(1UG125) Roll No. ....

S.C.No.—2009101

B. Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2023

(First Semester)

(Main/Re-appear)

MATHEMATICS

BHM111

Algebra

Time : 3 *Hours* *Maximum Marks* : 40

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Q. No. **1** is compulsory.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है ।

Compulsory question

अनिवार्य प्रश्न

1. (a) If A and B are square matrices of same order and A is non-singular. Then prove that $|\vec{A}BA| = |B|$.

यदि A और B एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह हैं और A व्युत्क्रमणीय है । तो उसे सिद्ध कीजिए कि $|\vec{A}BA| = |B|$

(b) The conjugate of a unitary matrix is unitary.

ऐकिक आव्यूह का संयुग्म ऐकिक होता है।

(c) Given-8 is a root of the equation $2x^3 + 31x^2 + 112x - 64 = 0$. Solve the equation completely.

दिया है-8 समीकरण $2x^3 + 31x^2 + 112x - 64 = 0$ का मूल है । समीकरण को पूर्णतः हल कीजिए ।

(d) Find rank of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह की रैंक ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(e) Explain Descartes's rule of sign.

देकार्ते के संकेत नियम की व्याख्या कीजिए।

Section I

खण्ड I

2. (a) If A and B are two square matrices of same order, then :

$$adj(AB) = (adj B).(adj A)$$

यदि A और B एक ही क्रम के दो वर्ग आव्यूह हैं, तब :

$$adj(AB) = (adj B).(adj A)$$

(b) Find the inverse of the following matrix, using elementary transformation and verify your answer :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रारंभिक रूपांतरण का उपयोग करके निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए और अपना उत्तर सत्यापित कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. (a) Find the characteristics roots and corresponding characteristic vector for the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

आव्यूह :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

अभिलाक्षणिक मूल और संबंधित अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए ।

(b) Characteristic roots of a skew-Hermitian matrix are either zero or purely imaginary.

विषम-हर्मिट आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल या तो शून्य है या पूरी तरह से काल्पनिक हैं ।

Section II

खण्ड II

4. (a) Investigate the value of λ and μ so that the equation :

$$2x+3y+5z=29$$
$$7x+3y-2z=8$$
$$2x+3y+\lambda z=\mu$$

have

(i) No. solution

(ii) A unique solution

(iii) An infinity many solutions.

λ और μ के मान की जांच कीजिए ताकि समीकरण :

$$2x+3y+5z=29$$

$$7x+3y-2z=8$$

$$2x+3y+\lambda z=\mu \quad \text{के पास}$$

(i) हल नहीं है

(ii) एक अद्वितीय है

(iii) अनंत अनेक हल हैं ।

(b) Discuss for all values of the system of equations :

$$2x+3ky+(3k+4)z=0$$

$$x+(k+4)y+(4k+2)z=0$$

$$x+2(k+1)y+(3k+4)z=0$$

समीकरणों की प्रणाली के सभी मूल्यों पर चर्चा कीजिए :

$$2x+3ky+(3k+4)z=0$$
$$x+(k+4)y+(4k+2)z=0$$
$$x+2(k+1)y+(3k+4)z=0$$

5. (a) The product of two orthogonal matrices of same order is again orthogonal.

एक ही क्रम के दो लंबकोणीय आव्यूह का गुणन फिर से लंबकोणीय है ।

(b) Reduce the quadratic form :

$x^2 + y^2 + 4z^2 - 9t^2 - 2xy - 4yz + 6yt - 6tx - 12tz.$

into canonical form and also find the equations of transformation and rank, index, signature.

द्विघात रूप :

$x^2 + y^2 + 4z^2 - 9t^2 - 2xy - 4yz + 6yt - 6tx - 12tz.$

को विहित रूप में समानयन कीजिए और रूपांतरण और रैंक, सूचकांक, सिग्नेचर के समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

Section III

खण्ड III

6. (a) Solve the following equation :

$x^4 + 5x^3 - 30x^2 - 40x + 64 = 0$ given that the roots are in G.P.

निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए :

$x^4 + 5x^3 - 30x^2 - 40x + 64 = 0$] दिया गया है कि मूल G.P. में हैं।

(b) Prove that for two roots of the cubic equation $x^3 + ax - b = 0$ to be equal the condition is $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = 0$.

सिद्ध कीजिए कि घन समीकरण $x^3 + ax - b = 0$ की दो मूल के बराबर होने की अवस्था $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = 0$ है ।

7. (a) Find λ and solve the equation :

$40x^4 + \lambda x^3 - 21x^2 - 2x + 1 = 0$, given that the roots are the H.P.

निम्नलिखित समीकरण को हल करते हुए λ ज्ञात कीजिए :

$40x^4 + \lambda x^3 - 21x^2 - 2x + 1 = 0$, दिया गया है कि मूल हरात्मक माध्य में हैं ।

(b) If α, β, γ are the roots of on equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ form on equation whose roots are $\alpha+\beta, \beta+\gamma$ $\gamma+\alpha$.

यदि किसी समीकरण $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ के मूल α, β, γ हैं । उस समीकरण पर बनते हैं जिसके मूल $\alpha+\beta, \beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$ है।

Section IV

खण्ड IV

8. (a) Solve the cubic equation :

$x^3 + 3x - 14 = 0$ by Cardon's method.

घन समीकरण $x^3 + 3x - 14 = 0$ को कार्डन विधि द्वारा हल कीजिए ।

(b) Solve the following biquadratic equation by Descartes methods :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 80x + 24 = 0$

निम्नलिखित द्विघात समीकरण को देकार्ते विधि द्वारा हल कीजिए :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 80x + 24 = 0$

9. (a) Solve the equation :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$ by Ferrari's method.

समीकरण :

$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

फेरारी विधि द्वारा हल कीजिए ।

(b) Show that the equation :

$x^{12} - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 12 = 0$ must have at least six imaginary roots.

दिखाइए कि समीकरण :

$x^{12} - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 12 = 0$ के कम से कम छह काल्पनिक मूल होने चाहिए ।