随机变量及其分布.

样本空间 Ω $\qquad \underbrace{\{\omega : X(\omega) \in B\}}_{\text{随机事件}}$ $\qquad$ e.g. $\{X > a\}$.

分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$ ，记 $X \sim F(x)$

(1) 单调 ；(2) 有界 ；(3) 右连续 ；

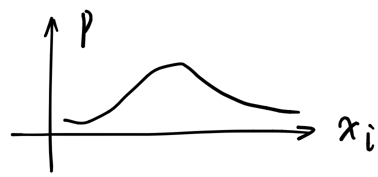
分布列（仅限离散） $p_i = P(X = x_i)$

X	x_i	x_{i+1}	$\cdots$
P	p_i	p_{i+1}	$\cdots$

（离散）

(1) 非负 ；(2) 正则（和为1）.

概率密度函数（连续随机变量） $p(x)$



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt$$

$$F'(x) = p(x)$$

(1) 非负 ；(2) 正则

§2.2. 期望

$$\begin{cases} E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\, p(x_i) & \text{（离散）} \\ E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x)\,dx & \text{（连续）} \end{cases}$$

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i)\,p(x_i) & \text{（离散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,p(x)\,dx & \text{（连续）} \end{cases}$$

就直接用 $g(x)$ 替 x

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

§2.3 方差

$$Var(X) = E(X-E(X))^2 = \begin{cases} \sum_i (x_i - E(X))^2 \, p(x_i) \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 \, p(x) \, dx \end{cases}$$

用 $(x_i - E(X))$ 替

标准差 $\sqrt{Var(X)}$

性质

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X+b) = Var(X)$$

$$Var(aX) = a^2 \, Var(X)$$

切比雪夫不等式

$$P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$P(|X-EX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

§2.4 常见离散分布

(1). 二项分布

$X \sim b(n,p)$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ (成功次数)

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

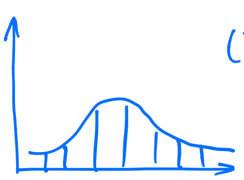
(2) 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$



(常与单位时间上的计数有关)

The. 当 $X \sim b(n,p)$ 中 $n \to \infty$，且 $np \to \lambda$

则 $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

(可用泊松模拟二项)

(3) 超几何分布

$X \sim h(n, N, M)$

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$ (不放回抽样)

$$E(X) = n \cdot \frac{M}{N}$$

$$Var(X) = \cdots = E(X^2) - E(X)^2$$

(4) 几何分布

$X \sim Ge(p)$

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$ (事件首次出现的次数)

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

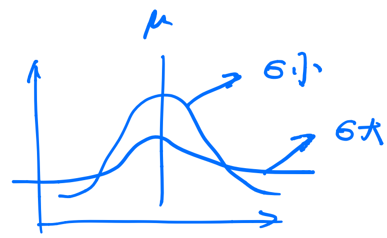
$$Var(X) = \frac{1}{p^2}(1-p)$$

§2.5 常用连续分布

(1) 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

ex. $X \sim N(0,1)$ 标准正态分布

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

The. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $U = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$

(2) 均匀分布

$X \sim U(a, b)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

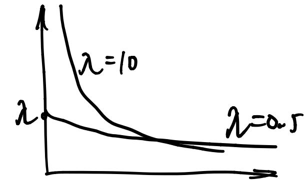
$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

(3) 指数分布

$X \sim Exp(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & other \end{cases}$$



$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

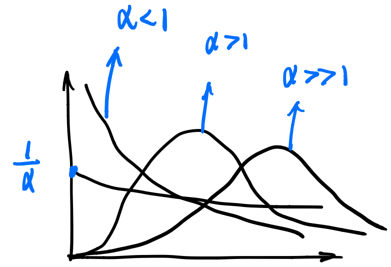
(元件寿命)

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

(4) 伽玛分布

$X \sim Ga(\alpha, \lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & other \end{cases}$$



$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

$X \sim G(1, \lambda) = X \sim Exp(\lambda)$

$X \sim G(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$: <u>卡方分布 χ^2</u>

(5) 贝塔分布 ... Page 118.

§2.6. 连续 X 已知, 求 $Y = g(X)$ 分布:

(1) $g(x)$ 单调(严格).

$h(y)$ 是 $g(x)$ 反函数

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(h(y)) \cdot |h'(y)|, & y \in (a, b) \\ 0, & other. \end{cases}$$

性质: (1). $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

(2). $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = e^X$:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} y \sigma} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

(对数正态分布)

...

§2.7. ... P129. 略.