

S.C.No.—2009103

B.Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2023

(Main/Reappear)

(First Semester)

MATHEMATICS

BHM113

Solid Geometry

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Section (I-IV). Q. No. 9 (Section V) is compulsory. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड (I-IV) से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 9 (खण्ड V) अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

(3-923-29/6) H-2009103(1UG127)(TR)

P.T.O.

Section I

खण्ड I

1. (a) Find the length of the axes, the eccentricity and the equations of the axes of the conic : 6

$$5x^2 - 24xy - 5y^2 + 14x + 8y - 16 = 0$$

निम्न शंकु के अक्षों की लम्बाई, उत्केंद्रता और अक्षों के समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$5x^2 - 24xy - 5y^2 + 14x + 8y - 16 = 0$$

- (b) Find the pole of the line $5x + 5y + 8 = 0$ w.r.t. the conic $2x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$. 6

शांकव $2x^2 + 8xy + 3y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ के सापेक्ष रेखा $5x + 5y + z = 0$ का ध्रुव ज्ञात कीजिए ।

2. (a) Trace the conic : 6

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$$

शंकु :

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$$

को ट्रेस कीजिए ।

- (b) Prove that the conics $x^2 - y^2 - 4x + 2y = 0$ and $x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ are confocal. 6

सिद्ध कीजिए कि शांकव $x^2 - y^2 - 4x + 2y = 0$ और $x^2 + 3y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ संकेद्रित हैं ।

Section II

खण्ड II

3. (a) Find the equation of that plane, which cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ in a circle, whose centre is (α, β, γ) . 6

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ को एक वृत्त में काटता है, जिसका केंद्र (α, β, γ) है ।

- (b) Find the limiting points of the co-axial system of spheres $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 6 = 0$. 6

गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y + 6 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 6z + 6 = 0$ के सह-अक्षीय प्रणाली के सीमित बिंदु ज्ञात कीजिए ।

4. (a) Find the equation to the right circular cone whose vertex is $P(2, -3, 5)$, axis PQ which makes equal angles with the co-ordinate axes and semi-vertical angle is 30° . 6

उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष बिंदु $P(2, -3, 5)$ है, अक्ष PQ जो निर्देशांक अक्षों के साथ समान कोण बनाता है और अर्द्ध-ऊर्ध्वाधर कोण 30° है ।

- (b) Find the equation of the enveloping cylinder of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1$ having its generators parallel to the line $x = y = z$. 6

गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y = 1$ के आवरण वाले सिलेंडर का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके जनक, रेखा $x = y = z$ के समानांतर हैं ।

Section III

खण्ड III

5. (a) Find the equation of the tangent planes to $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ which pass through the lines $x + 9y - 3z = 0$, $3x - 3y + 6z - 5 = 0$. 6

$2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के स्पर्श तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + 9y - 3z = 0$, $3x - 3y + 6z - 5 = 0$ से होकर गुजरते हैं ।

- (b) The normal at any point P of the ellipsoid,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ meets the principal planes in } G_1, G_2, G_3. \text{ Show that } PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2. \quad 6$$

दीर्घवृत्ताभ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के किसी भी बिंदु P पर अभिलम्ब G_1, G_2, G_3 में प्रमुख तलों से मिलता है । दिखाइए कि : $PG_1 : PG_2 : PG_3 = a^2 : b^2 : c^2$ ।

6. (a) Find the locus of points from which three mutually perpendicular tangent lines can be drawn to the surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 6
उन बिंदुओं का बिंदुपथ ज्ञात कीजिए जहाँ से सतह पर तीन परस्पर लम्बवत स्पर्श रेखाएँ $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ खींची जा सकती हैं ।
- (b) Find the equations of the polar of the line $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ w.r.t the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 6
केंद्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के संबंध में रेखा $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ के ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Prove that the axes of the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by the plane $lx + my + nz = 0$ lies on the cone

$$(b-c)\frac{l}{x} + (c-a)\frac{m}{y} + (a-b)\frac{n}{z} = 0. \quad 6$$

सिद्ध कीजिए कि समतल $lx + my + nz = 0$ द्वारा
 शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के खंड के अक्ष
 शंकु $(b-c)\frac{l}{x} + (c-a)\frac{m}{y} + (a-b)\frac{n}{z} = 0$ पर
 स्थित हैं ।

- (b) Find the lengths of semi-axis of the
 sections of the paraboloid $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ by the plane $x + 2y + z = 4$. 6
 समतल $x + 2y + z = 4$ द्वारा परवलयज
 $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ के खण्डों के अर्द्ध-अक्ष
 की लम्बाई ज्ञात कीजिए ।

8. (a) Show that the two confocal paraboloids
 cut everywhere at right angles. 6

दिखाइए कि दो कन्फोकल पैराबोलॉइड हर जगह
 समकोण पर काटते हैं ।

- (b) Reduce the equation : 6

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy \\ + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

to the standard form and show that it
 represents a cone.

समीकरण :

$$2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy \\ + 6x + 12y - 6z + 5 = 0$$

का समानयन मानक रूप में कीजिए और दर्शाइए
 कि यह शंकु को प्रदर्शित करता है ।

Section V

खण्ड V

9. (a) Find the equation to the sphere through the circle $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ and the point $(1, 2, 3)$. 2

वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 0$ और बिंदु $(1, 2, 3)$ से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the condition that the plane $lx + my + nz = 0$ may touch the cone $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$. 2

वह स्थिति ज्ञात कीजिए जब समतल $lx + my + nz = 0$ शंकु $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 0$ को स्पर्श करता है ।

- (c) Discuss the nature of conic : 2

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

निम्न शंकु की प्रकृति पर चर्चा कीजिए :

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

- (d) Find the equation of the tangent to the conic $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ at the point $(1, -2)$. 2

बिंदु $(1, -2)$ पर शांकव $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (e) Define conjugate diameters. 2

संयुग्म व्यास को परिभाषित कीजिए ।

- (f) Define enveloping cone of a coinoid. 2

शांकवज के आवरण शंकु को परिभाषित कीजिए ।