

S.C.No.—M/22/2001113

**B. A. EXAMINATION, 2022**

(First Semester)

(Re-appear)

MATHEMATICS

Calculus

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 27

**Note :** Attempt *Five* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

**Section I****खण्ड I**

1. (a) Prove that  $f(x) = |x|$  is continuous but not derivable at  $x = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = |x|$  सतत है लेकिन  $x = 0$  पर व्युत्पत्ति विषयक नहीं है ।

- (b) If  $y = e^{a \sin^{-1} x}$ , prove that :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1}$$

$$- (n^2 + a^2)y_n = 0. \quad 5.4$$

यदि  $y = e^{a \sin^{-1} x}$  है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1}$$

$$- (n^2 + a^2)y_n = 0.$$

2. (a) State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder after ' $n$ ' terms.

' $n$ ' पदों के बाद लैग्रांजे के शेषफल के रूप के साथ टेलर की प्रमेय को सिद्ध कर वर्णन कीजिए ।

- (b) If  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$ , find the value of  $f\left(\frac{9}{10}\right)$  with the help of Taylor's series for  $f(x+h)$ . 5.4

यदि  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$  हो, तो  $f(x+h)$  के लिए टेलर श्रेणी की सहायता से  $f\left(\frac{9}{10}\right)$  का मान ज्ञात कीजिए ।

## Section II

### खण्ड II

3. (a) Find the asymptotes of the curve :

$$x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

and show that they cut the curve in three points on the straight line  $x + y = 0$ .

वक्र  $x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$  की स्पर्शोन्मुखी ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि वे सरल रेखा  $x + y = 0$  पर तीन बिन्दुओं में वक्र को काटते हैं ।

- (b) Find the radius of curvature for the curve

$$r^n = a^n \cos n\theta. \quad 5.4$$

वक्र  $r^n = a^n \cos n\theta$  के लिए वक्रता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

4. (a) The tangents at two points P, Q on the cycloid  $x = a(\theta + \sin \theta) : y = a(1 - \cos \theta)$  are at right angles. Show that if  $\rho_1, \rho_2$  are the radii of curvature at these points then  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$ .

चक्रज  $x = a(\theta + \sin \theta) : y = a(1 - \cos \theta)$  पर दो बिन्दु P, Q पर समकोण पर स्पर्श रेखाएँ हैं । दर्शाइए कि यदि  $\rho_1, \rho_2$  इन बिन्दुओं पर वक्रता की त्रिज्याएँ हैं, तो  $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$  ।

- (b) Show that :

$$y^5 - ay^3x - ay^2x + a^2x^2 = 0$$

has a point of Oscul-inflexion at the origin. 5.4

दर्शाइए कि उत्पत्ति पर :

$$y^5 - ay^3x - ay^2x + a^2x^2 = 0$$

में ओस्कल-मोड़ बिन्दु हैं ।

### Section III

#### खण्ड III

5. (a) Trace the curve :

$$x^2(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2).$$

वक्र  $x^2(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$  ट्रेस कीजिए ।

- (b) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{(1 + \cos x)^2} dx. \quad 5.4$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{(1 + \cos x)^2} dx.$$

6. (a) Find the intrinsic equation of the cardioid

$$r = a(1 - \cos \theta).$$

कार्डियोड  $r = a(1 - \cos \theta)$  का आन्तरिक समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) If  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$ , where  $n$  is a positive integer; prove that  $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$ . 5.4

यदि  $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$ , जहाँ  $n$  एक धनात्मक पूर्णांक है, सिद्ध कीजिए कि  $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$  ।

### Section IV

#### खण्ड IV

7. (a) Find the area common to the circle

$$x^2 + y^2 = 4 \text{ and the ellipse } x^2 + 4y^2 = 9.$$

वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$  तथा दीर्घवृत्त  $x^2 + 4y^2 = 9$  के लिए सामान्य क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the area of a loop of the curve  $r = a \cos 2\theta$  and hence find the total area of the curve. 5.4

वक्र  $r = a \cos 2\theta$  के लूप का क्षेत्र ज्ञात कीजिए तथा वक्र का कुल क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

8. (a) Find the volume of the solid generated by revolving the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  about the  $x$ -axis.

$x$ -अक्ष के परितः दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के परिक्रमण द्वारा उत्पन्न ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the surface area of the solid generated by revolving one arc of the curve  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ;  $y = a(1 - \cos \theta)$  about  $x$ -axis. **5.4**

$x$ -अक्ष के परितः वक्र  $x = a(\theta - \sin \theta)$ ,  $y = a(1 - \cos \theta)$  के एक चाप परिक्रमण द्वारा उत्पन्न ठोस का सतह क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

## Section V

### खण्ड V

9. (a) Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta$ . **0.9**

मूल्यांकन कीजिए  $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta$  ।

- (b) Define Asymptotes. **0.9**

स्पर्शोन्मुखी को परिभाषित कीजिए ।

- (c) If  $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ , prove that  $y_2 - m^2 y = 0$ . **0.9**

यदि  $y = ae^{mx} + be^{-mx}$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $y_2 - m^2 y = 0$  ।

- (d) Discuss the nature of the origin for the curve  $y^3 = x^3 + ax^2$ . **0.9**

वक्र  $y^3 = x^3 + ax^2$  के लिए उत्पत्ति की प्रकृति का वर्णन कीजिए ।

- (e) Define Node and Cusp. **0.9**

Node और Cusp की परिभाषा दीजिए ।

- (f) Find  $\rho$ , if  $s = \log(\sec \psi + \tan \psi)$ . **0.9**

यदि  $\rho$  है, तो  $s = \log(\sec \psi + \tan \psi)$  ज्ञात कीजिए ।