

S.C.No.—2009201

B. Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2024

(Second Semester)

(Main)

MATHEMATICS

BHM 121

Number Theory and Trigonometry

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, Q. No. 9 is compulsory. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) State and prove Gauss Theorem. 6

गॉस प्रमेय बताइए और सिद्ध कीजिए ।

(7-524-14/5) H-2009201 (UG583) (TR)

P.T.O.

- (b) Find the general solution of : 6

$$70x + 112y = 168$$

निम्न का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

$$70x + 112y = 168$$

2. (a) Show that $2^{48} \equiv 1 \pmod{105}$ using Fermat's theorem. 6

फर्मेट की प्रमेय का उपयोग करके $2^{48} \equiv 1 \pmod{105}$ को दर्शाइए ।

- (b) By using Wilson's theorem, find the remainder when $2(26)!$ is divided by 29. 6

विल्सन प्रमेय का उपयोग करते हुए, शेषफल ज्ञात कीजिए जब $2(26)!$ 29 से विभाजित है ।

3. (a) Prove that if p is a prime and k be any positive integer, then : 6

$$\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

सिद्ध कीजिए कि यदि p एक अभाज्य है और k कोई सकारात्मक पूर्णांक है, तो :

$$\phi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(b) Find the highest power of 180 in 102 ! 6

102 ! में 180 की उच्चतम घात ज्ञात कीजिए ।

4. (a) Evaluate : 6

$d(p^2q^3)$ and $\sigma(p^2q^3)$ where p and q are distinct primes.

मान निकालिए :

$d(p^2q^3)$ और $\sigma(p^2q^3)$ का जहाँ p और q अलग-अलग अभाज्य संख्याएँ हैं ।

(b) State and prove Mobius Inversion formula. 6

मोबियस व्युत्क्रमण सूत्र बताइए और सिद्ध कीजिए ।

5. (a) Using De Moivre's Theorem, solve the equation $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 6

समीकरण $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ को डी मोइवर की प्रमेय का उपयोग करके, हल कीजिए।

- (b) Form an equation whose roots are $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ and $\cos \frac{8\pi}{7}$. 6

एक समीकरण बनाइए जिसके मूल $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ और $\cos \frac{8\pi}{7}$ हैं।

6. (a) Show that : 6

$$2^5 \sin^4 \theta \cos^2 \theta = \cos 6\theta - 2 \cos 4\theta$$

$$- \cos 2\theta + 2$$

दर्शाइए कि :

$$2^5 \sin^4 \theta \cos^2 \theta = \cos 6\theta - 2 \cos 4\theta$$

$$- \cos 2\theta + 2$$

- (b) State and prove Euler's theorem for circular function of a complex variable. 6

एक जटिल चर के वृत्ताकार फलन के लिए यूलर की प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए ।

7. (a) Solve an equation : 6

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$$

समीकरण हल कीजिए :

$$\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$$

- (b) Prove that : 6

$$\log_i i = \frac{4m+1}{4n+1}; m, n \in \mathbb{Z}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\log_i i = \frac{4m+1}{4n+1}; m, n \in \mathbb{Z}$$

8. (a) Separate $\cos h^{-1}(x+iy)$ into real and imaginary parts. 6

$\cos h^{-1}(x+iy)$ को वास्तविक और काल्पनिक भागों में अलग कीजिए ।

- (b) If $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$, then show that $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. 6

यदि $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$, तो $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ दिखाइए ।

9. (a) Define Twin Primes and perfect Number. 2

जुड़वाँ अभाज्य संख्या और सम्पूर्ण संख्या को परिभाषित कीजिए ।

- (b) Define Euler's function with example. 2

यूलर के फलन को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए ।

- (c) Define CRS (mod m) and RRS (mod m) with example. 2

CRS (mod m) और RRS (mod m) को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए ।

- (d) Resolve $\log (1 + i)$ into real and imaginary parts. 2

$\log (1 + i)$ को वास्तविक और काल्पनिक भागों में हल कीजिए ।

- (e) What do you mean by Gregory series 2
ग्रेगरी श्रृंखला से आप क्या समझते हैं ?

- (f) Prove that $\tanh \theta$ and $\coth \theta$ are periodic function with a period πi . 2

सिद्ध कीजिए कि $\tanh \theta$ और $\coth \theta$ एक अवधि πi के साथ आवधिक फलन हैं ।