Gauss 消去法

Gauss 列主元：取列值最大作为主元

Gauss 按比例列主元：先把每一行除以该行最大值

Gauss-Jordan 列主元：无回代的列主元消去

Crout（LU分解，U为单位上三角）： $\begin{pmatrix} l_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Dolittle（LU分解，L为单位下三角）

三对角追赶法：Crout 方法.

范数：1. 正定 2. 齐次 3. 三角不等式

$\|A\|_1$：列值~~最大~~值和 和的最大值

$\|A\|_2$：~~max λi~~ $\sqrt{\lambda}$，λ 为 A^TA 最大特征值 *

$\|A\|_\infty$：行最~~大~~值和.

矩阵范数

$\|A\|_M$： $n \cdot \max|a_{ij}|$

$\|A\|_F$： $(\Sigma |a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\rho(A) = \max \lambda$.

$Cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

$Cond(A)_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$

迭代法.

Jacobi 迭代： $A = D - (D - A)$，$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$x = \underbrace{(I - D^{-1}A)}_{B}x + \underbrace{D^{-1}b}_{g}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots \\ & 0 & 0 & \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

迭代法收敛 $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} G^k = 0$

$\Leftrightarrow \rho(G) < 1$

性质：$\rho(A) \leq \|A\|$（任何范数最小）

Gauss-Seidel 迭代： $A = D(I - L) - DU$

$$x_k = Lx_k + Ux_{k-1} + D^{-1}b$$

$L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & 0 \end{pmatrix}$，$U = \begin{pmatrix} 0 & & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ 把上述B分解了 $B = L + U$

Gauss-Seidel 收敛 $\Leftarrow \|B\|_\infty < 1$（且此时Jacobi也收敛）

$\Leftarrow \|B\|_1 < 1$

$\Leftarrow$ A是对角占优矩阵（Jacobi也收敛）

共轭斜量法.

$\cancel{x_0 \quad p_0 \quad r_0 \quad p_0}$

$\cancel{x_1 \quad r_1 \quad p_1}$

$\underrightarrow{p \ \alpha \ x \ r \ \beta}$

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = A x_{k+1} - b$$

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T A p_k}{p_k^T A p_k}, \quad p_{k+1} = -r_{k+1} + \beta_k p_k$$

余项

方程 求法 误差

插值法:

Lagrange. 去掉 $(x-x_i)$

$$\boxed{P_n(x) = f(x_i)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}}$$

*注意是插值点

余项 $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\underbrace{\omega_{n+1}(x)}_{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}$ 就有n+1个

$$|r_n(x)| \leq M_{n+1}\frac{|\omega_{n+1}(x)|}{(n+1)!}, \quad M_{n+1} = \max_{a\leq x\leq b}|f^{(n+1)}(x)|$$

Newton. 均差表.

$$\boxed{N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1]\,\omega_1(x) + \cdots + f[x_0\cdots x_n]\,\omega_n(x)}$$

$$f[x_i] = f(x_i)$$

$$f[x_0\cdots x_n] = \frac{f[x_1\cdots x_n] - f[x_0\cdots x_{n-1}]}{(x_n - x_0)}, \quad \text{余项: } \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

Hermite.

$$\boxed{H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} f'(x_i)B_i(x)}, \quad \text{余项: } \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{2n+2}(x).$$

$$A_i(x) = \left\{1 - 2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i - x_j}\right\} l_i^2(x)$$

$$B_i(x) = (x-x_i)\,l_i^2(x)$$

三次样条. $S_N(x)$ 自然三次样条插值

$S_C(x)$ 完备三次样条插值

$S_L(x)$ Lagrange三次样条

$f(x)$ 二次连续可微 $S(x) \simeq f(x)$

不高于3次

$$S = \begin{cases} S_1(x), & [x_0, x_1] \\ \vdots \\ S_n(x) \end{cases}$$

$$S_i(x) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{m_i}{6}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{m_{i+1}}{6}(x-x_i)^3\right) + f_i$$

$$+ f[x_i, x_{i+1}](x-x_i) - \frac{h_i^2}{6}\left((m_{i+1}-m_i)\frac{x-x_i}{h_i} + m_i\right)$$

函数逼近 章5

最佳一致逼近. $p_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$

step1. $r(x)=f(x)-p_n(x)$

$r'(x)$

step2. $\boxed{\text{交错组点}}$?

(至少 $n+2$ 个) * 若求一次 $p_1(x)$，则也找3个点即可

step3. $\boxed{\text{若 } f^{(n+1)} \text{ 且恒正/负}}$ 则 $[a,b]$ 端点一定在交错点组中

step4. $\begin{cases} r(x_{i-1})=-r(x_i)=r(x_{i+1})\cdots & n+1 \\ r'(x_i)=0 \ (i\text{ 非端点}) & n \end{cases}$ $\}$ $2n+1$ 方程

⇕

$\underset{\text{组点}}{n+}\ \underset{\text{待定系}}{n+1}$ $\}$ $2n+1$ 未知数

最佳平方逼近：~~$p_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$~~

$\varphi(x)=a_n\varphi_n(x)+\cdots+a_0\varphi_0(x)$

$\{\varphi_n(x)\}$ 是函数系，可选 $x, x^2\cdots$，也可用其它的

step 1. $\boxed{\text{法方程组}}$ $\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & & \\ & \ddots & \\ & & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\varphi_0,y_0) \\ \vdots \\ (\varphi_n,y_n) \end{pmatrix}$

$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)W(x)dx$

step 2. 解出 $a_0\cdots a_n$ 即可

近似最佳一致逼近： Chebyshev 插值多项式

step 1. 由精度要求确定 n. $|r_n(x)|\le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\boxed{\dfrac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}}$

$M_{n+1} = \max\limits_{a\le x\le b}|f^{(n+1)}(x)|$, $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} = \max\limits_{a\le x\le b}|\omega_{n+1}(x)|$

step 2. 选插值基点 $\boxed{x_j=\frac{1}{2}\left[(b-a)\cos\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}+b+a\right],\ j=0,1,\cdots n}$.

step 3. 以上述基点作 Lagrange 插值.

Chebyshev 级数 ： 最佳平方逼近：$p_n(x)=a_0q_0(x)+\cdots+a_nq_n(x)$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(q_j,f)}{(q_j,q_j)}q_j(x)$$

取 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，关于 $W(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 直交. $\begin{cases}(T_m,T_k)=0, & m\ne k\\ \frac{\pi}{2}, & m=k\ne 0\\ \pi, & m=k=0.\end{cases}$

则 $p_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{j=1}^{\infty}a_jT_j(x)$

$$(a_j=\frac{(T_j,f)}{(T_j,T_j)}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}T_jf\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

章6. 最小二乘拟合.

$$\varphi(x) \simeq f(x)$$

Ex. 残差平方和

$\varphi(x)$ 不经过所有点：$\min\limits_{\varphi(x)\in H_n} \sum\limits_{i=1}^{m} (\varphi(x_i)-y_i)^2$

线性最小二乘拟合 ⟷ 离散的最佳平方逼近

可转化为法方程组解

φ_k 为基，a_k 为系数

$\varphi(x) = a_m\varphi_m + \cdots + a_0\varphi_0$

法方程组 $G = \begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \cdot a = y \begin{pmatrix} (\varphi_0, y) \\ \vdots \\ (\varphi_n, y) \end{pmatrix}$

$$(\varphi_j,\varphi_k) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i). \ (j,k=1\sim m)$$

$$= \varphi_j^T \cdot \varphi_k$$

$$(y,\varphi_k) = y^T\varphi_k.$$

核

章7. 数值积分

$$I_n(f)=\sum_{j=1}^{n+1} A_j \cancel{(x)}\cdot f(x_j) \simeq I(f)$$

Newton-Cotes求积公式：（$[a,b]$有限，$W(x)=1$，$[a,b]$ n等分，$h=\frac{b-a}{n}$） *n较大时不稳定。

$$I_n(f)=\sum_{i=1}^{n+1} A_i \cancel{(x)} f(x_i),\quad A_i\cancel{(x)} = \int_a^b l_i(x)\,dx,\quad l_i(x)=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}$$

梯型公式：（Newton-Cotes中取$n=1$.）

$$I_1(f)=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$ *梯型面积 $$E_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$ 代数精度 1

Simpson公式：（Newton-Cotes中取$n=2$）

$$I_2(f)=\frac{h}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$ $$E_2(f)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$ 3

复合梯型公式：（$n+1$个等距点，基于Newton-Cotes法）

$$T_n(f)=\frac{h}{2}\left(\cancel{f(a)}\, f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right),\quad E_n(f)=-\frac{nh^3}{12}f''(\xi)$$

$\frac{h}{2}(f(a)+f(a+h)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b))$ 除了$f(a)$ $f(b)$都加了2遍。

变步长梯型公式：$T_{i,j}$（i：第~~i次~~ $i-1$次半分）（j：j阶Newton-Cotes公式，此处为1）

$$T_{1,1}=I_1(f)$$

△ $$T_{m,1}=\frac{1}{2}\left(T_{m-1,1}+h_{m-1}\sum_{k=1}^{2^{m-2}} f\left(a+\left(k-\frac{1}{2}\right)h_{m-1}\right)\right),\quad h_m=\frac{1}{2}h_{m-1}$$

这些点的函数值和　步长变化

~~$E_n(f)=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi)$~~

复合Simpson公式：$$S_m(f)=\frac{h}{3}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{m} f(a+(2i-1)h)+2\sum_{i=1}^{m-1} f(a+2ih)\right)$$

$h=\frac{1}{2m}(b-a)$ * 梯型复合基础上加4倍中点。

Step 1. 通过精度要求与E_n，判断m.　　$f(\text{含})$　$E_m(f)=-\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

Step 2. 代入求解.　　$*\ T_{m,1}=\frac{1}{2}(T_{m-1,1}+h_{m-1}\cdot\sim)$

Romberg积分法：$$T_{m,2}=\frac{4T_{m,1}-T_{m-1,1}}{3}$$ （梯型转Simpson）

$T_{1,1}, T_{2,1}\cdots T_{m,1}\cdots$ 梯形值列 $O(h^2)$

$T_{1,2}, T_{2,2}\cdots T_{m,2}\cdots$ Simpson值列 $O(h^4)$

$T_{1,3}, T_{2,3}\cdots T_{m,3}\cdots$ Cotes值列 $O(h^6)$

$T_{1,4}\cdots\quad T_{m,4}\cdots$ Romberg值列 $O(h^8)$

$$\boxed{*\ T_{m,j}=\frac{4^{j-1}T_{m,j-1}-T_{m-1,j-1}}{4^{j-1}-1}}$$

列表求解.

章7. 数值积分

define. 代数精度：代数精度为 k：$I_n(x^j) = I(x^j)$，$j=0,1,\cdots k$ $\quad f(x)=x^j$

$I_n(x^{k+1}) \neq I(x^{k+1})$，$f(x)=x^{k+1}$ $\quad \cancel{f(x)=}$ $I(f)$

即，$\forall p(x)$，次数小于 k，有 ~~$I_n(x)=I(x)$~~ $I_n(p(x)) = I(p(x))$

两点 Gauss：$I_1(f) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \leftarrow I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$

Gauss 型：通过选取适当的 $x_1 \cdots x_{n+1}$，s.t. $I_n(f)$ 的代精度达到 $2n+1$

取法.

$W_{n+1}(x)$ 与不多于 n 次的 $p(x)$ 关于 $[a,b]$ 中 $W(x)$ 直交.

x_i 是直交多项式 $p_{n+1}(x)$ 的根

$E_n(f) = C_n f^{(2n+2)}(\xi)$ $\quad I_n(f) = \sum_{i=1}^{n+1} A_i f(x_i)$，$A_i = \int_a^b \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_i)p'_{n+1}(x_i)} W(x)dx$

权函数直交多项式的计算

章8. 解非线性方程组的数值方法 （大部分在考收敛阶数相关）

$f(x)=0.$ $\{x_k\}$ $x_k \to p$（真解），$e_k = x_k - p$

- 大范围收敛
- 局部收敛

def. 收敛阶数 λ：$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^{\lambda}} = C.$ $C\neq 0$ 常数.

区间半分法：~~$p_{k+1}=$~~ $|p_n - p| \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$ （判断次数）.

不动点迭代：$x=g(x)$. ☆

$x_k = g(x_{k-1})$

(1). $\forall x\in[a,b]$，$g(x)\in[a,b]$

(2). $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 有界且 $|g'(x)|\leq L<1$. 收敛性判断

定理

则 $|e_k| \leqslant \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$，$k\geqslant 1$. 或局部

* 收敛阶数：$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 m 次可微（连续），且在 p 处 $g^{(j)}(p)=0$，则上述 m 阶收敛

2个定理 $j<m$. ①

Aitken 加速公式：$\tilde{x}_{n+1} = x_n - \dfrac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$，$n=0,1,2,\cdots$

$= x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$

$\downarrow$

Steffensen 迭代方法：~~$x_{n+1}=$~~ $x_{k+1} = x_k - \dfrac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}$，$y_k = g(x_k)$，$z_k = g(y_k)$

Newton-Raphson 方法☆：~~$x=$~~ $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

注意此处是 $\boxed{f}$

收敛阶数：$f(x)$ m 阶连续导，
- p 为单根，则 $x_0\to p$ 时是2阶收敛 ②
- p 为 m 重根，1阶收敛 ← 可以用Steffensen加速

割线法：$x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$ 用割线代替切线，稍慢于切线法（Newton 法）

收敛判定：~~$f'(p)\neq 0$~~ P274. 8.5.1

解非线性方程组的 Newton 法.

$$f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x_1\cdots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1\cdots x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x)\end{pmatrix}, \quad x=(x_1\cdots x_n)^T$$

则 $f: D\to W,\ D,W\subseteq R^n$: $x\in D,\ f(x)\in W$. (向量值函数)

更一般情况: $f: D\to W,\ D\in R^n, W\in R^m$.

Fréchet 导数 $\cancel{f'(x)=}$ $\lim\limits_{\|\Delta x\|\to 0}\dfrac{\|f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x\|}{\|\Delta x\|}=0$.

$$f'(x)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{m\times n}$$ Jacobi 矩阵.

$\begin{cases} n: x\text{维数} \\ m: f(x)\text{维数}\end{cases}$

$\boxed{\text{Newton 法:}}$ $x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (形式相同, 算法不同).

因为 $f'(x)$ 是矩阵, 此处应为逆矩阵乘: $f(x_k)\cdot[f'(x_k)]^{-1}$

* ▲ 即 $\begin{cases} f'(x_k)(\Delta x_k)=-f(x_k) \longrightarrow \text{普通线性方程组} \\ x_{k+1}=x_k+\Delta x_k\end{cases}$

收敛速度与收敛性: Page 286.

$\boxed{\text{拟牛顿法:}}$ 记 $B_k=f'(x_k)$: $x_{k+1}=x_k-B_k^{-1}f(x_k)$ (牛顿法)

B_k^{-1} 不易求, 则寻找 $\boxed{H_k\longrightarrow B_k^{-1}}$

使用 $x_{k+1}=x_k-H_kf(x_k)$. ▲

章9. 常微分方程初值问题

解是一个方程 $y(x)$，故而难求，用离散的变量法来处理相关问题

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a)=\eta \end{cases}$$，求 y.

Lipschitz条件：✓ $|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|$.

离散变量法：✓ $\underbrace{t_1 \cdots t_N,\ y_1 \cdots y_N}_{\text{目标}}$ s.t. $y_n \simeq y(t_n)$，步长 $h_n = t_{n+1}-t_n$.

差商代替导数：✓ $\cancel{y' \simeq} \left(\frac{\overbrace{y_{n+1}-y_n}^{\Delta y_n}}{h}\right) \simeq y' = f(t,y) \Rightarrow \underline{y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n)}$.

Taylor级数：

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\Phi(t_n, y(t_n), h)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(t_n, y_n, h)$$

其中 $\Phi(t,y,h) = f(t,y(t)) + \frac{h}{2} f'(t,y(t)) + \frac{1}{3!}h^2 f''(t,y(t)) + \cdots + \frac{1}{p!}h^{p-1} f^{p-1}(t,y(t))$.

截断误差 $O(h^{p+1})$.

局部离散误差 $R_n = O(h^{p+1})$

数值积分：✓ $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt = y(t_{n+1}) - y(t_n)$

$$y_{n+1} = y_n + \underline{\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t,y(t))\,dt}$$ （可用梯型展开）.

---

def. 方法阶数 ✓ $O(h^{p+1})$，则为 p 阶

Euler方法.✓ $\underline{y_{n+1} = y_n + hf(t_n,y_n)}$. $y_0=\eta$. $R_n = O(h^2)$.

改进Euler ✓ $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n,y_n) + f(t_{n+1}, \underline{y_n + hf(t_n,y_n)})\right)$ 梯型公式

稳定区间 $(-2,0)$

Runge-Kutta方法：（二阶） $y_{n+1} = y_n + h(c_1K_1 + c_2K_2)$

✓变形的Euler方法（中点方法） $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2},\ y_n + \underline{\frac{h}{2}y_n'}\right)$

稳定区间 $(-2,0)$

$$\begin{cases} K_1 = f(t_n, y_n) \\ K_2 = f(t_n + a_2h,\ y_n + a_2hK_1) \\ c_1 = \frac{2a_2-1}{2a_2},\quad c_2 = \frac{1}{2a_2} \\ y_0 = \eta \end{cases}$$

$O(h^3)$.

a_2 是按不同情况自定：

ex. $a_2 = 1 \rightarrow$ 改进Euler

$a_2 = \frac{1}{2} \rightarrow$ 中点法

$a_2 = \frac{2}{3} \rightarrow$ Heun法

Runge-Kutta 方法 $y_{n+1}=y_n+h\Phi(t_n,y_n,h)$

~~四阶~~)级(任意阶) … Page 3.11

单步法的

def

相容性：$\Phi(t,y,0)=f(t,y)$，即步长趋于0时 Φ 与 $f(t,y)=y'$ 相等.

收敛性：$\forall t\in[a,b]$：$\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t固定}} y_n=y(t)$. $\boxed{*与相容性等价,充要条件}$ ($t\in[a,b]$, $h\in(0,h_0)$, $\forall y$ 有 $\Phi(t,y,h)$ Lipschitz条件).

稳定：$\exists h_0, C, \forall y_0$：$|y_n-\tilde{y}_n|\le C|y_0-\tilde{y}_0|$. 对 $\forall h<h_0$ 成立

(绝对稳定. P319).

Adams 法(多步)

单步法性质：1. 相容：$y_{n+1}=y_n+h\Phi(t_n,y_n,h)$ 中：$\Phi(t,y,0)=f(t,y)$

2. 收敛：~~$\lim\limits_{h\to 0} y_n=y(t_n)$~~ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ t_n=t固定}} y_n=y(t)$.

3. 稳定：$|y_n-\tilde{y}_n|\le C\underbrace{|y_0-\tilde{y}_0|}_{任意出发值}$ (描述 $h\to 0$ 时初始值变动带来的影响)

绝对稳定：$|\tilde{y}_m-y_m|<|\tilde{y}_n-y_n|$，$m>n$.

多步法性质：1. 相容：…

$y_{n+1}=\sum\limits^{k}\alpha_j y_{n-j}+h\sum\limits^{k}\beta_j f(t_{n-j},y_{n-j})$

$\rho(\lambda)=\lambda^k-\alpha_0\lambda^{k-1}-\cdots-\alpha_{k-2}\lambda-\alpha_{k-1}$ (特征多项式)

2. 收敛：$f(t,y)\in CR\{t\in[a,b], y\in R\}$

$\forall t$, $h\to 0$ $t_n=a+nh\to t$，$y_n\to y(t_n)$.

3. 稳定. $\max\limits_{nh\le(b-a)}|y_n-\tilde{y}_n|\le CM_0$

M_0 → $\max\limits_{0\le j\le k-1}|y_j-\tilde{y}_j|$ → k步稳定

章10. 常微分方程边值问题.

差分方法：
$$\begin{cases} y''(x_n) \simeq \frac{1}{h^2}\left(y(x_{n+1}) - 2y(x_n) + y(x_{n-1})\right) - \cancel{\frac{1}{12}h^2 y^{(4)}(\xi_n)} \\ y'(x_n) \simeq \frac{1}{2h}\left(y(x_{n+1}) - y(x_{n-1})\right) \end{cases}$$

代入~~初~~边值问题方程化为非线性方程组问题.

打靶法：解二阶微分方程2点边值 $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$, $y \in R$

$y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$.

找 t：~~开~~ $\underline{y(a) = \alpha, \ y'(a) = t}$ s.t. $\underline{y(b, t) = \beta}$.

(变为初值问题)

$\Rightarrow$ $y(b, t) - \beta = 0$ 的解 (非线性方程).

章11. 求线性方程组的最小二乘解 (数值方法).

$f(x) = \|Ax - b\|_2$ 极小：$\tilde{x}$：最小二乘解，最小二乘解中 Euclid 范数最小称为极小最小二乘解.

$\tilde{x} = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T b$，$A = FG$ 满秩分解.

最小二乘解问题 → 法方程组的解：η 为最小二乘解 $\Leftrightarrow$ $\boxed{\underset{\text{(法方程组)}}{A^TAx = A^Tb}}$，$x = \eta$. △

直交分解：

$A = QU$：$\begin{cases} Q: m \times r \\ U: r \times n \end{cases}$，$r = rank(A)$，A的秩

$A = QR$：$\begin{cases} Q: m \times n \\ R: n \times n \end{cases}$，当 $rank(A) = n$ 时

Q为直交阵：$Q^TQ = I_r$

$\Rightarrow$ $\tilde{x} = R^{-1}Q^Tb$. △

问题转为如何求 QU分解：

Householder矩阵： $\underline{H = I - 2vv^T}$, $\|v\|_2 = 1$, $v_{\cancel{m\times n}\, n}$

则： $H = H^T$, $H \cdot H^T = I$, $\forall\ \|x\|_2 = \|y\|_2$, $x, y \in R^{\cancel{m\times n}\, n}$.

$\exists\ H$: $Hx = y$.

求QR分解： $\sigma \to \alpha \to b \to u \to H$ $\qquad A = (a_1^{(1)} \cdots a_n^{(1)})$

step 1.

$$\sigma_1 = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha_1 = -\mathrm{sgn}(a_{11})\,\sigma_1$$

$$b = \alpha_1^2 - \alpha_1 a_{11}$$

$$u = a_1^{(1)} - \alpha_1 e_1$$

$$H = I_m - b_1^{-1} u_1 u_1^T$$

$$\Rightarrow HA = [\alpha_1 e_1,\ a_2^{(2)} \cdots H_1 a_n^{(1)}] . \longrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & a_{12}^{(2)} & \cdots \\ 0 & \boxed{\vdots\ \quad} & \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \text{step 2.}$$

step… $\to$ 上梯型.

列主元QR： $\|a_j\|_2$ $(j = 1, \cdots n)$ 最大作为主元.

$$\left(\sum_{i=k}^{m} (a_{ip}^{(k)})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \max\{\sim\}.$$

章12. 矩阵特征值问题.

λ, s.t. $\underline{Ax=\lambda x}$ 有解 x.

乘幂法: $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\cdots\geq|\lambda_n|$.

$\lambda_1 \simeq \frac{(v_{k+1})_i}{(v_k)_i}$, 其中 $v_k = A v_{k-1}$ (u_k), $(v_k)_i$ 指 v_k 的第 i 个分量

$v_k=\frac{Av_{k-1}}{m_k}$

收敛速度: 主要取决于 $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$.

↓ 提高避免上下溢, 每步规格化 v_k:

v_k 可作为 λ_1 特征向量的近似 $v_k=\frac{A^k v_0}{\max(A^k v_0)}$, $\max(v_0)$ 表示 v_0 中若大绝对值的分量.

$\lambda_1 \simeq m_k$

~~记 $u_k = A v_{k-1}$~~

乘幂法的加速: Aitken. $\tilde{m}_k = m_k - \frac{(m_{k+1}-m_k)^2}{m_{k+2}-2m_{k+1}+m_k}$

$\underline{m_k=\max(u_k)}$ 绝对值最大的分量

$v_{k-1} \downarrow u_k \downarrow v_k$ ☆

Rayleigh. $\lambda \simeq \frac{v_k^T A v_k}{v_k^T v_k}$

原点平移: $\left.\begin{matrix} A-pI \to \lambda_1' \\ A\to\lambda_1\end{matrix}\right\}$: $\lambda_1=\lambda_1'+p$

通过适当 p 使 $|\lambda_2|/|\lambda_1|$ 较小 ($|\lambda_2-p|/|\lambda_1-p|$)

反乘幂法: $\left.\begin{matrix} A^{-1}: \lambda_1' \\ A: \lambda_1\end{matrix}\right\}$: $\lambda_1=\frac{1}{\lambda_1'}$, 将乘幂法作用于 A^{-1} ⟵ 原点平移可用于此

逆迭代: $A u_k = v_{k-1}$, $v_k=\frac{u_k}{m_k}$ P385. 加速型.

~~$\Rightarrow u_k=\frac{v_{k-1}}{m_k}$~~

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_n}\simeq m_k}$

Householder 法: $A^n_{n\times n}$ 有 $n-2$ 步. $\sigma\to\alpha\to u\to b\to Q\to H$

step 1 $\sigma=\left(\sum_{i=2}^{n}(a_{i1})^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\alpha=-\mathrm{sgn}(a_{21})\sigma$

$u=(a_{21}-\alpha_1, a_{31}\cdots a_{n1})^T$

$b=\alpha_1^2-\alpha_1 a_{21}$

$Q=I_{n-1}-b_1^{-1}u_1u_1^T$

$H=\begin{pmatrix}1&0\\0&Q_1\end{pmatrix}$ ...

$A_1=HAH$