3.1. 迭代法基本理论

$Ax=b$ → 直接法：(高储存, 低算量)

$Ax=b$ → 迭代法 (低储存, 高算量)

$e^{(k)} = x^* - x_k$ (误差向量)

r阶迭代法：$x_0, x_1 \cdots x_{r-1} \longrightarrow x_r, x_{r+1} \cdots x_k \cdots$ ($\lim_{k\to\infty} x_k \to x^*$)

e.g. 一阶线性定常迭代法 $\quad x_k = \underbrace{G}_{\text{(迭代矩阵)}} \cdot x_{k-1} + g \quad$ (迭代公式)

衡量方法：构造、收敛性、收敛速度、误差

define.(完全相容) $x = Gx + g$ 与 $Ax=b$ 同解.

△ 一阶线性定常迭代法
- → Jacobi 迭代
- → Gauss-Seidel 迭代
- → 逐次超松弛迭代

$$A = Q - R$$
$$Qx = Rx + b$$
$$x = Q^{-1}Rx + Q^{-1}b = Gx + g.$$

The. $x_k = Gx_{k-1} + g$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} G^k = 0 \Longleftrightarrow \rho(G) < 1.$

Prov. $e^{(k)} = x^* - x_k = \cdots = G^k e^{(0)}$.

The. 误差估计.

$$\| x_k - x^* \| \leqslant \| G^k \| \| x_0 - x^* \|.$$

$$\| x_k - x^* \| \leqslant \frac{\| G^k \|}{1 - \| G \|} \| x_1 - x_0 \|.$$

def.(收敛速度)：$R(G) = -\ln \rho(G)$

3.2. Jacobi & Gauss-Seidel.

e.g. (Jacobi 迭代)

$$A = D - (D-A), \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Dx = (D-A)x + b$$

$$x = \underbrace{(I - D^{-1}A)}_{B} x + \underbrace{D^{-1}b}_{g}$$

$$\Rightarrow x = \boxed{B} x + \boxed{g}$$

即 $x_k = B x_{k-1} + g$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \left(\frac{b_1}{a_{11}} \cdots \frac{b_n}{a_{nn}} \right)^T$$

The. Jacobi 收敛 $\Leftrightarrow \|B\| < 1$.

The. $\| x_k - x^* \| \leq \|B^k\| \, \| x_0 - x^* \|$

$$\| x_k - x^* \| \leq \frac{\|B^k\|}{1 - \|B\|} \|x_0 - x_1\|$$

e.g. Gauss - Seidel

$$A = D(I-L) - DU \qquad (D - DL - DU)$$

$\hookrightarrow$ $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots a_{nn})$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ 0 & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

* Jacobi 中 $B = L + U$

$$\Rightarrow \quad x_k = \underbrace{(I-L)^{-1}U}\, x_{k-1} + \underbrace{(I-L)^{-1}D^{-1}b}$$

$$x_k = L x_k + U x_{k-1} + D^{-1} b$$

$$\boxed{x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k-1)}\right)}$$

The. 收敛性. $\rho((I-L)^{-1} \cdot U) < 1$

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

* Gauss - Seidel 一般比 Jacobi 快一些.

$$\left.\begin{array}{l}\|B\|_\infty<1\\ \|B\|_1<1\end{array}\right\}$$ Gauss-Seidel 收，Jacobi 收

* Jacobi 收敛
Gauss-Seidel 不收敛
e.g. Page.101.

def.（对角占优矩阵） $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i=1,2\cdots n.$

另有"严格对角占优"

（一行中对角上元素最大）

The. $Ax=b$，A 严格对角占优 $\Rightarrow$ Jacobi & Gauss-Seidel 均收敛

§.3.3. 逐次超松弛迭代法（SOR方法）

* Gauss-Seidel 迭代法的一种加速方法。

e.g. 逐次超松弛迭代法

Gauss-Seidel 中： $x_k = Lx_k + Ux_{k-1} + D^{-1}b$

$$\tilde{x}_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right),\ i=1\sim n.$$

$$\Rightarrow x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w\left(\tilde{x}_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right)$$

松弛因子

$$\left.\begin{array}{l}w>1：\text{超松弛迭代法}\\ w<1：\text{低松弛迭代法.}\end{array}\right\}\text{统称 SOR 方法.}$$

$$x_k = w(Lx_k + Ux_{k-1} - D^{-1}b) + (1-w)x_{k-1}$$

$$= T_w x_{k-1} + w(I-wL)^{-1}D^{-1}b.$$

$$T_w = (I-wL)^{-1}((1-w)I + wU).$$

同时也等价 $A=\frac{1}{\omega}(D-\omega DL)-\frac{1}{\omega}((1-\omega)D+\omega DU)$.

The SOR的收敛性 $\Leftrightarrow \rho(T_\omega)<1$

$\Rightarrow \omega\in(0,2)$

(*Page 106)
Prov.

$\Leftarrow \omega\in(0,2)$, A 对称正定.

§3.4. 共轭向量法.

$Ax=b$, A $\boxed{\text{实对称正定}}$

则 $f(x)=\frac{1}{2}x^TAx-b^Tx$ 的极小值点就是原方程组的解.

(Prov. Page. 108).

$f(x)$ 梯度为 $g(x)=\text{grad } f(x)=Ax-b$.

则 $g(x)=0$ 即 $f(x)$ 极值点就是 $Ax-b$ 的解.

* A正定. 则 R^n 中 $f(x)$ 仅有唯一极小值点.

e.g. $f(x)$ 极小值的一类求法

$x=x_0+tp_0$

$x=x_1+tp_1$

$\vdots$

$x=x_k+tp_k$

寻查方向

$\varphi_k(t)=f(x_k+tp_k)$

$\vdots$

$$\varphi_k'(t)=0 \Rightarrow t=\alpha_k=-\frac{p_k^T(Ax_k-b)}{p_k^TAp_k}.$$

剩余向量 $r_k=g(x_k)=\text{grad } f(x_k)$.

迭代公式：$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ ，$k=0,1,2,\cdots$ （共轭方向法）

def. A的共轭向量系 $\{p_k\}$ ： $p_i^T A p_i \neq 0$, $i \neq j$

e.g. 生成A共轭向量系的一种方法

1). $p_0 = -r_0 = -(Ax_0 - b)$.

$x_1 = x_0 + \alpha_0 p_0$ $\qquad \alpha_0 = -\dfrac{p_0^T r_0}{p_0^T A p_0}$ $\qquad * \ \alpha_k = \dfrac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$

$r_1 = A x_1 - b$

令 $p_1 = -r_1 - \beta_0 r_0 = -r_1 + \beta_0 p_0$

$p_1^T A p_0 = 0 \Rightarrow \beta_0 = \dfrac{r_1^T A p_0}{p_0^T A p_0}$

2) $x_2 = x_1 + \alpha_1 p_1$ $\qquad \alpha_1 = -\dfrac{p_1^T r_1}{p_1^T A p_1}$

$r_2 = A x_2 - b$

$p_2 = -r_2 + \beta_1 p_1$ $\qquad \beta_1 = \dfrac{r_2^T A p_1}{p_1^T A p_1}$ $\qquad * \ \beta_k = \dfrac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T \cdot r_k}$

⋮

x	r	p	α
① x_0	② r_0	② p_0	③ α_0
④ x_1	⑤ r_1 $\xrightarrow{\beta}$	⑥ p_1 round //	⑦ α_1
⑧ x_2	⑨ r_2 $\xrightarrow{\beta}$	⑩ p_2 round //	α_2
⋮			

The. A有m个相异特征根，则共轭斜向量法至多m步.

Method.		
Jacobi	$A = D - (D - A)$	$x_{k+1} = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$
Gauss-Seidel.	$A = D(I - L) - DU$	$x_{k+1} = (I - L)^{-1}Ux_k + (I - L)^{-1}D^{-1}b$
逐次超松弛	$A = \frac{1}{\omega}(D - \omega DL) - \frac{1}{\omega}((1-\omega)D + \omega DU)$	$x_{k+1} = \omega(Lx_{k+1} + Ux_k + D^{-1}b) + (1-\omega)x_k$
共轭梯度	⋯	$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$