

S.C.No.—2009305

B.Sc. (Hons.) EXAMINATION, Dec. 2024

(Third Semester)

(Main/Re-appear)

MATHEMATICS

BHM-235(I)

Probability Distributions

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Unit. Q. No. 9 is compulsory. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

(2-1224-06/1) H-2009305(UG413)(TR)

P.T.O.

Unit I

इकाई I

1. (a) Prove that a discrete random variable 'x' with probability function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}; & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

have no moments although its moment generating function exist. 6

सिद्ध कीजिए कि एक असतत् यादृच्छिक चर 'x' जिसका प्रायिकता फलन :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)}; & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

का कोई आघूर्ण नहीं है, यद्यपि इसका आघूर्ण जनक फलन विद्यमान है ।

- (b) Find first four four cummulants. 6

पहले चार संचय ज्ञात कीजिए ।

2. (a) The probability density function of the random variable X follows the probability law :

$$p(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x-\theta|}{\theta}\right), -\infty < x < \infty$$

find M.G.F. of X . Hence or otherwise find $E(X)$ and $V(X)$. 6

यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन प्रायिकता नियम का अनुसरण करता है :

$$p(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x-\theta|}{\theta}\right), -\infty < x < \infty$$

X का आधूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए । अतः या अन्यथा $E(X)$ और $V(X)$ ज्ञात कीजिए ।

- (b) Prove that if characteristic function $\phi(t)$ is continuous then $\phi(t)$ is uniformly continuous in t . 6

सिद्ध कीजिए कि यदि अभिलाक्षणिक फलन $\phi(t)$ सतत है तो $\phi(t)$, t में समान रूप से सतत है ।

Unit II

इकाई II

3. (a) In a binomial distribution consisting of 5 independent trials, probabilities of 1 and 2 successes are 0.4096 and 0.2048 respectively. Find the parameter ' p ' of the distribution. 6

5 स्वतंत्र परीक्षणों वाले द्विपद वितरण में, 1 और 2 सफलताओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.4096 और 0.2048 हैं। वितरण का प्राचल ' p ' ज्ञात कीजिए।

- (b) Find first four moments of the Poisson Distribution. 6

प्वासॉ वितरण के पहले चार आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

4. (a) Suppose X is a non-negative integral valued random variable. Show that the distribution of X is geometric if it 'lacks memory' i.e. if for each $K \geq 0$ and $Y = X - K$, one has $P(Y = t \mid X \geq K) = P(X = t)$, for $t \geq 0$. 6

मान लीजिए X एक गैर-ऋणात्मक पूर्णांक मान वाला यादृच्छिक चर है। दिखाइए कि X का वितरण ज्यामितीय है यदि इसमें 'स्मृति का अभाव' है, अर्थात् यदि प्रत्येक $K \geq 0$ और $Y = X - K$ के लिए, $t \geq 0$ के लिए $P(Y = t \mid X \geq K) = P(X = t)$ है।

- (b) Find the mean and variance of the Hypergeometric distribution. 6

हाइपर ज्यामितीय वितरण का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

Unit III

इकाई III

5. (a) Show that for rectangular distribution :

$$f(x) = \frac{1}{2a}, -a < x < a$$

moment generating function about origin

is $\frac{1}{at}(\sinh at)$. Also show that moments

of even order are given by : 6

$$\mu_{2n} = \frac{a^{2n}}{2n+1}$$

दिखाइए कि आयताकार वितरण के लिए :

$$f(x) = \frac{1}{2a}, -a < x < a$$

मूल बिन्दु आघूर्ण जनक फलन $\frac{1}{at}(\sinh at)$ के लगभग है । यह भी दिखाइए कि सम क्रम के आघूर्ण निम्न द्वारा दिए जाते हैं :

$$\mu_{2n} = \frac{a^{2n}}{2n+1}$$

- (b) If X_1, X_2 are independent rectangular variates on $[0, 1]$, find the distributions of (i) X_1/X_2 (ii) X_1X_2 . 6

यदि X_1, X_2 $[0, 1]$ पर स्वतंत्र आयताकार चर हैं, तो (i) X_1/X_2 (ii) X_1X_2 का वितरण ज्ञात कीजिए ।

6. (a) If $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, obtain the p.d.f. of :

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \quad 6$$

यदि $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ है, तो निम्न का प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) प्राप्त कीजिए :

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$$

(b) Prove that if X_1, X_2, \dots, X_n are independent random variables, X_i having an exponential distribution with parameter Q_i ; $i = 1, 2, \dots, n$; then $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ has exponential

distribution with parameter $\sum_{i=1}^n Q_i$. 6

सिद्ध कीजिए कि यदि X_1, X_2, \dots, X_n स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं, X_i का प्राचल Q_i के साथ एक घातांकीय वितरण है; $i = 1, 2, \dots, n$; तो $Z = \min(X_1, X_2, \dots,$

$X_n)$ का प्राचल $\sum_{i=1}^n Q_i$ के साथ घातांकीय वितरण है ।

Unit IV

इकाई IV

7. (a) Prove that a linear combination of independent normal variates is also a normal variates. 6

सिद्ध कीजिए कि स्वतंत्र प्रसामान्य चरों का एक रैखिक संयोजन भी एक प्रसामान्य चर है ।

- (b) If X is normally distributed and mean of X is 12 and S.D. is 4, then find out the probability (i) $X \geq 20$ (ii) $0 \leq X \leq 12$ and find x' , when $P(X > x') = 0.24$. 6

यदि X सामान्य रूप से वितरित है और X का माध्य 12 है तथा मानक विचलन 4 है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए (i) $X \geq 20$ (ii) $0 \leq X \leq 12$ तथा x' ज्ञात कीजिए, जब $P(X > x') = 0.24$ हो ।

8. (a) A sample of 100 items is taken at random from a batch known to contain 40% defectives. What is the probability that the sample contains ?

(i) at least 44 defectives

(ii) exactly 44 defectives. 6

100 वस्तुओं का एक नमूना एक बैच से

यादृच्छिक रूप से लिया जाता है, जिसमें 40% दोषपूर्ण वस्तुएँ होती हैं। इस बात की क्या प्रायिकता है कि नमूने में निम्न वस्तुएँ हों ?

(i) कम से कम 44 दोषपूर्ण वस्तुएँ

(ii) ठीक 44 दोषपूर्ण वस्तुएँ ।

- (b) Check, whether the central limit theorem holds for the sequence of independent random variables X_r , with distribution defined as $P(X_r = 1) = p_r$ and $P(X_r = 0) = 1 - p_r$. 6

जाँच कीजिए कि क्या केंद्रीय सीमा प्रमेय स्वतंत्र यादृच्छिक चर X_r के अनुक्रम के लिए मान्य है, जिसका वितरण $P(X_r = 1) = p_r$ तथा $P(X_r = 0) = 1 - p_r$ के रूप में परिभाषित है ।

Compulsory Question

अनिवार्य प्रश्न

9. (a) Define probability distribution function and moment generating function.

प्रायिकता वितरण फलन तथा आघूर्ण जनक फलन को परिभाषित कीजिए ।

- (b) Find the moment generating function of exponential distribution.

घातांकीय वितरण का आघूर्ण जनक फलन ज्ञात कीजिए ।

- (c) The mean and variance of binomial distribution are 4 and $\frac{4}{3}$ respectively.

Find $P(X \geq 1)$.

द्विपद वितरण का माध्य और प्रसरण क्रमशः 4

और $\frac{4}{3}$ हैं । $P(X \geq 1)$ ज्ञात कीजिए ।

- (d) A continuous random variable X has a p.d.f. $f(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$. Find a and b s.t. :

(i) $P(X \leq a) = P(X > a)$

(ii) $P(X > b) = 0.05$

एक सतत यादृच्छिक चर X का प्रायिकता घनत्व फलन (p.d.f.) $f(x) = 3x^2$, $0 \leq x \leq 1$ है । a और b ज्ञात कीजिए प्रतिबन्ध के अधीन :

(i) $P(X \leq a) = P(X > a)$

(ii) $P(X > b) = 0.05$

(e) Define uniform distribution.

समान वितरण को परिभाषित कीजिए ।

(f) Ten coins are thrown simultaneously. Find the probability of getting at most seven heads. $6 \times 2 = 12$

दस सिक्के एक साथ फेंके जाते हैं । अधिकतम सात चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।