曲面第一基本形式

§3.1. 正则参数曲面

参数曲面：　$S: D \subseteq E^2 \longrightarrow E^3$

记 $(u,v) \in D$，$(x,y,z) \in E^3$.

则

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in D.$$

或 $S: r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

参数曲线网：（参考课本 P74.）

正则参数曲面：按照上述构造方式：D 与 S^3 中的点并不一定一一对应.

为保证一一对应. 则应有 r_u 与 r_v 线性无关 称为正则.

Monge 形式：　$z = z(u,v) = z(u(x,y), v(x,y))$.

即此时 $r = (x, y, z(x,y))$.

△（Monge 形式 $\Rightarrow$ 正则.　正则 $\xRightarrow{\text{局部/整体}}$ Monge 形式.）

正则参数曲面的容许参数变换：

$$\begin{cases} u = u(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ v = v(\tilde{u}, \tilde{v}) \end{cases}$$

有：$u(\tilde{u}, \tilde{v})$，$v(\tilde{u}, \tilde{v})$ 三次以上可微.

△（$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \neq 0$）　（即满足正则条件）.

曲线的正侧：$r_u \times r_v$ 侧.　曲线（变换后）保持定向 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} > 0$.

* 正则参数曲面 ≠ 正则曲面，正则曲面不一定用一个参数面表示出来.

正则曲面： S： $\forall p\in S$. $\exists\ V=O(p)\subset E^3$, $\exists\ U\subset E^2$

s.t. $U\longleftrightarrow V\cap S$ ，且 $r: U\to V\cap S\subset E^3$

是一个正则参数曲面

则 S 是一张正则曲面.

(即 S 上任意一点，都在一个正则参数曲面片上.)

* 几何意义：每一个正则参数曲面都是一个开的曲面片

而正则曲面是正则参数曲面拼出来的.

ex $x^2+y^2=a^2$ $\quad r=r(u,v)=(a\cos u,\ a\sin u,\ bv)$.

$$\begin{cases} u\in(-\pi,\pi),\ v\in R & \text{是一片} \\ u\in(0,2\pi),\ v\in R & \text{是另一片.} \end{cases} \to \text{记为 } \tilde{u},\tilde{v}.$$

有 $\tilde{u}=\begin{cases} u, & u\in(0,\pi) \\ u+2\pi, & u\in(-\pi,0). \end{cases}$ $\quad \tilde{v}=v$.

且在重叠部分有 $\dfrac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}=1>0$. 则该曲面可定向.

ex 旋转面，参数曲面片选取同圆柱面.

$$\begin{cases} u\in(0,2\pi) \\ v\in(a,b) \end{cases} \text{与} \begin{cases} u\in(-\pi,\pi) \\ v\in(a,b) \end{cases}$$

正螺旋面： $r(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ av)$.

直纹面： $r(u,v)=\underbrace{a(u)}_{\text{准线}}+v\underbrace{l(u)}_{\text{直母线}}$.

* 本节课后题重要

§3.2. 切平面与法线.

S上的连续可微曲线可表示为 $u=u(t)$, $v=v(t)$.

$$r=(u(t),v(t)).$$

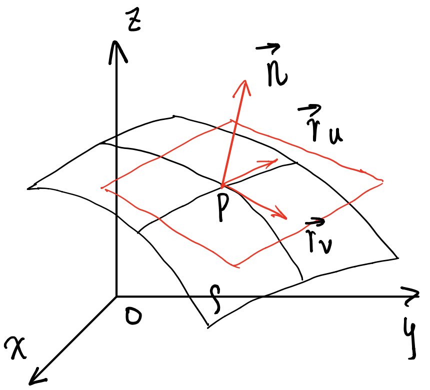
切向量：S上过p的任一条曲线在p点的切向量.

(即p点的切向量不唯一)

切空间：T_pS.

$$\left.\frac{d\,r(u(t),v(t))}{dt}\right|_{t=t_0}=\left.\left(\frac{\partial r}{\partial u}\frac{du}{dt},\ \frac{\partial r}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\right|_{t=t_0}$$

$$=r_u\cdot\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0}+r_v\cdot\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}$$



可知 t_0 点的任一切向量都能表示成 r_u 与 r_v 的线性和.

$X(\lambda,\mu)=r(u,v)+\lambda r_u+\mu r_v$ (切平面).

$n=r_u\times r_v/|r_u\times r_v|$. (切平面法向量).

$X(t)=r(u,v)+t\,n(u,v)$. (切平面法线).

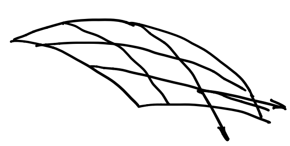
曲面上的自然标架：$\{r(u,v);\ r_u,\ r_v,\ n\}$.

§3.3. 曲面的第一基本形式

△(便于理解)

由3.2可知： $dr(u,v)=r_u\,du+r_v\,dv$ (恰为常微分形式).

但 r_u 与 r_v 在 T_pS 上不一定构成正交基底 (类似这种的)



曲面的第一基本量 (也是 $r_u\ r_v$ 的度量系数)

$E(u,v)=r_u\cdot r_u$

$F(u,v)=r_u\cdot r_v$ $\qquad \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=r_u^2\cdot r_v^2\cdot(1-\cos\angle r_u r_v)>0.$

$G(u,v)=r_v\cdot r_v.$

第一基本形式：$\mathrm{I} = dr \cdot dr = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$

(分量为 du与dv 的二次型).

I 与 S 的参数选取无关. 几何意义为切向量长平方.

定理 3.1 S 参数曲线网是正交曲线网 $\Leftrightarrow F(u,v) \equiv 0$

□ $\cos\angle(r_u, r_v) = \dfrac{r_u \cdot r_v}{|r_u \cdot r_v|} = \dfrac{F}{|EG|}$ 则 $r_u \cdot r_v = 0 \Leftrightarrow F \equiv 0$ ▨

利用 I 型式, 即可计算曲线弧长与区域面积 (应用)

求曲线长： $l:\ r = r(u(t), v(t))$

$$\frac{dr(u(t),v(t))}{dt} = r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt}.$$

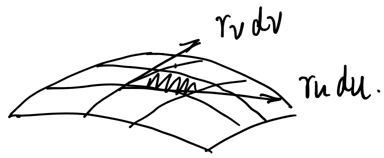
$$\left|\frac{dr}{dt}\right|^2 = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix}$$

$$= E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

(有切线长就可以积分弧长了)：

$$L = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt$$

求面积： $S: r(u,v).$



$$d\sigma = |r_v dv \times r_u du| = |r_u \times r_v|\, du\, dv$$

$$= \boxed{|r_u||r_v| \sin\angle r_u r_v}\ du\, dv$$

$$= \boxed{\sqrt{EG - F^2}}\ du\, dv.$$ (此处是定义).

则 $S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$

* L与S均与容许的参数变换无关.

§3.4. 正交曲线网的存在性 (不要求证明).

正则曲面每一点的某个邻域内一定有正交参数曲线网

§3.5. 保长与保角对应.

保长对应：保持 I 型不变的对应 $\Longleftrightarrow$ 存在适当参考系 $E_1=E_2, F_1=F_2, G_1=G_2$

$S_1: r=r_1(u_1,v_1) \quad (u_1,v_1)\in D_1$ * 正则参数曲面的对应

$S_2: r=r_2(u_2,v_2) \quad (u_2,v_2)\in D_2.$ 本质上为参数区域的对应

$\sigma: D_1\to D_2 \quad u_2=f(u_1,v_1) \quad v_2=g(u_1,v_1).$

即 $r_1(u_1,v_1) \xrightarrow{\sigma} r_2(f(u_1,v_1), g(u_1,v_1))$

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "r_1"'] & D_2 \arrow[d, "r_2"] \\ S_1 \arrow[r, dashed, "\sigma"] & S_2 \end{tikzcd}$$

$\sigma_{*p}: T_pS_1 \to T_{\sigma(p)}S_2$ (S_1 到 S_2 的切映射).

□ Page 107 课本 ▨

定理 5.1. $\sigma: S_1\to S_2$, $p\in S_1$, $\sigma_{*p}: T_pS_1\to T_{\sigma(p)}S_2$ 是切空间同构

则：$U_1 = O(p)\cap S_1$, $U_2 = O(\sigma(p))\cap S_2$
(u_1,v_1) (u_2,v_2)

有 $\sigma(U_1)\subset U_2$ 且 $\sigma|_{U_1}$ 由 $u_2=u_1, v_2=v_1$ 唯一给定.

即在适当选好 $S_1 S_2$ 的参数系之后，$\sigma|_{U_1}$ 是从 U_1 到 U_2 的有相同参数值点的对应。

另有

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} & \frac{\partial v_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial v_1} & \frac{\partial v_2}{\partial v_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(u_1,v_1)}{\partial u_1} & \frac{\partial g(u_1,v_1)}{\partial u_1} \\ \frac{\partial f(u_1,v_1)}{\partial v_1} & \frac{\partial g(u_1,v_1)}{\partial v_1} \end{pmatrix}$$

经映射 $\sigma: S_1\to S_2$ 将 S_2 上微分式拉回到 S_1 上.

P112. (余下部分的推导).

ex. 证明在 $r_1=(u\cos v, u\sin v, u+v)$ 螺旋面与

$r_2=(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \sqrt{\rho^2-1})$ $(\rho\geq 1, \theta\in[0,2\pi])$ 旋转双曲面

间有保长对应存在.

□. $I_1 = 2du^2 + \underbrace{2du\,dv + (u^2+1)dv^2}$ 配方.

$I_2 = \frac{2\rho^2-1}{\rho^2-1}d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$

作容许参数变换：(使得参数系正交).

$I = (2-\frac{1}{u^2+1})\,du^2 + (u^2+1)\left(\frac{du}{u^2+1}+dv\right)^2$

令 $\tilde{u}=u$，$\boxed{\tilde{v}=\arctan u + v}$. 有 $\tilde{v}=\int_0^u \frac{1}{u^2+1}du + \int_0^v dv$

$\tilde{I}_1 = \frac{2\tilde{u}^2+1}{\tilde{u}^2+1}d\tilde{u}^2 + (\tilde{u}^2+1)\,d\tilde{v}^2$

$\tilde{I}_1$ 与 I_2 对照，令 $\rho=\sqrt{\tilde{u}^2+1}$，$\theta=\tilde{v}$ 即有 $I_2=\tilde{I}_1=I$

之间的对应：$\rho=\sqrt{u^2+1}$，$\theta=\arctan u+v$. ▨

保角对应：$\sigma: S_1\to S_2$，$\forall p\in S_1$. 有 $\sigma_{*p}: T_pS_1\to T_pS_2$

且保持向量夹角：$\angle(\sigma_{*p}X, \sigma_{*p}Y)=\angle(X,Y)$.

$\Longleftrightarrow$ 存在正函数 $\lambda\in C S_1$ s.t.：$\sigma^* I_2 = \lambda^2 I_1$

即存在一定参考系，s.t.：

$E_2=\lambda^2(u,v)E_1$，$F_2=\lambda^2(u,v)F_1$，$G_2=\lambda^2(u,v)G_1$

证明：P_{116} 课本.

定理5.5 任意2个正则参数曲面局部上都能建立保角对应.

-2.0.

不完备的证明

□ $r=r(u,v)$ 是解析函数. 正交下：

$I = E^2du^2 + G^2dv^2 = \underbrace{(\sqrt{E}du+\sqrt{-1}\sqrt{G}dv)}_{\text{记为 }\omega}(\sqrt{E}du-\sqrt{-1}\sqrt{G}dv)$.

ω 是复解析函数的一次微分式（由反函数定理）

$\lambda(u,v)(\sqrt{E}\,du+\sqrt{-1}\sqrt{G}\,dv)=dz(u,v)$. * key.

即 $\lambda\omega$ 是 $z(u,v)$ 全微分.

$z(u,v)=x(u,v)+i\,y(u,v)$. $\Rightarrow$ $I=\omega\cdot\bar{\omega}=\frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2+dy^2)$.

则由 $x(u,v)$ 与 $y(u,v)$ 给出的对应是保角的. $\boxtimes$

上述 $x(u,v)$, $y(u,v)$ 称为等温参数系.

ex. 球面与柱面的保角对应. (Mercator 映射).

$r_1=(a\cos v\cos u,\ a\cos v\sin u,\ a\sin v)$

$r_2=(a\cos\tilde{u},\ a\sin\tilde{u},\ a\tilde{v})$.

$I_1=a^2\cos^2 v\,du^2+a^2\,dv^2=a^2\cos^2 v\left(du^2+\frac{1}{\cos^2 v}dv^2\right)$.

$I_2=a^2\,d\tilde{u}^2+a^2\,dv^2=a^2(d\tilde{u}^2+d\tilde{v}^2)$.

令 $\tilde{u}=u$, $\tilde{v}=\int_0^v\frac{1}{\cos v}dv=\log\left|\tan\left(\frac{v}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

即为 r_1 与 r_2 的保角对应 (差 $\cos^2 v$). $\boxtimes$

§3.6. 可展曲面 (不考). ✓