重点题型及方法总结.

注：重点复习二，三，四章，这才是大头。细枝末节等复习完这些再看.

题型一：上，下限集的应用.（第二章）

$\overline{\lim_n} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ （$\forall x\in \overline{\lim_n} E_n$，则 $x$ 必属于每个 $\bigcup_{k}^{\infty} E_k$，$k=1,2,\cdots\infty$）.

②：设 $\{E_n\}$ 为可测集列且 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n<\infty$，则 $m(\overline{\lim_n} E_n)=0$ （课后题）.

级数收敛

证明：由于 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n<\infty$，则对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $\sum_{n=N}^{\infty} mE_n<\varepsilon$

故 $m(\overline{\lim_n} E_n)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)\le m(\bigcup_{k=N}^{\infty} E_k)=\sum_{k=N}^{\infty} mE_k<\varepsilon$. 证毕.

③：若 $\{E_n\}$ 是一列可测集，且 $mE_n<\frac{1}{n^2}$，则 $m(\overline{\lim_n} E_n)=0$ （补充题）.

所以只需证明 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n<\infty$ 即可. 其余证明可套用上题.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\frac{1}{n^2}+\cdots<\infty$ （这是P级数收敛准则）.

这是由于 $E_n$ 的求和有限，无限可不一定对.

⑨：设 $\{E_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的集列，满足 $\sum_{n=1}^{\infty} m^*E_n=\infty$，问是否有 $m^*(\overline{\lim_n} E_n)>0$？（课后题）.

否：令 $E_n=[0,\frac{1}{n})$（渐缩集），则 $\overline{\lim_n} E_n=\lim_n E_n=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ （见 P10）.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}\cdots=\infty$ （P级数收敛准则，见数分）.

⑦ 渐张/缩集与上下极限的关系.

但 $m^*(\overline{\lim_n} E_n)=m^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_n)=0$

题型二：可测函数和差积商的综合运用 以及嵌入可测集的并交补仍可测（第三章）

考点：①可测集E上定义的两个可测函数的和，差，积，商仍是可测函数.

②可测集的交（可列交），并（可列并），补，差，仍是可列集.

④：设 $f(x)$ 是~~可测集~~ $E$ 上的可测函数，$G$，$F$ 分别为 $R$ 中的开集与闭集，试问 $E(f\in G)$，$E(f\in F)$ 是否可测，这里记号 $E(f\in A)=E(x:f(x)\in A)$ （课后题）.

证：$G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)$ （构成区间）

$E(f\in G)=E(f\in\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i))=\bigcup_i E(f\in(\alpha_i,\beta_i))=\bigcup_i E(\alpha_i<f<\beta_i)$.

$=\bigcup_i[E(f>\alpha_i)\setminus E(f\ge\beta_i)]$ （由于 $f$ 是 $E$ 上的可测函数. 故 $E(f>\alpha_i)$ 可测. $E(f\ge\beta_i)$ 可测. 可测集的差，并（可列并）仍可测）.

⑫ 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，$g(x)$是$[a,b]$上的有限可测函数，则

$f(g(x))$是可测函数（课后题）

证：对$\forall \alpha\in\mathbb{R}$，$E(f(g)>\alpha)=E(g\in f^{-1}(\alpha,+\infty))$

由于$f$是连续函数，则由开集的原象是开集，可知$f^{-1}(\alpha,+\infty)\in G$（开集）

则由④题结论可知$E(g\in f^{-1}(\alpha,+\infty))$可测，故$E(f(g)>\alpha)$可测．$f(g)$为可测函数．

①：设$f,g$为$E$上可测函数，试证$E(f>g)$是可测集（课后题）

法一证明：由$f,g$为$E$上的可测函数，则$f-g$也为可测函数

由可测函数定义$\forall\alpha\in\mathbb{R}$．$E(f-g>\alpha)$为可测集．特别地，取$\alpha=0$．则$E(f>g)$为可测集

可以

题型三：有理数逼近无理数证明可测函数

对上述①题有法二证明：由于$\mathbb{R}$上任一无理数逼近（模板）．

即对$\forall\alpha\in\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ $\exists r_n$（有理数列），$r_n\to\alpha$，不妨设$r_n<\alpha$（这可在下题用到）．

则 $E(f>g)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E(f>r_n)\cap E(g<r_n))$（其中$r_n$是$\mathbb{R}$上有理数列）．

都可测

则$E(f>g)$可测

②：证明$f(x)$为$E$上可测函数的充要条件：对任一有理数，集合$E(f>r)$恒可测（课后题）

证明：$\Rightarrow$ 显然，

$\Leftarrow$ 即证．$\forall\alpha\in\mathbb{R}$．集合$E(f>\alpha)$恒可测，由于对任一有理数．$E(f>r)$恒可测．

故只需证对$\forall\alpha\in\mathbb{R}|\mathbb{Q}$，集合$E(f>\alpha)$恒可测

对$\forall\alpha\in\mathbb{R}|\mathbb{Q}$，$\exists r_n$（有理数列）．使得$r_n\to\alpha$，不妨设$r_n<\alpha$．

则 $E(f\geq\alpha)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E(f\geq r_i)$．故$E(f>\alpha)$恒可测

题型四：依测度收敛 $\Rightarrow$ F.Riesz定理应用 ✱　a.u

⑰．设函数列$f_n$在有界集$E$上测度收敛于$f$．且在$E$上几乎处处有$f_n(x)\leq g(x)$，$n\in N$，（课后题）

证明：在$E$上几乎处处有$f(x)\leq g(x)$．　分析：$\Downarrow$ —

由 $f_n\xrightarrow{m}f$ 及F.Riesz定理．

分析部分

可知 $f_{n_k}\xrightarrow{a.e}f$．（$f_{n_k}$是$f_n$的子列）．①这是依测度的隐含条件．②另外除去零测度

集，先要把零测度构造出 就这题而言有两个几乎处处

$\begin{cases} f_{n_k}\xrightarrow{a.e}f & : E_0=\{x\in E\mid f_{n_k}(x)\not\to f\}. \\ f_n(x)\leq g(x)\ a.e. & E_n=\{x\in E\mid f_n(x)>g(x)\}\end{cases}$

不行 注意区分

F.Riesz定理：$f_n\xrightarrow{m}f\Longleftrightarrow$

? ∃ $f_n$ 子列 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e} f$.

$f_n \le g$

$f_{n_k} \to f \le g$

证明：由 $f_n \xrightarrow{m} f$ 及 F. Riesz 定理知存在子列 $\{f_{n_k}\}$

使得 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e} f$.

令 $E_0 = \{x \in E \mid f_{n_k}(x) \not\to f(x)\}$　令 $\tilde{E} = E_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ 为零测度集.

$E_n = \{x \in E \mid f_n(x) > g(x)\}$

则对于 $\forall x \in E \setminus \tilde{E}$ 都有 ① $f_{n_k} \to f$　② $f_{n_k}(x) \le g(x)$.

故 $f(x) \le g(x)$. 对 $\forall x \in E \setminus \tilde{E}$ 都成立.

因此 $f(x) \le g(x)$　a. e　$x \in E$

⑳. 设函数列 $f_n(x)$ 在 $E$ 上测度收敛于 $f(x)$，且在 $E$ 上几乎处处有 $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$，$n \in N$，试证 $f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ $(n \to \infty)$　（课后题）

证：由 $f_n \xrightarrow{m} f$. F. Riesz 定理. 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$.

使得 $f_{n_k} \xrightarrow{a.e} f$. 令 $E_0 = \{x \mid f_{n_k}(x) \not\to f(x)\}$.

$E_k = \{x \mid f_n(x) > f_{n+1}(x)\}$.

$f_n \xrightarrow{m} f$

$\Rightarrow$ $f_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$

$f_{n_k} \uparrow$

则 $\tilde{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} E_k$ 为零测度集

则 $(f_{n_k} \to f,\ f_n \le f_{n+1})$ 在 $x \in E \setminus \tilde{E}$ 成立.　$\Rightarrow$ $f \xrightarrow{a.e} f$.

由数学分析可知 $f_n \to f$. 在 $x \in E \setminus \tilde{E}$ 成立. 故 $f_n \xrightarrow{a.e} f$.

其子列收敛.

补证：单调数列 $\{a_n\}$ 极限存在的充分必要条件其子列收敛.

必要性显然. 现证充分性：不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增. 且有 $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

$\forall \varepsilon > 0$. $\exists K$. $\forall k > K$：$-\varepsilon < x_{n_k} - a \le 0$. 取 $N = n_{K+1}$. $\forall n > N$.

~~[illegible]~~ $\exists M > K+1$. 使得 $n_{K+1} < n < n_M$.

于是 $-\varepsilon < x_{n_{K+1}} - a \le x_n - a \le x_{n_M} - a \le 0$　故 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

题型五：鲁津定理的应用 ✱

考点：可测函数用连续函数逼近（鲁津 2 号定理）. 非重点

设 $f(x)$ 是有界可测集 $E$ 上几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在实直线上的连续函数 $g(x)$，满足 $mE(f \ne g) < \varepsilon$

a.e.

①：设 $f$ 是 $E$ 上可测函数，证明存在 $R$ 上连续函数 $f_n$，使得 $f_n$ 在 $E$ 上依测度收敛于 $f$。

（补充习题）

证明：由鲁津定理知 $\forall n\in N$，存在连续函数 $f_n$，使得 $mE(f_n\neq f)<\frac{1}{n}$。

故对于 $\forall \eta>0$，$E(|f_n-f|\geq\eta)\subset E(f_n\neq f)$，从而 $mE(|f_n-f|\geq\eta)<\frac{1}{n}$。

令 $n\to\infty$，可得 $mE(|f_n-f|\geq\eta)\to 0$。

注：叶普定理是重点，二者必考，若叶为名词解释则鲁津定理一定会考应用，反之亦然。

②：设 $f$ 在 $[a,b]$ 上可微，证明 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数（补充）

证明：$\forall x\in[a,b]$　$x+\Delta x\in[a,b]$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

令 $\Delta x=\frac{1}{n}$　则 $f'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$　令 $g_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$

由于 $f$ 可微，则 $f$ 必连续，故 $g_n(x)$ 也连续，即 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=f'(x)$。（可测由连续函数逼近）

~~由鲁津定理可知~~ 由此可知，$f'(x)$ 可测

题型六：积分换序（重点）☆

③：设函数 $f(x)$ 在康托尔三分集 $P_0$ 上定义为零，在 $P_0$ 的补集中长为 $1/3^n$ 的构成区间上定义为 $n$（$n\in N$），试证 $f\in L$，并求积分值（易错题）。levi 引理

错解：

$[0,1]=G_0\cup P_0$，设 $e_n$ 为 $G_0$ 中长度为 $\frac{1}{3^n}$ 的构成区间的并，则 $G_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n$　$me_n=\frac{1}{3^n}\times 2^{n-1}=(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{2}$

则 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in P_0\\ n & x\in e_n\quad n=1,2,\cdots\end{cases}$

$$\int_{[0,1]}f(x)\,dm=\int_{G_0}+\int_{P_0}$$
$$=\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}e_n}f(x)\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{e_n}f(x)\,dm$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot me_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{2}=3.$$

错因：简单函数的分划是有限的，不是无限的。

正确解法：

$f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in P_0\\ n & x\in e_n\end{cases}$　$f_n$ 是简单函数则 $f_n$ 可测函数 —列简单函数

$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$，由 Levi 引理①

则 $\int_{[0,1]}f(x)\,dm$

$$=\int_{[0,1]}\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\,dm=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,1]}f_n(x)\,dm$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(\frac{2}{3})^n\cdot\frac{1}{2}=3.$$

⑲ 设 $f(x)\geq 0$ 为可测函数，令

$$\{f(x)\}_n=\begin{cases} f(x), & 若\ f(x)\leq n \\ 0, & 若\ f(x)>n \end{cases}$$

则当 $f(x)$ 几乎处处有限时，有

$$\lim_n \int_E \{f(x)\}_n dm=\int_E f(x)dm$$

levi 引理 2.

证：由于 $0\leq f_1\leq f_2\leq\cdots$；$\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ 且 $\{f(x)\}_n$ 是可测的（显然）.

所以 $\lim\limits_n \int_E \{f(x)\}_n dm=\int_E \lim\limits_{n\to\infty}\{f(x)\}_n dm=\int_E f(x)dm$.

⑳. 设 $f(x)$, $f_n(x)$ $(n\in N)$ 均是 $E$ 上可积函数，$f_n$ 几乎处处收敛于 $f$, $n\to\infty$. 且

a.e.

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|dm=\int_E|f(x)|dm$，试证对任意可测子集 $e\subset E$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm=\int_e|f(x)|dm$$

（法杜引理）.（课后习题）.

?

$$\int_e|f(x)|dm=\int_e\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|dm\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm$$

$\overline{\lim}$ 与 $\underline{\lim}$ ?

$$=\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(\int_E|f_n(x)|dm-\int_{E\setminus e}|f_n(x)|dm\right)=\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)|dm-\underline{\lim}\int_{E/e}|f_n(x)|dm$$

$$\leq\int_E|f(x)|dm-\int_{E/e}\underline{\lim}_{n\to\infty}|f_n(x)|dm=\int_E-\int_{E/e}=\int_e|f(x)|dm.$$

由此 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm=\overline{\lim}_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm$ 存在. 且满足 $\int_e|f_n(x)|dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_e|f_n(x)|dm$. 证毕.

⑯. 设 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上可积，试证：对每个 $n\in N$，$[nf(x)]$ 可测且有等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{(a,b)}[nf(x)]dm=\int_{(a,b)}f(x)dm$$

（lebeagu 控制收敛定理）.

找到可积 $f+1$

$f_n\to f$

由于 $\frac{1}{n}[nf(x)]\leq\frac{1}{n}(|nf(x)|+1)\leq|f(x)|+1\in L(a,b)$

又 $\left|\frac{1}{n}[nf(x)]-f(x)\right|=\frac{1}{n}\left|[nf(x)]-nf(x)\right|\leq\frac{1}{n}\to 0$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[nf(x)]=f(x)$.

由勒贝格控制收敛定理. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{(a,b)}[nf(x)]dm=\int_{(a,b)}f(x)dm$.

题型七：区间"小游戏"

例1. 设 $mE<\infty$，则有 $L^P\subset L^1\ (P\geq 1)$，则 $L^P$ 是 $L^1$ 的子类（$P\geq 1$，$L^P$ 空间）

$$\int_E |f|\,dm = \int_{E(|f|\geq 1)} |f|\,dm + \int_{E(|f|<1)} |f|\,dm$$

$$\leq \int_{E(|f|\geq 1)} |f|^P dm + mE < \infty$$

由于 $mE<\infty$ 且 $f\in L$，可知 $|f|^P\in L$，故 $L^P\subset L^1$

3. 若 $f_n, f: E\to R$ 可积，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n-f|\,dm=0$，则 $f_n\xrightarrow{m} f$（补充题）

证明：$mE(|f_n-f|\geq \eta)\leq \int_{E(|f_n-f|\geq\eta)} \frac{|f_n-f|}{\eta}\,dm \leq \frac{1}{\eta}\int_E |f_n-f|\,dm$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_n-f|\,dm=0$ 故 $n\to\infty$ 时 $mE(|f_n-f|\geq\eta)\leq \frac{1}{\eta}\int_E|f_n-f|\,dm\to 0$

即 $f_n\xrightarrow{m} f$ ✓

~~25~~. 设 $mE<\infty$，则 $f(x)$ 在 $E$ 上可积的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geq n)$ 收敛。（可不掌握）

证明：$\Rightarrow$

$$+\infty > \int_E |f(x)|\,dm = \int_{\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} E(n\leq|f|<n+1)} |f(x)|\,dm = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{E(n\leq|f|<n+1)} |f(x)|\,dm$$

$$\geq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{E(n\leq|f|<n+1)} n\,dm = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(mE(|f|\geq n) - mE(|f|\geq n+1))$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,mE(|f|\geq n) - \sum_{n=0}^{+\infty} n\,mE(|f|\geq n+1)$$

$$= mE(|f|\geq 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} mE(|f|\geq n)$$

$\Leftarrow$ $\int_E |f(x)|\,dm = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{E(n\leq|f|<n+1)} |f(x)|\,dm \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\int_{E(n\leq|f|<n+1)} (n+1)\,dm$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,mE(n\leq|f|<n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,mE(|f|\geq n) - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,mE(|f|\geq n+1)$$

$$= mE(|f|\geq 1) - \sum_{n=1}^{\infty} mE(|f|\geq n+1) < +\infty$$

7. 若可测函数 $f$ 在可测集 $E$ 上满足 $\int_E f^2(x)dm<+\infty$，且 $mE<+\infty$，则 $\int_E f(x)dm<+\infty$ ★

（课后习题）

$$\int_E |f(x)|dm=\int_{E(|f|\geq 1)}|f(x)|dm+\int_{E(|f|\leq 1)}|f(x)|dm$$

$| \ |^2$，

$[0,1)$ $(1,+\infty)$

$$\leq \int_{E(|f|\geq 1)}|f^2(x)|dm+\int_{E(|f|\leq 1)}1\,dm$$

$$\leq \int_E |f^2(x)|dm+mE<+\infty$$ 即 $\int_E f(x)dm<+\infty$

6. 若 $f_n: E\to R$ 可积，且 $\int_E \frac{|f_n|}{1+|f_n|}dm\to 0$，则 $f_n\xrightarrow{m}0$ （补充题）。

这种构造比较巧，建议背

$\forall y>0$ $\quad 0\leq \frac{y}{1+y}mE(|f_n|\geq y)=\int_{E(|f_n|\geq y)}\frac{y}{1+y}dm$

$$\leq \int_{E(|f_n|\geq y)}\frac{|f_n|}{1+|f_n|}dm\leq \int_E\frac{|f_n|}{1+|f_n|}\to 0\ (n\to\infty).$$

即对 $\forall y$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}mE(|f_n|\geq y)=0$ . $f_n\xrightarrow{m}0$

运用 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 为增函数.

题型八：无穷区间分开讨论收敛性 ★

例：设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，证 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性.（P144）

证：取 $\Delta_n=(-n,n)$，$n\in N$，当 $f$ 可积时，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Delta_n}|f|dm$ 存在且有限，故对 $\forall\varepsilon>0$

存在自然数 $N$；使

$$\int_{(-\infty,-N)}|f|dm<\varepsilon/3,\quad \int_{(N,+\infty)}|f|dm<\varepsilon/3$$

因为 $f$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积，则 $f$ 在有限区间 $(-N,N)$ 也可积，由绝对连续性（有限区间）

存在 $\delta>0$，当 $e'\subset(-N,N)$，$me'<\delta$ 时，有

$$\left|\int_{e'}f\,dm\right|<\varepsilon/3.$$

现设 $e$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 中满足 $me<\delta$ 的任一集，由不等式

$$\left|\int_e f\,dm\right|=\int_{e\cap(-N,N)}|f|dm+\int_{e\cap(-\infty,N)}|f|dm+\int_{e\cap(N,+\infty)}|f|dm<\varepsilon.$$ 证毕.

10. 设 $f$ 是 $R$ 上可积函数，$f(0)=0$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 可微，试证函数 $f(x)/x \in L(R)$

证明：由 $f$ 在 $x=0$ 点可微知 $\exists M, r>0$，使得 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le M$，$\forall x \in (-r, r)$ （课后题）

$$\int_{R}\left|\frac{f(x)}{x}\right| dm = \int_{(-r,r)}\left|\frac{f(x)}{x}\right| dm + \int_{(-\infty,r]\cup[r,+\infty)}\left|\frac{f(x)}{x}\right| dm$$

$$\le M\cdot 2r + \frac{1}{r}\int_{R}|f(x)|\,dm < +\infty$$

$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \in L(R) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \in L(R)$ 证毕

学（老师喜欢出这种题） 重点题型归纳完毕

① $\begin{cases} \text{i} & \frac{q}{p},\ n.\ \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \cdots \\ \text{ii} & Z\times Z \sim Q. \end{cases}$

两种方法证明题
① 证明有理数为可列集 ② 证明可列个零测度集（单点集）的测度为 0
③ $f, g$ 为可测函数，证明 $E(f>g)$ 为可测集。

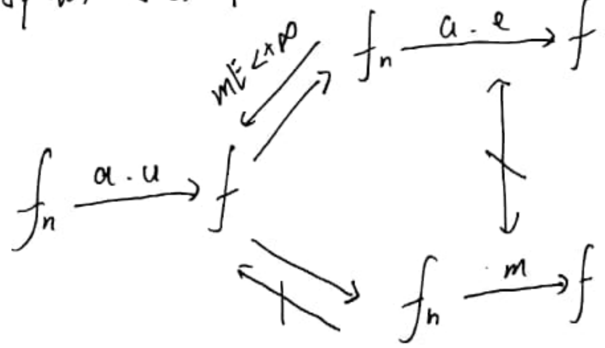
② $\begin{cases} \text{i} & \text{单点集为0} \\ \text{ii} & r_n \text{ 的邻域测度和} \sim \varepsilon.. \end{cases}$

③ $\begin{cases} \text{i} & f-g \\ \text{ii} & E(f>g) \end{cases}$

$= \cancel{E(f\,\Pi(-\infty, r)\,)}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E(f(x)>r_n) \cap E(g(x)<r_n)$

三种收敛关系图




反例何行看书

见总结纸张

不可测集，不可测函数

不可测集 $[0,1]$ 每个等价类取一代表元组成的集合。

函数以下阐释 取法 见 $P_{102}$ 页。

不可测函数 $f = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases}$ 其中 $A$ 是不可测集

$E(f>0) = E(f\ge 1) = A$，可由一族可测函数逼近。

$A\subset E$ （$A$ 为不可测集），$\underset{(\text{单点})}{\underset{\sim}{\alpha}} \in A$，$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & x=\alpha \\ 0 & x\ne\alpha \end{cases}$ 可测

$f = \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\notin A \end{cases} = \bigcup_{\alpha\in A} f_\alpha(x) = \sup_{\alpha\in A}(f_\alpha(x))$