级数. ex. $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $(|q|<1)$ 收敛, $S_n=\frac{1-q^n}{1-q}\to\frac{1}{1-q}$

ex. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$ 收敛, $p\le 1$ 发散. (p 级数, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 调合级数)

thm. $\sum x_n$ 收敛 $\Rightarrow x_n\to 0$ □ $\lim S_n-\lim S_{n-1}=\lim x_n=0$.

↳ (i) 线性. $\sum \alpha a_n+\beta b_n=\alpha S_a+\beta S_b$

(ii) 结合律. $\sum a_n$. $\forall$ 加括号后敛散性不变, 和值不变. □ $\{u_n\}$ 是 $\{S_n\}$ 子列.

△ ex. $\sum\frac{2n-1}{2^n}=2\sum\frac{2n-1}{2^n}-\sum\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{\triangle}\frac{2n+1}{2^n}-\sum\frac{2n-1}{2^n}=1+\sum\frac{1}{2^n}-\frac{2n-1}{2^n}\to 3.$

△ ex. $\sum\arctan\frac{1}{2n^2}$. $\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}$

$=\sum\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}$ (错位相消) $=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2n+1}\to\frac{\pi}{4}$

def. 极限点最大值/最小值记为上、下极限. $\max E=\max\{\xi\mid x_{n_k}\to\xi\}$.

thm. 级数判别法. (i) 比较判别. $\sum x_n$, $\sum y_n$. $x_n\le Ay_n$ $(A>0)$ 则 y_n 收 x_n 收

lim 形式: $\lim\frac{x_n}{y_n}=l$: $l\in(0,\infty)$ 则 x_n, y_n 同敛散

(ii) (Cauchy 判别) $\sum x_n$. $r=\overline{\lim}\sqrt[n]{x_n}$, $r<1$ 收敛, $r>1$ 发散 (检根)

(iii) (d'Alembert 判别) $\sum x_n$. $\overline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\bar{r}<1$, 收敛. $\underline{\lim}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\underline{r}>1$ 发散. (检比

(iv) (Raabe 判别) $\sum x_n$. $r=\lim n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)$, $r>1$ 收敛, $r<1$ 发散

(v) (积分判别) $\sum u_n$ 与 $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ 同敛散, 其中 $\sum u_n=\sum\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)\,dx$

△ ex. $\sum\left(e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}\right)$. $e^{\frac{1}{n^2}}-\cos\frac{\pi}{n}=\left(1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (Tylar 展开)

则 $\lim\frac{\sim}{\frac{1}{n^2}}=1+\frac{\pi^2}{2}$ 又 $\frac{1}{n^2}$ 收敛. ⋯ ☒

△ ex. $\sum\frac{1}{n\ln^q n}$ 敛散性. $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln^q x}=\frac{1}{-q+1}\ln^{-q+1}A-\frac{1}{-q+1}\ln^{-q+1}2$, $q\ne 1$ $(A\to\infty)$.

则 $q>1$ 收敛, $q\le 1$ 发散.

???

△ ex. $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2\sin^2 x}dx$ 与 $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx$ 敛散性.

记 $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sim dx\ge\int_0^{\frac{1}{n+1}\pi}\frac{1}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t}dt>\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n+1}$ 发散.

对 $\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^4\sin^2 x}dx$. $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sim dx=\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t}dt}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+(n\pi+\pi-t)^4\sin^2 t}dt$

$\le\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{n^2\pi^2}\frac{1}{1+t^2}dt\le\frac{1}{4n^2}$ 同理.

则收敛.

P27 习题. 2. (1). $\frac{n^n}{(n!)^2}$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = (n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{(1+n)^2} \xrightarrow{\overline{\lim}} 0$ ✓

(2) $\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+2)!}{2^{(n+1)(n+2)}} \cdot \frac{2^{n(n+1)}}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2) \cdot 2^{n(n+1)-(n+1)(n+2)}$ $\frac{1}{4^{n+1}} \to 0$ ✓

3. $\lim n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$: $\frac{n!}{\cancel{(a+1)(a+2)}\cdots\cancel{(a+n)}} \cdot \frac{\cancel{(a+1)}\cdots(a+n+1)}{(n+1)!} = \left[(a+n+1)\cdot\frac{1}{n+1} - 1\right]n \longrightarrow \frac{an}{n+1} = a > 0.$ 5 a概

△ (2). $\left(\frac{1}{3^{\ln n}} \cdot 3^{\ln n+1} - 1\right)n = \frac{3^{\ln n+1} - 3^{\ln n}}{3^{\ln n}} \cdot n \to 0.$ (极限？)

(3). $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+\cdots+\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-\cdots-\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)n = n\left(\sqrt[n+1]{2} - 1\right) \longrightarrow ($

{ 极限求法.

4. (1). $\int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

1(任意项级数)

thm. (Cauchy 收敛定理) $\sum x_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N. \forall m>n>N. \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| < \varepsilon$ S_n

thm. (A-D 判别法.) $\sum a_n b_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 有界, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 / $\{a_n\} \overset{单}{\to} 0$, $\{\sum b_n\}$ 有界

□ ~ 图 P33.

△ ex. $\{a_n\} \xrightarrow{单} 0$. $\forall x$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 收敛 ?

□. $x \neq 2k\pi$ 时: $2\sin\frac{x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x$ 则 $\forall n$: $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ 四

def. 任意项级数的绝对收敛性.

thm. (Riemann) $\sum x_n$ 条件收敛, 则 $\forall a$, $\exists \sum x_n$ 更序列 $\sum x_n' \to a$. P39

(P44-45)

def. (函数项级数) $u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. 若对 $x_0 \in E$, $u_n(x_0)$

作为数项级数收敛, 则称 $\sum u_n(x)$ 在 x_0 收敛 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. (点态收敛)

thm. $u_n(x) \in CD$. 则 $S_n \in CD$ 且 $\lim_{x\to x_0} \sum u_n = \sum \lim_{x\to x_0} u_n$

$u_n(x) \in$ 可导 D. 则 S_n 可导且 $\frac{d}{dx}\sum u_n = \sum \frac{d}{dx} u_n$

$u_n(x) \in RD$, 则 $S_n \in RD$ 且 $\int \sum u_n = \sum \int u_n$

点态收敛下不成立

下述一致收敛.

def. $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon)$ 时 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ 对 $\forall x \in D$ 成立 $S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S$

ex. $S_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \overset{(-\infty,\infty)}{\rightrightarrows} S(x) = 0$, □ $|S_n(x) - S(x)| \leq \frac{1}{2n}$ $(n\to\infty)$ 即成立

ex. $S_n(x) = x^n$ 在 $[0,1)$ 的一致收敛性. □ $|S_n(x) - S(x)| = x^n < \varepsilon$ 则 $x \to 1^-$ 时 $\forall n$ 不成立

def. $\forall [a,b] \subset D$, $S_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} S$, 则称 S_n 于 D 上内闭一致收敛于 S. * 一致收敛 ⇒ 内闭

thm. $S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0$. $(\forall x \in D)$ $d = \boxed{\sup_{x\in D}} |S_n - S|$

ex. $S_n = \frac{nx}{1+n^2x^2} \overset{(0,\infty)}{\not\rightrightarrows} S(x) = 0$: □ $|S_n - S| = \frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}$ $d(S_n, S) \not\to 0$. 故不收~

ex. $S_n = (1-x)x^n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} S = 0$: □ $|S_n - S| = (1-x)x^n \leq \frac{\frac{1}{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 0$.

ex. $S_n = (1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow{[0,\infty)} S = e^x \Rightarrow S_n \overset{[0,a]}{\rightrightarrows} S$: □ $(1+\frac{x}{n})^n \cdot e^{-x} \downarrow$. 则 $e^{-a}(1+\frac{a}{n})^n \leq \sim \leq 1$

$|S_n - S| = \left|(1+\frac{x}{n})^n - e^x\right| = e^x \left|e^{-x}(1+\frac{x}{n})^n - 1\right| \leq e^a\left(1 - e^{-a}(1+\frac{a}{n})^n\right) \to 0$.

thm. $S_n \overset{D}{\to} S$. 则 $S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \in D$. $\lim_{n\to\infty}(S_n(x_n) - S(x_n)) = 0$ (常用判断不一致性)

ex. $S_n(x) = nx(1-x^2)^n \overset{[0,1]}{\underset{?}{\rightrightarrows}} S(x) = 0$: □ 取 $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, 此时 $d(S_n, S) \to 1 \neq 0$.

$S_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n \overset{[0,\infty)}{\underset{?}{\rightrightarrows}} S(x) = e^x$: □ 取 $\{x_n\} = n$. $d(S_n, S) = 2^n - e^n \to -\infty \neq 0$

(P67) ? △ ex. $S_n = n(x+\frac{1}{n})^n \xRightarrow[?]{(-1,1)} S=0$. □ $u_n(x)=n(x+\frac{1}{n})^n$，取 $x_n=1-\frac{1}{2n}$: $|u_n(x)-u(x)|$

$= n(1+\frac{1}{2n})^n \to \infty \neq 0$ 则 $u_n \overset{x}{\not\Rightarrow} 0$. $S_n \overset{x}{\not\Rightarrow} S$.

P68 习题.

the. ('⇒'判别法). (i) Cauchy. $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon), \forall m>n>N(\varepsilon)$ $\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) < \varepsilon$ 对 $\forall x$ 成立

(ii). Weierstrass 判别法. $u_n(x) \leq a_n$ 对 $\forall n$ 成立. 则 $\sum a_n$ 收 $\Rightarrow$ $\sum u_n(x)$ 一致收.

(iii). (A-D判别法). $\sum a_n(x) b_n(x)$ 一致：① $a_n(x)$ 一致单调有界，$b_n(x)$ 一致收敛.

② $a_n(x)$ 一致单调收敛于 0. $b_n(x)$ 部分和一致有界.

ex. $\sum a_n$ 绝对收敛：$\sum a_n \cos nx$，$\sum a_n \sin nx$ 在 R 上一致收

△ ex. $\sum x^\alpha e^{-nx}$ $(\alpha>1)$ 在 $[0,\infty)$ 一致收. □. $x^\alpha \cdot e^{-nx} \leq (\frac{\alpha}{e})^\alpha \cdot \frac{1}{n^\alpha}$ (求导找最大值)

△ ex. $\sum x^\alpha \cdot e^{-nx}$ $(\alpha \in (0,1])$ 在 $[0,\infty)$ 不一致收. □. $\sum_{k=n+1}^{2n} x^\alpha \cdot e^{-nx} \geq n \cdot x^\alpha \cdot e^{-2nx}$

取 $x_n = \frac{1}{n} \in [0,\infty)$，上式 $\geq e^{-2} \neq 0$. 故由 Cauchy 条件，上式不一致收敛.

ex. $\sum a_n$ 收 $\Rightarrow \sum a_n x^n$ 一致收 $[0,1]$ 上. □ x^n 一致单调有界. ✓

△ ex. a_n 单调 $\to 0$. 则 $\sum a_n \cos nx$ 与 $\sum a_n \sin nx$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致收敛.

□ a_n 一致收于 0. 则对 $\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}|}{2|\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$ $(x \in [\delta, 2\pi-\delta]$ $\delta \in (0,2\pi)$

(一致连续性质).

the. (连续性) $S_n \in C[a,b]$. $S_n \Rightarrow S$ 则 $S \in C[a,b]$.

□ $|S(x+h)-S(x)| \leq |S(x+h)-S_N(x+h)| + |S_N(x+h)-S_N(x)| + |S_N(x)-S(x)|$

the. $S_n \in C[a,b]$，$S_n \Rightarrow S$. 则 $S_n \in R[a,b]$ 且 $\int_a^b S\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$.

□ $\left|\int_a^b S_n\,dx - \int_a^b S\,dx\right| \leq \int_a^b |S_n(x)-S(x)|\,dx < (b-a)\varepsilon$.

the. ① $S_n \in C^1[a,b]$ ② $S_n \xrightarrow{[a,b]} S$ (点态) ③ $S_n' \Rightarrow \sigma(x)$ 则 S 可导且 $\frac{d}{dx}S = \sigma(x)$.

the. (Dini) $S_n \xrightarrow{[a,b]} S$. (点态). ① $S_n \in C[a,b]$，② $S \in C[a,b]$ ③ S_n 单调(关于 n)

则 $S_n \Rightarrow S$.

□ 反证. $S_n \overset{x}{\not\Rightarrow} S$. 则 $\exists \varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N$. $\exists x\in[a,b]$ $|S_n - S| \geq \varepsilon$.

取 $N=1$，n_1, x_1 : $|S_{n_1}(x_1) - S(x_1)| \geq \varepsilon$

取 $N=n_1$，n_2, x_2 : ✓ ; $N=n_2$，$\exists n_3, x_3$ .. ✓ ; ...

$\longrightarrow |S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| \geq \varepsilon_0$.

$\{x_n\} \in [a,b]$. 不妨设其自收敛 $x_n \to \xi$. 又 $S_n(\xi) \to S$ (点态收敛)

ε_0: $\exists N$, $|S_N(\xi) - S(\xi)| < \varepsilon_0$. 又 $S_N(x) - S(x)$ 于 ξ 连续.

$\exists K$: $k > K$: $|S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0$.

又 $S_n(x)$ 关于 n 单调: $n > N$, $k > K$ 时 $|S_n(x_k) - S(x_k)| \le |S_N(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon_0$

又由上述 x_{n_k} 取法, 总能使 $n_k > N$, $k > K$: 就有 $|S_{n_k}(x_k) - S(x_k)| < \varepsilon$. 矛盾

P83 习题.

幂级数 the. (Cauchy - Hadamard Law). $\sum a_n x^n$. $|x| < R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ 绝对收敛. $|x| > R$ 则发散

the. (d'Alembert 判别法). $\lim \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = A$, 则 $R = \dfrac{1}{A}$

性质. the (Abel 第二定理) 则 $\sum a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内闭一致收敛. 可以推出许多性质.

ex. $\sum a_n$, $\sum b_n$, Cauchy 积 $\sum c_n$. 则 $\sum c_n = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$. ??

the. $f(x)$ 幂级数展开 $f(x)$ 在 $O(x_0, r)$ $\forall$ 阶可导:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0) + r_n(x) \quad x \in O(x_0, r) \quad r_n = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)\,dt$$

def. 二次极限 and 二重极限. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x_0, y_0) = A$. $x \ne x_0$ 时 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$ (存在)

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

the. 连续映射将紧集映成紧集.

the. (一致连续性定理) $K \subseteq R^n$ 是紧集, $f: K \to R^m$ 连续, 则 f 于 K 上一致连续