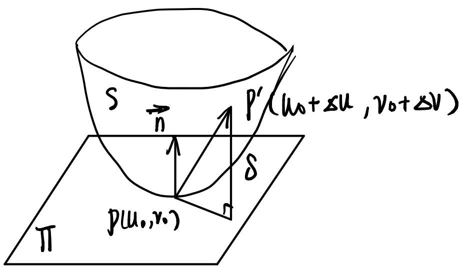
第四章. 曲线的第二基本型.

§4.1 第二基本形.

Π: $r(u,v)$ 切平面 $n=\dfrac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$ (单位法向量)

刻画曲面在一点的弯曲程度:



$$\delta = PP' \cdot n$$
$$= \frac{1}{2}\left(L(\Delta u)^2 + 2M\Delta u \cdot \Delta v + N(\Delta v)^2\right) + o(\Delta u^2 + \Delta v^2)$$

有 $L = r_{uu} \cdot n$ 或 $L = -r_u \cdot n_u$

$M = r_{uv} \cdot n$ 　　$M = -r_u n_v = -r_v n_u$

$N = r_{vv} \cdot n$. 　　$N = -r_v n_v$

$$\mathrm{II} = d^2 r \cdot n = -dr \cdot dn = L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2$$

第二基本形式同I, 与容许的参数变换无关.

$\square$: $L\, du^2 + 2M\, du\, dv + N\, dv^2$

$$= (du\ dv)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du\ dv)\, J \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} J^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$$= (d\tilde{u}\ d\tilde{v})\begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\tilde{u} \\ d\tilde{v} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

几何意义: $\mathrm{II} \sim 2\delta$ 　$\boxed{\text{问题勿!!}}$

ex. 平面与圆柱的第二基本型

S_1: $r_1 = (u, v, 0)$ 　$n_1 = (0,0,1)$ 　$dr = (du, dv, 0)$

$\mathrm{I}_1 = dr \cdot dr = du^2 + dv^2$; $\mathrm{II}_1 = -dr \cdot dn = 0$.

S_2: $r_2 = (a\cos\frac{u}{a}, a\sin\frac{u}{a}, v)$

$r_u = (-\sin\frac{u}{a}, \cos\frac{u}{a}, 0)$ 　$r_v = (0, 0, 1)$

$$n = r_u \times r_v / |r_u \times r_v| = \left(\cos\frac{u}{a}, \sin\frac{u}{a}, 0\right)$$

$$r_{uu} = \left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}, 0\right) \qquad r_{uv} = r_{vv} = 0.$$

则：$E = r_u \cdot r_u = 1 \quad F = r_u \cdot r_v = 0 \quad G = r_v \cdot r_v = 1$

$L = r_{uu} \cdot n = -\frac{1}{a} \qquad M = N = 0.$

有 $\mathrm{I} = du^2 + dv^2 \qquad \mathrm{II} = -\frac{1}{a}(du)^2$

结论：S_1与S_2有相同的I型，则可以保长对应。

II型不同的体现即是几何直观不同。

定理1.1 $\mathrm{II} \equiv 0 \Leftrightarrow$ 平面 （类比曲线挠率为0）。

□. $\Rightarrow$）. $r = r(u,v)$ $\mathrm{II} \equiv 0 \Rightarrow L = -r_u \cdot n_u = 0 \quad M = -r_u n_v = 0 \quad N = -r_v n_v = 0$

n有 $n_u \cdot n = 0$，$n_v \cdot n = 0$.

$$\left.\begin{aligned} n_u \cdot r_u &= 0 \\ n_u \cdot r_v &= 0 \end{aligned}\right\} n_u\text{与}r\text{共线} \qquad \text{同理 } n_v\text{与}r\text{共线}$$

故n_u, n_v都是零向量. ∴

$dn = n_u du + n_v dv = 0 \qquad \boxed{dr \cdot n = 0}$ （判断平面）

则 $d(r \cdot n) = dr \cdot n + r \cdot dn = 0 \qquad \boxed{r \cdot n = C.}$ ▨

定理1.2 球面上的曲面：$\mathrm{II} = c\ \mathrm{I}$ （P139）.

§4.2. 法曲率.

S: $r(u,v)$，S上的曲线 C: $u=u(s)$, $v=v(s)$ 即 $r=r(u(s),v(s))$.

对C有: $\alpha(s) = r_u \dfrac{du}{ds} + r_v \dfrac{dv}{ds}$

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = k\beta = r_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2r_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + r_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + r_u\frac{d^2u}{ds^2} + r_v\frac{d^2v}{ds^2} \quad \text{(曲率向量)}.$$

曲率向量在n上的正交投影为

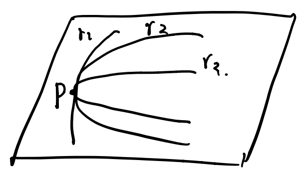
$$k_n = \frac{d\alpha}{ds}\cdot n = \sim = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

k_n即是S上曲线C的法曲率

$k_n = k\cdot\cos\theta$，θ是β与n的夹角

由上述内容易知: 曲面上在一点相切的曲线有相同的法曲率

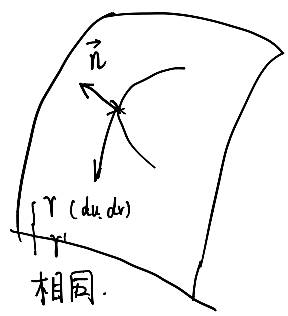
进而: k_n是关于切方向的函数



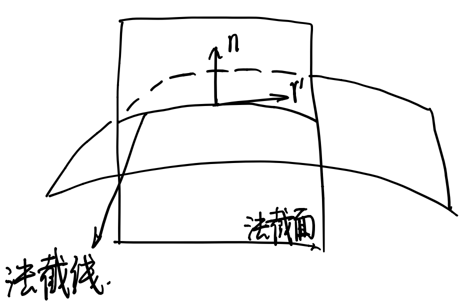
$$|r'(s)|^2 = E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad ds^2 = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2 = \mathrm{I}$$

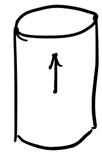
$$k_n = \frac{L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2}{ds^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}.$$



$k_n = f(du, dv)$.



球面：$k_n=-\frac{1}{R}$，柱面：$k_n=-\frac{1}{a}\cos^2\theta$，平面：0.



$k_n=f(\theta)$　θ就是切线方向的意思，如：取$\theta=\frac{\pi}{2}$，$k_n=0$，说明曲线不弯曲

取$\theta=0$，$k_n=-\frac{1}{a}$ 恰合球面.

$$k_n(\theta)=\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}+\frac{N}{G}\right)+\left[\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)\right)^2+\left(\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\cos 2(\theta-\theta_0)$$

其中 $\cos 2\theta_0=\frac{1}{2A}\left(\frac{L}{E}-\frac{N}{G}\right)$；$\sin 2\theta_0=\frac{M}{A\sqrt{EG}}$

定理2.2 法曲率必在彼此正交的2个切方向上取到最大/小值.（注意是存在）.

记最大小的2个方向为主方向，对应主曲率.

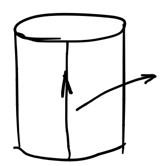
对上述 $k_n(\theta)$. $\theta=\theta_0$ 是最大值：$k_n(\theta_0)=k_1$

$\theta=\theta_0+\frac{\pi}{2}$ 是最小值：$k_n(\theta_0+\frac{\pi}{2})=k_2$.

有 $k_n(\theta)=k_1\cos^2(\theta-\theta_0)+k_2\sin^2(\theta-\theta_0)$.　Eular公式

渐近方向：$k_n=0$ 的切方向.

渐近曲线：S上的一条曲线，每一点切方向都是渐近方向.



就是一条

渐近方向代数上是二次方程的解：

$$\mathrm{II}=L(du)^2+2M\,du\,dv+N(dv)^2=0$$

$\Delta=LN-M^2$：① <0：2个　② $=0$：1个　③ >0 无

因此得出：定理2.3：参数曲线网是渐近曲线网 $\Longleftrightarrow L=N=0$.

另：定理2.4：渐近曲线要么直线，要么它的 $\alpha\times\beta$ 恰为曲面切面

□：$k_n=k\cdot\cos\theta$，$\theta=\angle\beta,n$. ▣

§4.3. Weingarten 映射与主曲率. （求主方向与主曲率的铺垫）.

Gauss 映射：$g(r(u,v)) = n(u,v)$. $S \to \Sigma : |r| = 1$

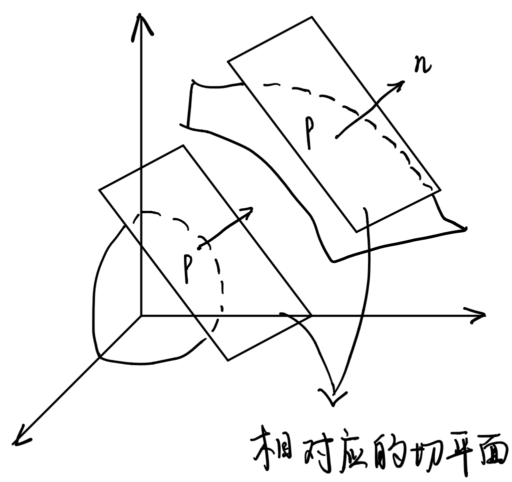
类似曲线的映射（忘了叫啥了）.

Gauss 映射有以下性质：$g_* : T_pS \to T_{g(p)}\Sigma$

$g_*(r_u) = n_u$; $g_*(r_v) = n_v$

Weingarten 映射：$W = -g_* : T_pS \to T_pS$.

~~温恩戈尔吞映射~~



*由于是映射到单位球上. 故有参数变化待考虑 $W(dr) = \lambda dr$.

应用：(1) $\mathrm{II} = W(dr) \cdot dr = -dn \cdot dr$.

(2). (u,v) 点的2个切方向 dr, δr 有 $W(dr) \cdot \delta r = dr \cdot W(\delta r)$.

且有 $k_n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \lambda$. （神奇的结论!）

Eular 公式：p 点正交的主方向单位向量 $e_1 e_2$. 对应主曲率 $k_1 k_2$.

则 p 处任一切向量 $e = \cos\theta \, e_1 + \sin\theta \, e_2$.

有 $k_n(\theta) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$

*特殊点：平点与圆点

曲率线：曲率线C任一点切向量都是S主方向

$\Longleftrightarrow$ S沿C的法线构成可展曲面.

§4.4. 计算主方向与主曲率.

平均曲率 $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=\frac{1}{2}\frac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$

总曲率(Gauss 曲率) $K=k_1k_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$

$k_1=H+\sqrt{H^2-K}$ $\quad$ $k_2=H-\sqrt{H^2-K}$.

定理4.2. 参数曲线是彼此正交的主方向 $\Leftrightarrow F=M=0$.

此时 $k_1=L/E$ (u), $k_2=N/G$ (v).

$$\mathrm{I}=E\,du^2+G\,dv^2$$

$$\mathrm{II}=k_1E\,du^2+k_2G\,du^2$$

... 第三基本形式 $\mathrm{III}=g^*\mathrm{I}_0$. (P165) 八成不考吧.

终了 ▨

主曲率:

$$\begin{vmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2 \text{ 即 } k_1, k_2$$

$$\begin{cases} (L-\lambda E)\delta u+(M-\lambda F)\delta v=0 \\ (M-\lambda F)\delta u+(N-\lambda G)\delta v=0 \end{cases} \Rightarrow \delta u \quad \delta v$$

即主方向