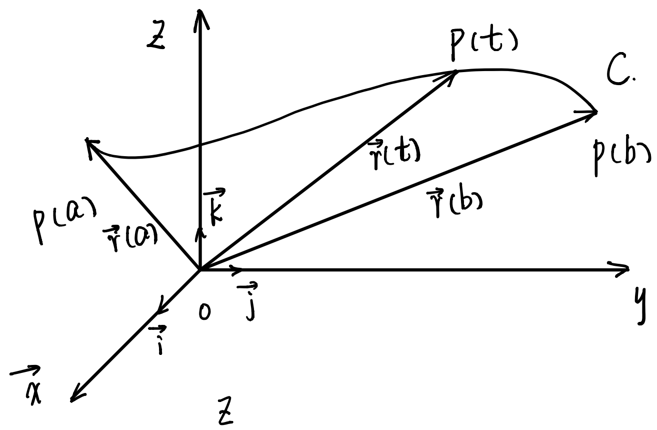
曲线论.（刻画曲线的几何不变量）—— 弧长、曲率、挠率.

（最后得到的是以曲率、挠率作为弧长的函数唯一确定曲线）

---

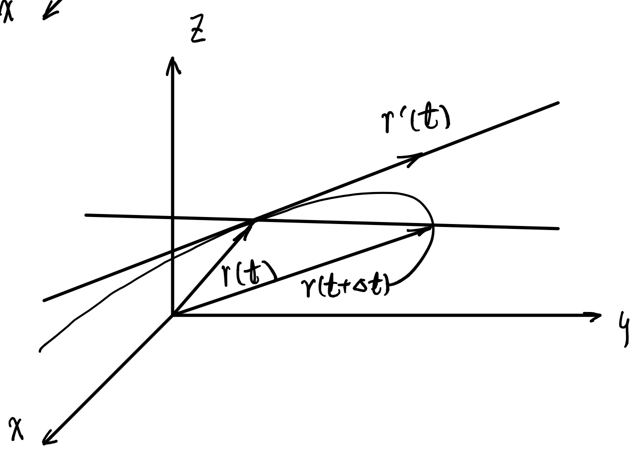
§2.1. 正则参数曲线



$p:[a,b]\to E^3$ 此处仍是点集

$C:\ \vec r(t) = x(t)\vec i + y(t)\vec j + z(t)\vec k$

（c的参数方程）.



$$r'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$$

$$= (x'(t),\ y'(t),\ z'(t)).$$

（切向量）

切线方程：$X(t) = r(t) + \lambda r'(t)$.

正则参数曲线：(1). $r(t)$ 关于 t 三次以上连续可微

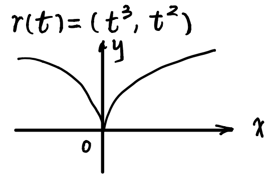
(2). $\forall t$：$r'(t)\neq\vec 0$.

容许的参数变换：(1) $t=t(u)$ 关于 u 三次以上连续可微

(2). $\forall u$，$t'(u)\neq 0$

* $r(t)$ 连续可微 ≠ 直观光滑

ex. $r(t)=(t^3, t^2)$



其它形式的参数方程：(1). $r(x) = (x, y(x), z(x))$

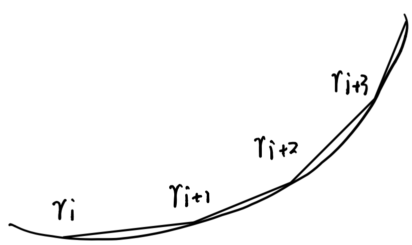
(2). $\begin{cases} f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0 \\ g(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0. \end{cases}$

---

§2.2. 曲线的弧长.

$$s = \int_a^b |r'(t)|\,dt$$ （弧长公式，几何量）.

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|$$



$S(t)=\int_a^t |r'(t)|\,dt$ 满足 $\begin{cases} ①.\ \frac{ds}{dt}=|r'(t)|>0 \\ ②\ S(t)\text{三次连续可微} \end{cases}$

$ds=|r'(t)|\,dt$ (弧长元素). * 构成一个容许参数变换.

$L_{2.1.}$ t是$r(t)$弧长参数 $\Leftrightarrow |r'(t)|\equiv 1$. ○代入 $S(t)$即得

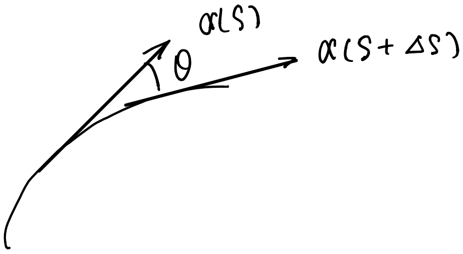
* 曲线以弧长为参数 $\Longleftrightarrow$ 切向量场是单位向量场

(可以理解为此时 s与t可直接替换).

---

§2.3. 曲线的曲率与Frenet标架.

$r(s).\longrightarrow r'(s)$ 单位切向量场, 记为 $\alpha(s)$.



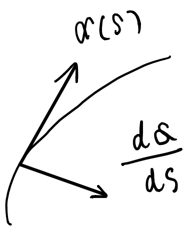
$\Rightarrow \theta$有: $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{d\theta}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$

○ $\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{|\alpha(s)-\alpha(s+\Delta s)|}{|ds|}$

$= \lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}{|ds|}$?

$= \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{d\theta}{ds}\right|$.

则记 $K(s)=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=|r''(s)|$ 为曲率. 曲率是值



另外: 切线像: $r(s)$的切线 $\alpha(s)$移至 O点

其端点描绘的曲线: $\alpha(s)$

(意义即是$\alpha(s)$方程单独拿出来当曲线).

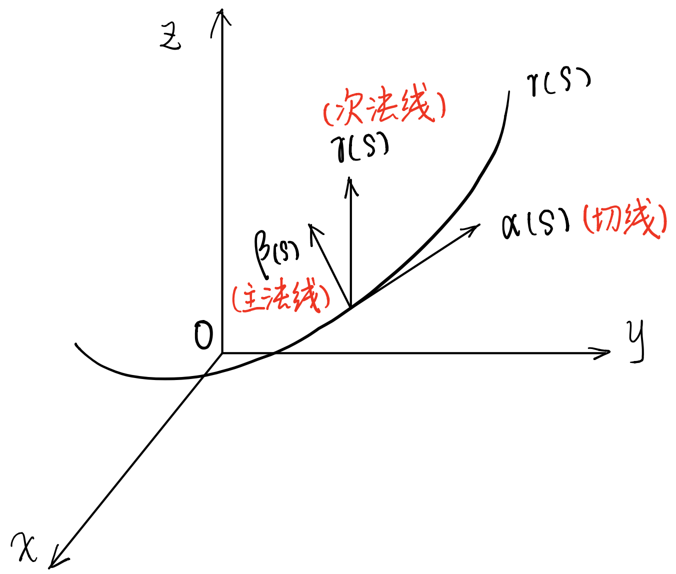
有 $d\tilde{s}=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|ds = K(s)\,ds$ (参考P30).

$\Rightarrow K(s)=\frac{d\tilde{s}}{ds}$: 曲率是曲线切线像与曲线弧长元素比.

主法向量 $\beta(s)$: $\alpha'(s)=k(s)\cdot\beta(s)$. *注 $\alpha(s),\beta(s)$都是单位的.

次法向量 $\gamma(s)$: $\gamma(s)=\alpha(s)\times\beta(s)$ 也是单位的.

$\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)$ 构成单位正交标架 Frenet 标架



$\{r(s): \alpha(s),\beta(s),\gamma(s)\}$.

$\beta\times\gamma$: 法平面
$\alpha\times\gamma$: 切平面
$\alpha\times\beta$: 密切平面.

Frenet 标架的计算: ① $r=r(s)$: (以s为弧长参数)

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(s)=r'(s)\\&k(s)=|\alpha'(s)|\\&\beta=r''(s)/|r''(s)|\end{aligned}\right\}\quad \alpha'(s)=k(s)\cdot\beta(s)$$

$$\gamma=\alpha\times\beta=r'(s)\times r''(s)/|r''(s)|$$

② $r=r(t)$: (没有以s为弧长参数).

$$\frac{ds}{dt}=|r'(t)| \longleftarrow$$ 先把弧长参数换为s.

$$\alpha(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}\Rightarrow r'(t)=|r'(t)|\alpha(t)$$

$$r''(t)=\frac{d|r'(t)|}{dt}\alpha(t)+|r'(t)|\frac{d\alpha(t)}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$=\frac{d|r'(t)|}{dt}\alpha(t)+|r'(t)|^2\cdot k(t)\cdot\beta(t)$$

$$r'(t)\times r''(t)=|r'(t)|^3\cdot k(t)\gamma(t)$$

* 此处有用方程作待定系数的求曲率法(函数方程).

通过上式解出：非弧长参数的Frenet标架计算

$$\alpha(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

$$\kappa(t)=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

$$\gamma(t)=\frac{r'(t)\times r''(t)}{|r'(t)\times r''(t)|}$$

問題ある!

$$\beta(t)=\gamma(t)\times\alpha(t).$$

$$=\frac{|r'(t)|}{|r'(t)\times r''(t)|}r''(t)-\frac{r'(t)\cdot r''(t)}{|r'(t)|\cdot|r'(t)\times r''(t)|}r'(t)$$

---

§2.4. 挠率与Frenet公式

$$\gamma'(s)=\underbrace{\alpha'\times\beta}_{\alpha'\text{与}\beta\text{同向}}+\alpha\times\beta'=\alpha\times\beta' \Rightarrow \gamma'\text{与}\beta\text{同向}$$

$$\gamma'=-\tau\cdot\beta.$$

$\Downarrow$

τ即是挠率 $\begin{cases} |\tau|=|\gamma'(s)| & (\text{也是数值}) \\ \tau=-\gamma'\cdot\beta \end{cases}$

4.1 $\tau=0 \Leftrightarrow$ 曲线是平面曲线　　$\circ \Rightarrow$ 证 $r(s)\cdot\gamma(s_0)=0$

至此，frenet公式已推导：

$$\begin{cases} r'=\alpha \\ \alpha'=\kappa\beta \\ \beta'=-\kappa\alpha+\tau\gamma \\ \gamma'=-\tau\beta \end{cases}$$

其中 β' 的推导用待定系数

$\beta'=a\alpha+b\beta+c\gamma$

分别与 α,β,γ 内积.

4.2 球面曲线：$\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2=C$ （常数）.

□. $(r-r_0)^2=a^2$　求导：　$2(r-r_0)\alpha=0$

$r-r_0 \perp \alpha \Rightarrow r-r_0=\lambda\beta+\mu\gamma$

① $r-r_0$ 在 $\beta\times\gamma$ 面上

② 待定系数求 μ,λ

③ 代入求证

求导：$\alpha=\lambda'\beta+\lambda\beta'+\mu'\gamma+\mu\gamma'$ frenet 公式

$$=-\lambda\mu\alpha+(\lambda'-\mu\tau)\beta+(\lambda\tau+\mu')\gamma$$

$$\Rightarrow -\lambda\mu=1 \quad ; \quad \lambda'=\mu\tau \quad ; \quad \mu'=-\lambda\tau$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{1}{k} \quad ; \quad \mu=-\frac{1}{\tau}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{k}\right)$$

代入 $r-r_0=\lambda\beta+\mu\gamma$ 有成立 ▨

非弧长参数的 Frenet 公式计算：

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{r'}{|r'|} & \tau=\dfrac{(r',r'',r''')}{|r''|^2} \\ \gamma=\dfrac{r'\times r''}{|r'\times r''|} & k=\dfrac{|r'\times r''|}{|r'|^3} \\ \beta=\dfrac{|r'|}{|r'\times r''|}r''-\dfrac{r'\cdot r''}{|r'||r'\times r''|}r' \end{cases}$$

---

§2.5. 曲线基本定理　　证明不要求

$r=r_1$ 与 $r=r_2$，k 处处不为 0，$k_1=k_2$，$\tau_1=\tau_2$.

则 ∃ 刚体运动 σ：$r_1 \xrightarrow{\sigma} r_2$.

□. 设 $f(s)=(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2$　且假设在 $s=0$ 处 r_1,r_2 相同

$$\frac{1}{2}\frac{df}{ds}=\sim=0 \Rightarrow f(s)\equiv 0. \quad ▨$$

总体理念：给出既定的 $k(s)$，$\tau(s)$ 方程，曲线唯一确定

至多在空间位置上有差异.

（称为 内在方程）.

---

§2.6. 曲线参数方程在一点标准展开. (不要求)

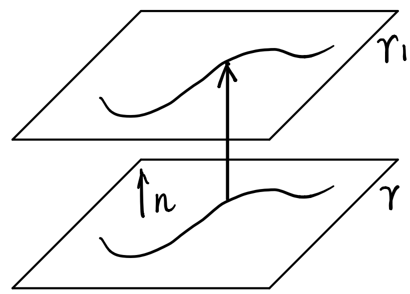
§2.7. 存在对应关系的曲线偶. 对应关系 (P82.)

若在不重合的曲线 C_1、C_2 间, 存在一个对应,

s.t.: 每一对对应点处有公共主法线

则两条曲线为曲线偶, 互称侣线 / 共轭曲线

ex. 平面曲线: $\gamma(s)$. 则 $\gamma_1(s)=\gamma(s)+\lambda n(s)$ 就是其侣线.



曲线偶性质: ① 对应点距离为定值 ② 对应点切线成定角.

$\gamma_2=\gamma_1+\lambda\beta_1$ 且有 $\beta_1=\pm\beta_2$.

曲线偶存在条件: γ 存在曲线偶 $\Leftrightarrow$ $\lambda k+\mu\tau=1$. (λ,μ 为常数).

□. 对 $\gamma(s)$ 每一点有 $\gamma_1(s)=\gamma(s)+\lambda\vec{n}(s)$. → 也就是 $\beta(s)$.

求导: $\alpha_1(s)\dfrac{d\tilde{s}}{ds}=(1-\lambda k(s))\alpha(s)+\lambda\tau\gamma(s)$

① 表出 $\gamma(s)$ 与 $\gamma_1(s)$

② 求导

③ 消 $\dfrac{d\tilde{s}}{ds}$ (涉及2条曲线都要考虑.)

有 $\left|\dfrac{d\tilde{s}}{ds}\right|^2=(1-\lambda k(s))^2+(\lambda\tau)^2$

$\alpha(s)\cdot\alpha_1(s)\dfrac{d\tilde{s}}{ds}=1-\lambda k(s)$ 是常数

则 $\dfrac{\alpha(s)\cdot\alpha_1(s)\cdot\frac{d\tilde{s}}{ds}}{\left|\frac{d\tilde{s}}{ds}\right|}=C=\dfrac{1-\lambda k(s)}{\sqrt{(1-\lambda k(s))^2+(\lambda\tau)^2}}$

μ 就是这个 C.

$\Rightarrow$ $\lambda k(s)+\mu\tau(s)=1$.

这一步是这么来的:

$$\frac{1-\lambda k}{\sqrt{(1-\lambda k)^2+(\lambda\tau)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(\lambda\tau)^2}{(1-\lambda k)^2}}}=C\Rightarrow\frac{\lambda\tau}{1-\lambda k}=\tau$$

充分性：目标：$\gamma_1(s)=\gamma(s)+\lambda\beta(s)$ 有 $\beta_1(s)=\pm\beta(s)$ 即可.

$$\gamma_1'(s)=\cdots=\mu\tau(s)\alpha(s)+\lambda\tau(s)\gamma(s).$$

$$\alpha_1(s)=\frac{\gamma_1'(s)}{|\gamma_1'(s)|}=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\alpha+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\gamma$$

* ds 与 $d\tilde{s}$ 各处相关 ??

再用 $\frac{d\alpha_1(s)}{d\tilde{s}}\frac{d\tilde{s}}{ds}=\sim=c\cdot\beta(s)$. 即证 ▨.

曲线偶的延伸：渐伸线　C_1 切线恰为 C_2 法线

C_2 是 C_1 渐伸线，C_1 是 C_2 渐缩线.

γ 的渐伸线方程：$\gamma_1=\gamma+(c-s)\alpha$，$c$ 是任一常数.

γ 的渐缩线方程：$\gamma_1=\gamma+\frac{1}{k(s)}\beta-\frac{1}{k}\left(\tan\int\tau ds\right)\gamma$

□. $\gamma_1=\gamma+\lambda(s)\alpha(s)$. 求导：$\alpha_1(s)=\alpha(s)+\lambda'(s)\alpha(s)+\lambda(s)k(s)\beta(s)$

两边乘 $\alpha(s)$ 有 $\underbrace{\alpha_1(s)\cdot\alpha(s)}_{\text{垂直}}=1+\lambda'(s)=0$

就有 $\lambda(s)=c-s$. ▨

□. $\gamma_1=\gamma+\lambda(s)\beta+\mu(s)\gamma$.

i 求导：$\alpha_1=\alpha+\lambda'\beta+\lambda(-k\alpha+\tau\gamma)+\mu'\gamma+\mu\tau\beta$

$$=(1-k\lambda)\alpha+(\lambda'+\mu\tau)\beta+(\lambda\tau+\mu')\gamma.$$

乘 α：$0=1-\lambda k\Rightarrow\lambda=\frac{1}{k}$ ：$\alpha_1=(\lambda'+\mu\tau)\beta+(\lambda\tau+\mu')\gamma$

ii $\gamma_1-\gamma$ 是 γ_1 切线. 即有

⚠ ? $\quad\frac{\lambda'+\mu\tau}{\lambda}=\frac{\lambda\tau+\mu'}{\mu}\Rightarrow$ 解出 μ.

---

§2.8. 平面曲线（不考）