2.1.（线性方程组）Gauss 方法.

1. Gauss 消去法：消元回代　$\det A = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \cdots a_{nn}^{(n-1)}$
2. Gauss 列主元消去法：选取列主元 $\max\limits_{k\le i\le n} |a_{ik}^{(k-1)}|$　$\det A = a_{i1} \cdots a_{i_n,n}^{(n-1)}$
3. Gauss 按比例列主元消去法：选取列主元 $\max\limits_{k\le i\le n} \left|\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{S_r}\right|$，$S = \max$（行值）
4. Gauss - Jordan 消去法：消元无回代.

2.2. 直接三角分解法.

$$Ax=b \Longrightarrow \underbrace{A^{(n-1)}}_{\text{上三角矩阵}} x = b^{(n-1)}$$

其中 $A^{(n-1)} = L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdots L_1 A$

（Gauss 消去法）变换矩阵 $L_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \underbrace{L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1}}_{L} \underbrace{A^{(n-1)}}_{U} = LU$$

L 单位：Doolittle
U 单位：Crout
均为唯一分解

$\det A = l_{11} \cdots l_{nn} \cdot u_{11} \cdots u_{nn}$

$\Rightarrow A = LDR$，L, R均单位, D对角　$\det A = d_1 \cdots d_n$.

e.g.（Crout 方法）

$$L = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} l_{11} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{matrix}} & \ddots & \\ & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{u_{11} \ \cdots \ u_{1n}} \\ \ddots \quad \vdots \\ u_{nn} \end{pmatrix}$$

step 1.

$\Rightarrow LU = A$ 推导即可

$u_{11}, u_{22} \cdots u_{nn} = 1$

△ 紧凑的 Crout 方法、选列主元的 Crout 方法.

e.g. Cholesky 分解 [矩阵 A 实对称正定]：$A=L\cdot L^T$

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

step 1

e.g. LDL^T 分解 [矩阵 A 实对称正定]：$A=LDL^T$

$$L=\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

step 1.

$(l_{11}, l_{22}, \cdots l_{nn}=1)$

e.g. 追赶法 [矩阵 A 三对角，且满足优对角条件]：$A=LU$

$$L=\begin{pmatrix} p_1 & & \\ a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & a_n & p_n \end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix} 1 & q_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & q_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

step 2　step 1.　step 3.

2.3. 行列式 & 逆矩阵

$A=[a_{ij}]$，行列式 $\det A$，逆矩阵 A^{-1}

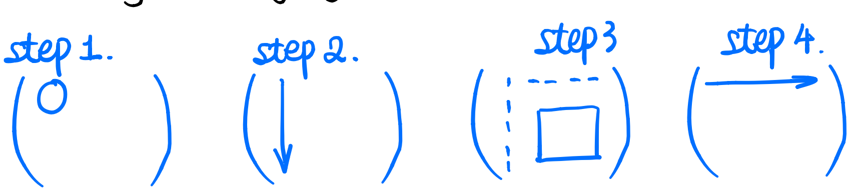
e.g. Gauss-Jordan 消去法求逆矩阵

(1). $a_{kk}=c=\frac{1}{a_{kk}}$

(2). $a_{ik}=-c\cdot a_{ik}$，$i=1\sim n, \neq k$

(3). $a_{ij}=a_{ij}+a_{ik}\cdot a_{kj}$，$i,j=1\sim n, \neq k$

(4). $a_{kj}=c\cdot a_{kj}$，$j=1\sim n, \neq k$



#2.4. 向量与矩阵的范数.

$x=(x_1\cdots x_n)^T\in R^n(C^n)$; $\|x\|$: $\begin{cases} ① 非负：\|x\|>0 \\ ② 齐次：\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\| \\ ③ 三角不等式：\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \end{cases}$

Define. 距离：$d(x,y)=\|x-y\|$

Define. l_p范数（p-范数）：$\|x\|_p=f_p(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

↳ 常见：l_1范数，l_2范数，l_∞范数（$\|x\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|x\|_p$）

又叫作 Euclid范数

$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$（内积） 即有 $\|x\|_2=\sqrt{(x,x)}$.

（另外，西空间是复 Euclid 空间）

* 性质：$\|x\|_\infty=\max_{1\leq k\leq n}|x_k|$

$p\to\infty$ 时

Prove. $\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|x_{max}|^p\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{x_{max}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $\qquad \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i}{x_{max}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=1$

* Cauchy - Schwarz 不等式：$|(x,y)|\leq\|x\|_2\|y\|_2$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

R^n中范数性质：

①. $\|0\|=0$

②. $\forall x,y\in R^n$. $\big|\,\|x\|-\|y\|\,\big|\leq\|x-y\|$

Prov. $\left.\begin{aligned}\|x\|&=\|x+y-y\|\leq\|y\|+\|x-y\|\\ \|y\|&=\|y+x-x\|\leq\|x\|+\|x-y\|\end{aligned}\right\}$ ✓

③. $\forall$ l_p范数都关于l_2一致连续：

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, $\|y-x\|_2<\delta$时 $|\,\|y\|_p-\|x\|_p\,|<\varepsilon$

Prov. $\|x\|_p = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\|_p \le M\|x\|_2$ ← Cauchy-Schwarz

$M = \left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow |\,\|y\|_\alpha-\|x\|_\alpha\,| \le M\|y-x\|_2$ ✓

④ R^n中一切向量范数等价： $\forall \|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$. $\exists C_1, C_2 \in R$

s.t. $C_1\|x\|_\beta \le \|x\|_\alpha \le C_2\|x\|_\beta$, $\forall x\in R^n$.

2.4.2 矩阵范数

$\|A\|$：

① $\|A\|>0$

② $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$

③ $\|A+B\| \le \|A\|+\|B\|$

④ $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$ （又叫作相容条件）

Define 矩阵范数$\|\cdot\|_\beta$与向量范数$\|\cdot\|_\alpha$相容：

$\forall A\in R^{n\times n}$, $x\in R^n$, 有 $\|Ax\|_\alpha \le \|A\|_\beta\cdot\|x\|_\alpha$

The. $\forall \|\cdot\|_\beta$. 至少有一个$\|\cdot\|_\alpha$与之相容.

Prov. 假设 $\|x\|_\alpha = \|[x, 0, 0, \cdots, 0]\|_\beta$

$\|x\|_\alpha$是R^n范数且与$\|\cdot\|_\beta$相容.

Define. $\|A\|_\beta$ 从属于 $\|x\|_\alpha$: $\forall A\in R^{n\times n}$, $\exists x_0\in R^n$: $\|Ax_0\|_\alpha = \|A\|_\beta \|x_0\|_\alpha$

The. $\forall x\in R^n, A\in R^{n\times n}$, $\forall \|\cdot\|_\alpha$. $\|A\| = \max\limits_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\alpha$ 是从属于 $\|\cdot\|_\alpha$ 的矩阵范数。 称为算子范数.

Prov. 分条验证：1. $\|A\|$ 是矩阵范数. 2、满足从属性.

* 在上述 The. 中. $\|\cdot\|_\alpha$ 分别取 l_1, l_2, l_∞, 得到的算子范数：

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$, λ_1 是 A^TA 最大特征值. (又称谱范数)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(Frobenius 范数) $\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$R^{n\times n}$ 中矩阵范数性质：

① $\|0\| = 0$

② $\big|\,\|A\| - \|B\|\,\big| \le \|A-B\|$

③ $\|A\|_\alpha$ 关于 $\forall \|A\|_\beta$ 一致连续

④ $\forall \|A\|_\alpha, \|A\|_\beta$ 等价.

$R^{n\times n}$ 范数亦可推广至 $m\times n$ (类比) ...

Define. 谱半径：$\rho(A)=\max\limits_{i=1\sim n}|\lambda_i|$，$\lambda_i$是A的特征值.

The. 2.4.3 ~ 2.4.5 (Page. 70~71)

2.5 误差分析.

Define. 条件数 $Cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$

特别地：$Cond(A)_2 = K(A) = \|A\|_2\,\|A^{-1}\|_2$

$Cond(A)_\infty = \|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty$

性质：① $Cond(A)>0$　② $Cond(A)=Cond(kA)$

③ $Cond(A^{-1}) = Cond(A)$

④ $Cond(AB)\le Cond(A)\cdot Cond(B)$.

2种扰动情况：　$Ax=b$

1. 右侧扰动：　$A(x+\delta x)=b+\delta b$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le Cond(A)\cdot\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

(相对误差上界)

2. 左侧扰动：$(A+\delta A)(x+\delta x)=b$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\le\frac{Cond\,A\,(\|\delta A\|/\|A\|)}{1-Cond\,A\,(\|\delta A\|/\|A\|)}$$

（扰动影响大）

病态

线性方程组 $Ax=b$

（舍入误差大）

不是数值稳定的

良态

是数值稳定的

方程层面

方法层面