

S.C.No.—M/22/2001112

**B. A. EXAMINATION, 2022**

(First Semester)

(Re-appear)

MATHEMATICS

Algebra

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 27

**Note :** Attempt *Five* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

**Section I****खण्ड I**

1. (a) Show that every square matrix can be expressed in one and only one way as the sum of a symmetric and skew-symmetric matrices.

दर्शाइए कि प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स को सममिति और विषम-सममिती मैट्रिक्स के योग को एक या केवल एक तरीके से प्रकट किया जा सकता है ।

- (b) Show that :

$$\begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 5i & 2 \\ -2-3i & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

is Skew-Hermitian Matrix.

**5.4**

दर्शाइए कि :

$$\begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 5i & 2 \\ -2-3i & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

विषम-हर्मिशियन मैट्रिक्स है ।

2. (a) Prove that the set of vectors (1, 2, 0), (0, 3, 1) and (-1, 0, 1) is linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि वैक्टर (1, 2, 0), (0, 3, 1) तथा (-1, 0, 1) के समुच्चय रैखिक स्वतंत्र है ।

- (b) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix  $A$  and compute  $A^{-1}$ , where :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 5.4$$

मैट्रिक्स  $A$  के लिए केले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित कीजिए और  $A^{-1}$  की गणना कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

## Section II

### खण्ड II

3. (a) Solve :

$$2x - 3y + z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

हल कीजिए :

$$2x - 3y + z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

- (b) Show that :

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

is unitary and find  $A^{-1}$ . 5.4

दर्शाइए कि :

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}$$

ऐकिक है तथा  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए ।

4. (a) For what value of  $\lambda$ , does the system :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

has no solution.

$\lambda$  के किस मान के लिए सिस्टम :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

का कोई हल नहीं है ।

- (b) Write the quadratic form corresponding to the symmetric matrix : **5.4**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

सममिति मैट्रिक्स  $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  के संगत

द्विघात रूप लिखिए ।

### Section III

#### खण्ड III

5. (a) Solve the equation  $x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$  if one root is  $i$ .

समीकरण  $x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0$  हल कीजिए यदि एक मूल  $i$  है ।

- (b) Solve the equation  $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$  whose roots are given to be in G.P. **5.4**

समीकरण  $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$  हल कीजिए जिसके मूल G.P. में दिये गये हैं ।

6. (a) Remove the second term from the equation :

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$$

समीकरण  $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 2 = 0$  से द्वितीय पद हटाइए ।

- (b) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ , then find the value of  $\sum \frac{1}{\alpha^2}$ . **5.4**

यदि  $\alpha, \beta, \gamma$  समीकरण  $2x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  के मूल हैं, तो  $\sum \frac{1}{\alpha^2}$  का मान बताइए ।

## Section IV

### खण्ड IV

7. (a) Solve the equation  $x^3 - 12x - 65 = 0$  by Cardan's method.

कार्डन विधि से समीकरण  $x^3 - 12x - 65 = 0$  हल कीजिए ।

- (b) Apply Descarte's method to solve the equation : **5.4**

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

समीकरण  $x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$  हल करने के लिए देकार्त विधि का प्रयोग कीजिए ।

8. (a) Solve :

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

by Ferrari's method.

फेरारी विधि से  
 $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$  हल  
कीजिए ।

- (b) Show that  $2x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 1 = 0$  has at least four imaginary roots. **5.4**

दर्शाइए कि  $2x^7 - 5x^4 + 3x^3 - 1 = 0$  के कम से कम चार काल्पनिक मूल हैं ।

## Section V

### खण्ड V

9. (a) Define characteristic roots. **1.08**

अभिलाक्षणिक मूल को परिभाषित कीजिए ।

- (b) If A is a square matrix; prove that  $A + A^\theta$  is Hermitian. **1.08**

यदि A वर्ग मैट्रिक्स है; तो सिद्ध कीजिए कि  $A + A^\theta$  हर्मिशियन है ।

- (c) Find the rank of the matrix : **1.08**

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 6 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

मैट्रिक्स  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 6 \\ 9 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  की कोटि (rank) ज्ञात कीजिए ।

- 
- (d) Prove that every orthogonal matrix is non-singular. **1.08**

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स नॉन-सिंगुलर है ।

- (e) Define linear dependence and linear independence of vectors. **1.08**

वैक्टरों के रैखिक आश्रितता और रैखिक स्वतंत्रता को परिभाषित कीजिए ।