零碎考点：个人理解，仅供参考。

第一章 ⑩证明康托尔三分集为不可列集。

这和证明实数集不可列类似，用闭区间套导出 $\xi=\lim_{n\to\infty} I_n$ 的矛盾性，建议一看同时证明，以更加深理解

1. 证明实数集不可列

⟺ 证明 $[0,1]$ 不可列

反证：若可列，将其编排为

$x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$

把区间三等分，$[0,1/3]$ 与 $[2/3,1]$ 中至少有一个不含有 x_1，这样的区间表示为 I_1

即 $x_1 \in I_1$，把 I_1 三等分，在它的左右两个闭区间少有一个不含有 x_2，用 I_2 表示相应的区间

这个过程一直进行下去

得到 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots \supset I_n \supset \cdots$

且 $x_n \in I_n$，$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} 1/3^k = 0$

由闭区间套定理，$\exists \xi \in I_n$，$n\in N$，

但 $x_n \in I_n$，对任意 n 成立。

故 ~~x_n 与~~ ξ 永不是任一 x_n。

但 $\xi\in[0,1]$，矛盾

注：实数集至少要三等分，若二等分，取中点，就说不清属于哪边了。

所以取3三分等，四分等就随便了。

2. 证明康托三分集为不可列集。

分析：康托尔三分集的取法是固定，这和实数不可列集的非固定取法不一样，找这个区别。

→ copy

ξ 是 I_k 端点 的聚点，从而 $\xi \in P_0$，矛盾。

注：其实可以是 I_k 内任意点集的聚点，下面两个题都是说明这个的。

补证：P_0 是 I_K 端点集的聚点

$\forall x\in P_0$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists K$，使得在 $(-\varepsilon+x, x+\varepsilon)$ 内总存在 I_K 包含在这个邻域，则 I_{K+1} 的端点必包含在 $(-\varepsilon+x, x+\varepsilon)$ 内。

证毕

类似 ㉑：设 E 是康托尔三分集的补集中构成区间的中点所成集，证明 $E'=P_0$。（E 的导集是 P_0，即 E 的聚点集是 P_0。）

copy，则设 I_k 的端点为 $[\alpha_K,\beta_K]$

则 $\frac{\alpha_K+\beta_K}{2}\in(-\varepsilon+x, x+\varepsilon)$。

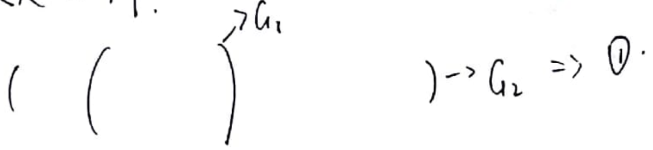
证毕

(2) 设 G_1, G_2 是 R^1 中的开集，且 $G_1 \subset G_2$，试证 G_1 的每个构成区间含于 G_2 的某个构成区间

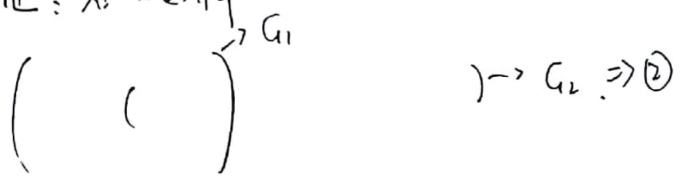
考点：构成区间，方法：看图来证

反证法. G_1 的构成区间大括号. G_2 小括号

本来是这样.



反证：若是这样



那么这个 ~~构~~ G_2 的构成区间就该是这样

找到 G_2 新的构成区间. 证毕

法二 操作可视化 比法一 操作更强

法一是按照自己感觉写的. 法二是标答.

建议按自然感觉写一次，这样写标答的理解更深.

法一：以集合~~元素~~来写.

证明：

设 (α_1, β_1) 为 G_1 的一个构成区间.

(α_2, β_2) 为包含 (α_1, β_1) 的 G_2 的一个构成区间.

反证：若存在 G_1 的一个区间不含于 G_2 的某个构成区间.

不妨设令该 G_1 的该区间为 (α_1, β_1)

若不含于 G_2 的任一个构成区间. 则与 $G_1 \subset G_2$ 矛盾.

若为部分与 G_2 相交（不完全~~相交~~含于 G_2）

则与 G_1 的构成区间矛盾.（这个太图像化，往解析方向，最好不用）

法二：元素证法（推荐证法）

证明：

设 (α_1, β_1) 为 G_1 的一个构成区间

任取 $x \in (\alpha_1, \beta_1) \subset G_1 \subset G_2$.

① $\Leftarrow$ 则由开集构造知. 存在 G_2 的构成区间 (α_2, β_2)，使得 $x \in (\alpha_2, \beta_2) \subset G_2$.

② $\Leftarrow$ 证明：$(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha_2, \beta_2)$，假设不成立.

则 ~~α~~ 则 $\alpha_1 < \alpha_2 < x < \beta_1$

③ $\Leftarrow$ 或 $\alpha_1 < x < \beta_2 < \beta_1$

这与 (α_2, β_2) 是 G_2 构成矛盾.

证毕.

⑬ 设 f 为 $[0,1]$ 上的实函数，存在常数 K，使对自然数 n 以及任意 n 个互不相同的数 $x_1, \cdots x_n \in [0,1]$ 有

$$|f(x_1)+\cdots+f(x_n)| \leq K.$$

则集 $E=\{x\in[0,1]: f(x)\neq 0\}$ 为至多可列

证明：$E=\{x\in[0,1]: f(x)\neq 0\}$ 等价于.

$E=\{x\in[0,1]: f(x)>0\} \cup E=\{x\in[0,1]: f(x)<0\}$ 等价于.

$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[0,1]: f(x)>\frac{1}{n}\} \cup E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[0,1]: f(x)<-\frac{1}{n}\}$.

由于可列个~~可列~~有限集之并仍为可列集.

故只需证明对 ~~~~.任意的 N.

$E=\{x\in[0,1]: f(x)>\frac{1}{N}\}$ ~~可列~~有限 即可.

反证：若 E ~~不可列~~的元素无限.

则 $|f(x_1)+\cdots+f(x_n)| \geq \frac{n}{N}$，令 $n\to\infty$. 与 $|f(x_1)+\cdots+f(x_n)|\leq K$.

矛盾. ~~~~ E 中的元素是有限的. 证毕. (也可倒过来证).

第二章：

卡氏条件的应用：设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是有限个互不相交的可测集，且 $E_k\subset A_k$，$k=1,2\cdots n$. 试证. $m^*(\bigcup_{k=1}^{n}E_k)=\sum_{k=1}^{n}m^*E$ (课后七题)

证明：不妨设 $n=2$.

则即证 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*E_1+m^*E_2$.

由卡氏条件. $m^*E_1=m^*(E_1\cap A_1)+m^*(E_1\cap CA_1)=m^*(E_1\cap A_1)=m^*E_1$, ~~可测~~ 且

同理：$m^*E_2=m^*(E_2\cap A_2)+m^*(E_2\cap CA_2)=m^*(E_2\cap A_2)=m^*E_2$.

则 E_1, E_2 可测 且 ~~E_1, E_2~~ 由于 E_1, E_2 不相交，由测度的完全可加性.

$m(E_1\cup E_2)=mE_1+mE_2$ 又 $m^*E_1=mE_1$，$m^*E_1=mE_2$.

故 $m^*(E_1\cup E_2)=m^*E_1+m^*E_2$.

易错点：外测度只有半可加性，没有完全可加性。

~~所以~~ 而不相交的开区间和测度具有完全可加性.

所以只要证明 E_k 是可测的，把外测度转化为测度，利用测度的完全可加性

再把~~用测度~~ 可测集的测度与外测度相等，转回去就行.

证明可测优先卡氏条件.

也可直用 ~~$m^*(E\cup A)$~~ ~~$m^*(E\cup A)$~~ 的卡氏条件.

$m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\cap A_1)+m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\cap CA_1)$.

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)=m^*(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\cap A_1)+m^*(\bigcup_{k=2}^{n} E_k\cap CA_1).$$

$$=m^*E_1+m^*(\bigcup_{k=2}^{n} E_k)=m^*E_1+m^*(\bigcup_{k=2}^{n} E_k\cap A_2)+m^*(\bigcup_{k=2}^{n} E_k\cap CA_1)$$

$$=m^*E_1+m^*(\bigcup_{k=2}^{n} E_k)\cdots\cdots$$

$$=m^*E_1+m^*E_2+m^*(\bigcup_{k=3}^{n} E_k)\cdots$$

当然这个是已经默认满足 $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测了.

$$\cdots$$

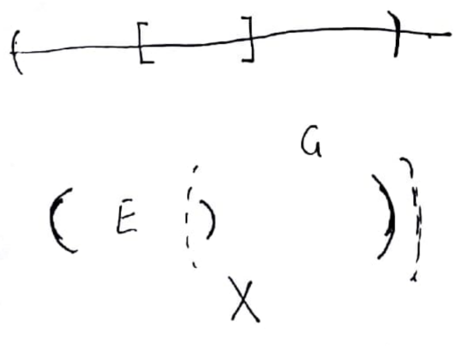
$$=\sum_{k=1}^{\infty} mE_k.$$

(24) 试证：若存在勒贝格可测集 $X\supset E$，满足 $mX<\infty$ 与 $mX=m^*E+m^*(X-E)$，则 E 是勒贝格可测的.

注：这个证明没办法了，只有背了，看着图背

只要证 $m_*E\geq m^*E$ 即可；（学长有一步不清明白）

例子



P11 构造这样图，其 G 是 $X\setminus E$ 开区间

∴ 的下确界（外测度）.

由外测度的定义

存在开集 $G\supset X\setminus E$，满足 $mG\leq m^*(X\setminus E)+\varepsilon$ ※

由 $G\supset X\setminus E$ 可知 $E\supset X\setminus G$.

则 $m_*E\geq m_*(X\setminus G)$.

~~$\geq m(X$~~ $=m(X\setminus G)$ （开集可测，~~$X\setminus G$~~ X 可测，故 $X\setminus G$ 可测，$m_*=m$）

~~$\geq m$~~ $=m(X\setminus(X\cap G))$

$=mX-m(X\cap G)$

$=m^*E+m^*(X/E)-m(X\cap G)$ （运用题设条件）

$\geq m^*E+m^*(X\setminus E)-mG$ （把 $m(X\cap G)$ 放大）

$\geq m^*E-\varepsilon$ （运用※式）

即 $m_*E\geq m^*E$ （ε 的任意性）

第三章、

1.1.证明 $E(\sup f_n>\alpha)=\bigcup_n E(f_n>\alpha)$ （定理1.1，P101）.

思路，只需证明相互包含即可

如果 $x_0\in E(\sup f_n>\alpha)$，则 $\sup f_n(x_0)>\alpha$.

于是存 $n_0\in N$，使得 $f_{n_0}(x_0)>\alpha$. 则 $x_0\in E(f_{n_0}>\alpha)\subset\bigcup_n E(f_n>\alpha)$.

如果 $x_1\in\bigcup_n E(f_n>\alpha)$，则有 $n_1\in N$，使得 $x_1\in E(f_{n_1}>\alpha)\subset E(\sup f_n>\alpha)$.

故 $\bigcup_n E(f_n>\alpha)=E(\sup f_n>\alpha)$

同理 $E(\inf f_n<\alpha)=\bigcup_n E(f_n<\alpha)$.

①. 证明 $\sup_n f_n(x)$，$\inf_n f_n(x)$ 可测（其中 $\{f_n\}$ 是可测函数列）.

由 $E(\sup f_n>\alpha)=\bigcup_n E(f_n>\alpha)$（可测集之并为可测集）.

故 $\sup f_n$ 可测. 同理 $\inf_n f_n(x)$ 可测.

② 证明 $\overline{\lim_n} f_n$，$\underline{\lim_n} f_n$ 可测.（$\{f_n\}$ 是可测函数列）

由 $\overline{\lim_n} f_n=\inf_k\sup_{n\geq k} f_n(x)$（反复①两次）. 得证.

③ $\lim_n f_n$ 几乎处处存在时. 则它是E可测函数.（$\{f_n(x)\}$ 是可测函数列）.

$\lim_n f_n=\overline{\lim_n} f_n$（用②）.

④ $\lim_n f_n$ 几乎处处存在，则它是E可测函数（$\{f_n(x)\}$ 是连续函数列）.

连续函数是可测的（P100，例5）.

用③证毕.

~~以上证明不用看~~ 以上结论可以直接用.

补：测度小论文及定理之证明（第四章）

1. 基本引理：

设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的非负可积函数，$\{f_n(x)\}_{n\in N}$ 是满足条件，

$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots$；$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $(x\in E)$。

的简单函数列，则

求 $\int_E f(x)\,dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dm$。

≥：由 $\{f_n\}$ 单调，故极限存在。~~由于 f 可积~~

则 $f_n\le f_{n+p}$，令 $p\to\infty$，得 $f_n\le f$。

由于 f 可积，则 f_n 可积且，

$$\int_E f\,dm\ge\int_E f_n\,dm$$

$$\int_E f\,dm\ge\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$$

≤ 由于 $mE<\infty$，且 $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ $(x\in E)$，

则 $f_n(x)\xrightarrow{a.u}f(x)$，则 $f_n(x)\xrightarrow{m}f(x)$。

$f_n\xrightarrow{a.e}f$ $\xrightarrow{mE<\infty}$ $f_n\xrightarrow{a.u}f\longrightarrow f_n\xrightarrow{m}f$。

则对 $\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE(|f_n-f|\ge\varepsilon)=0$。

$$\int_E f\,dm=\int_{E(f-f_n\ge\varepsilon)}f\,dm+\int_{E(f-f_n<\varepsilon)}f\,dm$$

$$\le\int_{E(f-f_n\ge\varepsilon)}f\,dm+\int_{E(f-f_n<\varepsilon)}(f_n+\varepsilon)\,dm$$

$$\le\int_{E(f-f_n\ge\varepsilon)}f\,dm+\int_E f_n\,dm+mE\cdot\varepsilon$$

令 $n\to\infty$，由积分绝对连续性，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E(f-f_n\ge\varepsilon)}f\,dm=0$

故 $\int_E f\,dm\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,dm$。证毕

一般地：

$mE(|f_n-f|\ge\varepsilon)$

$=\int_{mE(|f_n-f|\ge\varepsilon)}1\,dm$。

3° 唯一性的定理证明：

设 f 在 E 上可积，则 $\int_E |f| dm = 0$ 的充要条件是 $f \sim 0$

$\Rightarrow$：

$$\int_E |f(x)| dm \geq \int_{E(|f| \geq \frac{1}{n})} |f(x)| dm \geq \frac{1}{n} mE(|f| \geq \frac{1}{n})$$ 其

由于 $\int_E |f(x)| dm = 0$

则 $mE(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0$

由于 $mE(f \neq 0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(|f| \geq \frac{1}{n}) = 0$ （可列个零测集之并是零测度集）.

可知 $f \sim 0$ （即证 $f \neq 0$ 的测度为 0 即可）.

$\Leftarrow$ $$\int_E |f(x)| dm = \int_{E(f=0)} |f(x)| dm + \int_{E(f \neq 0)} |f(x)| dm$$

$$= \int_{E(f \neq 0)} |f(x)| dm = 0$$ （积分绝对连续性）.

老师要看看考推论：

若 $f \sim g$，f，g 可测），则 f 可积 $\Rightarrow$ g 可积，且积分值相同.

即令 $\varphi = f - g$.

即证 $\int_E |\varphi| dm = 0$ 的充要条件是 $\varphi \sim 0$.

但是前提还得证 g 可积，才可以推出 φ 可积，所以才有这推论了.

即证 $\int_E g\, dm < \infty$

$$\int_E g\, dm = \int_{E(f=g)} g\, dm + \int_{E(f \neq g)} g\, dm$$

$$= \int_{E(f=g)} f\, dm + \int_{E(f \neq g)} g\, dm$$

由于 $f \sim g$，故 $mE(f \neq g) \neq 0$.

于是 $\int_E g\, dm < \infty$，g 可积

且 $\int_E g\, dm = \int_E f\, dm$.

一致逼近，平均逼近的区别

三，四章 分别有连续函数逼近可测函数。 ~~m_E~~ $mE(f\neq g)=0$ 见 P_{119}

连续函数平均逼近可积函数。 $\int_E |f-g|\,dm=0$ P_{145}.

① 第一个 f 要满足几乎处处有限且 ~~测度有限~~ E的测度有限.

② 第二个 f 要满足可积性，且E要有限.

往后的就属比较难的部分，可以选择看，或者是老师上课说过要考的部分.

P_{153}. 例4：设 $f(x,t)$ 对每个 $t\in[\alpha,\beta]$ 是有限区间 $[a,b]$ 上关于 x 的可积函数，对每个 $x\in[a,b]$ 关于 t 处处可微，且有常数 C，使得 $\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\le C$，$a\le x\le b$，$\alpha\le t\le\beta$，则有公式

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]}f(x,t)\,dx=\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx\ ,\quad \alpha<t<\beta$$

由于关于 t 处处可微.

$$\text{则}\ \frac{d}{dt}\int_{[a,b]}f(x,t)\,dx=\lim_{h\to0}\int_{[a,b]}h^{-1}[f(x,t+h)-f(x,t)]\,dx$$

$$=\lim_{h\to0}\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t+\theta h)\,dx\ ,\quad 0<\theta<1.$$

据 $\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\le C$. 由有界收敛定理.

$$\frac{d}{dt}\int_{[a,b]}f(x,t)\,dx=\int_{[a,b]}\lim_{h\to0}h^{-1}[f(x,t+h)-f(x,t)]\,dx=\int_{[a,b]}\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx.$$

勒贝格积分的两个引理，两个定理的证明都会有区别判分的游戏，P_{155}.

定理3.6，要是由 $f_n\xrightarrow{m}f$ $\underset{\text{加条件}}{\curvearrowright}$ $f_n\xrightarrow{a.e}f$. 等

P_{158}. 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上R可积充要条件是，当 $\lambda\to0$，大和S和小和s有相同一极限.

P_{163} 例1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上R可积且处处有 $f(x)>0$，则 $(R)\int_a^b f(x)\,dx>0$.

问能否成立.

要转为L积分. 注：遇到R，一定要先转为L，才可以用唯一性定理.

重要概念补充：①维它利意义覆盖

②维它利引理.

③全变差，有界变差

④绝对连续函数.

⑤建立牛顿-莱布尼茨重要定理. P207定理6.（这个不会考，但很重要）.

⑥强收敛，弱收敛.

⑦选择公理.

⑧可分的概念.

⑨L^p空间可分性（很重要，但不考）.