Q.1. Chapter1 概念，方程种类判断（5×3'）选择题

A.1. 三类边值条件：Dirichlet，Neumann，Robin 边值条件

Page.14

e.g. 热传导方程：Dirichlet：$u(x,t)=g(x,t)$ $\quad x\in\partial\Omega, t>0$ 即已知 $u|_{\partial\Omega}$

Neumann：$-\vec{q}\cdot\vec{n}=g(x,t)$ $\quad x\in\partial\Omega, t>0$ 即已知 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$

$$k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=k\nabla u\cdot\vec{n}=g(x,t)$$

Robin：$\alpha u+k\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\alpha g_0$ $\quad x\in\partial\Omega, t>0$，$\alpha,k>0$

即已知 $\left(u+\frac{\partial u}{\partial n}\right)|_{\partial\Omega}$

判断方程种类：2个自变量时：$\Delta=b^2-4ac=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$

$\Delta>0$ 双曲型

$\Delta=0$ 抛物型

$\Delta<0$ 椭圆型

二次型的正定：对应矩阵所有顺序主子式全大于0 OR 特征值均大于0

* e.g.1 n个自变量时：$Q(\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$ （对应的二次型）

Page.17

$Q(\lambda)$ 正定 OR 负定 椭圆型

$A=(a_{ij})_{n\times n}$

$Q(\lambda)$ 退化 抛物型

$Q(\lambda)$ 不退化，不正负定，且矩阵中特征值 $n-1$ 个同号，1个异号 双曲型

$Q(\lambda)$ 与以上都不同（超双曲型）

几类典型方程：一维弦振动方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$

Page.4

（热传导、波动、位势）n维波动方程 $u_{tt}-a^2\Delta u=f(\vec{x},t)$ → 双曲型，$\Delta u=u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_nx_n}$

Poisson方程/位势方程 $-a^2\Delta u=f(x)$ → 椭圆型.

三维热传导方程 $u_t-a^2\Delta u=f(x,y,z,t)$

n维热传导方程 $u_t-a^2\Delta u=f(\vec{x},t)$ → 抛物型

* 注意分类讨论

Q.2 Chapter 1 二阶方程的化简 & 求通解 (33% 概率 10′)

A.2 二阶方程的化简：(双曲)

step.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$ *2 *3 注意符号

step.2 左右积分，写出 $\varphi_1(x,y) = C_1$，$\varphi_2(x,y) = C_2$

step.3 作变换 $\xi = \varphi_1(x,y)$，$\eta = \varphi_2(x,y)$，得到标准形式 *1

$u_{\xi\eta} = A u_\xi + B u_\eta + Cu + D$.

Step.0. 判断方程种类

Step.1. 求解特征方程

Step.2. 找出变换 ξ, η.

Step.3. 作出变换.

Step.4. 求出通解.

抛物型 step.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ → $dy = \frac{a_{12}}{a_{11}} dx \Rightarrow y = \frac{a_{12}}{a_{11}} x + C$.

step.2 $\boxed{\text{左右积分}}$ 写出 $\varphi_1(x,y) = C_1$，再任取与 φ_1 无关的 $\varphi_2(x,y) = C_2$

step.3 作变换 $\xi = \varphi_1(x,y)$，$\eta = \varphi_2(x,y)$ 标准形式

$u_{\eta\eta} = A u_\xi + B u_\eta + Cu + D$.

椭圆型 step.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{+b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha(x,y) \pm i\beta(x,y)$

step.2 左右积分，写出 $\varphi_1(x,y) \pm i\varphi_2(x,y) = C_\pm$

step.3 作变换 $\xi = \varphi_1(x,y)$，$\eta = \varphi_2(x,y)$ 标准型式

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = A u_\xi + B u_\eta + Cu + D$.

*1 ξ, η 化原方程为标准形式：$a_{11}^* u_{\xi\xi} + 2a_{12}^* u_{\xi\eta} + a_{22}^* u_{\eta\eta} + b_1^* u_\xi + b_2^* u_\eta + c^* u = f^*$

(不用这个 ×) $\begin{cases} a_{11}^* = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 \\ a_{22}^* = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \end{cases}$

? a_{ij} 中有 x, y 的情况 正常计算即可

(用这个 O) $\begin{cases} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \end{cases}$ *4

*2. 标准写法应该为先写出对应的方程 e.g. $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} = 0 \rightarrow dy^2 - 2dxdy + 3dx^2 = 0$

*3 Step 0. 先判断一下是什么方程.

*4. $u_{xx} = \xi_x(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \eta_x(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x)$

其余类似

* 求通解一般都是双曲型 $u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u = f(\xi) + g(\eta)$

Q 3. Chapter 2 特征展开法 & 分离变量法 (10')

A.3. 分离变量法 (课本方法，老师方法在下一页)

step.1 分离变量：令 $u(x,y) = X(x)Y(y)$，代入原方程 Page.44

得到一种形式 $A(X(x)) = B(Y(y))$ A, B是某种算子

e.g. $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)}$

某个常数，可自取

step.2. 上述 $A(X(x))$ 只与 x 有关，$B(Y(y))$ 只与 y 有关，则 $A(X(x)) = B(Y(y)) = \lambda$

得到关于 x, y 的方程组

e.g. $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) - y Y(y) = 0 \end{cases}$

step.3. 结合边值条件，得到特征值问题

e.g. $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$

step.4 解特征值问题*，得到一系列特解 $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$

由叠加原理得到 $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$

* 解特征值问题（解常微分方程） Page.34 全部情况 Page.34

标准型式 → $\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l \\ u \text{ 在 } 0 \text{ 与 } l \text{ 的边界条件} \end{cases}$

常见情况：

Remember. →

- $u(0) = u(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $u_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}$
- $u(0) = u'(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$ $u_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$
- $u'(0) = u(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2$ $u_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x$
- $u'(0) = u'(l) = 0$: $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ $u_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}$

求解特征值问题： Step.1. (一般特征值都大于0：$\lambda > 0$) 证明见 Page.32. 2.3.1

Step.2. 对方程写出通解：(齐次常微分方程的通解)

Step.3. 根据已知边值条件求解通解中待定系数.

A.3 特征展开法　step.1 写出原方程对应的特征值问题 *

e.g. $\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$

step.2 解特征值问题得到特征函数系

e.g. $\{\sin \alpha_n x\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n = n\pi/l$

初值条件

step.3 将原方程中 $u(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 按特征函数系展开

step.4 将展开式代入到原方程中(和初值条件)

由特征函数系正交性得出问题的一系列特解

(中间要解常微分方程)

分离变量法

(老师的方法)

step.1 分离变量，同前面

为了使特征值问题

是 $X''+\lambda X=0$

e.g. $u_{tt}=a^2u_{xx} \rightarrow \frac{X''}{X}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}=-\lambda$　$\begin{cases} u(0,t)=u(l,t)=0 \\ u(x,0)=x(l-x) \\ u_t(x,0)=0 \end{cases}$

step.2 解特征方程，同前面

e.g. $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases} \Rightarrow X_n=\sin\alpha_n x$, $\alpha_n=\frac{n\pi}{l}$, $\lambda_n=\alpha_n^2$

step.3 写出形式解：T_n 无法直接由特征方程解出时

e.g. $\begin{cases} T''+\lambda a^2 T=0 \\ \cancel{T(0)=x(l-x)} \\ \cancel{T'(0)=0} \end{cases} \Rightarrow T_n(t)=C_n\cos a\alpha_n t + D_n \sin a\alpha_n t$

$u(x,0)$

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} X_nT_n = \sim$

step.4 确定形式解中的系数：利用初值条件

Page.44. 类似. →

e.g. $\begin{cases} u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\cdot T_n(0) = x(l-x) \\ u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)\,T_n'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_n=\sim \\ D_n=\sim \end{cases}$

step.5 化简 $u(x,t)$

求解过程常用到：

$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\varphi(x)=f(x)$

多分部积分

$\|\varphi\|_2^2=\int_a^b \varphi^2(x)\,dx$

$\Rightarrow C_n=\frac{1}{\|\varphi(x)\|_2^2}\int_0^l \varphi(x)f(x)\,dx$

e.g. $\varphi(x) = \sin \alpha x$ 时

$$\|\varphi(x)\|_2^2 = \int_0^l \varphi^2(x)\,dx$$

$$= \int_0^l \sin^2 \alpha x\,dx$$

$$\int_0^l \sin^2 \alpha x + \int_0^l \cos^2 \alpha x = l$$

相等

则 $\int_0^l \sin^2 \alpha x = \frac{l}{2}$

A.3. 非齐次边界条件的处理 (仅边界条件齐次化)

$u(0,t)=u_1(t)$, $u(l,t)=u_2(t)$: $u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{l}[u_2-u_1]x+u_1$

$v(x,t)$ 代入满足齐次边界条件

$u(0,t)=u_1$, $u_x(l,t)=u_2$: $u(x,t)=v(x,t)+u_2x+u_1$

$u_x(0,t)=u_1$, $u(l,t)=u_2$: $u(x,t)=v(x,t)+u_1(x-l)+u_2$

较为难以计算

(考察概率不大)

…… Page.47 全部情况.

$u_x, u \longrightarrow Ax+B$

$u, u \longrightarrow Ax+B$

$u_x, u_x \longrightarrow Ax^2+Bx$

△ 自己求: Step.1. $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$

Step.2. $w(0,t)=u_1(t)$, $w(l,t)=u_2(t)$ (依初值情况而定)

Step.3. $w(x,t)=A(t)x+B(t)$ (依初值情况而定)

代入解出 $A(t)$ & $B(t)$

边界条件与右端同时齐次化: ＊要求方程右端与边界条件都与t无关

Step.1. $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$, 代入方程

e.g. $u_{tt}-a^2u_{xx}=A \longrightarrow v_{tt}-a^2v_{xx}=\underbrace{a^2w''+A}_{=0}$ $(u(0,t)=0, u(l,t)=B)$

Step.2. 取 w 使得方程齐次:

e.g. $\begin{cases} a^2w''+A=0 \\ w(0)=0, w(l)=B \end{cases} \Rightarrow w(x)$

Step.3. 同时 $v(x,t)$ 满足齐次方程 正常求解, $u(x,t)=v(x,t)+w(x)$

仅齐次化方程右端: ＊运用常数变易法 (齐次化原理)

常微 → $\begin{cases} z''+bz'+cz=f \\ z(0)=z'(0)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} w''+bw'+cw=0 \\ w(0,\tau)=0, w'(0,\tau)=f(\tau) \end{cases}$ 解 w

有 $z(t)=\int_0^t w(t-\tau,\tau)d\tau$

偏微 (初值) → e.g. $\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx}+x \\ u(0,t)=u_x(l,t)=0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} w_{tt}=a^2w_{xx} \\ w(0,t)=w_x(l,t)=0 \\ w(x,\tau)=0, w_t(x,\tau)=x \end{cases}$

$u(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$

双曲型方程齐次化原理：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), & 0<x<l,\ t>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t\geq 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0\leq x\leq l \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t w(x, t-\tau; \tau)\, d\tau.$$

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0 \\ \boxed{w(x,0;\tau) = 0,\ w_t(x,0;\tau) = f(x,\tau)} \end{cases}$$

$w(x,\tau)=0$, $w_t(x,\tau) = f(x,\tau)$

* 注意 w 与 τ 有关系 △

w 的参数也与 τ 相关

e.g. w 通解 $C_1(\tau)e^{k_1 x} + C_2(\tau)e^{k_2 x} \cdots$

抛物型方程齐次化原理：

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \int_0^t w(x, t-\tau; \tau)\, d\tau$$

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,t;\tau) = w(l,t;\tau) = 0 \\ \boxed{w(x,0;\tau) = f(x,\tau)} \end{cases}$$

$w(x,\tau) = f(x,\tau)$ *初值从 τ 开始.

（与课本不同）

* 注意 $w(x,t,\tau)$ 中 t 要以 $(t-\tau)$ 替换

习题4.反馈：偏微分方程亦可像常微分方程一样处理方程&初值非齐次：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} \\ v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

(Fourier 法求解)*

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t) \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

(齐次化原理)

$$\begin{cases} m_{tt} = a^2 m_{xx} \\ m(x,\tau) = 0, \quad m_t(x,\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$$

(Fourier 法求解)*

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

* Chapter 4处直接套 d'Alembent 公式即可

Q.SPECIAL 常微分方程的通解

A、常系数二阶齐次 $ay''+by'+cy=0$ ⟶ (特征方程) $ak^2+bk+c=0$

i. $k_1\neq k_2$, $\Delta>0$: $y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$ *

ii $k_1=k_2=k$, $\Delta=0$: $y(x)=(C_1+C_2x)e^{kx}$

iii $k_1=\mu+i\nu$, $k_2=\mu-i\nu$, $\Delta<0$: $y(x)=e^{\mu x}(C_1\cos\nu x+C_2\sin\nu x)$

△ Other . Page. 26. Euler方程解.

常系数二阶非齐次 $\begin{cases} y''+by'+cy=f \\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x''+bx'+cx=0 \\ x(0)=y_0,\ x'(0)=y_1 \end{cases} + \begin{cases} z''+bz'+cz=f \\ z(0)=0,\ z'(0)=0 \end{cases}$$

(齐次)

$$z(t)=\int_0^t w(t-\tau,\tau)\,d\tau$$

$$\begin{cases} w''+bw'+cw=0 \\ w(0;\tau)=0 \quad w'(0;\tau)=f(\tau) \end{cases}$$

(齐次)

*常见的: $\begin{cases} u'+au=0 \\ u(0)=\varphi \end{cases}$ → $u=e^{-ax}\varphi$

就这个

Other. 常系数一阶通解: $y'+p(x)y=0$ → 要齐次

$$\Longrightarrow y=Ce^{-\int p(x)dx}$$

e.g. $T'+\lambda T=0$

$$\Rightarrow T_n=C_ne^{-\lambda_n t}$$

* 解系数时会遇到 (分离变量法)

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\varphi_n(x) \Rightarrow C_n=\frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

A.4. Fourier 变换法：Step.1. 将原方程进行 Fourier 变换 *

(对 x)

e.g. $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=0 & x\in\mathbb{R} \end{cases}$　令 $\begin{cases} \hat{w}(\lambda,t) = \mathcal{F}[u(\cdot,t)](\lambda) \\ \hat{f}(\lambda,t) = \mathcal{F}[f(\cdot,t)](\lambda) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{w}_t = a^2 (i\lambda)^2 \hat{w} + \hat{f}(\lambda,t), & \lambda\in\mathbb{R}, t>0 \\ \hat{w}(\lambda,0)=0 & ,\lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$

step.2. 求解变换后的常微分方程问题

e.g. $\hat{w}(\lambda,t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-s)} \hat{f}(\lambda,t)\,ds$

step.3. 进行 Fourier 逆变换

e.g. $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{w}(\cdot,t)](x)$

$= \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t-s}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-s)}} f(y,s)\,dy\right] ds$

Fourier 变换性质

important.

1. $\mathcal{F}[af+bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
2. $g(x) = f(ax)$，$a>0$ 时：$\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{a})$
3. $g(x) = f(x+b)$；$\mathcal{F}[g](\lambda) = e^{i\lambda b}\mathcal{F}[f](\lambda)$
4. $g(x) = f'(x)$；$\mathcal{F}[g](\lambda) = i\lambda\mathcal{F}[f](\lambda)$
5. $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy$：$\mathcal{F}[g](\lambda) = \frac{1}{i\lambda}\mathcal{F}[f](\lambda)$
6. $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\cdot\hat{g}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}[\hat{g}]$.

* $\hat{u}(\lambda,t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t) e^{-i\lambda x}\,dx$　　$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\lambda,t) e^{ix\lambda}\,d\lambda$ △

$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-i\lambda y}\,dy$　　$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{ix\lambda}\,d\lambda$

e.g. $u_t = a u_x \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u} e^{ix\lambda}\,d\lambda\right) = a\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u} e^{ix\lambda}\,d\lambda\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \underline{\frac{d}{dt}(\hat{u}\cdot e^{ix\lambda})}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \underline{\frac{d}{dx}(a\hat{u} e^{ix\lambda})}\,d\lambda$

$\Rightarrow \hat{u}_t = a\cdot(i\lambda)\hat{u}$

* 实际变换时考虑非齐次项：$u_t \to \hat{u}_t$，$u_x \to i\lambda\hat{u}$，$u_{xx} \to (i\lambda)^2\hat{u}$ ……

$u(x,t) = x \rightarrow u e^{-i\lambda x} = x\cdot e^{-i\lambda x}$

$\rightarrow \int_{\mathbb{R}} u e^{-i\lambda x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} x\cdot e^{-i\lambda x}\,dx \rightarrow \hat{u} = \int_{\mathbb{R}} x\cdot e^{-i\lambda x}\,dx$

Fourier 逆变换：多用位移性质: $\mathcal{F}[f(x+b)] = e^{-ib\lambda}\mathcal{F}[f(x)]$

$$f(x+b) = \mathcal{F}^{-1}[e^{+ib\lambda}\hat{f}(\lambda)]$$

& 卷积性质 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = f*g$

other. $\mathcal{F}^{-1}[e^{-(a\lambda)^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)$

熟练使用6个性质.

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\lambda|}] = \frac{t}{\pi(t^2+x^2)}$$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt$$

Q.5. 对称延拓法 (10') 50%

A.5. 解决半无界问题：对称延拓法：

step.1. 写出对应函数的奇延拓 $F(x,t)$, $\Phi(x)$, $\Psi(x)$

e.g. $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) & x>0,\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x) & x\geq 0 \\ u(0,t)=0 & t\geq 0 \end{cases}$

作奇延拓：$F(x,t)=\begin{cases} f(x,t) & ,x\geq 0,\ t\geq 0 \\ -f(-x,t) & ,x<0,\ t\geq 0 \end{cases}$ $\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x) & ,x\geq 0 \\ -\varphi(-x) & ,x<0 \end{cases}$

$\Psi(x)=\begin{cases} \psi(x) & ,x\geq 0 \\ -\psi(-x) & ,x<0 \end{cases}$

step.2. 用 Fourier 法解出奇延拓的方程

e.g. $U(x,t)=\frac{1}{2}[\Phi(x+at)+\Phi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(y)dy+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}F(y,s)\,dy\,ds$

step.3. 将奇延拓代表函数原形化简代入，取 $x\geq 0$ 部分，即是原方程的解

e.g. $x\geq at$ 时 $x-at,\ x+at\geq 0$. $u(x,t)=U(x,t)=\cdots$

$0\leq x\leq at$ 时 $x-at<0,\ x+at>0$, $u(x,t)=\cdots$

* 偶延拓. $F(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x\geq 0 \\ f(-x,t), & x<0 \end{cases}$, $\Phi(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}$

* 关于奇偶延拓的选择：奇延拓：$u(0,t)=0$ 理解为过 0 点

偶延拓：$u_x(0,t)=0$ 理解为 0 点处斜率为 0

延拓法本质：将带有边值条件的偏微分方程化掉

变成只有初值的情况（同时满足 $x\in\mathbb{R}$）

则可以使用 Fourier 法。

这个括号超好看！

Q.6 d'Alembert 公式 (10') N.B.可以套公式

A.6. 针对一维波动方程 (特征线法)

初值问题,可用 Fourier 法解

Step.1. 作变量变换 (类似 Chapter 2)

e.g $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 & , x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), & x\in\mathbb{R}, t>0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \xi = x+at \\ \eta = x-at \end{cases}$

$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$

Step.2. 积分后代回原变量

就是方程的通解

e.g. $\iint u_{\xi\eta}\, d\xi\, d\eta = u = F(\xi) + G(\eta) \Rightarrow u(x,t) = F(x+at) + G(x-at)$

求出通解

Step.3 将通解代入初值条件得到方程组

e.g. $\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ -aF'(x) + aG'(x) = \psi(x) \end{cases} \xrightarrow{左右积分} F(x) - G(x) = -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(y)\,dy + C$

非常常用 $\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy$ (d'Alembert 公式)

* 非齐次情况下* ($u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$), 解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$$

* 变换的选取非常重要, 称为特征变换

偏微分方程 $\longrightarrow$ 特征方程(常微分方程) $\xrightarrow{解}$ 特征线 (偏微分数值解法 Chapter 6 讲过)

可以使用齐次化原理、之后再用齐次的 d'Albert 公式.

Q.7 高维波动方程求解 (10') 33%

A.7 三维波动方程：球平均法

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}), \ u_t(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}) \end{cases}$$

Poisson 公式

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{S_{\vec{x}}^{at}} \frac{\varphi(\vec{y})}{t} dS_{\vec{y}} + \int_{S_{\vec{x}}^{at}} \frac{\psi(\vec{y})}{t} dS_{\vec{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\varphi(x_1 + at\sin\theta\cos\phi, x_2 + at\sin\theta\sin\phi, x_3 + at\cos\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} t\psi(x_1 + at\sin\theta\cos\phi, x_2 + at\sin\theta\sin\phi, x_3 + at\cos\theta)\sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

非齐次情况下 $u(\vec{x}, t) = \sim + \frac{1}{4\pi a^2}\int_{|\vec{y}| \le at} \frac{f(\vec{x} + \vec{y}, t - |\vec{y}|/a)}{|\vec{y}|} d\vec{y}$

$$= \sim + \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_1 + r\sin\theta\cos\phi, x_2 + r\sin\theta\sin\phi, x_3 + r\cos\theta, t - \frac{r}{a}) r\sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

二维波动方程：降维法

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y), \ u_t|_{t=0} = \psi(x, y) \end{cases}$$

Poisson 公式：

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_0^{at}\int_0^{2\pi} \frac{\psi(x + \rho\cos\theta, y + \rho\sin\theta)}{\sqrt{a^2t^2 - \rho^2}} \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_P^{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi \, d\eta$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{\Sigma_P^{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\xi \, d\eta$$

非齐次情况下：$u(x, y, t) = \sim + \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\int_{\Sigma_0^r} \frac{f(x + \xi, y + \eta, t - r/a)}{\sqrt{r^2 - \xi^2 - \eta^2}} d\xi \, d\eta \, dr$

$$= \sim + \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^{at}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \frac{f(x + \rho\cos\theta, x + \rho\sin\theta, t - r/a)}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dr$$

Q. SPECIAL. 适用性的讨论

A. 分离变量法可解的方程： 1. 初边值问题（初边值条件数与方程相关，确保特征方程可解）

2. x 是有界区域

3. 反正就是能分离出特征方程就是了，二元的几乎所有方程都行

e.g. $Au_{xx}+Bu_{tt}=0$

$Au_{xx}+Bu_{tt}+Cu_x=0$

$Au_{xx}+Bu_{tt}+Cu=0$

不过复杂方程分离出的特征方程也比较复杂。

右端且边值齐次 ← 4. 要方程齐次且边值齐次：$f(x,t)=0$，$u(0,t)=u(l,t)=0$

否则化齐次问题 Page. 47.

Fourier 法可解的方程： 1. 初值问题

2. x 在全范围上成立初值条件（否则延拓法）

3. 几乎任何方程都能用 Fourier 法，但是 Fourier 逆变换很难求

右端齐次 ← 4. 要方程齐次：$f(x,t)=0$.

否则齐次化原理 + 叠加原理

Green 函数讨论的方程：Dirichlet 条件的 Laplace 方程

齐次化 Summary.

$$\begin{cases} u_{xx} - a^2 u_{xx} = f(x,t) & \longrightarrow \text{右端非齐次} \\ u(0,t) = \varphi(x), \quad u(l,t) = \psi(x) & \longrightarrow \text{边值非齐次} \\ u(x,0) = u_1(t), \quad u_x(x,0) = u_2(t) & \longrightarrow \text{初值非齐次} \end{cases}$$

处理完之后可能变成仅右端

△ 仅右端非齐次 ⟶ 齐次化原理

△ 仅边值非齐次 ⟶ $w(0,t)=\varphi(x)$, $w(l,t)=\psi(x)$, $u = v + w$ 代入. Chapter. 2.6

△ 仅初值条件非齐次 ⟶ 分离变量法正常求解

△ 右端非齐次 + 边值非齐次 ⟶ ~~叠加原理拆分成2个，一个仅右端，一个仅边值~~.
同仅边值非齐次处理.

OR

△ 右端非齐次 + 初值非齐次 ⟶ 叠加原理 + 齐次化原理

△ 边值非齐次 + 初值非齐次 ⟶ 同仅边值非齐次处理

△ 三个都不齐次 ~~(这方程也太羞劝了)~~ ⟶ 同仅边值非齐次处理

* 总之：只要边值不齐次了，就要用代换法 (Page. 47) 先处理掉.
余下的就可以常规处理

中信银行 Visa Signature 信用卡

Q.8. Green 函数相关

A.8. Green 公式: 第一格林公式: $\int_\Omega v\Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{du}{dn}dS - \int_\Omega \nabla v\nabla u\,dx$ Page 106.

第二格林公式: $\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$.

(证明性质时经常用到, important)

球面平均值公式*: $u(0)=\frac{1}{|B_R(0)|}\int_{B_R(0)} u(z)\,dz$ ← 球平均公式

(填空5'×3)

$|B_R(0)| = \frac{w_n R^n}{n}$ $|\partial B_R(0)| = w_n R^{n-1}$.

$u(0)=\frac{1}{|\partial B_R(0)|}\int_{\partial B_R(0)} u(z)\,dS_z$ ← 球面平均公式

极值原理*: u 于 $\partial\Omega$ 上取得最大/最小值: $\max_{\bar\Omega}|u| = \max_{\partial\Omega}|u|$, 否则 $u\equiv C$

*球面平均值&极值原理都是调和函数的性质, 即 u 要在 Ω 中调和。

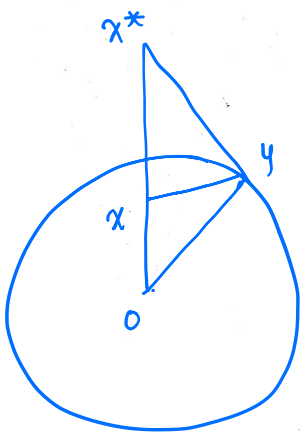
* Green 公式要求 $u,v\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$

* 位势方程 Neumann 边值问题解的"唯一性": $\begin{cases}-\Delta u = f(x)\\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x)\end{cases}$ 解到相差一个常数 ($u\in C^1(\bar\Omega)\cap C^2(\Omega)$)

逆平均值定理: $u\in C(\Omega)$, $\underset{\triangle}{\forall} B_R(x)\subset\Omega$, $u(x)=\frac{1}{|B_R(x)|}\int_{B_R(x)}u(z)\,dz$

⇒ u 于 Ω 内调和.

Page 126~128 其他定理 (Harnack不等式)



相似三角型

$\frac{|y-x|}{|y-x^*|} = \frac{|0x|}{|0y|} = \frac{|x|}{R}$

A.8 求区域上的Green函数

Step.1 对区域中任意一点 x，选取其镜像点(反演点)*1 x^*

e.g. 上半空间 $x=(x',x_n)$，取 $x^*=(x',-x_n) \overset{def}{=} (x',x^*)$

球空间：x. 取 $x^* \triangleq \frac{R^2}{|x|^2}x$ 使之后计算A时更加方便

step.2 写出对应 $v(x,y)$ 的形式解。

$v(x,y)=F(\Gamma(x,y))$，即 $v(x,y)$ 是 $\Gamma(x,y)$ 的某种形式

e.g. $v(x,y)=A\Gamma(x,y)$，A是常数或 x,y 的某种形式

其中 $\Gamma(x,y)$ 要依据空间不同选取不同的形式*1

step.3 在 $\partial\Omega$ 上成立 $-\Gamma(x,y)=v(x,y)$*，解出形式解中待定部分

指y是 $\partial\Omega$ 上的点，平时y是 R^3 上任意点

e.g. 上半空间：$-\Gamma(x,y)|_{y_n=0}=v(x,y)|_{y_n=0} \Rightarrow A=-1$

球空间. $-\Gamma(x,y)|_{y\in\partial B_R(0)}=v(x,y^*)|_{y\in\partial B_R(0)} \Rightarrow A=-\frac{R}{|x|}$

step.4 $G(x,y)=\Gamma(x,y)+v(x,y)$，$y\in\bar{\Omega}$ 即为Green函数 $\longrightarrow$ 包含 x^*

*1镜像点(反演点)的取法依区域形状而定，只要方便地用 x 表示出即可

* $$\Gamma(|x|)=\begin{cases}\frac{1}{(n-2)\omega_n}|x|^{2-n}, & n\geq 3\\ -\frac{1}{2\pi}\ln|x|, & n=2.\end{cases}$$

其中 ω_n 是 R^n 中单位球面表面积 $\omega_2=2\pi$，$\omega_3=4\pi$

$\Gamma(x,y) \overset{def}{=} \Gamma(|x-y|)$

* 得到Green函数后即可计算相应空间上Dirichlet边值问题的解

$$\begin{cases}-\Delta u=0, & x\in\Omega\\ u=\varphi, & x\in\partial\Omega\end{cases} \Rightarrow u(x)=-\int_{\partial\Omega}\varphi(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}dS_y, \quad x\in\Omega.$$

过程中需要计算 $\frac{\partial G}{\partial n_y}$，Ref. Page.118.

*1：v 的形式要让 $-\Gamma(x,y)=v(x,y)$ 好计算一些

e.g. $-\Gamma(x,y)=\frac{1}{2\pi}\ln|y-x|=v(x,y)=F(\Gamma(x^*,y))$

此时 $v(x,y)$ 取 $\frac{1}{2\pi}\ln q|y-x^*|$ 便于计算.

About $\frac{\partial G}{\partial n_y}$ 的计算. 可以只记结论.

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{R^2-|x|^2}{\omega_n R}\frac{1}{|y-x|^n}$$ 球空间

$$\frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{2}{\omega_n}\frac{x_n}{(\underbrace{|y'-x'|^2}+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}$$ 上半空间.

n维上 $x=(x_1, x_2 \cdots, x_n)$

$x'=(x_1, x_2 \cdots, 0)$

Test. 15′ (3′ * 5) 第一章概念

方程导出
定解问题、适定性问题
方程分类

选择
→ 典型方程判断
→ 边界条件种类判断
→ 方程种类判断 *2 (二元 & 多元)
→ 稳定、适定 ?

15′ (5′ * 3) 计算

填空
→ 球面平均值定理 Chapter 5 (作业类型)
→ 极值原理计算极值 Chapter 5
→ ?

10′ 分离变量法 Chapter 2.

10′ Fourier 法 Chapter 3.

10′ d'A 法解非齐次方程 (叠加原理 & 齐次化原理)
Chapter 4.

10′ 化简方程并写出通解 Chapter 1 作业类型

高阶振动方程求解 Chapter 4

Green 函数求边值问题 Chapter 5 作业类型

10′ ?

20′ (10′ * 2) 给出2个方程与其解.

正确则证明，错误则求解.

いち ご いち え

一期一会