概念

章一. 度量空间

△

距离: $\rho(x,y)$:

$X\neq\emptyset$, $\rho: X\times X\ni(x,y)\longmapsto\rho(x,y)\in R^1$　　X不一定线性.

且 1. 正定 ($\rho(x,y)\geq 0$, $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$)

2. 对称

3. 三角不等式

度量空间: (X,ρ).　　$B(x,\delta)=\{\cancel{x}\,y\mid\rho(x,y)<\delta\}$ 开球形邻域

$\bar{B}(x,\delta)=\{y\mid\rho(x,y)\leq\delta\}$ 闭球形邻域.

子空间: $\emptyset\neq A\subset X$

(A,ρ) 亦是度量空间.

exp. **Euclid空间**. R^k.　$x\in R^k$, $\rho(x,y)=\|x-y\|$ → 2-向量范数.

$\rho_p(x,y)=\|x-y\|_p$

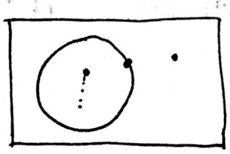
$\rho_\infty(x,y)=\|x-y\|_\infty$.　　P.1

序列收敛: $\{x_n\}\subset X$, $x\in X$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$.　记 $x_n\to x$, $\xrightarrow{\varepsilon\delta语言}$ … $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

$x_n\to x$　　P.2

点集相关:

开核: A° (内点全体)　　内点、外点、边界点、孤立点、聚点.



补集: A^c

边界: ∂A (边界点全体).

导集: A' (聚点全体).　　☆ $l^p\triangleq\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mid \|x\|_p<+\infty\}$.　　P.3

闭包: $\bar{A}$　($A\cup A'$)

A是 { 闭集: $A'\subset A$
　　 开集: $\forall x\in A$, $x\in A^\circ$ (所有点都是内点)

{ 有界集.
　无界集.

$\boxed{\text{稠密}}$：$A, B \subset X$. $\overline{B} \supset A$，称 B在A中稠密

$\boxed{\text{可分}}$：可数集 D 在 X 中稠密（$\overline{D} \supset X$），则X为可分空间.

$\boxed{\text{映射}}$：X, Y非空，$F: X \ni x \mapsto y \in Y = F(x) \in Y$，F是映射

$f: X \mapsto Y$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \rho(x, y) < \delta$ 时 $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. f在x处连续

x 固定

X中每个x都连续

f为连续映射.

* $\boxed{\text{同胚}}$：$f: X \mapsto Y$ $\boxed{\text{连续}}$且$\boxed{\text{一一映射}}$，$\boxed{f^{-1}\text{连续}}$ → f 同胚映射

$X \simeq Y$

X, Y 同胚（存在一个同胚映射）.

~~X≃~~ $X \simeq Y$

$\boxed{\text{基本点列}}$：(X, ρ)为度量空间，$\{x_n\} \subset X$. （Gauss列）.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, n > N$，$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

* $\boxed{\text{完备}}$：$\forall$ Gauss列 $\{x_n\} \subset X$，$x_n \to x$. 则 X 是完备的度量空间.

$\boxed{\text{疏朗集}}$：A在$\forall$开集（非空）中不稠密，则A是疏朗集

度量空间X，$A \subset X$

~~$\exists D$，$\overline{A} \supset D$.~~

$\boxed{\text{纲集}}$：疏朗集列 E_n. ：$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，则A为第一纲集

否则为第二纲集

$\boxed{\text{等距映射}}$：$(X, \rho_X)(Y, \rho_Y)$：$T: X \to Y$ 满射且 $\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(Tx_1, Tx_2)$

X, Y 等距（存在一个等距映射）.

$\boxed{\text{序列集}}$ $X\cdots$, $A\subset X$.

$\forall\{x_n\}\subset A$, $x_{n_k}\to x_0\in X$，则A为准序列紧集 P7

$\forall\{x_n\}\subset A$, $x_{n_k}\to x_0\in A$，则A为序列紧集，~~X为序列紧空间~~.

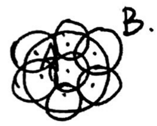
$\boxed{\text{紧集}}$: $X\cdots$, $A\subset X$.

A的每个开覆盖都有有限子覆盖，则A是紧集，~~X为紧空~~

$\boxed{\text{有限交}}$: $\mathscr{A}\subset 2^X$，$\mathscr{A}$中有限子族都有非空交 : $\forall A_i\in\mathscr{A}$. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i\neq\emptyset$.

则$\mathscr{A}$有有限交性质.

$\boxed{\text{有界}}$: $X\cdots$, $A, B\subset X$, $\varepsilon>0$.



1. A有界集 : $\exists B(x,R)$, $A\subset B(x,R)$.
2. $A\subset\bigcup_{y\in B}B(y,\varepsilon)$，则B为A的 ε-网 P8.
3. $\forall\varepsilon>0$ A都有 ~~ε网~~ 有限ε-网. 则 A 完全有界集* (可分).

P9.

$\boxed{\text{不动点}}$: $T: X\to X$, $x\in X$, $Tx=x$, x叫T不动点.

$\boxed{\text{压缩映射}}$: $X\cdots$, $T: X\mapsto X$. $\theta\in[0,1)$, $\forall x,y\in X$: $\rho(Tx,Ty)\leqslant\theta\,\rho(\cancel{T}x,y)$.

T称为压缩映射.

章二. Banach空间 & Hilbert空间

$\boxed{\text{线性空间}}$ X为数域K(C/R)上线性空间. L, M, Y⊂X.

线性无关族: ~~∀xi∈~~ $\forall \{x_n\} \subset M$ 是线性无关组, 则M是线性无关族

有限

线性基底. $\forall x \in X$. $\exists \{x_i\}_{i=1}^{n} \subset M$, $\alpha_i \in K$:

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, 则M为X的线性基底　(即X中任一元素可被M线性表出)

M有限 ⟶ X有限维空间

M无限 ⟶ X无限维空间.

线性子空间: X下满足线性的子空间

张成: L: $\text{span}L = \{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in L, \alpha_i \in K, n \in N \}$.

$\boxed{\text{映射}}$: X, Y, 线性空间, $T: X \mapsto Y$

线性映射: $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$. $(x, y \in X, \alpha, \beta \in K)$

若T再一一对应: T为线性同构映射

线性同构: 同构+线性.

线性$\boxed{\text{泛函}}$: $X \mapsto K$ 的线性映射 称为X上的线性泛函.

$\boxed{\text{赋范空间}}$ X线性空间, $\|\cdot\|: X \ni x \mapsto \|x\| \in R$

1. 正定 . 2. 齐次 3. 三角不等式　P.11

则 $\|x\|$为x范数. $(X, \|\cdot\|)$为赋范空间　赋范比距离广义

exp. $\rho(x, y) = \|x - y\|$, (X, ρ)为距离空间

$B_r(x) \triangleq B(x, r)$

$\boxed{\text{Banach空间}}$: (X, ρ)完备的度量空间, 则 $(X, \|\cdot\|)$为Banach空间

(与$\|\cdot\|$种类有关)

K上的

$\boxed{\text{映射}}$ X, Y 线性空间，$T: X \mapsto Y$. 线性映射

保距映射：$\forall x \in X$，$\|T(x)\| = \|x\|$

+ 满射 ⟶ 保距同构映射 则称 X Y 等距同构.

(一一对应)

拓扑同构映射：T 线性同构 且 T与T^{-1}都连续，则称一拓扑同构.

$\boxed{\text{内积}}$

$(x,y) = \|x\|\|y\| \cdot \cos\varphi$

$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}$ （$\mathbb{C}$上内积）

X 线性：… $(x,y) \in X \times X$.

1. 正定：$(x,x) \geq 0$
2. 共轭对称：$(x,y) = \overline{(y,x)}$ （$x,y \in R$ 时 $(x,y) = (y,x)$）
3. 第一变量线性.

则 (x,y) 为 x与y 内积. $(X,(\cdot,\cdot)) = X$ 为内积空间

e.x. 第二变量共轭线性. $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x,y) + \overline{\beta}(x,z)$.

* $\boxed{\text{Hilbert空间}}$：若 $(X, \|\cdot\|)$ 完备，则 $(X,(\cdot,\cdot)) = X$ 为 Hilbert 空间.

$(X,\rho) \xrightarrow{\text{完备}} \underset{\text{Banach}}{(X,\|\cdot\|)} \xrightarrow{\text{完备}} \underset{\text{Hilbert}}{\cancel{(X,(\cdot,\cdot))}}$

Hilbert 是由赋范空间导出的

$\boxed{\text{正交}}$：X 内积空间，

$(x,y)=0$：$x \perp y$

$\forall y \in M$，$x \perp y$：$x \perp M$

$\forall y\, x \perp M$：$N \perp M$

$M^{\perp} = \{y \mid y \perp M\}$ $\boxed{\text{正交补}}$

$y \in X$

最佳逼近 X赋范空间，$M \subset X$，$x \in X$，

$\exists y \in M$，s.t. $\|x-y\| = \rho(x, M) = \inf_{z \in M} \rho(x, z)$

则 y 即为 x 在 M 中最佳逼近 | 即M中与x距离最近的点

凸集 X 线性空间，$E \subset X$，

$\forall x, y \in E$，$t \in [0,1]$: $tx + (1-t)y \in E$，则E为凸集

正交系 X 内积空间，$M \subset X$.

正交系：$\forall x, y \in M$，$x \perp y$，M为正交系

标准正交系：$\forall x \in M$，$\|x\| = 1$.

完备&完全 X 内积空间. $M \subset X$为标准正交系

完备系：$\forall x \in X$：$\|x\|^2 = \sum_{e \in M} |(x, e)|^2$，M称为完备系 | x 的范数平方可以用与M中每个元素距离平方和

完全系：$M^{\perp} = \{0\}$. 则M为完全系

内积空间的同构，X，Y 内积空间. $T: X \mapsto Y$.

1. 线性同构
2. $(x, y) = (Tx, Ty)$ |(不改变内积)

则称T同构映射.

章三. Banach空间上的有界线性算子.

$\boxed{\text{线性算子}}$: X, Y 线性空间, $D\subset X$ 是线性子空间, $T: D \mapsto Y$ P17.

1. 可加性: $T(x+y) = Tx + Ty$
2. 齐次性: $T(\alpha x) = \alpha Tx$.

则T称为D到Y的<u>线性算子</u>

$\mathcal{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}$ 称为T的<u>零空间</u>

other. 恒等算子(单位算子), 相似算子, 零算子.

$\boxed{\text{有界}}$: $T: X\supset D \mapsto Y$ 为线性算子. 若

$\exists M \geq 0$: $\forall x\in D$: $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

则T是<u>有界算子</u>, else. <u>无界算子</u>

$\boxed{\text{算子的范数}}$: X, Y 为赋范空间, $T: X\supset D \to Y$.

$\forall x\in D$, $\|Tx\|\leq M\|x\|$ 成立的 M 下确界

$$\Leftrightarrow \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \;\middle|\; x\in D, x\neq 0\right\}.$$

称为T的范数, $\|T\|$.

$\boxed{\text{算子的线性空间}}$: $Y^X = \{T \mid T: X\to Y\}$

线性运算: $(T+S)(x) = Tx + Sx$

$(\alpha T)(x) = \alpha Tx$.

则 Y^X 为<u>线性空间</u>

<u>Y线性</u>. (X若不是线性则不能称为算子).

若X亦线性. $L(X,Y) = \{T \mid T: X\mapsto Y \text{ 线性算子}\}$.

为 Y^X 的线性子空间.

子空间

$\boxed{\text{有界线性算子空间}}$ X, Y 赋范线性:

$\mathcal{B}(X,Y) = \{T \mid T: X\to Y \text{ 有界线性算子}\}$

exp. $X^* = \mathcal{B}(X,K)$ 称为<u>共轭空间</u>

$\boxed{\text{代数}}$ X 赋范.. X 中有乘法满足

1. 结合律，数乘交换律，加法分配 $\longrightarrow$ X 为代数

2. $\forall x, y \in X$，$\|xy\| \le \|x\| \|y\|$

则 X：赋范代数，$\xrightarrow{+完备}$ Banach 代数.

$\boxed{\text{开映射}}$ X，Y 赋范. $T: X \mapsto Y$. $\forall G$ (开集) $\subset X$

$T(G) \subset Y$ 是开集. 则 T 是开映射.

P20.

$\boxed{\text{拓扑同构}}$

$\boxed{\text{闭算子}}$ $T: X \supset D \mapsto Y$. T 的 $\boxed{\text{图像}}$ $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D\}$.

为闭集. 则 T 为闭算子

$\boxed{\text{泛函}}$：X 线性.. ，$p: X \longrightarrow \mathbb{R}$

1. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

2. $\alpha \ge 0$，$p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

3. $p(x) \ge 0$

则 p 称为凸泛函

* $\boxed{\text{序}}$：迪卡尔积：$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

关系：$R \subseteq X \times Y$ $\quad$ xRy：$(x, y) \in R \subset X \times Y$.

序关系：$R \subset X^2$

1. 自反：xRx

2. xRy，$yRx \Rightarrow x = y$

3. 传递：xRy，$yRz \Rightarrow xRz$.

R 为 X 上的序关系：记 R：$\prec$. $(X, \prec)$ 为半序集.

若 $\forall x, y \in R$：$x \prec y$ 或 $y \prec x$. 则称 $(X, \prec)$ 为全序集

(全序子集)

$(X, <)$ 半序集

上界：$\forall y \in A$，$y < x$，x为A上界

最大元：$\forall y \in X$，$y < x$，x为X中最大元

极大元：$\forall y \in X$，$x < y$ 时 $x = y$，x~~为X~~为极大元

极大全序子集：A, B全序子集，$A \subset B$时 $A = B$，A为…

$\boxed{\text{延拓\&限制}}$：$T_i : \cancel{R}\, \mathscr{D}(T_i) \mapsto Y$，若 $\mathscr{D}(T_1) \subset \mathscr{D}(T_2)$ 且 $x \in \mathscr{D}(T_1)$

$T_2(x) = T_1(x)$.

则T_2为T_1的延拓，T_1为T_2的限制

$\mathscr{D}(T)$

X线性空间，$p: X \mapsto R$.

1. 次可加：$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
2. 正齐次：$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \geq 0)$
3. ~~或~~ $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$，$\alpha \in K$

则 p 为$\boxed{\text{半范数}}$

$\boxed{\text{共轭空间}}$ X赋范，$X^* = \{ f \mid f\text{为}X\text{的有界线性泛函} \}$.

X^*一定是Banach空间

X^{**} 为二次共轭空间

$\boxed{\text{典范算子}}$：X赋范. $T: x \mapsto x^{**} \in X^{**}$

若T是满射，则X为自反空间

收敛部分

$\boxed{\text{強弱收斂性}}$：X 賦范，$x_n, x \in X$.

1. $\|x_n - x\| \to 0$ ：$\{x_n\}$ $\boxed{\text{強收}}$ 于 x

2. $\forall f \in X^*$，$|f(x_n) - f(x)| \to 0$ ：$\{x_n\}$ $\boxed{\text{弱收}}$ 于 x

X, Y 賦范，$T_n, T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

1. $\|T_n - T\| \to 0$ ；$\{T_n\}$ $\boxed{\text{一致收}}$ 于 T

2. $\forall x$，$\|T_n x - Tx\| \to 0$ ：$\{T_n\}$ $\boxed{\text{強收}}$ 于 T

3. $\forall x$，$g \in Y^*$，$|g(T_n x) - g(Tx)| \to 0$ ：$\{T_n\}$ $\boxed{\text{弱收}}$ 于 T.

X 賦范．$f_n . f \in X^*$

1. $\|f_n - f\| \to 0$：f_n $\boxed{\text{強收}}$ 于 f

2. $\forall x$，$|f_n(x) - f(x)| \to 0$，f_n 弱*收于 f

3. $\forall F \in X^{**}$，$|F(f_n) - F(f)| \to 0$．f_n $\boxed{\text{弱收}}$ 于 f