Chapter 3.

§3.1. 随机变量 & 联合分布.

def. (n维随机变量) $X_1(\omega) \cdots X_n(\omega) \in \Omega = \{\omega\}$.

$X(\omega) = (X_1(\omega), \cdots X_n(\omega))$ 即是.

必须在同一样本空间

def. (联合分布函数) $F(x_1, x_2 \cdots x_n) = P(X_1 \le x_1 \cdots X_n \le x_n)$

对 $(X_1, \cdots X_n)$ 而言.

性质: P140. (略).

* e.g. $G(x,y) = \begin{cases} 0 & x+y<0 \\ 1 & x+y \ge 0 \end{cases}$ 不构成联合分布函数.

def. (联合分布列). 有限对 (x,y), 离散随机变量.

$$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j) \quad x, y = 1, 2, \cdots$$

def. (联合密度函数). $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(x,y)\, dx\, dy$

$$p(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y).$$

$P(X, Y \in G) = \iint\limits_{G} p(x,y)\, ds$ 概率转化为面积分.

△ 常用多维分布.

1. 多项分布：n次独立重复试验.

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \cdots X_r=n_r) = \frac{(n_1+\cdots+n_r)!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_r!}\, p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}$$

记作 $M(\underbrace{n}_{\text{次数}}, p_1, p_2\cdots p_r)$

2. 多维超几何分布:

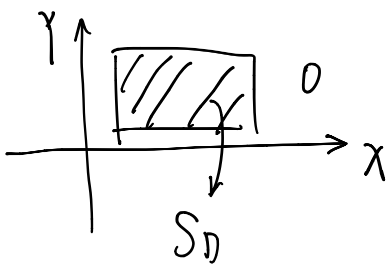
$$P(\underbrace{X_1=n_1}_{\text{i号球的个数}}\cdots X_r=n_r) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\cdots\binom{N_r}{n_r}}{\binom{N}{n}}$$

N_r → i号球个数

n → 总取出球个数.

3. 多维均匀分布　类似空间体积

$$p(x_1, x_2\cdots x_n) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x_1\cdots x_n)\in D \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$

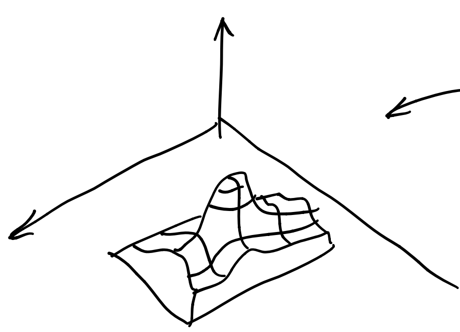


几何概率常用

4. 二元正态分布　$p(x,y)=\cdots$　记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

↓

二元的也很利于理解.



← 大概

§3.2. 边际分布 & 随机变量独立性

联合分布函数(分布列/密度函数)包含信息 → 本章目标

- 每个分量单独的分布(也叫边际分布)
- 分量间关联程度
- 给定一个分量分布，求其他分量分布(条件分布).

def.(边际分布) $\lim\limits_{y\to\infty} F(x,y) = P(X\le x)$. ← X的边际分布.

记作 $F_X(x) = F(x,\infty)$

def.(边际分布列). $P(X=x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} P(X=x_i, Y=y_j)$

def.(边际密度函数) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u)\,du$. ← 几何上也好理解

$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} p_Y(v)\,dv$.

def.(随机变量间的独立性)

$$F(x_1 \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$ → 边际分布. ，则 $X_1 \cdots X_n$ 独立.

对离散. $P(X_1=x_1 \cdots X_n=x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i=x_i)$

对连续 $p(x_1 \cdots x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i)$.

§3.3. 多元随机变量函数的分布.

$(X_1, \cdots X_n)$ 是 n 维，$Y = g(X_1 \cdots X_n)$ 是1维　e.g. $Y = X_1 + X_2$.

The. (泊松分布可加性). $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$，X, Y 独立. 则

仅限

$Z = X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

离散场合下均可以用

*(卷积公式) $P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i)$

寻求2个独立随机变量和的分布运算

The. (二项分布可加性) $X \sim b(n, p)$，$Y \sim b(m, p)$

$Z = X + Y \sim b(n+m, p)$.　(可推广)

?

def. (最大值分布). $Y = \max\{X_1 \cdots X_n\}$.

① 分布函数: $F_Y(y) = P(\max\{X_1 \cdots X_n\} \leq y)$

$= P(X_1 \leq y \cdots X_n \leq y)$

$= \prod_{i=1}^{n} F_i(y)$

… P165 (在各情况下的 Y 的分布).

def. (最小值分布) $Y = \min\{X_1 \cdots X_n\}$.

分布函数. $F_Y(y) = \cdots = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(y))$.

… P166. ~.

$Z = X + Y$.　$P_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} P_X(x) P_Y(z-x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{\infty} p(z-y) P_Y(y)\,dy$.

The.（连续场合的卷积公式） X, Y，$p_X(x), p_Y(y)$，$Z=X+Y$.

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(z-y)\,p_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,p_Y(z-x)\,dx.$$

$\Downarrow$

The.（正态分布可加性）. $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，

わかりません

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$ (P167)

The.（γ分布可加性）. $X\sim Ga(\alpha_1,\lambda)$，$Y\sim Ga(\alpha_2,\lambda)$

$$Z=X+Y\sim Ga(\alpha_1+\alpha_2,\lambda).$$ (P168)

* 变量变换法.

$(X,Y): p(x,y)$. $\begin{cases} u=g_1(x,y) \\ v=g_2(x,y) \end{cases}$ $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix}\right|$$

$$\Rightarrow p(u,v)=p(x(u,v),y(u,v))|J|$$

步骤. …

$p(u,v)=p(x,(u,v),y(u,v))|J|)$

. Other. 增补变量法 P170

$U=XY$.

$$p_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X\left(\frac{u}{v}\right)p_Y(v)\cdot\frac{1}{|v|}\,dv.$$

$U=X/Y$ $$p_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(uv)\,p_Y(v)\frac{1}{|v|}\,dv.$$

§3.4 多维随机变量特征数.

期望

$$E(Z) = \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, y_i)\, P(X=x_i, Y=y_i) & \text{离散.} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_i, y_i)\, p\sim . & \end{cases}$$

expecially. $Z = g(X)$ 则 $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, p_X(x)\, dx.$

性质: $E(X+Y) = E(X) + E(Y).$

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y).$ → 推广至多维.

要独立.

方差 $Var(Z) = E(Z - E(Z))^2$

若 X Y 独立. $Var(X \pm Y) = Var(X) \pm Var(Y)$

协方差 描述多维之间的关联程度.

X, Y 的相关(中心)矩.

$$E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = Cov(X, Y).$$

展开.

* $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

* 不相关 ≠ 独立

可见 X, Y 相互独立, 则 $Cov(Y, X) = 0$

↳ $Var(X \pm Y) = Var(X) \overset{+}{\cancel{\pm}} Var(Y) \pm 2\, Cov(X, Y).$

$Cov(X+Z, Y) = Cov(X, Y) + Cov(Z, Y).$

就是 σ_Y.

相关系数 $\quad Corr(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX}\sqrt{VarY}}$ $\quad X,Y$ 的线性相关系数.

(消除量纲) → 标准化的相关性描述

Thm (Schwarz 不等式). $\quad (Cov(X,Y))^2 \le \sigma_Y^2 \cdot \sigma_X^2$

↳ $\quad |Corr(X,Y)| \le 1.$ ☆

$Corr(X,Y)=1$: X,Y 处处线性相关 $\quad P(Y=aX+b)=1.$

Eg. P(185) 例题

n维随机变量下. $\quad X=(X_1,X_2,X_3\cdots X_n)'$

$E[(X-E(X))(X-E(X))']$ $\quad$ 方差-协方差矩阵

$$=\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1X_2) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

$Cov(X)$

§3.5 条件分布与条件期望

$$P_{i|j}=P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}$$