P26

名词解释，研究生题目优先考，额外题目

$\downarrow$

判断解释（$3' \times 5$）

$\downarrow$

定理\引理证明

1、 $f(x) \geq 0$. 反例：$g(x)=1$. $f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\in(0,1))$

ex. $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$, $g_1(x), g_2(x) \in L(E)$.

则 $f(x) \in L(E)$.

① $|f(x)| \leq \max\{g_1(x), g_2(x)\}. \leq |g_1(x)| + |g_2(x)|$.

② $0 \leq f(x) - g_1(x) \leq g_2(x) - g_1(x)$.

3、 * $f(x) = \begin{cases} n, & x \in e_n, \ n=1,2,3,\cdots \\ 0, & x \in P_0 \end{cases}$ （项数有限）

注意 $f(x)$ 不是简单函数

$\int_{(0,1)} f(x)\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot me_n$

所以 $\varphi_k(x) = \begin{cases} n, & x \in e_n, \ n=1,2,3,\cdots k \\ 0, & x \in P_0 \end{cases}$

用 $\varphi_k(x) \to f(x)$. 而 $\varphi_k(x)$ 是简单函数 ✓

$\int_{(0,1)} f(x)\, dm = \int_{(0,1)} \lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)\, dm = \lim_{k\to\infty} \int_{(0,1)} \varphi_k(x)\, dm$

此处由 $\varphi_k(x)$ 随 $k \uparrow$，故用

Levi 引理.

4. 考点在 $\lim\limits_{n}\int$ 换序： $f_n(x)$ 对 n 单增且 >0. 有极限

$f_n(x)\to f(x)$, $n\to\infty$.

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} mE_k = \sum\limits_{k=1}^{n}\int_{[0,1]}\chi_{E_k}(x)\,dm = \int_{[0,1]}\sum\limits_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)\,dm \geq p$

7. (1). 反证： $\int_E g(x)\,dm=\int_E f(x)\,dm$.

$\int_E (g(x)-f(x))\,dm=0$ 且 $g(x)=f(x)$

$g(x)=f(x)$ 在 E 上 a.e 成立. ∴ 与 $mE>0$ 矛盾.

(2). $E=\{x\in E \mid g(x)-f(x)>0\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x\in E \mid g(x)-f(x)>\frac{1}{n}\}$.

则 $\exists n_0$ 有 $m\{x\in E \mid g-f\geq\frac{1}{n}\}>0$ ← $mE>0$

从而 $\int_E (g-f)\,dm \geq \int_{E\{g-f\geq\frac{1}{n_0}\}}(g(x)-f(x))\,dm$

$\geq \frac{1}{n_0}\, mE\{g-f\geq\frac{1}{n_0}\}>0$.

8. 不能直接取 $\varphi(x)=f(x)$ ，$f(x)$ 不一定有界.

取 $\varphi(x)=\operatorname{sign} f(x)=\begin{cases}1 & f(x)>0\\ 0 & \sim=0.\\ -1 & f(x)<0\end{cases}$

就有 $\int_E f(x)\varphi(x)\,dm = \int_E |f(x)| = 0$.

10. 证可积优先证 绝对值可积

$f(x)$在$x=0$可微 $\Rightarrow$ 保号性（局部） $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-x_0}\right|<\infty$.

$\forall x\in O(x,\delta)$，有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant M$.

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dm=\int_{[-r,r]}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dm+\int_{(-\infty,-r)\cup(r,+\infty)}\sim$$

$$=2M+\int_{|x|>r}\frac{|f(x)|}{r}\,dm.$$

（一）1、2、7. （二）3

---

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E$

3. √ $f_n, f\ E\to R$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|\,dm=0$

$f_n\to f.$

$\int_{E(|f_n-f|\geq\eta)} 1\,dm$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0, \cancel{\exists}$ $\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n-f|>\varepsilon)=0.$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta, N$，$n>N$时 $\int_E|f_n-f|\,dm<\varepsilon$

假 $m\cdot|f_n-f|<\varepsilon$

---

1. (×) $mE=0$. 2. (×) $mE\to\infty$.

3. (√) 往积分化 $\int_{E(|f_n-f|\geq\eta)}1\,dm$，两边夹

4. (√). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E|u_n(x)|\,dm=\int_E\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|\,dm\leq 1.$

8. $g(x)=\dfrac{\int_{(-\infty,x)\cap E}f(x)\,dm}{\int_E f(x)\,dm}$ $\in C$ 则用中值定理

5. (X). $D(x) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} = f(x)$ (反例).

Appele pencil

6. $\forall \eta > 0$, $0 \leq mE(|f_n| \geq \eta) = \frac{1+\eta}{\eta} \int_{E(|f_n| \geq \eta)} \frac{\eta}{1+\eta} dm$

$$\leq \frac{1+\eta}{\eta} \int_{E(|f_n| \geq \eta)} \frac{|f_n|}{1+|f_n|} dm \to 0$$

9. $2|f(x)| \leq 1 + f^2(x)$. 绝对 $\Leftrightarrow$ 一般.

$$2\int_E |f(x)| dm \leq mE + \int_E f^2(x) dm < +\infty.$$