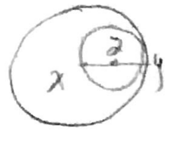
1. 设 ~~$x_n\to x$~~ X为度量空间，$A\subset X$，证明：A的一切内点A°必为开集

(Page. 63.2) ✓

Prove. $\forall x\in A^\circ$，$\exists B(x,y)\subset A$，$\forall z\in B(x,y)$



令 $\delta = y-\rho(z,x)$，易知 $B(z,\delta)\subset B(x,y)\subset A$

则 $z\in A^\circ$，故 $\boxed{B(x,y)\subset A^\circ}$，$A^\circ$为开集 ▨

z的任意性.

2. f为定义在X度量空间上的实泛函，证：f $\boxed{C}$ 的充要条件为下列任一成立：

(Page.64.11) (1). $\forall\alpha\in R$，$\{x\mid f(x)>\alpha\}$与$\{x\mid f(x)<\alpha\}$为开集

✓ (2). $\forall\alpha\in R$，$\{x\mid f(x)\geqslant\alpha\}$与$\{x\mid f(x)\leqslant\alpha\}$为闭集

Prove. (1) $\Rightarrow$. $\{x\mid f(x)>\alpha\}=f^{-1}(\alpha,+\infty)$

$\{x\mid f(x)<\alpha\}=f^{-1}(-\infty,\alpha)$

原像为开集，f $\boxed{C}$...　　开集任意并仍是开集

$\Leftarrow$. $\forall$开集$G\subset R$：$G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)$　　连续映射将开集映为开集

原象为开集　$\boxed{f^{-1}(\alpha_i,\beta_i)}=\{x\mid \alpha_i<f(x)<\beta_i\}$

$=\{x\mid f(x)<\beta_i\}\cap\{x\mid f(x)>\alpha_i\}$ 开集

故 $f^{-1}(G)=f^{-1}(\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i))=\bigcup_i f^{-1}(\alpha_i,\beta_i)$ 开集 ▨

3. R实数域，Define. $\rho_2(x,y)=|e^x-e^y|$，则 ρ_2 (R,ρ_2)是不完备的距离空间

(Page 65.17.) Prove.

1. 距离空间

(1) 正定：$\rho_2(x,y)\geqslant0$，$\rho_2(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

(2) 对称：$\rho_2(x,y)=|e^x-e^y|=\rho_2(y,x)$

(3) 三角不等式：$\rho_2(x,y)=|e^x-e^y|\leqslant|e^x-e^z|+|e^z-e^y|$

$=\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)$.

✓

2. 不完备：$\boxed{x_n=-n}$，$n\in N^*$

$\rho(x_n,x_m)=|e^{-n}-e^{-m}|\to0$ $(n,m\to\infty)$

基本列但不收敛

但 $\forall x\in R$，$\rho_2(x_n,x)=|e^{-n}-e^x|\to e^x\neq0$ $(n\to\infty)$ ▨

4. E赋范线性空间，$K \subset E$为紧集，$x \in E \setminus K$，证明：$\exists\, y \in K$，s.t.

(Page 121.11) $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, K)$.

Prove. $\mathrm{dist}(x,K) = \inf_{z \in K} \rho(x,z)$

$\exists\, y_n \in K$, s.t. $\rho(x, y_n) \to \mathrm{dist}(x,K)$ $(n \to \infty)$.

▲ $\boxed{\text{K为紧集}}$: $\exists\, y \in K$ s.t. $y_{n_k} \to y$ $(k \to \infty)$ 子列

$\mathrm{dist}(x,K) = \lim_{n\to\infty} \rho(x, y_n) = \lim_{k \to \infty} \rho(x, y_{n_k}) = \rho(x, y)$

即 $\|x-y\| = \mathrm{dist}(x,K)$. ▨

5 证明：多项式全体在$C[a,b]$上为第一类型的集合.(第一纲集)

(Page.122.17) Prove. 记P为多项式全体，P_n为次数$\leq n$的全体.

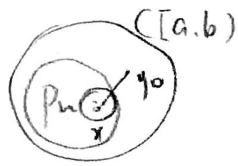
$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$，$C[a,b]$是完备的. P_n为n维线性空间

完备度量空间的子集：完备$\Leftrightarrow$闭

则P_n完备. P_n为闭集，下证P_n稀疏.

若P_n不稀疏：$(\overline{P_n})^\circ \neq \emptyset$，$(P_n)^\circ \neq \emptyset$

则$\exists\, B(x,r) \subset P_n$ $(x \in P_n)$



记

由$\boxed{\text{Riesz引理}}$：$\exists\, y_0 \in C[a,b]$，$\|y_0\| = 1$.

$\forall x \in P_n$，$\rho(x, y_0) \geq \frac{1}{2}$

△故 $\|\boxed{\frac{r}{2} y_0} - \frac{r}{2} x\| = \frac{r}{2} \rho(y_0, x) \geq \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{2} > 0$

?

わから

故 $\frac{r}{2} y_0 \overline{\in} P_n$，但 $\|\frac{r}{2} y_0\| = \frac{r}{2} < r$，$\frac{r}{2} y_0 \in B(0,r) \subset P_n$ 矛盾.

… ▨

度量空间中紧集是闭集

6. $\mathcal{U}$为内积空间，$x,y\in\mathcal{U}$，$x\perp y \Leftrightarrow \forall\alpha: \|x+\alpha y\|\geq\|x\|$

(Page.123.23). Prove. $\Rightarrow$. $\|x+\alpha y\|^2=(x+\alpha y,x+\alpha y)=(x,x)+\alpha(y,x)+\bar{\alpha}(x,y)+\alpha\bar{\alpha}(y,y)$

✓

$$=\|x\|^2+|\alpha|^2\|y\|^2\geq\|x\|^2$$

$\Leftarrow$. 只要$(x,y)=0$即可：

$$\|x+\alpha y\|^2=\|x\|^2+\alpha(y,x)+\bar{\alpha}\left((x,y)+\alpha\|y\|^2\right)$$

$$\geq\|x\|^2$$

消掉

取$\boxed{\alpha=-\frac{(x,y)}{\|y\|^2}}$：$\|x\|^2-\frac{(x,y)}{\|y\|^2}\cdot(y,x)\geq\|x\|^2$

即$|(x,y)|^2\leq 0$. ▨

7. E, E_1为赋范线性空间，$T_n, T\in\mathcal{B}(E,E_1)$. 若$\{x_n\}\subset E$依范数收敛于$x\in E$，$\{T_n\}$一致算子拓扑收敛于$T$，则$\{T_nx_n\}$依范数收敛于$Tx$.

(Page.219.8.). Prove. $\|T_nx_n-Tx\|\leq\|T_nx_n-Tx_n\|+\|Tx_n-Tx\|$

$$\leq\|T_n-T\|\|x_n\|+\|T\|\|x_n-x\|.$$

✓

又：$T_n\to T$, $x_n\to x$ $(n\to\infty)$，则$\|x_n\|\leq M$，$\|x_n-x\|\to 0$

$\|T_n-T\|\to 0$

则：$\|T_nx_n-Tx\|\to 0$ ▨

8. E, E_1为Banach空间，$T\in\mathcal{B}(E,E_1)$为满射，则$\forall$稠密$D\subset E$，有$\overline{T(D)}=E_1$.

反证

(Page.220.15). Prove. 若$\overline{T(D)}\neq E_1$，则$E_1-\overline{T(D)}\neq\emptyset$

(反证) $\forall y\in(E_1-\overline{T(D)})$，$T$为满射：$\exists x\in E$：$Tx=y$

满射是"象集"是满的

又 D在E中稠密，$\exists\{x_n\}\subset D\subset E$，$x_n\to x$.

✓

从而$Tx_n\to Tx=y$，$Tx_n\in T(D)$ 则 $y\in\overline{T(D)}$ 矛盾

故… ▨

9. $\{\eta_n\}$，$\forall x=\{\xi_n\}\in l^p\ (1<p<\infty)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\xi_n$ 收敛

则 $\{\eta_n\}\in l^q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(Page.220.22). Prove. 令 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\eta_k\xi_k$，则 $f_n\in(l^p)^*$

此处 $\sum_{k=1}^{n}\eta_k\xi_k$ 收敛，故 $\forall x$，$\sup_n f_n(x)\leq M$

由 $\boxed{\text{共鸣定理}}$：$\|f_n\|_q\leq M$

即 $\left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq M$，即有 $\{\eta_n\}\in l^q$. ▨

10. T为定义在Hilbert空间上($\mathcal{U}$)的有界线性算子，令$\mathcal{R}$为T的零空间。~~$\mathcal{U}$~~ $\mathcal{M}$为T^*的值域. 证明：$\mathcal{R}=\cancel{\mathcal{M}^\perp}$. $\cancel{\mathcal{U}^*}$ $\mathcal{U}^\perp$

(Page.262.4). Prove. 先证 $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}^\perp$：

$\forall x\in\mathcal{R}$，$y\in\mathcal{M}$.

$(x,y)=(x,T^*z)=(Tx,z)=(0,z)=0$?

则 $x\in\mathcal{M}^\perp$，从而 $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}^\perp$.

再证 $\mathcal{M}^\perp\subset\mathcal{R}$：

$\forall x\in\mathcal{M}^\perp$，$z\in\mathcal{M}$.

$(Tx,z)=(x,T^*z)=0$

令 $z=Tx$，即有 $\|Tx\|^2=0\Rightarrow Tx=0$

故 $x\in\mathcal{R}$. ▨

$\in\boxed{\mathcal{B}(Y^*,X^*)}$

T^*是共轭算子

$T^*(f)(x)=f(T(x))$

且 $\|T^*\|=\|T\|$

$\mathcal{R}$ $\xrightarrow{T}$ M (X空间)

x

$\mathcal{R}\subset\mathcal{U}^\perp$ | $\mathcal{R}=\{x\mid Tx=0,\ x\in\mathcal{U}\}$. $\mathcal{U}=\{T^*x\mid x\in\mathcal{U}\}$.

$\forall y\in\cancel{\mathcal{R}}\mathcal{R}$，$\forall z=T^*x\in\mathcal{U}$：

$(y,z)=(y,T^*x)=(Ty,x)=0$

$\mathcal{U}^\perp\subset\mathcal{R}$. | $\forall y\in\mathcal{U}^\perp$：

$(y,T^*x)=(Ty,x)=0$，$\Rightarrow Ty=0$，$y\in\mathcal{R}$.

1. $(l^1)^* \cong l^\infty$ 　　$\cong$：等距同构

Prove. 记 $e_i=(0,\cdots,\underset{i位}{1},0,\cdots)\in l^1$ 　构造 $e_i\in l^1$

构造 $y\in l^\infty$

对 $f\in(l^1)^*$，记 $\underline{y_i=f(e_i)}$，$i=1,2,\cdots$ ①

$|y_i|=|f(e_i)|\leq\|f\|\cdot\|e_i\|_1=\|f\|$

故 $\underline{\max|y_i|\leq\|f\|}$，即 $\|y\|_\infty$ 有界

令 $y=(y_1,\cdots,y_n,\cdots)\in l^\infty$，则有 $\|y\|_\infty\leq\|f\|$

①构造 $e_i\in l^1$

②构造 $y\in l^\infty$，$f\in(l^1)^*$

③构造 $T: f\longmapsto y$

i. 线性

ii. ~~"等距"~~ 保范 $|x-\sum_{i=1}^{\infty n}x_ie_i|$

iii. 满射 $\forall b\in l^\infty$

$f_b=\sum_{i=1}^{n}x_ib_i$

构造映射 △作 $T:(l^1)^*\ni f\longmapsto y\in l^\infty$，则有 $\|f\|\geq\|y\|_\infty=\|Tf\|$

① 证明T线性：

$\forall f,g\in(l^1)^*$，$\alpha\in K$

$T(f+\alpha g)=((f+\alpha g)e_1,\cdots,(f+\alpha g)e_n,\cdots)=\cdots=Tf+\alpha Tg$

② 证明 $\|Tf\|\geq\|f\|$（证明等距）

$\forall x\in l^1$，$\|x-\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\|=\|\sum_{i=n+1}^{\infty}x_ie_i\|_1=\sum_{i=n+1}^{\infty}|x_i|\longrightarrow0\quad(n\to\infty)$

则有 $\underline{x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i}$

则 $f(x)=f(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i)=\sum_{i=1}^{n}x_if(e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$

$|f(x)|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|x_i||y_i|\leq\|y\|_\infty\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|=\|x\|_1\|y\|_\infty$

因此 $\|f\|\leq\|y\|=\|Tf\|$，$\underline{\|f\|=\|Tf\|}$.

③ T为满射 　　同构：一一映射

$\forall b\in l^\infty$，$b=(b_1,b_2,\cdots b_n,\cdots)$

记 $\boxed{f_b(x)=\sum_{i=1}^{n}x_ib_i}$，$f_b(x)$ 显然为线性.

$|f_b(x))|\leq\sum_{i=1}^{\infty}|x_i||b_i|\leq\|b\|_\infty\|x\|_1$

即有 $\|f_b\|\leq\|b\|_\infty$

$\boxed{f_b\text{有界，}f_b\in(l^1)^*}$ 目标

$\underline{Tf_b=(f(e_1),\cdots,f(e_n),\cdots)}$

$=(b_1,\cdots,b_n,\cdots)=b$. ▨

2. $(C_0)^* \cong \underline{l^1}$ $\qquad$ C_0 数列极限趋于0

Prove. $\forall f \in (C_0)^*$，记 $y_i = f(e_i)$

令 $y = (y_1 \cdots y_n \cdots)$

由：$\underset{\|y\|_1}{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \cdot sgn(y_i) = \underline{\sum_{i=1}^{\infty} f(e_i) sgn(y_i) = f(\sum_{i=1}^{\infty} e_i\, sgn(y_i))}$ why.

$\leq \|f\| \, \| \sum_{i=1}^{\infty} e_i\, sgn(y_i) \|_{\infty} = \|f\|$. 最大

故 $y \in l^1$，$\underline{作 T: (C_0)^* \ni f \longmapsto y \in l^1}$

有 $\underline{\|f\| \geq \|y\|_1} = \|Tf\|$

① 线性. $\qquad$ 线性

$\forall f, g \in (C_0)^*$, $\alpha \in K$

$T(f + \alpha g) = \cdots = T(f) + \alpha Tg$.

② $\|Tf\| \geq \|f\|$ $\quad \forall x \in C_0$ $\qquad$ 同构 $\qquad$ △

$\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \|_{\infty} = \| \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i e_i \|_{\infty} = \max_{i > n} |x_i| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$.

$\boxed{x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i}$，则 $f(x) = f(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

故 $|f(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i||y_i| \leq \|x\|_{\infty} \|y\|$，$\underline{\|f\| \leq \|y\|_1}$

就有：$\|f\| = \|Tf\|$.

③ T满射. $\qquad$ ——映射

$\forall b$ 找到一个 f_b

$b = (b_1, \cdots, b_n, \cdots) \in l^1$

令 $\boxed{f_b(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i}$，则 $\|f_b\| \leq \|b\|_{\infty}$，$f_b$ 线性.（线性有界）

就有 $f_b \in (C_0)^*$

且 $Tf_b = \cdots = (b_1, \cdots, b_n, \cdots) = b$. ☒

Page.2 1. $x_n \to x$, $y_n \to y$, 则 $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x,y)$

$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_n)$

$\Rightarrow |\rho(x_n, y_n) - \rho(x,y)| \to 0$

Page.3.2. X度量, $A \subset X$, 则 A开集 $\Leftrightarrow A^c$闭集

$\Rightarrow$. $\forall x \in A$, $B(x,\delta) \subset A$, $B(x,\delta) \not\subset A^c$, $x \overline{\in} (A^c)'$

$(A^c)' \subset A^c$, 则A^c闭

$\Leftarrow$. $\forall x \in A$, $x \overline{\in} (A^c)'$, $\exists B(x,\delta) \not\subset (A^c)'$

$B(x,\delta) \subset A$, 则A开. ‖

Page 4.3. l^∞为不可分空间.

$T = \{t = (t_0 \cdots t_n \cdots) \mid t_i = 0$或$1\}$; $f: T \to B_2 = \{$全体二进制小数$\}$

$\overline{\overline{T}} \geq \overline{\overline{B_2}} = \overline{\overline{(0,1]}} = \aleph$

$\mathscr{B} = \{B(t, 1/3) \mid t \in T\}$, $\overline{\overline{\mathscr{B}}} = \overline{\overline{T}} \geq \aleph$

if $M \subset l^\infty$在l^∞稠密 即 $(M)' \supset l^\infty$

then $B(t,1/3) \cap M \neq \emptyset$, $\overline{\overline{M}} \geq \overline{\overline{\mathscr{B}}} \geq \aleph$ … ‖

Page 4.4. X, Y度量, $f: X \mapsto Y$, f在x连续 $\Longleftrightarrow \forall \{x_n\} \to x$, $\{f_n(x)\} \to f(x)$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $n > N$: $\rho(x, x_n) < \delta$, $\rho(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \delta = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in B(x,\delta)$, $\rho(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0$

(反证)

Page.4.5. X度量, $A \subset X$, $f(x) = \rho(x, A) = \inf_{z \in A} \rho(x, z)$, 则

(1). f连续

(2). $x \in \bar{A} \Leftrightarrow f(x) = 0$.

证明: (1). $f(x) = \rho(x, A) \leq \rho(x,y) + \rho(y, A) = \rho(x,y) + f(y)$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \rho(x,y)$

2. $\Rightarrow$ $x\in\bar{A}$，$\forall\delta=\frac{1}{n}$，$\exists x_n\in B(x,\delta)$. $x_n\in A$

则 $\rho(x,A)\leq\rho(x,x_n)\leq\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$

$\Leftarrow$ $\forall\delta>0$，$\exists x_n\in B(x,\delta)$，$x\in\bar{A}$.

Page 5.6. X 完备度量，$K_n=\bar{B}(x_n,r_n)$ 为 X 中闭球套列

$K_1\supset K_2\supset K_3\cdots\supset K_n\supset\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

则 $\exists x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$ 且 x_0 唯一

$x_i\in K_i$ $(i=1,\cdots)$ 则由 $r_n\to 0$，$\forall\varepsilon>0$. $\exists N$. $\forall m,n\geq N$

$\rho(x_m-x_n)<r_N<\varepsilon$，则 $\{x_n\}$ 基本列 $x_n\to x_0$

且 $\rho(x_n-x_0)<r_n$，则 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$.

$y_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$，$\rho(x_0-y_0)\leq\rho(x_0,x_n)+\rho(x_n,y_0)\leq 2r_n\to 0$ ||

Page.6.7. X 完备度量，则 X 第二纲集

E 疏朗 $(\bar{E})^{\circ}=\emptyset$，$\forall B(x,\varepsilon)$，$B(x,\varepsilon)\not\subset\bar{E}$

? $B(x,\varepsilon)\cap(\bar{E})^c\neq\emptyset$，$(\bar{E})^c$ 为稠密开集

若 $\exists E_n$ $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{E}_n\subset X$ 矛盾.

$\Rightarrow$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bar{E}_n)^c=\emptyset$，

Page 8.8 X 度量，X 紧 $\Leftrightarrow$ 有限交的闭集族都有非空交

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$：有限交闭集族. $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\emptyset$

(反证) 则 $\bigcup_{F\subset\mathcal{F}}F^c=X$，$\exists\bigcup_{i=1}^{n}F_i^c=X$

$\bigcap_{i=1}^{n}F_i=\emptyset$ (不满足有限交)

$\Leftarrow$ $\mathcal{A}$ 开覆盖：$\bigcup_{U\subset\mathcal{A}}U=X$，$\bigcap_{U\subset\mathcal{A}}U^c=\emptyset$

U^c 不是有限交：$\bigcap_{i=1}^{n}U_i^c=\emptyset$

$\Rightarrow$ $\bigcup_{i=1}^{n}U_i=X$

则 X 紧空间

Page 8.9 X, Y度量：$f: X \to Y$, $\boxed{C}$, $A \subset X$ 紧则 $f(A)$ 紧

$\mathscr{C}$ 是 $f(A)$ 开覆盖，$f^{-1}(\mathscr{C})$ 为 A 开覆盖

$$f(A) \subset \bigcup_{C \subset \mathscr{C}} C \ , \ f(A) \ \boxed{C}$$

$\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(C_i) = A$ ，则 $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ 成立

Page. 8.10. X 度量，$A \subset X$

(1). A любой序列紧 $\Rightarrow$ A 完全有界

(2) X 完备，A 完全有界 $\Rightarrow$ A 任序列紧

Prove. (1) (反证) $\exists \varepsilon_0 > 0$，A 无有限 ε_0-网.

$\{x_0\}$ 不在 ε_0-网

$\{x_0, x_1\}$ 不在

...

$\{x_0 \cdots x_n\}$ 不在 ，$\boxed{x_n \in A - \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_0)}$.

则该列 $\{x_n\}$ 中 $\forall x_n, x_m$ $(n \neq m)$ $\rho(x_n, \rho x_m) > \varepsilon_0$.

无收敛子列.

(2). $\{x_n\}$, $\exists B(x_i, \varepsilon)$ 有 ∞ 个点，不妨记为 $\{y_n\}$ 基本列.

Page 9.11. X 完备度量，T 为压缩映射，则 T 有唯一不动点

Prove. $x_0 \in X$ ，$x_1 = Tx_0$ ；$x_2 = Tx_1 \cdots$ $x_{n+1} = Tx_n$.

$\rho(x_1, x_2) \leq \theta \rho(x_1, x_0)$

$\rho(x_2, x_3) \leq \theta^2 \rho(x_1, x_0)$

$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq \theta^n \rho(x_1, x_0)$

则 $\boxed{\rho(x_n, x_{n+p})} \leq (\theta^n + \theta^{n+1} + \cdots + \theta^{n+p}) \rho(x_1, x_0)$

$\leq \boxed{\frac{\theta^n}{1-\theta} \rho(x_1, x_0)} \to 0$

则 $x_n \to x$ 为不动点.（T 连续映射） $x_{n+1} = Tx_n \to x = Tx$

若有 $y = Ty$，则 $\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty) \leq \theta \rho(x, y)$，$\rho(x, y) = 0$

Page 13.12 X_0为X真闭线性子空间，则$\forall \varepsilon \in (0,1)$.

$\exists x_0 \in X$，$\|x_0\| = 1$，$\rho(x_0, X_0) \geq 1-\varepsilon$.

Prove. $x_1 \in X - X_0$，$X_0' \subset X_0$ 则 $x_1 \notin X_0$

$\rho(x_1, X_0) = \inf_{y \in X_0} \rho(x_0, y) = \inf_{y\in X_0} \|x_0 - y\| = d$

则 $\exists y_1 \in X_0$ $\|x_1 - y_1\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$

则 $\boxed{x_0 = \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}}$，$\|x_0\| = 1$,

△ $\rho(x_0, X_0) = \|y - x_0\| \geq \frac{d}{\|x_1 - y_1\|} \geq 1 - \varepsilon$.

page 13.13. (Schwarz) X 内积空间，$x, y \in X$，则 $|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

等号当且仅当 x与y 线性相关时成立.

(想到)

△ Prove $\boxed{(x - \lambda y, x - \lambda y)} = (x,x) - \lambda(y,x) - \bar{\lambda}(x,y) - \lambda(-\bar{\lambda})(y,y)$

$= (x,x) - \lambda(y,x) - \bar{\lambda}\big((x,y) - \lambda(y,y)\big) \geq 0$

取 $\lambda = \frac{(x,y)}{\|y\|^2}$: $(x,x) - (y,x) \cdot \frac{(x,y)}{\|y\|^2} \geq 0$

$\Rightarrow$ $|(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$

当且仅当 $x - \lambda y = 0$ 时 "=" 成立.

Page 14.14. X 内积空间，$M \subset X$，则 $M^{\perp}$ 为X闭子空间

Prove. $x, y \in M^{\perp}$，$\alpha \in K$，$\forall z \in M$.

$(\alpha x + y, z) = (\alpha x, z) + (y, z) = 0$

$M^{\perp}$为$\boxed{\text{线性的}}$ (step 1)

△? $M^{\perp}$线性闭在哪?

极限

main $\begin{cases} x \in \overline{M^{\perp}}，\exists \{x_n\} \subset M^{\perp}，x_n \to x \ (n \to \infty) \\ (x, z) = \lim_n (x_n, z) = 0 \\ x \perp M，\ x \in M^{\perp} \end{cases}$

Page 15.15 X内积空间，$E \subset X$ 为凸完备集，则 $\forall x \in X$，
存唯一 $y \in E$, s.t. $\|x-y\| = \rho(x, E)$.

① 下确界
② 凸集：$\frac{1}{2}(y_m+y_n) \in E$
③ 完备. $y_n \to y \in E$

Prove. $\rho(x, E) = \inf_{y\in E} \|x-y\| = d$. 则 $\{y_n\}$: $\|x-y_n\| \xrightarrow{\text{下确界}} d=\alpha$

E凸：$(y_n+y_m)/2 \in E$

$\|y_n - y_m\|^2 = 2(\|y_n - x\|^2 + \|x-y_m\|^2) - \|2x-(y_n+y_m)\|^2$ △

$\leq \cdots \leq 2(\|y_n - x\|^2 + \|x-y_m\|^2) - \boxed{4\alpha^2} \to 0.$

则 $\{y_n\}$ 为基本列 step 1 ，E完备

$y_n \to y \ (n\to\infty)$.

若 y' 也成立：~~$\|y-y'\| \leq \|y-x\| + \|x-y'\| = 0.$~~

$\|y-y'\|^2 = 2(\|y-x\|^2 + \|x-y'\|^2) - \|2x-(y+y')\|^2$ △

≤ 0.

Page 15.16 X Heilbert 空间，$Y \subset X$ 子空间(闭)，$\forall x \in X$，存唯一 $y \in Y$，$z \in Y^{\perp}$
s.t. $x = y+z$，即 $X = Y \oplus Y^{\perp}$

prove Y为 Hilbert 上闭子空间，Y为完备的凸集 ①

$\exists y$: $\boxed{\rho(x, Y) = \|x-y\|}$，记 $z = x-y$. 只要 $z \perp Y$ 即可 ②

$\forall u \in Y$, $y+\lambda u \in Y$ → 构造z与u的内积

$\alpha^2 \leq \boxed{\|x-(y+\lambda u)\|^2} = (z-\lambda u, z-\lambda u) = \|z\|^2 - \lambda(u,z) - \bar{\lambda}((z,u) - \lambda\|u\|^2)$. △ ③

$\|z\|^2$

取 $\lambda = \frac{(z,u)}{\|u\|^2}$: $\alpha^2 \leq \alpha^2 - |(z,u)|^2/\|u\|^2$

即 $(z,u) = 0$.

② 唯一性. 设另有 y', z', $x = y'+z' = y+z$

则 $y-y' = z-z' \in Y \cap Y^{\perp}$, $\Rightarrow y=y'$, $z=z'$

Page 15.17 (Bessel) X内积，M为标准正交系，则 $\sum_{e\in M}|(x,e)|^2\le\|x\|^2$

prove. ① $\boxed{M_0}=\{e\in M \mid (x,e)\neq 0\}$

$\boxed{M_k}=\{e\in M \mid (x,e)\ge \frac{1}{k}\}$

有限个 $e_i\in M$，$c_i=(x,e_i)$，则有

② $\boxed{\|x-\sum_{i=1}^n c_ie_i\|^2}=(x-\sum_{i=1}^n c_ie_i,\ x-\sum_{i=1}^n c_ie_i)$

$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^n|c_i|^2$

△

→ 就有 $\sum_{i=1}^n|(x_i,e_i)|^2=\sum_{i=1}^n|c_i|^2\le\|x\|^2$ 则

③

当每个 $e_i\in M_k$ 时：$n/k^2\le\sum_{i=1}^n|c_i|^2\le\|x\|^2$，$\boxed{M_k\text{为有限集}}$

$\boxed{n\to\infty}$

则 $M_0=\cup_{k=1}^\infty M_k$ 为可数集：$M_0=\{e_1\cdots e_n\cdots\}$

$\sum_{e\in M}|(x,e)|^2=\sum_{i=1}^\infty|(x,e_i)|^2=\sum_{i=1}^\infty|c_i|^2\le\|x\|^2$ ■

* Page 17.18. X, Y 赋范，$T: X\supset D\to Y$，线性算子.

则 T连 ⟺ T有界

prove. ⇐ $\exists M\ \forall x\in D$，$\|Tx\|\le M\|x\|$

$\forall x_n, x$,

$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\le M\|(x_n-x)\|\to 0$

⇒ 若T无界，$\forall M$，$\exists x\in D$：$\|Tx\|\ge M\|x\|$.

记 $\boxed{y_n=\frac{x_n}{n\|x_n\|}}$，$\|y_n\|\to 0$.

但 $\|Ty_n\|=\frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|}>1$ ⟵ M任意性

则 $Ty_n\not\to 0$ 与连续矛盾.

Page 19.19. X, Y 赋范，$\mathscr{B}(X,Y)$ 为线性赋范空间

Prove. $\mathscr{B}(X,Y)=\{T \mid T: X \longmapsto Y$ 有界线性算子$\}$.

* 按范数定义证

1. 非负 $\|T\| \geq 0$ 显然成立，$\|T\|=0 \Leftrightarrow \forall x: \frac{\|Tx\|}{\|x\|}=0$

即 $Tx=0$ ∴ $T=0$.

$Tx \in Y$

2. 齐次 $\|\alpha T\| = \sup\limits_{x\in X} \frac{\|\alpha Tx\|}{\|x\|} = |\alpha| \sup\limits_{x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = |\alpha|\,\|T\|$

3. 三角 $\|T+S\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx+Sx\| \leq \sup \|Tx\| + \sup \|Sx\| \cdots$

Page 19.20. X 赋范，Y Banach 则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 为 Banach 空间　① 证完备

Prove. $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(X,Y)$，基本列　　△细节说明.

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，$m,n>N$：$\|T_n - T_m\| < \varepsilon$.　　极限运算为线性.

则 $\forall x \in X$：$\|T_n x - T_m x\| < \varepsilon \|x\|$　　△

$\{T_n x\}$ 为 Y 中基本列，有 $T_n x \longrightarrow Tx$.　　(T_n 为线性) 需说明 T 为线性算子

则 $\|T_n x - T_m x\| \longrightarrow \|Tx - T_m x\| < \varepsilon\|x\|\ (n\to\infty)$

即 $T_n \longrightarrow T\ (n\to\infty)$

(问题ある!!)　　亦要说明 $T_n - T \in \mathscr{B}(X,Y)$，$T \in \mathscr{B}(X,Y)$.

Page 21.21 (闭图象定理) X, Y 为 Banach 空间，$T: X \longrightarrow Y$ 为线性闭算子

则 T 为连续算子　等价有界，G，$P: (x, Tx) \longmapsto x \in X$，　P 有界，P^{-1} 有界

Prove. $G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in X\}$ 为闭集，$X \times Y$ 亦是 Banach 空间　　$\|T\| \leq \|P^{-1}\|$

作 $P: G(T) \longmapsto x \in X$. 为线性且一一对应

$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$ 规定 (Page 21 左中)

则 P 为有界线性算子，由逆算子定理

$P^{-1}: x \longmapsto (x, Tx)$ 也

又有 $\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|P^{-1}(x)\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|x\|$.　$\boxed{\text{定理17}}$

$\|T\| \leq \|P^{-1}\|$. T 回

Page.22.22. X,Y Banach, $T_n\in\mathcal{B}(X,Y)$, 则 $\exists T\in\mathcal{B}(X,Y)$:

$\forall x\in X$, $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx \Leftrightarrow$

(1) $\|T_n\|$ 有界 (2) $\exists G\subset X$ 为稠密子集, s.t. $\forall x\in G$, T_nx 基本列

共鸣定理.

Prove $\Rightarrow$ $\cancel{\|T_nx-Tx\|<\varepsilon\|x\|}$ T_nx 收敛 则 T_nx 有界

由共鸣定理, $\exists M$. $\forall n$: $\|T_n\|\le M$.

$\Leftarrow$ $\|T_n\|\le M$, $x\in G$: ~~$\forall\varepsilon>0, \exists N, m,n>N$~~

~~$\|T_nx'-T_mx'\|\le\varepsilon$, 又 X 完备~~.

$\boxed{G\text{稠密}. x'\in G.}$

$\|x-x'\|\to 0$.

$\|T_mx-T_nx\|\le\|T_m(x-x')\|+\|T_n(x-x')\|+\|T_mx'-T_nx'\|$

$\le\|T_m\|\|(x-x')\|+\|T_n\|\|(x-x')\|+\varepsilon<\underline{3\varepsilon}$

$T_nx\to Tx$ (Y 中基本列)

* 要证明 $Tx\in\mathcal{B}$: T 显然是线性算子.

①线性 ②有界

$\|Tx\|\le\|T\|\|x\|=\lim\inf\limits_{n}\|T_n\|\|x\|\le M\|x\|$, 有界

Page 24.23. X 赋范, $G\subset X$ 线性子空间, $x_0\in X$, $d\triangleq\inf\limits_{y\in G}\|x_0-y\|>0$

则 $\exists f\in X^*$: $x\in G$ 时 $f(x)=0$; $f(x_0)=d$; $\|f\|=1$

构造法

Prove. 作 $G_1=\{\alpha x_0+x\mid x\in G, \alpha\in K\}$. (线性子空间)

$g: G_1\longmapsto\alpha d\in K$ (线性)

$g(x)=0$, $g(x_0)=d$

$\|g(\alpha x_0+x)\|=\alpha d\le\|\alpha x_0+x\|\Rightarrow\|g\|\le 1$

$d=g(x_0)=g(x_0-x)\le\|g\|\cdot\|x-x_0\|\Rightarrow\|g\|\ge 1$

$\Rightarrow\|g\|=1$. g 的延拓 $f\in X^*$, 有 $\|f\|=\|g\|=1$.

延拓~~定理~~.

$G_1=\{\alpha x_0+x\}$ $(x\in G)$

$g:\alpha x_0+x\longmapsto\alpha d$.

即为所求

Page 25.24 X 赋范：

(1). $x\in X$, x^{**}: $X^* \ni f \longmapsto f(x)\in K$,

则 x^{**} 为 X^* 上(线性)泛函 且 $\|x^{**}\|=\|x\|$ ~~构造~~ $f(x)=\|x\|$, $\|f\|=1$.

(2) $**=T: X\ni x \longmapsto x^{**}\in X^{**}$ 是线性保范的

Prove. (1). $x^{**}(\alpha f+g)=\alpha f(x)+g(f(x))=\alpha x^{**}(f)+x^{**}(g)$

$\|x^{**}\|=\sup\limits_{f}\frac{\|f(x)\|}{\|f\|}$, 又 $\boxed{|f(x)|}\le\|f\|\|x\|\Rightarrow\|x^{**}\|\le\|x\|$

▲ 由延拓定理：$\exists f\in X^*$: $\boxed{f(x)=\|x\|,\ \|f\|=1.}$ 范数相等

$\boxed{\|x\|=|f(x)|}=x^{**}f\le\|x^{**}\|\|f\|\Rightarrow\|x^{**}\|\le\|x\|$

∨

(2) $**(\alpha x+y)(f)=(\alpha x^{**}+y^{**})(f)=\ldots$ → 用(1)结论 加上(f)

由 $\|x^{**}\|=\|x\|$ 可知 是保范的

Page 25.25. X $(l^p)^*\cong l^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ▲

prove. $e_i=(0,\cdots,\underset{i位}{1},\cdots)\in l^p$. 对 $f\in(l^p)^*$, $y_i=\cdots$

Page.26.27. X X, Y, Z 赋范. $T\in\mathcal{B}(X,Y)$.

(1). ∃唯一 $T^*\in\mathcal{B}(Y^*,X^*)$: $\forall x\in X$, $g\in Y^*$

$T^*(g)(x)=g(T(x))$ 且 $\|T^*\|=\|T\|$

(4) 典范映射下 X为 X^{**} 的子空间, Y为 Y^{**} 子空间, 则 T^{**} 为T延拓.

Prove. (1) $T^*: Y^*\ni g\longmapsto f\in X^*$ (define $f: x\to g(T(x))$)

$T^*(g)(x)=g(T(x))$ 线性,有界 ✓

T^* 线性, 有界

▲ 由延拓 $g(T(x))=\|T(x)\|$ 且 $\|g\|=1$. (类似上题)

Page 27.28. X可分赋范. $f_n \in X^*$有界 $f_n(x)$有界数集

则$\exists f_{n_k}$, $f \in X^*$, $\forall x \in X$. $|f_{n_k}(x) - f(x)| \to 0$

即 f_{n_k} 弱*收敛.

(X^*中有界集为弱*收敛集)

Prove. $\boxed{G: \{x_1 \cdots x_k \cdots\} \text{在}X\text{上稠密}}$

$|f_n(x)| \leq M\|x\|$, 选定x_i后就成了

有界数列. 则有收敛子列. $\boxed{\text{stainhaus law}}$

[Steinhaus law]

Page.27.29. X赋范. f是X^*上线性范函.

则 f有界 $\Leftrightarrow$ f零空间$\mathcal{N}(f)$为闭集

Prove $\Rightarrow$. $\overline{\mathcal{N}(f)} \ni x$, $x_n \in \mathcal{N}(f) \to x$

$f(x_n) = 0$. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

$y_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)}$ $\Leftarrow$ f无界: $\forall m = n$: $\exists x_n$: $|f(x_n)| \geq n\|x_n\|$

构造 $y_n = x_n / f(x_n) \leq \frac{1}{n} \to 0$.

? $y_n - y_1 \in \mathcal{N}(f)$:

$y_n - y_1 \to -y_1 \in \mathcal{N}(f)$. 矛盾.

Page 28.30. X Hilbert. $f \in X^*$, 则唯一 $z \in X$: $\forall x \in X$. $f(x) = (x, z)$

且 $\|f\| = \|z\|$

反之对$\forall x \in X$, 作$f_z(x) = (x, z)$, 则$f_z \in X^*$且$\|f_z\| = \|z\|$.

Prove ① $x_0 \bar{\in} \mathcal{N}(f)$, $y_0 \in \mathcal{N}(f)$, $z_0 \in \mathcal{N}(f)^\perp$, $x_0 = y_0 + z_0$

② $\forall x$. $(f(x)z_0 - f(z_0)x, z_0) = 0$.

③ $f(x) = (x, \underbrace{\dfrac{\overline{f(z_0)}\, z_0}{\|z_0\|^2}}_{z})$ $f: x \mapsto (x, z)$.