

S.C.No.—2009304

B. Sc. (Hons.) EXAMINATION, Dec. 2024

(Third Semester)

(Main/Reappear)

MATHEMATICS

BHM-234

Differential Geometry

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question each from Section I to Section IV. Q. No. 9 (Section V) is compulsory. All questions carry equal marks.

खण्ड I से खण्ड IV तक प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड V) अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

(S-1224-11/20)H-2009304(UG412)(TR)

P.T.O.

Section I

खण्ड I

1. (a) Find the envelope of the plane $3xt^2 - 3yt + z = t^3$ and show that its edge of regression is the curve of intersection of the surfaces. 6

समतल $3xt^2 - 3yt + z = t^3$ का आवरण ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि इसका प्रतिगमन किनारा सतहों के प्रतिच्छेदन का वक्र है ।

- (b) Prove that the envelope of the normal planes drawn through the generators of the cone $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ is given by :

$$a^{1/3}(b-c)^{2/3} \cdot x^{2/3} + b^{1/3}(c-a)^{2/3} \cdot$$

$$y^{2/3} + c^{1/3}(a-b)^{2/3} \cdot z^{2/3} = 0. \quad 6$$

सिद्ध कीजिए कि शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ के जनरेटर के माध्यम से खींचे गए सामान्य समतलों का लिफाफा :

$$a^{1/3}(b-c)^{2/3} \cdot x^{2/3} + b^{1/3}(c-a)^{2/3} \cdot$$

$$y^{2/3} + c^{1/3}(a-b)^{2/3} \cdot z^{2/3} = 0$$

द्वारा दिया गया है ।

2. (a) Find the equation of the envelope of the system of surfaces whose equations involve two parameter. 6

सतहों की प्रणाली के आवरण का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके समीकरणों में दो पैरामीटर शामिल हैं ।

- (b) Show that for a two parameter family of surfaces, the envelope touches surface at characteristic plants. 6

दिखाइए कि सतहों के दो पैरामीटर परिवार के लिए, आवरण विशेषता पौधों पर सतह को छूता है ।

Section II

खण्ड II

3. (a) Define tangent plane and normal. Find the equation of the tangent plane and normal to the surface $z = xy$ at the point $(2, 3, 6)$. 6

स्पर्शरेखा समतल और सामान्य को परिभाषित कीजिए । बिंदु $(2, 3, 6)$ पर सतह $z = xy$ के स्पर्शरेखा समतल और सामान्य का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the envelope of the line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, where parameter 'a' and 'b' are connected by the relation $ab = c^2$. 6

रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का आवरण ज्ञात कीजिए, जहाँ पैरामीटर 'a' और 'b' संबंध $ab = c^2$ से जुड़े हुए हैं ।

4. (a) What are second order magnitudes ? Give the geometrical interpretation of the second order magnitude. 6

द्वितीय क्रम परिमाण क्या हैं ? द्वितीय क्रम परिमाण की ज्यामितीय व्याख्या दीजिए ।

- (b) Calculate the fundamental magnitude for the coinoid $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(v)$. 6

संयोग $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = f(v)$ के लिए मूल परिमाण की गणना कीजिए ।

Section III

खण्ड III

5. (a) Define line of curvature. Find lines of curvature in terms of principal curvature and write differential equation of line of curvature. 6

वक्रता रेखा को परिभाषित कीजिए । मुख्य वक्रता के संदर्भ में वक्रता रेखाएँ ज्ञात कीजिए और वक्रता रेखा का अंतर समीकरण लिखिए ।

- (b) Find the equation giving the principal curvatures K_a and K_b . 6

मुख्य वक्रताएँ K_a और K_b देने वाला समीकरण ज्ञात कीजिए ।

6. (a) Define Conjugate directions. State and prove conditions for two directions at P to be conjugate. 6

संयुग्म दिशाओं को परिभाषित कीजिए । P पर दो दिशाओं के संयुग्म होने की स्थितियाँ बताइए और सिद्ध कीजिए ।

- (b) Find the equation of Dupin's indicatrix and show that it is a conic section. 6

डुपिन के सूचक का समीकरण ज्ञात कीजिए और दिखाइए कि यह एक शंकु खंड है ।

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Define Geodesics and find the differential equation of Geodesics. 6

जियोडेसिक्स को परिभाषित कीजिए और जियोडेसिक्स का अंतर समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) Show that the curves $u + v = \text{constant}$ are geodesics on a surface with metric

$$(1+u^2)du^2 - 2uvdudv + (1+v^2)dv^2. \quad 6$$

दर्शाइए कि वक्र $u + v = \text{स्थिरांक}$ मीट्रिक

$$(1+u^2)du^2 - 2uvdudv + (1+v^2)dv^2$$

वाली सतह पर भूगर्भिक हैं ।

8. (a) Discuss nature of Geodesics on the right helicoid $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$.

6

दाएँ हेलिकॉइड $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$ पर भूगर्भिक की प्रकृति पर चर्चा कीजिए ।

- (b) Find the Geodesic curvature of the parametric curve $v = c$.

6

पैरामीट्रिक वक्र $v = c$ की भूगर्भिक वक्रता ज्ञात कीजिए ।

Section V

खण्ड V

9. (a) Calculate E, F, G, H for the paraboloid

$$x = u, y = v, z = v^2. \quad 2$$

पैराबोलॉइड $x = u$, $y = v$, $z = v^2$ के लिए E, F, G, H की गणना कीजिए ।

- (b) Define Metric. 2

आव्यूह को परिभाषित कीजिए ।

(c) What is the formula for mean curvature ? 2

माध्य वक्रता का सूत्र क्या है ?

(d) What is vector curvature ? 2

वेक्टर वक्रता क्या है ?

(e) Define polar developable. 2

ध्रुवीय विकास योग्य को परिभाषित कीजिए ।

(f) Write Bonnet's formula. 2

बोनट का सूत्र लिखिए ।