Redistritación Electoral

26 de junio de 2013

1. Introducción

El país está formado por 32 entidades federativas. El territorio al interior de cada una de ellas debe ser repartido en un número conocido de distritos, fijo para cada entidad. La necesidad de respetar los límites federales de dichas entidades permite que la distritación se trate como un problema separado en cada una de ellas. Por lo tanto, este documento describe los aspectos tecnológicos de la redistritación en una entidad federativa, considerando un caso general que abarca todas las particularidades presentes en las diferentes entidades.

Supóngase conocido el número n de distritos en que se debe dividir la entidad federativa y que, además, se cuenta con una función de costos, o función objetivo, que asigna a cada posible solución (distritación) un costo, siendo éste menor, cuanto mejor es la solución. Claramente se plantea un problema de optimización, pues se busca la distritación de costo mínimo.

El problema de dividir el territorio de manera arbitraria, como si se tratase de un espacio continuo, podría resultar demasiado complejo. En cambio, para esta redistritación se cuenta con unidades de territorio indivisibles (unidades geográficas), por lo que el problema se convierte en uno de optimización combinatoria, a saber: dividir el conjunto $\mathbb{U}$ de unidades geográficas en n subconjuntos que satisfagan las restricciones correspondientes, tal que su costo sea mínimo. De ahí que la definición de las unidades de territorio indivisibles constituya uno de los elementos de relevancia en la construcción de los nuevos distritos.

2. Definición de las unidades geográficas

Una entidad federativa se puede caracterizar como un conjunto $\mathbb{M}$ de municipios, cada uno de los cuales es a su vez un conjunto $\mathbb{S}_{\mathbf{M}}$ de secciones ($\mathbf{M} = 1, 2, \ldots, m$, donde $m = |\mathbb{M}|$ es el número total de municipios de la entidad). En principio, se desea conservar la integridad municipal, es decir, resulta preferible no dividir los municipios. Con esta idea, se busca que las unidades territoriales indivisibles sean, precisamente, los municipios. Sin embargo, las irregularidades en la distribución poblacional a lo largo del territorio nacional, así como las restricciones para la proporción de población que debe contener cada distrito, impiden la realización total de este plan. Uno de los criterios inviolables para la redistritación es que en cada distrito, para que sea válido, la población no debe exceder cierta desviación con respecto a la población media nacional. Sin embargo, existen municipios cuya población es tan grande que rebasa dichos límites, como es el caso de aquéllos que contienen grandes zonas urbanas. Cuando esto sucede, es necesario considerar unidades geográficas más pequeñas.

Supóngase que la población del municipio $\mathbf{M} \in \mathbb{M}$ rebasa el límite establecido. Una primera posibilidad, la más simple, consiste en considerar como unidad geográfica independiente a cada una de las secciones $j \in \mathbb{S}_{\mathbf{M}}$, aprovechando la división territorial existente. Sin embargo, esta opción presenta algunos problemas. Por un lado, el número de secciones en un municipio urbano puede ser enorme, aumentando mucho la complejidad del problema. Por otro lado, las unidades geográficas resultantes serían muy irregulares, tanto en área, como en población, produciendo heterogeneidades en el espacio de soluciones que dificultarían la búsqueda del óptimo. Finalmente, el uso de la sección como nivel mínimo de agregación, permite que los límites distritales al interior de las zonas urbanas sean irregulares y no respeten límites geográficos ni vialidades principales, lo cual no se ajusta a los objetivos que se desea cumplir. Por lo tanto, es conveniente considerar subconjuntos de secciones que conformen unidades indivisibles.

Uno de los criterios a considerar para la redistritación es el respeto de vías principales de comunicación en zonas urbanas, así como de accidentes geográficos importantes, de modo que estos rasgos se consideran como delimitadores en la formación de subconjuntos de secciones. Se definen, así, polígonos cuyas aristas son vías principales, ríos, carreteras y vías de ferrocarril.

Para cada unidad geográfica, $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$, el conjunto de unidades vecinas, $\mathbb{V}_{\mathbf{U}}$, se forma con todas aquellas unidades que tienen una frontera geográfica con $\mathbf{U}$ (los puntos no se consideran como fronteras). Teniendo en cuenta que las unidades son zonas territoriales bien definidas, conexas y que abarcan todo el territorio nacional, resulta claro que no existe ambigüedad en la definición.

Dos casos merecen especial atención. El conjunto $\mathbb{V}_{\mathbf{U}}$ puede ser vacío si la unidad geográfica $\mathbf{U}$ es una isla. En este caso, se genera una vecindad artificial: $\mathbb{V}_{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U}'\}$, donde $\mathbf{U}'$ es la unidad geográfica en la que se encuentra el puerto desde el que más comúnmente se accede a la isla. Después se analiza el caso en que $|\mathbb{V}_{\mathbf{U}}| = 1$, es decir, cuando la unidad $\mathbf{U}$ tiene una única unidad vecina, digamos $\mathbf{U}^*$. Claramente, cualquier distrito que contenga a $\mathbf{U}$ y a otra unidad, deberá contener a $\mathbf{U}^*$, para mantener la conexidad. Por esta razón, se procede a agrupar en una única unidad geográfica a ambas unidades. De este modo, se reduce ligeramente el número de unidades geográficas, garantizando que la cardinalidad de cualquier conjunto de vecinas es al menos igual a dos.

Hasta este punto se ha construido el conjunto $\mathbb{U}$ de unidades geográficas, con las siguientes propiedades:

1. Toda unidad geográfica es conexa:

$$\mathbf{U} \text{ es conexa}, \forall\, \mathbf{U} \in \mathbb{U}.$$

2. Las unidades geográficas abarcan todo el territorio de la entidad:

$$\bigcup_{\mathbb{U}} \mathbf{U} = \bigcup_{\mathbb{M}} \mathbf{M}.$$

3. La relación de vecindad entre unidades geográficas es simétrica, o recíproca:

$$\mathbf{U} \in \mathbb{V}_{\mathbf{V}} \Leftrightarrow \mathbf{V} \in \mathbb{V}_{\mathbf{U}}, \qquad \forall\, \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{U}.$$

4. Toda unidad geográfica tiene al menos dos vecinas:

$$\forall\, \mathbf{U} \in \mathbb{U},\ |\mathbb{V}_{\mathbf{U}}| \geq 2.$$

Es importante observar que, aún después de esto, las unidades geográficas pueden presentar gran disparidad, en términos tanto del territorio como de la población que abarcan. Como consecuencia, el espacio de soluciones factibles no es homogéneo. Sin embargo, la definición de unidades geográficas facilita la transición de una solución a otra dentro de dicho espacio, permitiendo que éste sea explorado a través del algoritmo de optimización.

3. El espacio de soluciones factibles

Se define un *escenario*, $\mathbf{E}$, como una solución factible o configuración distrital válida. Sea n el número de distritos correspondiente a la entidad de trabajo. Un escenario es una partición del conjunto $\mathbb{U}$ de unidades geográficas, que satisface la restricción de conexidad territorial distrital. Es decir, $\mathbf{E} = \{\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n\}$ es un escenario si y sólo si:

1. Ninguna unidad geográfica pertenece a más de un distrito, es decir, los distritos son ajenos:

$$\mathbf{D}_i \cap \mathbf{D}_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j.$$

2. Toda unidad geográfica pertenece a algún distrito:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{D}_i = \mathbb{U}.$$

3. Todos los distritos tienen continuidad geográfica:

$$\mathbf{D}_i \text{ es conexo} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$

El conjunto de todos los escenarios, $\mathbb{E} = \{\mathbf{E}_1, \ldots, \mathbf{E}_R\}$ es el espacio de soluciones factibles en el cual se busca la óptima. Dado un escenario, $\mathbf{E} = \{\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n\}$, se define una *transición* como el cambio de distrito por parte de una única Unidad Geográfica, siempre y cuando la solución generada sea factible, es decir, se debe generar un escenario nuevo $\mathbf{E}' = \{\mathbf{D}'_1, \ldots, \mathbf{D}'_n\}$.

El escenario $\mathbf{E}' = \{\mathbf{D}'_1, \ldots, \mathbf{D}'_n\}$ es *vecino* de $\mathbf{E} = \{\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_n\}$ si se puede generar a partir de él en una sola transición, es decir, si:

1. Existen en $\mathbf{E}$ dos distritos, $\mathbf{D}_i$ y $\mathbf{D}_j$, donde $\mathbf{D}_i$ cede a $\mathbf{D}_j$ una única unidad geográfica u:

$$\exists\, i, j, u \text{ tales que } \mathbf{D}'_i = \mathbf{D}_i \backslash \{u\} \text{ y } \mathbf{D}'_j = \mathbf{D}_j \cup \{u\}.$$

2. Los demás distritos de $\mathbf{E}$ son idénticos en ambos escenarios:

$$\mathbf{D}'_\ell = \mathbf{D}_\ell \quad \forall\, \ell \neq i,\ \ell \neq j.$$

Para cada escenario $\mathbf{E}$, su vecindad $\mathbb{V}_{\mathbf{E}}$ se define como el conjunto de todos los escenarios vecinos de $\mathbf{E}$.

4. Función de costo o función objetivo

A cada escenario $\mathbf{E}$ en el espacio de soluciones se asigna un costo $\mathcal{C}(\mathbf{E})$, el cual es menor cuanto mejor es el escenario, de acuerdo con los criterios de redistritación. A $\mathcal{C}(\mathbf{E})$ se le denomina la función de costos o función objetivo y el propósito del algoritmo es encontrar el escenario que la minimice.

La función $\mathcal{C}(\mathbf{E})$ se forma como la suma ponderada de cuatro términos, cada uno de los cuales representa, respectivamente, uno de los cuatro criterios establecidos para la redistritación:

$$\mathcal{C}(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \mathcal{C}_i(\mathbf{E}) = \alpha_1 \mathcal{C}_1(\mathbf{E}) + \alpha_2 \mathcal{C}_2(\mathbf{E}) + \alpha_3 \mathcal{C}_3(\mathbf{E}) + \alpha_4 \mathcal{C}_4(\mathbf{E}).$$

Esta función se describe con mayor detalle en los apartados que siguen.

5. Acuerdos aprobados para la redistritación

1. *Para la determinación del número de distritos que tendrá cada entidad federativa, se observará lo dispuesto en el artículo 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. El método para la distribución de los distritos en las entidades federativas, será el que garantice mejor equilibrio poblacional.*

a) *Para la determinación del número de distritos que tendrá cada entidad federativa, se utilizarán los resultados del Censo de Población y Vivienda 2010.*

b) *Se utilizará el método conocido como "RESTO MAYOR una media", por ser el método matemático que garantiza mejor equilibrio poblacional. El método "RESTO MAYOR una media" consiste en:*

1) *Calcular la* media nacional *dividiendo la población del país entre el número de distritos que se distribuirán (300).*
2) *Dividir la población de cada entidad federativa entre la media nacional. A cada entidad federativa se asigna un número de distritos igual a la parte entera que resulte de la división.*
3) *Asignar, en cumplimiento a la legislación correspondiente, dos distritos a aquéllas entidades federativas cuyo cociente resulte menor que dos.*
4) *Asignar un distrito adicional a aquellas entidades federativas que tuvieran los números fraccionarios mayores, hasta completar los 300 distritos.*

El cálculo del número de distritos por entidad se realiza con total apego a este criterio, introduciéndose posteriormente como parte de los insumos del sistema, los cuales no pueden ser alterados por el mismo.

2. *Los distritos se integrarán con territorio de una sola entidad federativa.*

El sistema está diseñado para redistritar cada entidad federativa por separado, de modo que los distritos en ningún caso podrán compartir territorio de más de una entidad.

3. *Se aplicará el equilibrio demográfico en la determinación de los distritos partiendo de la premisa de que la diferencia de población de cada distrito, con respecto a la media nacional será lo más cercano a cero.*

a) *Para salvaguardar la integridad municipal se permitirá que la desviación poblacional de cada distrito, en relación con la media nacional, sea como máximo igual a 15 %*

b) *Toda desviación que exceda el límite señalado en el punto anterior deberá justificarse técnicamente y recabarse la opinión de la Comisión Nacional de Vigilancia y el Comité Técnico para el seguimiento y evaluación de los trabajos de distritación.*

El artículo 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos expone lo siguiente:

"ARTÍCULO 53. La demarcación territorial de los 300 distritos electorales uninominales será la que resulte de dividir la población total del país entre los distritos señalados. La distribución de los distritos electorales uninominales entre las entidades federativas se hará teniendo en cuenta el último censo general de población, sin que en ningún caso la representación de un Estado pueda ser menor de dos diputados de mayoría.

Para la elección de los 200 diputados según el principio de representación proporcional y el Sistema de Listas Regionales, se constituirán cinco circunscripciones electorales plurinominales en el país. La ley determinará la forma de establecer la demarcación territorial de estas circunscripciones."

Atendiendo el hecho de que la distribución de la población no es homogénea en el territorio nacional y que la unidad geográfica que constituye la base de organización administrativa y política del país, son los municipios, como indica el siguiente artículo constitucional:

"ARTÍCULO 115. Los estados adoptarán, para su régimen interior, la forma de gobierno republicano, representativo, popular, teniendo como base de su división territorial y de su organización política y administrativa el municipio libre."

De donde se desprende que para formar los distritos es necesario preservar, en la medida de lo posible, la integridad territorial de los municipios.

Al conformar las unidades geográficas, el sistema busca que ninguna exceda por sí misma el límite de desviación poblacional permitido, realizando la división municipal pertinente en caso de ser requerida.

Por otro lado, la primera componente de la función objetivo ($\mathcal{C}_1$) representa el promedio de desviaciones distritales con respecto a la media estatal, de modo que, al minimizar el costo, se minimizan dichas desviaciones, siempre en combinación con las demás variables, es decir, tomando en cuenta el resto de los criterios.

El costo poblacional asociado al distrito i, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, es:

$$\left(\frac{P_i - \dfrac{P_N}{300}}{\dfrac{d}{100} \dfrac{P_N}{300}} \right)^2,$$

donde:

n = número de distritos en el estado.
P_i = población del distrito i.
P_N = población total nacional.
$\frac{P_N}{300}$ es la media nacional.
$d = 15$, porcentaje de desviación poblacional máxima por distrito.

Obsérvese que la expresión entre paréntesis se eleva al cuadrado para manejar por igual desviaciones por defecto y por exceso, así como para penalizar más las grandes desviaciones.

Entonces, para un escenario dado **E**, la componente poblacional en la función objetivo se calcula como:

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_i - \frac{P_N}{300}}{\frac{d}{100}\frac{P_N}{300}} \right)^2 .$$

4. *Conforme al Artículo 2, último párrafo, y Tercero transitorio de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, del Decreto publicado en el Diario Oficial de la Federación el 14 de agosto de 2001; para establecer la demarcación territorial de los distritos electorales uninominales, deberá tomarse en consideración, cuando sea factible, la ubicación de los pueblos y comunidades indígenas, a fin de propiciar su participación política.*

a) *Se utilizará la información sobre localidades y municipios indígenas que proporcione la Comisión Nacional para el Desarrollo de los Pueblos Indígenas.*

Este acuerdo se introduce como parte de la definición de las unidades geográficas.

El artículo constitucional al que se refiere este acuerdo dice:

"ARTÍCULO 3. Para establecer la demarcación territorial de los distritos electorales uninominales deberá tomarse en consideración, cuando sea factible, la ubicación de los pueblos y comunidades indígenas, a fin de propiciar su participación política."

Además, el Oficio PUP/DGEC/DSAP/003/201G3 de la Comisión Nacional para el Desarrollo de los Pueblos Indígenas (CDI) dice:

"El porcentaje recomendado por la CDI es del 40 % y más de población indígena que es lo que define tanto municipios como localidades indígenas. Este porcentaje ha sido aplicado a las bases de datos que se ponen a su disposición, y es también la proporción que institucionalmente se ha utilizado para la construcción de la tipología de municipios indígenas y localidades indígenas, así como para la operación de sus programas, el seguimiento de

su acción gubernamental, la construcción de indicadores y la estadística indígena, los procesos de planeación y consulta, y también ha sido compartida con otras dependencias para apoyar sus acciones institucionales en materia de atención a la población indígena."

Al definir las unidades geográficas se unifican los municipios indígenas que son contiguos entre sí, siempre que la población de la Unidad así formada no exceda los límites aceptables. De este modo, se busca que las localidades, en la medida de lo posible y sin violar criterios de mayor jerarquía, queden integrados en territorios indivisibles. En el caso de zonas indígenas que no presentan continuidad geográfica, el sistema no podría identificarlas, por lo que serían susceptibles de ajustes posteriores. En el caso de zonas indígenas con continuidad geográfica, cuya población corresponda a más de un distrito, es posible definir procesos independientes para formar distritos al interior.

5. *Los distritos tendrán continuidad geográfica tomando en consideración los límites político-administrativos y los accidentes geográficos.*

a) *En caso de identificar diferendos de delimitación territorial estatal y/o municipal, se utilizará como marco de referencia la cartografía electoral vigente, para salvaguardar los derechos político-electorales de los ciudadanos.*

b) *Para la integración de distritos se utilizará la distribución municipal y seccional vigente. La unidad de agregación mínima será la sección electoral.*

Este criterio se introduce como restricción de factibilidad. Por una parte, en la definición de unidades geográficas; por otra, el sistema dispone de un mecanismo para generar únicamente soluciones factibles, es decir, escenarios en los que cada distrito es continuo. Dicho mecanismo se describe a continuación.

Un distrito se puede representar conceptualmente como un grafo $G = (V, E)$ no-orientado, donde el conjunto V de sus vértices corresponde al conjunto de unidades geográficas en el distrito, y (i, j) pertenece al conjunto E de sus aristas si y sólo si las unidades geográficas i y j tienen frontera común (distinta de un punto). Así, el distrito tiene continuidad geográfica si y sólo si el grafo G es conexo, es decir, para todo par de sus vértices $i, j \in V$ existe una trayectoria que los une. Esta conexidad del grafo es verificada con el objeto de que el sistema no produzca distritos discontinuos geográficamente, evitando así la infactibilidad.

En el caso de los municipios y/o secciones que por su naturaleza están constituidos por territorios discontinuos, se agrupan como una sola unidad geográfica cuando es posible, o, en su caso, se establecen como unidades geográficas independientes, si su tamaño, población y ubicación lo exigen.

6. *En la delimitación de los distritos se procurará obtener la mayor compacidad geométrica; ningún distrito podrá rodear íntegramente a otro.*

Este acuerdo se introduce como componente de la función de costo.

La cuarta componente de la función objetivo ($\mathcal{C}_4$) se refiere a la compacidad geométrica o geográfica de los distritos. Puesto que la naturaleza de las entidades y de las unidades de agregación utilizadas (municipios, secciones y unidades geográficas) es geométricamente irregular, no se considera conveniente la utilización de medidas clásicas de compacidad (o convexidad) geométrica. Se utiliza, por tanto, una medida generalizada de compacidad distrital, la cual busca evitar, en la medida de lo posible, la generación de formas irregulares:

$$\mathcal{C}_4(\mathbf{E}) = \frac{\delta}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_i}{\sqrt{A_i}} \right)^2 - 1 \right],$$

donde:

R_i = perímetro del distrito i.
A_i = área del distrito i.
n = número de distritos en el estado.
δ = constante de calibración para la componente de compacidad geométrica.

En esta fórmula el cociente $\dfrac{R_i}{\sqrt{A_i}}$ penaliza más los distritos cuyo perímetro es excesivo con respecto a su área. O sea, para dos distritos con la misma área, el de menor perímetro aporta menos a la función objetivo. Las constantes n y δ en la fórmula tienen por objeto hacer comparable este término con los demás términos de la función objetivo. Nótese que esta componente es adimensional, tanto como las demás componentes de la función objetivo. Por otra parte, si un distrito hipotético i fuese totalmente circular, o sea, de compacidad perfecta, se tendría

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_i}{\sqrt{A_i}} \right)^2 - 1 = 0.$$

Adicionalmente, si en un escenario un distrito rodea íntegramente a otro, se le asigna una penalización suficientemente grande, para que el sistema de optimización rechace soluciones en las que esto suceda.

7. *Los distritos se construirán preferentemente con municipios completos. Cuando sea necesario integrar distritos a partir de fracciones municipales se buscará involucrar al menor número de municipios.*

Este acuerdo se atiende mediante dos dispositivos. El primer dispositivo consiste en un algoritmo *ad hoc*, cuyo objetivo es determinar, en cada entidad, el conjunto de municipios que maximiza el número de distritos completos que se forman en su interior, atendiendo simultáneamente el criterio de equilibrio poblacional. El segundo dispositivo consiste en la segunda componente de la función de costo ($\mathcal{C}_2$). A continuación se explicitan ambos dispositivos.

I. Algortimo ad-hoc

Se ejecuta para cada entidad de manera independiente. Para empezar, se determina el conjunto de municipios que pueden albergar un número entero de distritos cumpliendo con la norma poblacional. Algunos de estos municipios corresponden exactamente a un distrito, pero otros podrían corresponder a dos o más distritos. A todos estos municipios aquí se les llama *candidatos*. Sea $\mu(j)$ el número de distritos que caben en el candidato j.

Enseguida, el algoritmo detecta los conjuntos $Z_1, \ldots, Z_k$ de candidatos que cumplen con

- Cada conjunto Z_j se puede "congelar" de modo que su complemento, formado por los municipios no-congelados, no dé lugar a agrupaciones confinadas; es decir, se desea que cada agrupación resultante pueda albergar un número entero de distritos que cumplen con la norma poblacional, sin tener población excedente.

Finalmente, el algoritmo ad-hoc elige un conjunto Z^* de municipios (candidatos) que minimiza su desviación poblacional así como la de sus respectivos complementos, y que maximiza la sumatoria $\sum_{j \in Z^*} \mu(j)$, pero siempre bajo la condición de que el número de distritos que se forman sea igual a n, para obtener factibilidad.

Este algortimo se expresa ahora en términos más formales. En lo que sigue $\mathbf{P} = P_N/300$ denota la media nacional y d es el porcentaje de desviación máxima por distrito. Entonces $\underline{P} = (1 - d/100)\mathbf{P}$ y $\overline{P} = (1 + d/100)\mathbf{P}$.

Sea $G = (V, E)$ el grafo que corresponde a una entidad federativa dada, donde V es el conjunto de municipios y $(v_1, v_2) \in E$ si y sólo si los municipios $v_1,\ v_2 \in V$ son adyacentes, es decir, comparten al menos una arista. En adelante los términos 'municipio' y 'vértice' se usarán indistintamente.

Sea p_v la población del municipio $v \in V$. Si existe un entero x tal que $x\underline{P} \leq p_v \leq x\overline{P}$, entonces $\mu(v) = x$, en caso contario $\mu(v) = 0$.

Sea $U = \{\, v \mid \mu(v) > 0 \,\}$ el conjunto de municipios que más arriba se han llamado 'candidatos'.

Para un conjunto de municipios $Z \subseteq U$, el grafo $H(Z)$ se obtiene de G al borrar todos los vértices de Z, así como las aristas que tocan alguno de estos vértices. Sea $\Gamma(Z)$ el conjunto de componentes conexas de $H(Z)$, que denotamos $C_1, \ldots, C_{\gamma = |\Gamma(Z)|}$. Más aún, si para la componente conexa $C = (V_C, E_C) \in \Gamma(Z)$ existe un entero x tal que $x\underline{P} \leq \sum_{v \in V_C} p_v \leq x\overline{P}$, entonces $\mu(C) = x$, en caso contrario $\mu(C) = 0$.

Una solución *factible* es un conjunto de municipios $Z \subseteq U$ (que se llaman *congelados*) tal que:

- $\mu(C) \neq 0$ para todo $C \in \Gamma(Z)$, (esto evita confinamientos)
- $\sum_{v \in Z} \mu(v) + \sum_{C \in \Gamma(Z)} \mu(C) = n =$ número de distritos en que debe particionarse la entidad federativa.

Se desea, entonces, encontrar una solución factible $Z \subseteq U$ que minimice la desviación poblacional tanto de los municipios congelados que pertenecen a Z, como de todos los demás en la entidad (o sea, los no-congelados). Es decir, se busca minimizar la expresión

$$\sum_{v \in Z} \left(\frac{p_v}{\mu(v)} - \mathbf{P} \right)^2 + \sum_{C \in \Gamma(Z)} \left(\frac{p_C}{\mu(C)} - \mathbf{P} \right)^2,$$

y que al mismo tiempo la sumatoria $\sum_{v \in Z} \mu(v)$ sea lo más grande posible.

En esta fórmula, $\displaystyle\sum_{v \in Z} \left(\frac{p_v}{\mu(v)} - \mathbf{P} \right)^2$ considera la desviación poblacional de los municipios congelados, $\displaystyle\sum_{C \in \Gamma(Z)} \left(\frac{p_C}{\mu(C)} - \mathbf{P} \right)^2$ considera la desviación poblacional de los municipios no-congelados, y p_C es la población de la componente conexa C, es decir, la suma de las poblaciones de los municipios no-congelados pertenecientes a la componente conexa C.

Cada municipio congelado, así como cada componente conexa da lugar a un proceso independiente.

Para encontrar la solución $Z \subseteq U$ bajo las condiciones expuestas, el algoritmo ad-hoc utiliza búsqueda exhaustiva, lo cual toma tiempo despreciable para todas las entidades federativas.

II. Cálculo de la componente $\mathcal{C}_2$ en la función de costo

Para el cálculo de la componente de integridad municipal en un escenario dado, se efectúan dos pasos de la siguiente manera:

Paso 1. Sea M el conjunto de municipios que intersectan a dos o más distritos y sea $\Pi(j)$ el conjunto de distritos que intersectan al municipio $j \in M$.

Más aún, $D_i(j)$ denota la población del distrito $i \in \Pi(j)$ que pertenece al municipio $j \in M$, y $F_i(j)$ la población del distrito $i \in \Pi(j)$ que no pertenece al municipio $j \in M$. O sea, $D_i(j) + F_i(j)$ es la población total del distrito i.

Sin pérdida de generalidad, se supone $D_1(j) \geq D_2(j) \geq \cdots \geq D_\ell(j)$, donde $\ell = |\Pi(j)|$ es el número de distritos que intersectan al municipio j.

Enseguida, si P_j denota la población del municipio j, entonces $\varphi = \lfloor P_j/\mathbf{P} \rfloor$ es la parte entera de dividir P_j entre la media nacional $\mathbf{P}$.

Finalmente, en la fórmula de abajo, los valores calculados de $PF_j = \sum_{i=1}^{\varphi} F_i$ y $PD_j = \sum_{i=\varphi+2}^{\ell} D_i$ tienen por objeto penalizar que los distritos no estén completos dentro del municipio j.

Paso 2. Para cada distrito i de la entidad se cuenta el número s de fracciones municipales contenidas en i. En el segundo término de la fórmula de abajo $w(i) = s$ si $s \geq 2$, y $w(i) = 0$ en otro caso. Entonces, la componente de integridad municipal se calcula con

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{E}) = \beta_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{PF_j + \frac{PD_j}{2}}{P_E} + \frac{\beta_2}{n} \sum_{i=1}^{n} w(i),$$

donde:

$n =$ número de distritos en el estado.
$P_E =$ población estatal.
β_1 y β_2 son constantes de calibración para la componente de integridad municipal.
Las demás variables han sido explicadas en los párrafos anteriores.

Es importante señalar que los dos dispositivos descritos están motivados por atender el acuerdo **7** y trabajan, con enfoques distintos, en la misma dirección. Si bien es cierto que el algoritmo ad-hoc sólo considera el equilibrio poblacional y la integridad municipal —los dos conceptos más importantes en la distritación—, ambos, junto con los tiempos de traslado y la compacidad geométrica, forman parte integral de la función de costo.

Al definir las unidades geográficas, se conservan íntegros los municipios cuya desviación poblacional con respecto a la media estatal no excede el límite establecido, garantizando prácticamente la formación de un distrito integrado por cada uno de dichos municipios.

Existe únicamente una excepción: en ocasiones, aunque la población de un municipio no alcance el límite de desviación máxima, su situación geográfica le obliga a asociarse, en la formación de distritos, con municipios poblacionalmente más pequeños, pero cuya suma excede la desviación máxima permitida.

En estos casos, no queda otro remedio que partir el municipio en cuestión en unidades más pequeñas a repartir en dos distritos. Finalmente, existen municipios que son intrínsecamente disconexos y por tanto no pueden ser tratados como unidades geográficas.

8. *En la conformación de los distritos se procurará optimizar los tiempos de traslado.*

Los tiempos de traslado entre unidades geográficas (municipios, grupos de municipios, secciones o grupos de secciones) se construyen a partir de tablas de tiempos de traslado interseccionales, para cada una de las entidades federativas, las cuales sirven de insumo en el sistema de distritación.

Para determinar los tiempos de traslado entre secciones que no son adyacentes, a partir de tiempos de traslado de secciones adyacentes, se utilizan algoritmos bien conocidos en el ámbito de la optimización combinatoria, lo cuales resuelven con eficiencia el llamado *problema de la ruta más corta*.

El tiempo de traslado de una unidad geográfica a otra, se calcula como el promedio de los tiempos de traslado entre cada sección de una de ellas y cada sección de la otra. Más precisamente, si las unidades geográficas G y H tienen, digamos, r y s secciones, respectivamente, y si τ_{ij} es el tiempo de traslado entre las secciones i y j, entonces el tiempo de traslado entre G y H es

$$\frac{1}{rs}\sum_{i\in G}\sum_{j\in H}\tau_{ij}.$$

Con esto, la componente de tiempos de traslado en la función de costo es

$$\mathcal{C}_3(\mathbf{E}) = \gamma\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\bar{T}_k - \dfrac{\bar{T}_E}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{\bar{T}_E}{n}\right)^2},$$

donde:

$\bar{T}_E$ = tiempo promedio de traslado entre todas las unidades geográficas en el estado.
$\bar{T}_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{t_{ij}}{n_k(n_k-1)}$, es el tiempo promedio de traslado entre todas las unidades geográficas que pertenecen al distrito k.
n_k = número de unidades geográficas en el distrito k.
n = número de distritos en el estado.
t_{ij} = tiempo de traslado de la unidad geográfica i a la unidad geográfica j, dentro del distrito k.
γ = constante de calibración para la componente de tiempos de traslado.

9. *La función de costo asociada al cumplimiento de los acuerdos anteriores será la siguiente:*

$$\mathcal{C}(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\mathcal{C}_i(\mathbf{E}) = \alpha_1\mathcal{C}_1(\mathbf{E}) + \alpha_2\mathcal{C}_2(\mathbf{E}) + \alpha_3\mathcal{C}_3(\mathbf{E}) + \alpha_4\mathcal{C}_4(\mathbf{E}),$$

donde:

$\mathcal{C}_1(\mathbf{E})$ = *Costo por equilibrio poblacional asociado al escenario* $\mathbf{E}$.

$\mathcal{C}_2(\mathbf{E})$ = *Costo por integridad municipal asociado al escenario* $\mathbf{E}$.

$\mathcal{C}_3(\mathbf{E})$ = *Costo por tiempos de traslado asociado al escenario* $\mathbf{E}$.

$\mathcal{C}_4(\mathbf{E})$ = *Costo por compacidad geométrica asociado al escenario* $\mathbf{E}$.

α_i = *Factor de ponderación asociado con la componente i de la función objetivo, para* $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Se determina el siguente orden para los criterios propuestos:

(1) Desviación poblacional.
(2) Integridad municipal.
(3) Tiempos de traslado.
(4) Compacidad geométrica.

Se utilizan las mismas fórmulas, los mismos ponderadores $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 1$, y las mismas constantes de calibración para todas las entidades federativas.

En concordancia con los desarrollos técnicos previamente expuestos en este documento, cada uno de los términos de la función de costo para un escenario $\mathbf{E}$ se muestra enseguida.

(1) Desviación poblacional

$$\mathcal{C}_1(\mathbf{E}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_i - \frac{P_N}{300}}{\frac{d}{100}\frac{P_N}{300}} \right)^2 ,$$

donde:

n = número de distritos en el estado.
P_i = población del distrito i.
P_N = población total nacional.
$\frac{P_N}{300}$ es la media nacional.
$d = 15$, porcentaje de desviación poblacional máxima por distrito.

(2) Integridad municipal

$$\mathcal{C}_2(\mathbf{E}) = \beta_1 \sum_{j=1}^{m} \frac{PF_j + \frac{PD_j}{2}}{P_E} + \frac{\beta_2}{n} \sum_{i=1}^{n} w(i),$$

donde:

n = número de distritos en la entidad.
m = número municipios fraccionados en la entidad.

P_E = población estatal.
$\beta_1 = 500$ y β_2 =1.0 son las constantes de calibración para la componente de integridad municipal.
Para una explicación de las demás variables y constantes, favor de referirse al texto que en este documento corresponde al acuerdo **7**.

(3) Tiempos de traslado

$$\mathcal{C}_3(\mathbf{E}) = \gamma \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\bar{T}_k - \dfrac{\bar{T}_E}{n}\right)^2}{\left(\dfrac{\bar{T}_E}{n}\right)^2},$$

donde:

$\bar{T}_E$ = tiempo promedio de traslado entre todas unidades geográficas en el estado.
$\bar{T}_k = \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \frac{t_{ij}}{n_k(n_k - 1)}$, es el tiempo promedio de traslado entre todas las unidades geográficas que pertenecen al distrito k.
n_k = número de unidades geográficas en el distrito k.
n = número de distritos en el estado.
t_{ij} = tiempo de traslado de la unidad geográfica i a la unidad geográfica j, dentro del distrito k.
$\gamma = 4 \times 10^{-5}$, es la constante de calibración para la componente de tiempos de traslado.

(4) Compacidad geométrica

$$\mathcal{C}_4(\mathbf{E}) = \frac{\delta}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{R_i}{\sqrt{A_i}} \right)^2 - 1 \right],$$

donde:

R_i = perímetro del distrito i.
A_i = área del distrito i.
n = número de distritos en el estado.
$\delta = 9$, es la constante de calibración para la componente de compacidad geométrica.

10. *Para la construcción de los distritos electorales se utilizará un modelo heurístico de optimización combinatoria que se construirá tomando en cuenta los criterios aprobados por el Consejo General.*

La minimización de la función de costo $\mathcal{C}(\mathbf{E})$ es un problema de optimización combinatoria clasificado matemáticamente como *NP*-completo.

Esto son malas noticias, ya que a la fecha no se conoce ningún método que, en general y aún contando con la computadora más rápida del mundo, pueda resolver esta clase de problemas en un tiempo razonable.

Sin embargo, varios especialistas en el área han propuesto recientemente una amplia variedad de técnicas avanzadas que, con eficiencia, permiten aproximar la solución óptima deseada. Estas técnicas se conocen con el nombre genérico de *métodos heurísticos*. Entre ellos destacan por sus logros: búsqueda tabú, algoritmos genéticos, abejas artificiales, recocido simulado, etc.

El sistema de distritación incorpora la técnica de *recocido simulado*[1] —en su variante de *aceptación por umbrales* (threshold accepting, en inglés)[2], por ser más simple y permitir mayor rapidez de ejecución—, ya que es altamente competitiva con las demás que han sido exitosas al resolver heurísticamente una extensa gama de problemas difíciles de optimización combinatoria.

El recocido simulado se inspira en el proceso físico de templado de metales, donde se busca estados de la materia con mínima energía potencial. Propuesto por Kirkpatrick, Gellat y Vecchi hace 30 años[3], el recocido simulado utiliza intensamente el concepto de 'vecindad' —o 'escenario vecino', tal como ha sido definido en la Sección 2 de este documento—, y consiste en una variante sofisticada del conocido método de 'mejoras sucesivas', la cual ofrece la posibilidad de escapar de mínimos locales que no son mínimos globales, para pasar a otras regiones de la función de costo, aumentando las expectativas de mejorarla.

Esta sofisticación consiste en la aplicación del concepto de 'temperatura' —así llamado por analogía con el templado de metales— de la siguiente manera: supóngase que en algún momento del proceso se tiene una temperatura t y un escenario $\mathbf{E}$, con costo $\mathcal{C}(\mathbf{E})$; se genera un escenario vecino $\mathbf{E}'$, con costo $\mathcal{C}(\mathbf{E}')$; entonces, el escenario $\mathbf{E}$ es reemplazado por el escenario $\mathbf{E}'$ si $\mathcal{C}(\mathbf{E}') < \mathcal{C}(\mathbf{E}) + t$. En otras palabras, un nuevo escenario $\mathbf{E}'$ es aceptado cuando es mejor que $\mathbf{E}$, o bien cuando el empeoramiento en la función de costo no es mayor que t.

El parámetro de temperatura t es el empeoramiento máximo permitido a partir de una solución dada. Este parámetro se inicializa con un valor relativamente alto t_0 con el fin de efectuar una amplia exploración del espacio

[1] Buenas descripciones del método con rigor científico son: D. Bertsimas and J. Tsitsiklis, *Simulated annealing*, Statistical Science 8(1), pp. 10–15, 1993; D. Henderson, S.H. Jacobson, and A.W. Johnson, *The theory and practice of simulated annealing*, in: F. Glover and G. Kochenberger (eds.), pp. 287–319, Boston: Kluwer, 2003; y B. Suman and P. Kumar, *A survey of simulated annealing as a tool for single and multiobjective optimization*, Journal of the Operational Research Society 57, pp. 1143–1160, 2006.

[2] G. Dueck and T. Scheuer, *Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing*, Journal of Computational Physics 90, pp. 161–175, 1990.

[3] S. Kirkpatrick, C.D. Gellat and M.P. Vecchi, *Optimization by simulated annealing*, Science 220 (4598), May 13, pp. 621–680, 1983.

de soluciones. A medida que se ejecutan las iteraciones del algoritmo la temperatura se reduce poco a poco (enfriamiento del sistema) hasta llegar virtualmente a $t = 0$, donde se considera que el sistema está estable, lo cual corresponde a un método simple de mejoras sucesivas.

Tres puntos merecen atención especial: la determinación de la temperatura inicial, la estrategia de enfriamiento, y el criterio de paro final.

Temperatura inicial. Cuando la temperatura inicial t_0 es alta el algoritmo puede explorar amplias extensiones de la función de costo pero el tiempo de proceso puede llegar a ser inaceptable; por otro lado, cuando la temperatura inicial es baja el tiempo de proceso disminuye pero se incrementa la probabilidad de que el algoritmo termine en un óptimo local relativamente malo. Por lo tanto, en la determinación de una temperatura inicial es importante considerar un compromiso razonable entre la calidad de la solución y el tiempo de proceso.

Para determinar una temperatura inicial adecuada se utiliza un método de búsqueda binaria, para el cual se establece previamente un rango (en porciento) de soluciones aceptadas al inicio del algoritmo. Este rango se especifica por medio de dos valores $\underline{\theta} < \overline{\theta}$. La búsqueda binaria parte de cualquier valor (positivo) de temperatura x suficientemente pequeño y consiste en

Paso 1. Sea $q(x)$ el porciento de soluciones aceptadas por el recocido simulado con temperatura x. Ir al Paso 2.

Paso 2. Si $q(x) < \underline{\theta}$ hacer $x \leftarrow 2x$ e ir al Paso 1; en otro caso hacer $y \leftarrow x/2$ e ir al Paso 3.

Paso 3. Hacer $z \leftarrow (x + y)/2$ e ir al Paso 4.

Paso 4. Si $q(z) < \underline{\theta}$ hacer $y \leftarrow z$ e ir al Paso 3; si $q(z) > \overline{\theta}$ hacer $x \leftarrow z$ e ir al Paso 3; finalmente, si $\underline{\theta} \leq q(z) \leq \overline{\theta}$ la temperatura incial es precisamente z, es decir, $t_0 \leftarrow z$ y la búsqueda binaria se detiene.

Estrategia de enfriamiento. La temperatura se reduce cada vez que el sistema detecta que existe 'equilibrio dinámico', es decir, cuando los valores sucesivos de la función objetivo de soluciones aceptadas, aunque cambian hacia arriba o hacia abajo, tienen un promedio constante. El equilibrio dinámico se detecta al comparar dos series sucesivas de soluciones aceptadas: si los promedios respectivos son sensiblemente iguales. La longitud de las series se establece previamente como un parámetro que se sintoniza experimentalmente y que depende linealmente del número de unidades geográficas; su valor se mantiene constante a lo largo de la ejecución del algoritmo.

Una vez detectado el equilibrio dinámico la temperatura se reduce multiplicándola por un escalar positivo $\varphi < 1$.

Se usan los tres factores de enfriamiento siguientes a lo largo de la ejecución del algoritmo: $\varphi_1 = 0{,}90$, $\varphi_2 = 0{,}95$ y $\varphi_3 = 0{,}98$. El factor φ_1 se usa desde el principio hasta que la temperatura sea igual a la mitad de inicial, es decir, cuando $t = 0{,}5t_0$. Luego, se utiliza φ_2 desde que $t = 0{,}5t_0$ hasta que $t = 5 \times 10^{-4}t_0$. Por último, el factor φ_3 es empleado desde que $t = 5 \times 10^{-4}t_0$ hasta que la temperatura es prácticamente igual a cero, es decir, $t = 10^{-8}$, en cuyo caso el algoritmo se detiene.

Criterio de paro. El algoritmo llega a un alto total cuando, como se explica en el párrafo anterior, la temperatura es prácticamente cero, o bien cuando se detecta que el número de soluciones rechazadas a temperatura constante es extremadamente alto.

Enseguida, el algoritmo del Recocido Simulado se describe simplificado por medio de pseudo-código. Se supone que el factor de enfriamiento φ y el criterio de paro han sido especificados previamente.

Algoritmo

0. Determinar la temperatura inicial t_0.
1. Generar una solución incial $\mathbf{E}$ con contigüidad en los distritos.
2. Calcular la función objetivo para $\mathbf{E}$, o sea, $\mathcal{C}(\mathbf{E})$;
3. Inicializar la temperatura $t = t_0$;
4. Mientras no se satisfaga el criterio de paro repetir los pasos A y B:
    - A. Mientras no se detecte equilibrio dinámico repetir los pasos a, b y c:
        - a. Generar aleatoriamente una solución $\mathbf{E}'$ vecina de $\mathbf{E}$;
        - b. Calcular la función objetivo para E', o sea, $\mathcal{C}(\mathbf{E}')$;
        - c. Si $\mathcal{C}(\mathbf{E}') < \mathcal{C}(\mathbf{E}) + t$ entonces $\mathbf{E} \leftarrow \mathbf{E}'$, o sea, aceptar la nueva solución.
    - B. Reducir la temperatura mediante $t \leftarrow \varphi \times t$.
5. FIN