Révisions logarithme, étude de fonctions

EXERCICE 1 *(d'après « Centres étrangers » 2015)*

Les parties A et B ne sont pas indépendantes

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,11]$ par

$$f(x) = -0,5x^2 + 2x + 15\ln x.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+15}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,11]$. On donnera les valeurs exactes des éléments du tableau.
3. **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,11]$.

   b) Donner une valeur approchée de α à 0,01 près.

   c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $[1\,;\,11]$.
4. **a)** On considère la fonction F définie sur $[1\,;\,11]$ par

   $$F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - 15x + 15x\ln x.$$

   Montrer que F est une primitive de la fonction f

   b) Calculer $\displaystyle\int_1^{11} f(x)\,\mathrm{d}x$. On donnera le résultat exact puis sa valeur arrondie au centième.

   c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,11]$. (On donnera la valeur arrondie au centième.)

Partie B

Une société fabrique et vend des chaises de jardin. La capacité de production mensuelle est comprise entre 100 et 1100 chaises.

Le bénéfice mensuel réalisé par la société est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre de centaines de chaises de jardin produites et vendues et $f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros.

On précise qu'un bénéfice peut être positif ou négatif, ce qui correspond, dans ce deuxième cas, à une perte.

1. Quelles quantités de chaises la société doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel positif ?
2. Déterminer le nombre de chaises que la société doit produire et vendre pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

EXERCICE 2 ***(d'après Métropole 2015)***

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 3x - 3x\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T ?

Exercice 3 ***(d'après Amérique du Nord 2014)***

Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.

On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément.

On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément. La durée de chargement exprimée en seconde est alors donné par une fonction $f(x)$ avec

$$f(x) = 10x - 8\ln(x) \quad \text{pour } x \text{ appartenant à } [0,5\,;\,+\infty[.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0,5\,;\,+\infty[$.
3. Justifier que la fonction G définie sur $[0,5\,;\,+\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x\ln(x)$ est une primitive de f sur $[0,5\,;\,+\infty[$.
4. On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$
   - **a)** Montrer que la valeur exacte de I peut s'écrire sous la forme $a + b\ln(2)$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.
   - **b)** Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de I puis donner une interprétation de ce résultat.