第二章．勒贝格测度

有限可加性．

Theorem．0（测度公理） (i) $mE \geqslant 0$　(ii) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ 则 $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$

(iii) $m[0,1] = 1$　＊这个时候并没有说测度怎么求。

区间的测度非常易得，与下面开闭集区别开

§2．

Define．开集测度：$G = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$，$mG = \sum_k (\beta_k - \alpha_k)$　＊开集可以直接减（得益于任意并仍开）

闭集测度：F，$\forall (a,b)$：$F \subset (a,b)$，$G = (a,b) - F$．

则 $mF = b - a - mG$．

Theorem．2.1．开集测度性质：(1) 单调：$G_1 \subset G_2$，则 $mG_1 \leqslant mG_2$

(2) 半可加性：$G = \bigcup_k G_k$ 则 $mG \leqslant \sum_k mG_k$．

↳ 若 G_k 互不相交则 $G = \sum_k mG_k$

引理．$\{F_k\}_1^n$ 是闭集，$F_k \subset (\alpha_k, \beta_k)$，$k = 1, 2, \cdots n$．$(\alpha_k, \beta_k)$ 互不相交

则 $m(\bigcup_{k=1}^n F_k) = \sum_{k=1}^n mF_k$．

Theorem．2.2．F闭、G开，$F \subset G$（开集包含闭集），则 $m(G-F) = mG - mF$．

↳ $\{F_k\}_1^n$ 是闭集、互不相交，则 $m(\bigcup_{k=1}^n F_k) = \sum_{k=1}^n mF_k$

Def．外测度．一切包含E的开集的下确界

$m^*E = \inf mG$　　$G: \{E \subset G\}$．

内测度．一切含于E内闭集上确界

$m_*E = \sup mF$　　$F: \{F \subset G\}$．

↳ 单调：$m^*E \geqslant m_*E$．；半可加：$E = E_1 \cup E_2$，则 $mE \leqslant mE_1 + mE_2$．

Def．勒贝格可测．E有界，$m^*E = m_*E$ 时．此时 mE 称为测度．

ex．零测度集的运算不影响测性

§3. Theorem. 3.1. 有界E可测 $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists G\supset E\supset F$. 有 $m(G-F)<\varepsilon$.

Theorem. 3.2. (i) E可测 $\Rightarrow$ C_E可测 (ii). E_1, E_2可测 $\Rightarrow$ $E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2$, E_1-E_2可测

且有半可加性

Theorem. 3.3 (测度的单调性). $E_1\subset E_2 \Rightarrow mE_1\leq mE_2$ (之后写成mE的都默认可测)

Theorem 3.4 (i) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$, E_k可测 $\Rightarrow$ E可测, 若E_k互不相交, 则 $mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k$

(ii). $E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$, E_k可测 $\Rightarrow$ E可测. 完全可加性、可列交并的封闭性

ex. 小结论: 有界开集可测(有限覆盖定理), 有界闭集可测(补集可测).

↳ 外测度的半可加性: $m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m^*E_k$.

引理3.1. $m_*E+m^*C_xE=b-a$. $X=(a,b)$.

$\forall A$: $m^*A=m^*(E\cap A)+m^*(CE\cap A)$

Theorem 3.5. (卡拉泰奥多里条件)

有界E可测 $\Leftrightarrow$ $\forall A$: $m^*A=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap CE)$.

Def. 渐张可测集列: $\{E_k\}$: $E_1\subset E_2\subset\cdots \Rightarrow E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$可测 且 $mE=\lim_{k\to\infty}mE_k$

渐缩可测集列: $\{E_k\}$: $E_1\supset E_2\supset\cdots \Rightarrow E=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$可测 且 $mE=\lim_{k\to\infty}mE_k$

(E_k都在基本集(a,b)中).

差集的可测性、测度完全可加性或单调性:

可测集关于差、可列并的运算封闭, 构成一个环.

闭: 任意交仍为闭

Def. (博雷尔集). 开集、闭集作至多可列次交并运算得到的集.

↳ 一切博雷尔集均可测. 记开集的交: G_δ, 闭集的并 F_σ.

9:20.

Theorem 3.7. E可测. 则$\exists G_\delta$、F_σ有 $G_\delta\supset E\supset F_\sigma$ 且 $mF_\sigma=mG_\delta=mE$. (★闭元).

§4. Def. 无界集可测：E与任意开区间交是可测的，则E可测

$\lim\limits_{\alpha\to\infty} m\{(-\alpha,\alpha)\cap E\} = mE$. （无穷大亦视为可测）.

命题4.1. 有界可测集完全可加性扩展为可测集完全可加性.

$\{E_k\}_1^\infty$，E_k可测 则 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 可测. 若互不相交 则 $mE=\sum\limits_{k=1}^{\infty}mE_k$.

（无限集也只是有限集的拓展. 除去"极限"之外无异）.

Def. $\mathbb{R}^n$上E外测度：$m^*E=\inf\{\sum\limits_{k=1}^{\infty}mI_k \mid \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k\supset E, I_k\subset\mathbb{R}^n$且为开矩阵$\}$.

不可测集实例. Page 66. 不太懂.

↓ 环与环上定义测度. 跳过.