数值积分

关于 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的计算问题

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,W(x)\,dx \quad , \quad a\le x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}\le b$$ （求积基点）

x_{n+1}

$f(x_1)\cdots f(x_n).\, f(x_{n+1})$

取 $\boxed{I_n(f)=\sum_{i=1}^{n+1}A_i f(x_i)}$ 作为 $I(f)$ 近似值.

数值积分公式

A_i：求积系数，仅与 x_i 相关.

误差 $E_n(f)=I(f)-I_n(f)$.

§7.1. Newton-Cotes 型求积公式.

用 Lagrange 插值多项式作为近似 $f(x)$ 的函数

$$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)f(x_i)$$

则

$$I(f)=\int_a^b f(x)W(x)dx=\int_a^b P_n(x)\,W(x)\,dx+E_n(f)$$

$$l_i(x)=\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_i)\,w_{n+1}'(x_i)}$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n+1}A_i f(x_i)}_{I_n(f)}+E_n(f),\quad A_i=\int_a^b l_i(x)\,W(x)\,dx$$

$I_n(f)$.（插值求积公式）

其中 $E_n(f)=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,w_{n+1}(x)\,W(x)\,dx$.

若上述 $x_1\cdots x_{n+1}$ 等间距：$h=x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}$

则上述 $I_n(f)$ 称为 Newton-Cotes 型求积公式

此时 $E_n(f)=\frac{h^{n+3}f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\cdots(t-n)\,dt$

梯型公式：$n=1$ ： $x_1=a,\ x_2=b$ 的 Newton-Cotes 公式

$$\boxed{L_1(f)=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right).\qquad E_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)}$$

抛物线公式 $n=2$ ： $x_1=a,\ x_2=\frac{a+b}{2},\ x_3=b$ 的 Newton-Cotes 公式

(也叫 Simpson公式)

$$\boxed{\begin{aligned}&L_2(f)=\frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right),\quad h=\frac{1}{2}(b-a)\\&E_2(f)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta)\end{aligned}}$$

§7.2. 复合求积公式

背景：Newton-Cotes 方法，n 过小离散误差会大，n 过大会数值不稳定.

则将积分区间划分，在每个区间上低阶积分

复合梯型

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)\,dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)-\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n}f''(\xi_i)$$

$$f''(\xi)=\frac{1}{n}\sum f''(\xi_i)$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih)\right)}}_{T_n(f)}\ \underbrace{-\ \frac{nh^3}{12}f''(\xi)}_{E_n(f)}$$

$$I_n(f)=T_n(f)+E_n(f).$$

变步长梯型公式 上述复合梯型公式确定n是较难的

故采用逐次半分的方法.

记 第m次半分: $h_m=(b-a)/2^{m-1}$

此时 $T_{m,1}$ 记为梯型值.

$$T_{1,1}=\frac{b-a}{2}(f(b)+f(a)),$$

$$T_{2,1}=\frac{1}{2}\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)+2f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right)$$

$\vdots$

$$\boxed{T_{m,1}=\frac{1}{2}\left(T_{m-1,1}+h_{m-1}\sum_{k=1}^{2^{m-2}}f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h_{m-1}\right)\right)}$$

变步长梯型公式

(与复合梯型无实质区别)

误差分析. Page. 218.

复合 Simpson 公式 $[a,b]\rightarrow[x_{2i-2},\overset{\overset{x_{2i-1}}{\downarrow}}{},x_{2i}]$, 在每个区间上用 Simpson公式

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}}f(x)\,dx$$

$$=\underbrace{\boxed{\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m}f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(a+2ih)\right)}}_{S_m(f)}$$

$$\underbrace{-\frac{m}{90}h^5f^{(4)}(\xi)}_{E_m(f)}$$

$I_n(f)=S_m(f)+E_m(f)$.

§ 7.3. Romberg 积分法.

$q_j(t)$ 是 j 次多项式：

(1). $q_0(t)=1$

(2). $q_{j+1}'(t)=q_j(t)$

(3). $\int_0^1 q_j(t)\,dt=0$

则：

(1) $q_{j+1}(t)=q_{j+1}(0)+\int_0^t q_j(x)\,dx$ （积分递推）

$q_0(t)=1$

$q_1(t)=t-\frac{1}{2}$

$q_2(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}$ 尾项用定义3算

$q_3(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{12}t$

...

(2). $q_j(1)=q_j(0)$, $j\geq 2$.

(3). $p_j(t)=q_j(t+\frac{1}{2})$ 则 p_j 奇偶性同 j

(4). $q_{2j+1}(0)=q_{2j+1}(1)=0$, 奇数位尾项为0. $j\geq 1$

Euler-Maclaurin公式 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有 k 阶连续导数 $\{x_i\}$ 等分

$$I(f)=\underbrace{T_n(f)}_{\text{复合梯型}}-\boxed{h^2 q_2(0)\left(f'(b)-f'(a)\right)}-\boxed{h^4 q_4(0)\left(f'''(b)-f'''(a)\right)}+\cdots+\boxed{(-1)^{k-1}h^k q_k(0)\left(f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)\right)}+R_k^n(f)$$

$$R_k^n(f)=(-1)^k h^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f^{(k)}(x_i+th)\,q_k(t)\,dt$$

（余项）