

(1UG126)

Roll No.

S.C.No.—2009102

B.Sc. (Hons.) EXAMINATION, 2023

(Main/Reappear)

(First Semester)

MATHEMATICS

BHM112

Calculus

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 60

Note : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Q. No. 9 (Section V) is compulsory. All questions carry equal marks.

प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न संख्या 9 (खण्ड V) अनिवार्य है । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

(3-923-26/24)H-2009102(1UG126)(TR)

P.T.O.

Section I

खण्ड I

1. (a) Prove that the function f defined by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is continuous and derivable at $x = 0$
but its derivative is not continuous at
 $x = 0$. 6

सिद्ध कीजिए कि फंक्शन f द्वारा परिभाषित
किया गया है :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर सतत और व्युत्पन्न है लेकिन इसका
अवकलज $x = 0$ पर सतत नहीं है ।

- (b) Find the n th derivative of $\frac{1}{x^2 + a^2}$. 6

$\frac{1}{x^2 + a^2}$ का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए ।

2. (a) Expand $\tan x$ in powers of $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ upto first four terms. 6

पहले चार पदों तक $\tan x$ को $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ की घात में विस्तारित कीजिए ।

- (b) If $y = \left[\log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^2$, prove that : 6

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

यदि $y = \left[\log(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^2$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$$

Section II

खण्ड II

3. (a) Find the asymptotes of the following curve $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$. 6

निम्नलिखित वक्र $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$ के अनंतस्पर्शी ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the radius of curvature for the following curve : 6

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

निम्नलिखित वक्र के लिए वक्रता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

4. (a) Find the points of inflexion of the curve $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$. 6

वक्र $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ के विभक्ति बिंदु ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the asymptotes of the curve : 6

$$r = a \tan \theta$$

वक्र के स्पर्शोन्मुख ज्ञात कीजिए :

$$r = a \tan \theta$$

Section III

खण्ड III

5. (a) If $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x dx$, prove that : 6

$$I_n + \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2} I_{n-2} = (-1)^m \cdot \frac{n}{(2m+1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

यदि $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin(2m+1)x dx$, तो सिद्ध

कीजिए कि :

$$I_n + \frac{n(n-1)}{(2m+1)^2} I_{n-2} = (-1)^m \cdot \frac{n}{(2m+1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

(b) Trace the curve $y(x^2 + 4a^2) = 8a^3$. 6

वक्र $y(x^2 + 4a^2) = 8a^3$ का अनुरेखण कीजिए।

6. (a) Find the whole length of the loop of the following curve : 6

$$3ay^2 = x^2(a-x)$$

निम्नलिखित वक्र के लूप की पूरी लम्बाई ज्ञात कीजिए :

$$3ay^2 = x^2(a - x)$$

- (b) Find the intrinsic equation of the cycloid $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ and prove that : 6

$$s^2 + \rho^2 = 16a^2$$

साइक्लोइड $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ का अंतर्निहित समीकरण ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि :

$$s^2 + \rho^2 = 16a^2$$

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Find the area included between the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ and its base. 6

चक्रज $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ और इसके आधार के बीच शामिल ज्ञात कीजिए ।

- (b) Show that the volume of the solid formed by the revolution of the cissoid $y^2(2a - x) = x^3$ about its asymptotes is $2\pi^2 a^3$. 6

दिखाइए कि इसके स्पर्शोन्मुख के बारे में सिसॉइड $y^2(2a - x) = x^3$ की क्रांति से बने ठोस का आयतन $2\pi^2 a^3$ है ।

8. (a) Show that the surface area of the solid of revolution of $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line is $\frac{32}{5}\pi a^2$. 6

दिखाइए कि प्रारंभिक रेखा के बारे में $r = a(1 + \cos \theta)$ के परिक्रमण के ठोस का सतह क्षेत्र $\frac{32}{5}\pi a^2$ है ।

- (b) Find the area common to the parabola $y^2 = ax$ and the circle $x^2 + y^2 = 4ax$. 6
- परवलय $y^2 = ax$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 4ax$ का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Section V

खण्ड V

9. (a) Define radius of curvature. 2

वक्रता त्रिज्या को परिभाषित कीजिए ।

- (b) If $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, prove that : 2

$$y_2 - m^2 y = 0$$

यदि $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, सिद्ध कीजिए कि :

$$y_2 - m^2 y = 0$$

- (c) Prove that : 2

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x dx = \frac{8}{693}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x dx = \frac{8}{693}$$

- (d) What is axis of revolution ? 2

क्रांति की धुरी क्या है ?

(e) Define Node and Cusp. 2

नोड और कस्प को परिभाषित कीजिए ।

(f) Discuss the nature of the origin for the curve $y^3 = x^3 + ax^2$. 2

वक्र $y^3 = x^3 + ax^2$ की उत्पत्ति की प्रकृति पर चर्चा कीजिए ।