ 任一子列 $\{f_{n_k}(x)\}$

其子列 $\{f_{n_{k_i}}(x)\} \xrightarrow{a.e.} f(x)$ (~~$\{f_n(x)\}$ 子列的子列~~).

Def. 柯西列. $f_n(x)$ a.e.有限. $\forall \varepsilon>0$ $\lim\limits_{m,n\to\infty} mE(|f_n-f_m|\geq\varepsilon)=0$.

依测度基本列.

Page. 113.

叶果洛夫.

$mE<\infty$, f_n, f 在 E 上 a.e.有限

且可测. 若 $f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

则 $f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

	叶果洛夫	黎斯	鲁津
$m<\infty$	✓	✓	✓
f_n a.e有限	✓		✓
	a.e→a.u	m→a.e.	可测→C.

~~若 $\int_E \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{k} c_i mE_i$~~

F.Riesz.

$mE<\infty$. 可测 $f_n \xrightarrow{m} f$.

则 $\forall \{f_{n_k}\}$. $\exists \{f_{n_{k_i}}\}$ 有

$f_{n_{k_i}} \to f$. $(i\to\infty)$

鲁津

可测

①. $mE<\infty$. f 在 E 上 a.e有限

则 $\forall\varepsilon>0$. $\exists F_\varepsilon$ 可测 $F_\varepsilon \subset E$.

$m(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$. f 在 F_ε 上连续.

注 $mE<\infty$. f 为 a.e. 有限可测

$\forall \varepsilon\ \exists\ g(x)$ 连 $R \to R$. 使 $mE(f \neq g) < \varepsilon$