Chapter 5. 函数逼近

$f(x) \longleftarrow \varphi(x)$ 简单且易于计算

def. $C[a,b]$：定义在 $[a,b]$ 上所有连续函数.

而且是线性空间，有各种线性空间性质

* 通常用 $C[a,b]$ 中线性无关组 $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$ (函数系)又被叫作基

作 $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$ 当作 $f(x)$ 近似表达式.

这个是广义的. $\varphi_j(x)$ 可以是 $x, x^2, \cdots$ 也可是 $\sin x, \sin^2 x \cdots$

* 衡量误差的标准.

def. $\|f(x)\|_\infty$：$f(x)\in C[a,b]$，$\|f(x)\|_\infty = \max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$.

仍然有范数性质. i 非负 ii 齐次 iii 三角

def. 距离：$f(x), g(x)\in C[a,b]$. $\|f(x)-g(x)\|_\infty$.

def. 一致逼近

find $\varphi(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j\varphi_j(x)$：$\lim\limits_{n\to\infty}\|f(x)-\varphi(x)\|_\infty = 0$.

def. 权函数. $W(x)\in[a,b]$.

1.) $W(x)\geq 0$，零点有限

2.) $\int_a^b x^n W(x)\,dx$，$n=1,2\cdots$ 存在.

* $\|f(x)\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x) W(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ Euclid 范数

△ (带权).

def. 平方逼近

find $\varphi(x)$：$\lim\limits_{n\to\infty}\|f(x)-\varphi(x)\|_2 = 0$.

带权的

§5.2. 最佳一致逼近

理论基础.

the. (1885, Weierstrass) $f(x)\in C[a,b]$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists$多项式 $P_\varepsilon(x)$

s.t. $|f(x)-P_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ 对 $x\in[a,b]$ 成立.

H_n：次数不超过n的多项式的集合. $H_n=\mathrm{span}\{1,x,\cdots x^n\}.=R[x]_{n+1}$

def. 偏差：$P_n(x)\in H_n$. $\|f(x)-p_n(x)\|_\infty=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-p_n(x)|$.

def. n次最小偏差：$E_n=\min\limits_{p_n(x)\in H_n}\|f(x)-p_n(x)\|_\infty$. 在$H_n$中找使偏差最小的$p_n(x)$.

(n次)

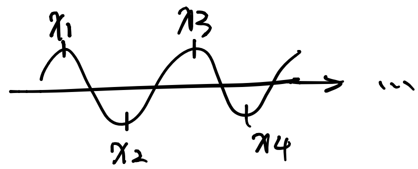
* $\{E_n\}$对n单减. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}E_n=0$.

def.(最佳一致逼近多项式) 就是上面满足最小偏差的$P_n(x)$

def.(交错点组). $a\le x_1<x_2<\cdots<x_n\le b$, $g(x)\in C[a,b]$.

s.t. $|g(x_i)|=\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|$ $i=1,2\cdots n$

且 $g(x_i)=-g(x_{i+1})$



* 最佳一致逼近多项式的存在唯一性证明 (P.159 the.5.2.2~5.2.3).

P160. 如何求最佳一致逼近

§5.3. 最佳平方逼近

最佳一致逼近 ∞

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(x), \quad s.t. \int_a^b [f(x)-\varphi(x)]^2 W(x)\,dx = \min.$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上关于权函数 $W(x)$ 最佳平方逼近

特别的，$W(x)=1$ 称为最佳平方逼近

the (法方程组) Page. 161.

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)W(x)\,dx, \quad i,j=0,1,\cdots n.$$

$$(\varphi_i, f) = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)W(x)\,dx, \quad i=0,1,\cdots n.$$

因 $\{\varphi_j(x)\}$ 取的不同而变

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varphi_0,f) \\ \vdots \\ (\varphi_n,f) \end{pmatrix} \quad *$$

例题

*. 最佳平方逼近函数存在且唯一定理: Page. 162

讨论何种 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ 适合计算

def. (直交函数系): $(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,W(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ a_i > 0, & i=j \end{cases}$

(正交函数系) 这样得到的法方程组易于计算

ex. $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x \cdots \cos nx, \sin nx$ 就是一个直交函数系

§5.4. 直交多项式

def. 直交多项式系 $\{p_i(x)\}_{i=0}^{n}$: $\int_a^b p_i(x)p_j(x)W(x)dx=0$ $(i\neq j)$

(关于 $W(x)$) $\int_a^b [p_i(x)]^2 W(x)dx\neq 0$.

$q_n(x)=\frac{1}{a_n}p_n(x)$, 即为首系数为1的 $p_n(x)$.

the. 5.4.1 (Page. 165-167) … 存在性证明 构造性证明, 包含构造法

↳. $p_n(x)$ 与 ∀次数低于 n 的 i 次多项式 $g_i(x)$ 直交

$$\int_a^b p_n(x)\cdot g_i(x)W(x)dx=0. \quad i=0,1,\cdots n-1$$

ex1. (Chebyshev 不等式).

$$T_n(x)=\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n] \qquad x\in R$$

* $|x|<1$ 时 $\sqrt{x^2-1}$ 是复数.

$|x|\leq 1$ 时 : $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 由Eular公式 $e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 证明.

性质: ① 递推. $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$

$T_0(x)=1$

$T_1(x)=x$.

② $T_n(x)$ 首系数为 2^{n-1}.

③ $T_n(x)$函数奇偶性与 n 同

④ 若 $|x|\leq 1$, 则 $|T_n(x)|\leq 1$, 若 $|x|>1$ 则 $|T_n(x)|>1$

$$\max_{-1\leq x\leq 1}|T_n(x)|=1$$

⑤ $x_k=\cos(\frac{k\pi}{n})$: $T_n(x_k)=(-1)^k$

⑥ $T_n(x)=0$ 有 n 个互异实根 $x_k^{(n)}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$，$|x_k^{(n)}|<1$.

* ⑦ 关于 $W(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 直交

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_k(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=\begin{cases}0, & m\neq k\\ \frac{\pi}{2}, & m=k\neq 0\\ \pi, & m=k=0\end{cases}$$

⑧ … P172 文献性质.

⑨ Page. 173. (Complex).

e.g. 2. (Legendre 多项式)

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},\quad n=1,2,\cdots$$

$$P_0(x)=1.$$

性质. ①. … P174. $P_n(x)$ 是关于 $W(x)=1$ 的 n 次直交多项式

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq k.\\ \frac{2}{2m+1}, & m=k\end{cases}$$

②. $P_n(x)$ 为 $\begin{cases}\text{奇函数}, & n\text{为奇数}\\ \text{偶函数}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$

即 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

③. $$P_{n+1}(x)=\frac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\frac{n}{n+1}P_{n-1}(x).$$

④. P177 *

other. Page. 177.

§5.5. 近似最佳一致逼近